TP2 : Systèmes non-linéaires (1D)

1 Concept

1.1 Introduction aux systèmes non-linéaires

Les équations différentielles permettent de décrire la dynamique des systèmes [1]. Par exemple, un système masse-ressort amorti peut être décrit selon l'équation :

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0.$$

En première année, le cours d'analyse a fourni des outils pour résoudre ce type d'équations, afin d'aboutir à une expression de $x(t)$.

Lorsque l'équation fait intervenir des non-linéarités, il devient cependant de plus en plus compliqué de résoudre analytiquement.

Par exemple, $\dot{x} = \sin(x)$ a pour solution (en notant x_0 la valeur de x en $t = 0$) :

$$t = \ln\left|\frac{\csc(x_0) + \cot(x_0)}{\csc(x) + \cot(x)}\right|.$$

Comment interpréter ce résultat ? Si $x_0 = \pi/4$, que vaut $x(t)$ pour $t \to \infty$?

L'expression analytique de la solution ne permet pas de répondre directement à ces questions. On souhaiterait donc avoir un outil plus *qualitatif* afin de comprendre la dynamique du système sans résoudre l'équation différentielle entièrement. Dit autrement, on souhaiterait pouvoir *décrire* le système par son *fonctionnement global*, ses propriétés et les sorties qu'il produit à certaines entrées, et ce en s'affranchissant le plus possible de la complexité analytique du problème.

On va donc représenter l'équation $\dot{x} = \sin(x)$ graphiquement. Il s'agit du *champ de vecteurs* qui associe un vecteur vitesse $\dot{x}$ à chaque point x. Pour ce faire, on dessine une flèche qui pointe vers la droite (resp. gauche) si le vecteur vitesse est positif (resp. négatif), *i.e.* si $\dot{x} > 0$ (resp. $\dot{x} < 0$) comme illustré à la Figure 1.

Les vecteurs vitesses indiquent la direction selon laquelle un fluide imaginaire s'écoulerait selon l'axe x, avec une vitesse variant en fonction de la position. Lorsque $\dot{x} = 0$, la vitesse est nulle, autrement dit le fluide est statique et ne bouge plus. Il s'agit donc d'un *point fixe*. Pour déterminer la *nature du point fixe*, il suffit de regarder vers où le flux/courant "converge" ou, au contraire, comment le flux/courant éloigne la particule de fluide d'un point fixe. Un point fixe vers lequel le flux/courant converge sera considéré comme stable, alors qu'un point fixe duquel le flux/courant s'éloigne sera considéré comme instable. Dans l'exemple, il y a donc deux types de points fixes ; un point noir représente un point fixe *stable* et un point ouvert représente un point fixe *instable*.

La Figure 1 permet d'étudier la dynamique du système et les différentes solutions de l'équation $\dot{x} = \sin(x)$. Par exemple pour $x_0 = \pi/4$, il suffit d'imaginer une particule de fluide en cette abscisse et de regarder comment cette particule est transportée par le flux/courant indiqué par les flèches du champ de vecteurs. Pour $t \to \infty$, la particule approche le point fixe π par la gauche.

1. Ce TP est basé sur les chapitres 1,2,5,6 de [STR].

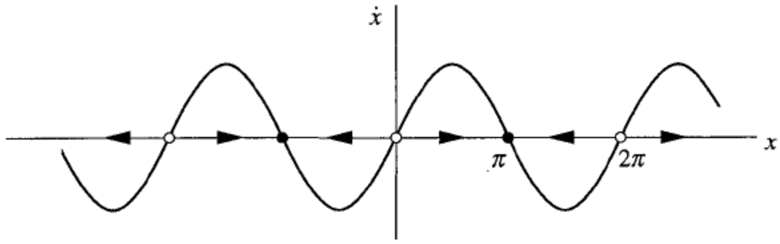


FIGURE 1 – Champ de vecteurs de $\dot{x} = \sin(x)$ [Figure 2.1.1-STR]

1.2 Linéarisation et étude de stabilité

La section précédente permet sur base d'une étude graphique de déterminer les points fixes et leur stabilité. Il est intéressant de développer une mesure plus *quantitative*. La stabilité d'un point fixe peut s'étudier en *linéarisant* le problème non-linéaire en ce point. Au lieu d'étudier le problème de manière globale à l'aide du champ de vecteurs, on étudie localement chaque point fixe à l'aide du système linéarisé autour de chacun de ces points.

Un exemple bien connu est celui du pendule : à l'aide de l'approximation des petits angles, on peut écrire $\sin(\theta) \sim \theta$, permettant de trouver une solution analytique du problème. Cependant, en appliquant cette méthode, on viole certaines lois de la physique et le domaine d'application de la solution est restreint et local. Il faut ainsi garder à l'esprit que la linéarisation ne permet pas d'étudier le problème non-linéaire dans son ensemble mais est un outil permettant d'étudier la stabilité du problème en ses points fixes avec certaines limitations.

