Introduction aux signaux et systèmes
Cours 4

Systèmes linéaires ouverts de dimension n

Alessio Franci, Guillaume Drion, Julien Brandoit, Julien Vanderheyden

Université de Liège

February 23, 2026

Résumé des systèmes fermés de dimension n

Linéarisation des systèmes fermés

- Étant donné un système dynamique fermé non linéaire $\dot{\underline{x}} = F(\underline{x})$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, sa linéarisation au voisinage d'un équilibre $\underline{x}^*$ est

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}\,, \quad A = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\underline{x}^*)\right)$$

  c'est-à-dire que la matrice d'état est le Jacobien du système évalué en cet équilibre.

- Les linéarisations du même système en deux équilibres différents sont généralement différentes. Exemple :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \sin(x_1) - x_2 \end{pmatrix}$$

  aux équilibres $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} \pi \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Solution des systèmes linéaires fermés : théorie

- On peut toujours écrire $A = S + N$, où S est semi-simple (diagonalisable sur $\mathbb{C}$) et N est nilpotente d'ordre s.
- Alors la solution $\underline{x}(t)$ de $\underline{\dot{x}} = A\underline{x}$ est

$$\underline{x}(t) = e^{St} e^{Nt} \underline{x}(0)$$

  où :

  - les éléments de e^{St} s'expriment en termes d'exponentielles, sinus et cosinus ;
  - les éléments de e^{Nt} sont des polynômes de degré maximal s.

A. Franci - G. Drion - J. Brandoit - J. Vanderheyden

Solution des systèmes linéaires fermés : pratique

Après un changement de coordonnées $\underline{y} = B\underline{x}$, on transforme A en sa forme de Jordan :

$$Q = BAB^{-1} = \operatorname{diag}(Q_1, \ldots, Q_k)$$

et

$$e^{Qt} = \operatorname{diag}\left(e^{Q_1 t}, \ldots, e^{Q_k t}\right),$$

où :

- $e^{Q_i t} = e^{\lambda_i t}$ si λ_i est un autovaleur réel ;
- $e^{Q_i t} = e^{a_i t} \begin{pmatrix} \cos(b_i t) & -\sin(b_i t) \\ \sin(b_i t) & \cos(b_i t) \end{pmatrix}$ si $a_i + jb_i$ est un autovaleur complexe ;
- ou bien. . . (voir la prochaine diapositive).

A. Franci - G. Drion - J. Brandoit - J. Vanderheyden

Solution des systèmes linéaires fermés : pratique

- $$e^{Q_i t} = \underbrace{e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ t & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} & \dots & t & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Bloc de Jordan – autovaleur réelle } \lambda_i}$$

- $$e^{Q_i t} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{C_i t} & & & \\ t e^{C_i t} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} e^{C_i t} & \dots & t e^{C_i t} & e^{C_i t} \end{pmatrix}, \qquad e^{C_i t} = e^{a_i t} \begin{pmatrix} \cos(b_i t) & -\sin(b_i t) \\ \sin(b_i t) & \cos(b_i t) \end{pmatrix}}_{\text{Bloc de Jordan – autovaleur complexe } a_i + j b_i}$$

Implication pour la stabilité

Stabilité d'un équilibre à partir de la linéarisation

- Si toutes les valeur propres ont une partie réelle négative $\Rightarrow$ l'équilibre est asymptotiquement stable.
  Exemple :
$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

- Si certaines valeur propres ont une partie réelle positive $\Rightarrow$ l'équilibre est instable.
  Exemple :
$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

Stabilité d'un équilibre à partir de la linéarisation

- Si toutes les valeur propres ont une partie réelle non positive et les valeur propres de partie réelle nulle ne sont pas associées à un bloc de Jordan $\Rightarrow$ équilibre stable mais non asymptotiquement stable.
  Exemple :
  $$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

- Si les valeur propres de partie réelle nulle sont associées à un bloc de Jordan $\Rightarrow$ équilibre instable, avec croissance polynomiale possible dans les modes neutres.
  Exemple :
  $$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}$$

n-dimensional open linear systems

n-systèmes ouverts et leur linéarisation

Considérons maintenant des systèmes non linéaires avec entrées et sorties :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= f(\underline{x}, \underline{u}), \qquad && \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{u} \in \mathbb{R}^m, \\ \underline{y} &= g(\underline{x}, \underline{u}), \qquad && \underline{y} \in \mathbb{R}^l. \end{aligned} \tag{$\dagger$}$$

- Pour une entrée constante $\underline{u} = \underline{u}^*$, un équilibre $\underline{x}^*$ du système ($\dagger$) vérifie

$$f(\underline{x}^*, \underline{u}^*) = \underline{0}.$$

- La linéarisation du système ($\dagger$) en $(\underline{x}^*, \underline{u}^*)$ est :

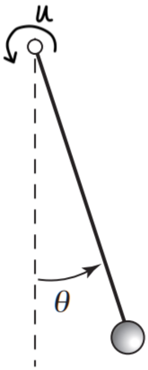
$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u}, \qquad && \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{u} \in \mathbb{R}^m, \\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u}, \qquad && \underline{y} \in \mathbb{R}^l, \end{aligned}$$

  où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right), \quad B = \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right), \quad C = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right), \quad D = \left(\frac{\partial g_i}{\partial u_j}\right)$$

  sont évaluées en $(\underline{x}^*, \underline{u}^*)$.

