

1 Résolution directe avec différents schémas

Pour cette comparaison des différents schéma d'intégration pour la résolution directe du problème de dynamique, nous avons choisi d'implémenter 3 schémas d'intégration : le schéma implicite d'Euler à un pas, le schéma explicite des différences centrées et le schéma de Newmark plus général (en effet le schéma des différences centrées est un schéma de Newmark).

1.1 Le schéma implicite d'Euler

Nous avons choisi d'implémenter le schéma implicite d'Euler à un pas or l'équation de la dynamique est $\underline{M}\ddot{\underline{X}} + \underline{K}\underline{X} = \underline{F}(t)$ donc pour utiliser un schéma à un pas ce système doit être modifier. Pour cela, on introduit un vecteur \underline{Q} tel que :

$$\underline{Q} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{X} \\ \underline{\dot{X}} \end{array} \right\}$$

Ce qui conduit au système suivant, du premier ordre par rapport à \underline{Q} :

$$\left(\begin{array}{cc} \underline{Id} & 0 \\ 0 & \underline{M} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} \underline{\dot{X}} \\ \underline{\ddot{X}} \end{array} \right\} + \left(\begin{array}{cc} 0 & -\underline{Id} \\ \underline{K} & 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} \underline{X} \\ \underline{\dot{X}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \underline{F}(t) \end{array} \right\}$$

On écrit ensuite le schéma implicite d'euler de la façon suivante :

$$\underline{\dot{Q}}_{n+1} = \frac{\underline{Q}_{n+1} - \underline{Q}_n}{\Delta t}$$

On peut donc obtenir l'expression de \underline{Q}_{n+1} en fonction de \underline{Q}_n :

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{M}} \cdot \underline{\dot{Q}}_{n+1} + \underline{\tilde{K}} \cdot \underline{Q}_{n+1} &= \underline{\tilde{F}} \\ \Rightarrow \underline{Q}_{n+1} &= \left(\underline{\tilde{M}} + \Delta t \underline{\tilde{K}} \right)^{-1} \cdot \left(\Delta t \underline{\tilde{F}} + \underline{Q}_n \right) \end{aligned}$$

Grâce à cette expression, il est possible de résoudre l'équation de la dynamique. Ce schéma est particulièrement intéressant car il est inconditionnellement stable.

Résultats :

Les résultats de la Figure 1 ont été obtenu pour le schéma implicite d'euler pour $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ avec une poutre de longueur $L = 500 \text{ m}$ (afin de pouvoir observer les réflexions) avec 160 éléments dans la longueur. L'effort $F = 10000 \text{ N}$ est appliqué entre $t=0.2\text{s}$ et $t=0.4\text{s}$, sur une durée de calcul de 2s.

Les réflexions de l'onde au niveau des extrémités de la poutre sont bien visibles sur la Figure 1. Il est également possible de voir que l'amplitude des réflexions diminue au cours du temps. Cette constatation est confirmée par la Figure 2 qui représente l'énergie totale du système en fonction du temps (Energie cinétique + énergie de déformation). Cette énergie diminue au cours du temps, alors que l'on s'attend à ce que cette énergie soit constante pour $t > 0.4\text{s}$ car notre système n'est pas un système dissipatif, en effet nous avons négligé l'amortissement dans l'équation de la dynamique. Cette diminution de l'énergie totale du système est un problème bien connue du schéma d'Euler implicite. Pour diminuer ces effet de dissipation du schéma numérique, il faut diminuer Δt . La Figure 2 permet d'illustrer cela, en effet le graphique de droite provient du calcul avec $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ présente une atténuation de l'énergie plus importante que le graphique de droite provenant du calcul avec $\Delta t = 0.005 \text{ s}$. Mais la diminution de Δt va entraîner une augmentation du temps de calcul. La Figure 3 permet de voir que l'augmentation du temps de calcul croît beaucoup plus vite que l'erreur relative sur la valeur finale de l'énergie totale ne diminue. Ce qui veut donc dire que pour avoir une atténuation faible il va falloir avoir un Δt vraiment très petit et donc un temps de calcul trop important. On voit donc apparaître ici une des limites du schéma implicite d'Euler à un pas.

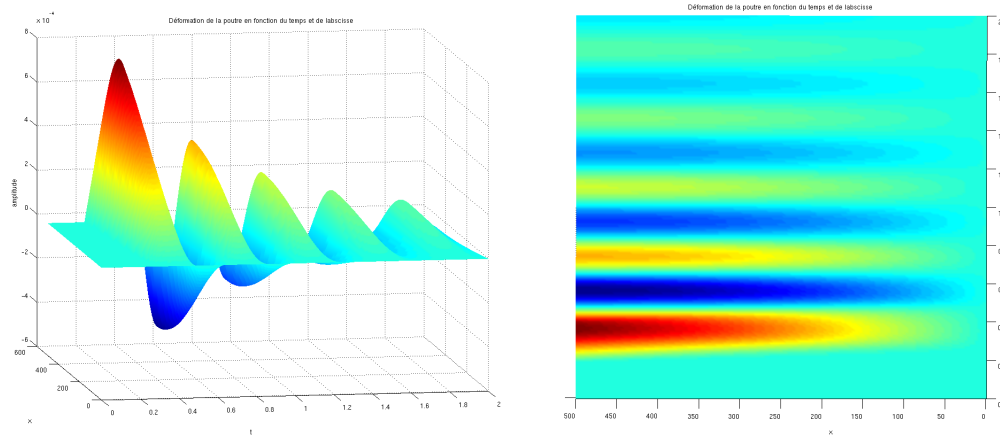


FIG. 1 – Déformation de la poutre en fonction du temps et de l'espace

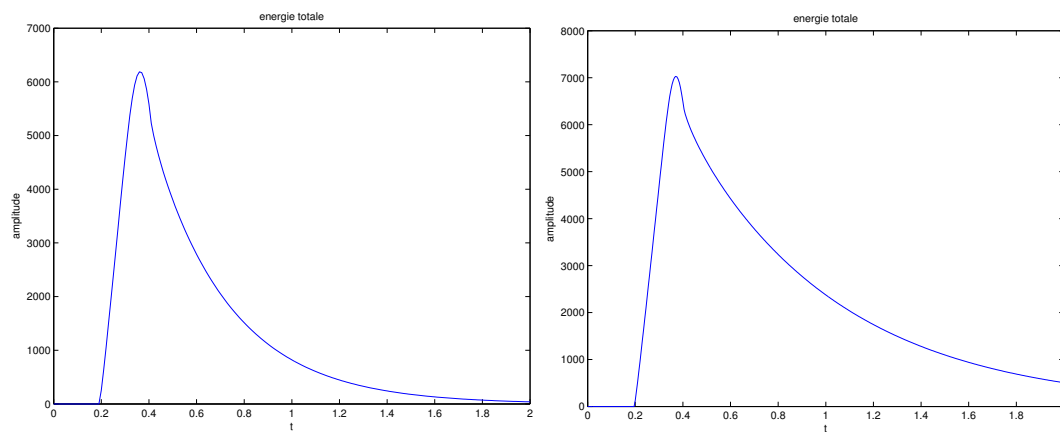


FIG. 2 – Evolution de l'énergie totale du système en fonction du temps (à gauche pour $\Delta t = 0.01$ s et à droite pour $\Delta t = 0.005$ s)

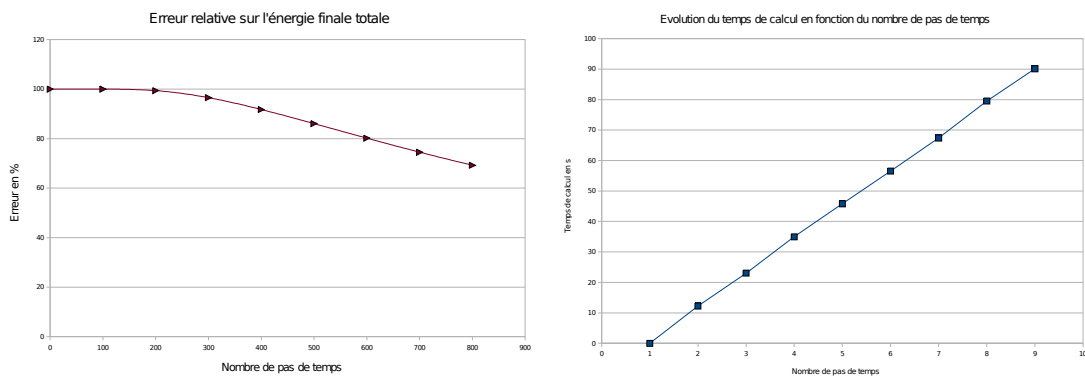


FIG. 3 – Evolution du temps de calcul (à gauche) et de l'erreur relative sur la valeur de l'énergie totale finale (à droite) en fonction du nombre de pas de temps