Un exemple



- Considérons l'équation du pendule soumis à un couple appliqué au pivot :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) - x_2 + u \end{pmatrix}, \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}.$$

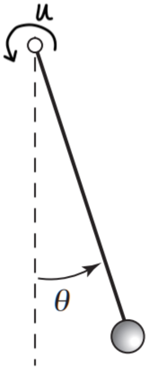
- On suppose que la sortie mesurée est $\sin(\theta)$, par exemple à l'aide d'un capteur Hall.

- Le système entrée–sortie s'écrit donc :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) - x_2 + u \end{pmatrix},$$

$$y = \sin(x_1).$$

Un exemple



- Pour $u = u^* = 0$, le système possède deux équilibres :

$$\underline{x}_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \underline{x}_2^* = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Linéarisation en $\underline{x}_1^*$:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$
$$y = x_1.$$

- Linéarisation en $\underline{x}_2^*$:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$
$$y = -x_1.$$

Systèmes ouverts linéaires comme opérateurs entrée–sortie

Solution d'un système ouvert linéaire

Considérons le système linéaire :

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}.$$

Theorem

La solution est donnée par :

$$\underline{x}(t) = e^{At}\,\underline{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau.$$

Esquisse de preuve. En dérivant l'expression et en utilisant $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$:

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = Ae^{At}\underline{x}(0) + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}B\underline{u}(\tau)d\tau + B\underline{u}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t). \quad \square$$

Réponse entrée–sortie d'un système ouvert

- Considérons maintenant :

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + B\underline{u},$$
$$\underline{y} = C\underline{x} + D\underline{u}.$$

- La sortie vaut :

$$\underline{y}(t) = Ce^{At}\underline{x}(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau + D\,\underline{u}(t).$$

- Pour conditions initiales fixées, le système définit un opérateur :

$$\underline{u}(\cdot) \mapsto \underline{y}(\cdot).$$

Propriétés des systèmes ouverts linéaires

Linéarité et invariance temporelle (LTI)

- **Linéarité.** Si $\underline{x}_1(t), \underline{y}_1(t)$ sont la trajectoire d'état et la sortie pour

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_1, \quad \underline{u}(t) = \underline{u}_1(t),$$

et $\underline{x}_2(t), \underline{y}_2(t)$ celles correspondant à

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_2, \quad \underline{u}(t) = \underline{u}_2(t),$$

alors, par linéarité des opérations matricielles et de l'intégrale :

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_1(t) + \underline{x}_2(t), \qquad \underline{y}(t) = \underline{y}_1(t) + \underline{y}_2(t)$$

est la réponse associée à

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_1 + \underline{x}_2, \qquad \underline{u}(t) = \underline{u}_1(t) + \underline{u}_2(t).$$

Linéarité et invariance temporelle (LTI)

- **Invariance temporelle.** Si $\underline{x}(t), \underline{y}(t)$ sont les réponses pour $\underline{x}(0)$ et l'entrée $\underline{u}(t)$, alors $\underline{x}(t+T), \underline{y}(t+T)$ sont les réponses pour :

$$\underline{x}(0) = \underline{x}(T), \qquad \underline{u}(t) = \underline{u}(t+T).$$

- Un système satisfaisant ces deux propriétés est appelé **système linéaire invariant dans le temps (LTI)**.

Invariance par changement de coordonnées

- Soit un changement de coordonnées $\underline{z} = T\underline{x}$, avec T inversible. Dans le nouveau système de coordonnées :

$$\dot{\underline{z}} = TAT^{-1}\,\underline{z} + TB\,\underline{u},$$

$$\underline{y} = CT^{-1}\underline{z} + D\underline{u}.$$

- L'opérateur entrée–sortie correspondant est :

$$\underline{y}(t) = CT^{-1}e^{TAT^{-1}t}\,\underline{z}(0) + \int_0^t CT^{-1}e^{TAT^{-1}(t-\tau)}TB\,\underline{u}(\tau)\,d\tau + D\underline{u}(t).$$

Invariance par changement de coordonnées

- Comme $e^{TAT^{-1}t} = Te^{At}T^{-1}$ et $T^{-1}\underline{z}(0) = \underline{x}(0)$, on obtient

$$\underline{y}(t) = Ce^{At}\underline{x}(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\,\underline{u}(\tau)\,d\tau + D\underline{u}(t).$$

- Donc : **le comportement entrée–sortie est invariant par changement de coordonnées internes**.