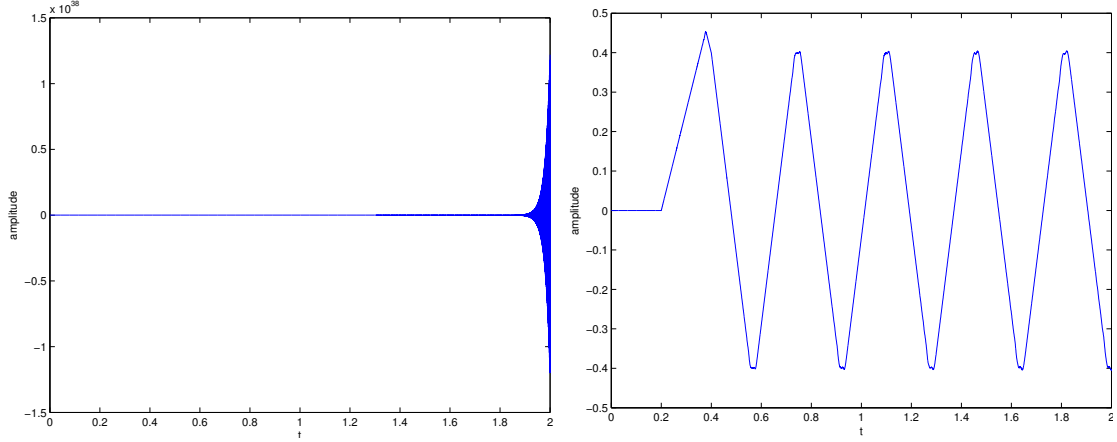


FIG. 4 – Déplacement de l'extrémité de la poutre en fonction du temps pour un calcul avec 6214 pas de temps à gauche et 6215 à droite

1.2 Schéma explicite des différences centrées

Le principe de ce schéma est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t}(x_{n+1} - x_n) \\ \ddot{x}_n = \frac{1}{\Delta t}(\dot{x}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{x}_{n-\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

Ce schéma est conditionnellement stable. En effet ce schéma est un schéma de Newmark avec $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = 0$, qui ne vérifie donc pas la condition de stabilité inconditionnelle qui est $2\beta - \gamma \geq 0$. La condition de stabilité conditionnelle pour le schéma des différences centrées est :

$$\Delta t \leq \Delta t_{crit} = \min_j \frac{2}{w_j}$$

A l'aide de ce qui a été précédemment fait pour obtenir la base modale, il est possible de déterminer le Δt_{crit} et ainsi choisir une valeur de Δt qui assure la convergence du calcul. Il est important de noter que dans le cadre de cette étude la détermination de Δt_{crit} est assez facile et peu coûteuse, mais cela n'est pas le cas dans la majeure partie des problèmes.

$$\Delta t_{crit} = \frac{2}{\sqrt{3.8617 * 10^7}} \approx 3.21 * 10^{-4} \text{ s}$$

Dans notre cas, la durée de calcul est de 2s, il nous faut donc au moins 6215 pas de calcul pour s'assurer la convergence du schéma. La Figure 4 permet de vérifier ce résultat sur notre programme, les deux figures représentent le déplacement de l'extrémité de la poutre en fonction du temps, sur la figure de gauche le calcul diverge alors que sur la figure de droite avec un pas de temps en plus le calcul converge. A la fin de cette partie, une comparaison entre ce schéma et un schéma de Newmark optimisé va être réalisée.

1.3 Schéma de Newmark à un pas

Le principe de ce schéma est le suivant avec $0 \leq \gamma \leq 1$ et $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} \dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \Delta t((1-\gamma)\ddot{x}_n + \gamma\ddot{x}_{n+1}) \\ x_{n+1} = x_n + \Delta t\dot{x}_n + \frac{\Delta t^2}{2}((1-2\beta)\ddot{x}_n + 2\beta\ddot{x}_{n+1}) \end{cases}$$

Cette définition génère en fait une famille de schémas, chaque schéma étant défini par une valeur de γ et de β . Dans cette famille, il y a des schémas inconditionnellement stable et des schémas

conditionnellement stable. Les schéma conditionnellement stable vérifie la relation $2\beta - \gamma \geq 0$ déjà rencontrée précédemment. Ensuite dans chaque famille, pour réaliser le choix de γ et de β , il faut se donner un critère d'optimisation du schéma numérique. Le choix que nous avons fait est basé sur ce qui est fait dans le livre de Marc Bonnet et Attilio Frangi “*Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*”. Le critère mis en place porte sur l'analyse du résidu du système où l'on a injecté le schéma de newmark et où $\{U_{n+1}\}$ et $\{U_n\}$ proviennent d'une fonction vectorielle $\{U(t)\}$ vérifiant le système différentiel en temps continu. Le but est que l'analyse de la cohérence à l'ordre 3 en Δt ne dépende pas du temps. Cela conduit à $\beta = \frac{1}{6}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$. Mais ces valeurs conduisent à un schéma conditionnellement stable, il est donc possible de prendre $\beta = \frac{1}{4}$ qui donnera la meilleure précision avec une stabilité inconditionnelle.

Il est intéressant de comparer le Δt_{crit} du schéma de newmark avec $\beta = \frac{1}{6}$ et $\gamma = \frac{1}{2}$ à celui des différences centrées. Pour le schéma de Newmark, on a :

$$\Delta t_{crit} = \min_j \frac{1}{w_j} \frac{2}{\sqrt{2\gamma - 4\beta}} = 3.21 * 10^{-4} * \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}}} \approx 5.56 * 10^{-4} \text{ s}$$

Le Δt_{crit} du schéma de newmark optimisé et donc 1.7 fois plus grand que celui des différences centrées, ce qui permet donc d'utiliser un pas de temps plus grand pour les calculs et donc de diminuer les temps de calculs.