Réponse en régime permanent

Soit $\underline{x}(0) = 0$, et une entrée **échelon unitaire** :

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

La sortie vaut alors :

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau + Du(t) = C\int_0^t e^{A(t-\tau)} B\, d\tau + D \\ &= C\int_0^t e^{A\sigma}\, B\, d\sigma + D = C\left(A^{-1}e^{A\sigma}B\right)\Big|_{\sigma=0}^{\sigma=t} + D = CA^{-1}e^{At}B - CA^{-1}B + D. \end{aligned}$$

On peut réécrire :

$$y(t) = \underbrace{CA^{-1}e^{At}B}_{\text{transitoire}} + \underbrace{D - CA^{-1}B}_{\text{régime permanent}}, \qquad t > 0.$$

SISO systems, their impulse response, and convolution operators

Systèmes à une entrée et une sortie (SISO)

Dans la suite du cours, nous nous concentrerons sur les systèmes LTI :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{u}, \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\ \underline{u} \in \mathbb{R}^m, \\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u}, \quad \underline{y} \in \mathbb{R}^l, \end{aligned}$$

avec un seul signal d'entrée et un seul signal de sortie, c'est-à-dire :

$$m = l = 1, \qquad u(t) \in \mathbb{R}, \quad y(t) \in \mathbb{R}.$$

La fonction impulsionnelle

- On définit la fonction impulsionnelle approchée :

$$p_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \leq t < \varepsilon, \\ 0, & t \geq \varepsilon. \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} p_\varepsilon(t) = \delta(t).$$

- Comme dans la définition de l'intégrale de Riemann, si $0 < \varepsilon \ll 1$ et $T = N\varepsilon$, alors pour $0 \leq t \leq T$:

$$u(t) \approx \sum_{k=0}^{N} p_\varepsilon(t - k\varepsilon)\, u(k\varepsilon)\, \varepsilon.$$

- Lorsque $\varepsilon \to 0$ et $T \to \infty$, on obtient :

$$u(t) = \int_0^\infty \delta(t - \tau)\, u(\tau)\, d\tau.$$

Réponse impulsionnelle (1)

- Par linéarité :

$$y(t) = Ce^{At}\underline{x}(0) + \sum_{k=0}^{N} u(k\varepsilon) \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\, p_\varepsilon(\tau - k\varepsilon)\, \varepsilon\, d\tau + Du(t).$$

- On introduit la réponse au *pulse* :

$$h_\varepsilon(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\, p_\varepsilon(\tau)\, \varepsilon\, d\tau,$$

  c'est la sortie du système pour $\underline{x}(0) = 0$ et une impulsion courte $u(t) = p_\varepsilon(t)$.

- Lorsque $\varepsilon \to 0$, la réponse impulsionnelle devient :

$$h(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\, \delta(\tau)\, d\tau = Ce^{At}B.$$

Réponse impulsionnelle (2)

- Par invariance temporelle :

$$\int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\, p_\varepsilon(\tau - k\varepsilon)\, \varepsilon\, d\tau = h_\varepsilon(t - k\varepsilon).$$

- On peut donc réécrire :

$$y(t) = Ce^{At}\underline{x}(0) + \sum_{k=0}^{N} h_\varepsilon(t - k\varepsilon)\, u(k\varepsilon) + Du(t).$$

- Dans la limite $\varepsilon \to 0$, $T = N\varepsilon \to \infty$, on obtient :

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}\underline{x}(0)}_{\text{transitoire}} + \underbrace{\int_0^\infty h(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau + Du(t)}_{\text{régime permanent (si } u \text{ est stationnaire)}}.$$

Réponse impulsionnelle et opérateurs de convolution

- La réponse impulsionnelle $h(t)$, combinée à D, caractérise entièrement le comportement entrée–sortie du système LTI.
- La sortie s'écrit :

$$y(t) = (h \star u)(t) + Du(t),$$

  où l'opération de convolution causale est définie par

$$(f \star g)(t) = \int_0^\infty f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

- La convolution $\star$ est :

$$f \star g = g \star f \quad \text{(commutative)}, \qquad f \star (g+h) = f \star g + f \star h \quad \text{(distributive)},$$

$$f \star (g \star h) = (f \star g) \star h \quad \text{(associative)},$$

  ce qui a des implications majeures en analyse de systèmes.

Causalité et opérateurs de convolution causaux

- Dans la définition :

$$h(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\,\delta(\tau)\,d\tau = Ce^{At}B,$$

on suppose que le système est causal, c'est-à-dire :

$$h(t) \equiv 0 \quad \text{pour } t < 0.$$

- Sous cette hypothèse :

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau + Du(t) = (h \star u)(t) + Du(t).$$

- Un système causal ne peut pas dépendre de valeurs futures de l'entrée.