La stabilité de la fonction $\dot{x} = f(x)$ en un point fixe x^* peut se calculer en faisant intervenir η, une petite perturbation depuis le point fixe telle que $x = x^* + \eta$. On souhaite déterminer si le système retourne à son point fixe lorsqu'il subit cette petite perturbation, autrement dit si elle grandit (le système est déstabilisé et s'éloigne de son point d'équilibre) ou diminue (malgré la perturbation, le système revient à son point d'équilibre). On applique donc le développement de Taylor à la fonction $f(x)$ en remplaçant x par la variable $x^* + \eta$, dans laquelle uniquement η varie. Le premier membre de l'équation différentielle devient :

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d(x^* + \eta)}{dt} = \dot{\eta},$$

et le deuxième membre devient :

$$f(x) = f(x^* + \eta) = f(x^*) + \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2).$$

Par définition, un point fixe x^* annule la fonction $f(x)$, *i.e.* $f(x^*) = 0$. Le développement de Taylor devient :

$$f(x^* + \eta) = \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2).$$

♡ L'équation différentielle $\dot{x} = f(x)$ décrivant la dynamique *globale* du système peut donc être étudiée *localement* autour du point fixe x^* sous la forme :

$$\dot{\eta} = \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2).$$

Il faut donc résoudre cette équation différentielle qui caractérise le système non-linéaire initial mais étudié localement autour du point fixe considéré x^*.

- Si $f'(x^*) = 0$, les termes d'ordre 2 ne sont pas négligeables et il faut continuer l'étude avec ces termes :

$$\dot{\eta} = \mathcal{O}(\eta^2).$$

- Si $f'(x^*) \neq 0$, on peut négliger les termes d'ordre supérieur :

$$\dot{\eta} = \eta f'(x^*)$$

Cette équation différentielle LINÉAIRE est facile à résoudre. On obtient :

$$\eta(t) = \eta(0)e^{f'(x^*)t}$$

avec $\eta(0)$ une constante et $f'(x^*)$ la dérivée première de $f(x)$ évaluée en x^*. Il s'agit donc de la *pente* de la fonction en x^*.

Ainsi, pour savoir si le point x^* est stable ou non, il suffit de regarder si la perturbation (η) diminue ou grandit. L'analyse de l'équation $\eta(t)$ donnée par une exponentielle indique directement la réponse :

- Si $f'(x^*) < 0$, $\eta(t)$ est caractérisée par une exponentielle décroissante. Dès lors, le point fixe est stable. La perturbation va bien diminuer au cours du temps.
- Si $f'(x^*) > 0$, $\eta(t)$ est caractérisée par une exponentielle croissante. Dès lors, le point fixe est instable. Inversement, la perturbation entraîne le système loin du point fixe.

Pour conclure, l'étude de la pente de la fonction évaluée au point fixe permet immédiatement de déduire la nature du point fixe.

Pour illustrer ce concept, on repart de l'exemple utilisé à la section précédente, $\dot{x} = \sin(x)$, où on extrait la fonction $f(x) = \sin(x)$. Les points fixes sont définis par :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0..$$

On obtient : $x^* = k\pi$ ou k est un entier. Pour déterminer la stabilité des points fixes, il suffit d'étudier le signe de la dérivée première $f'(x)$ évaluée aux points fixes x^*. Mathématiquement, cela donne :

$$f'(x^*) = \cos(k\pi) = \begin{cases} 1, & k \text{ pair} \\ -1, & k \text{ impair.} \end{cases}$$

Les points fixes associés à k pair (resp. impair) sont instables (resp. stables) car la dérivée première évaluée en ces points est positive (resp. négative).

Cela peut facilement se visualiser en dessinant la pente du graphe (dérivée première) aux points fixes (intersections avec l'axe des x). Si la pente est positive, le point fixe est instable et inversement si la pente est négative, le point fixe est stable. Sur la Figure 1, n'hésitez pas à dessiner la droite tangente au graphe au niveau des points fixes. Si la droite décroît (resp. croît), représentant une pente négative (resp. positive), le point fixe est stable (resp. instable).

Notions clés

Approche	**Globale | Graphique**	**Locale | Mathématique**
	tracer $\dot{x} = f(x)$	équation $\dot{x} = f(x)$
Points fixes	intersection(s) avec l'axe x	résoudre équation : $f(x) = 0 \rightarrow x^* = ...$
Stabilité	tracer le champ de vecteurs	étudier le signe de la dérivée première
	$\dot{x} > 0 :\rightarrow$	(i) calcul de $f'(x)$
	$\dot{x} < 0 :\leftarrow$	(ii) remplacer x par x^* : $f'(x^*)$
stable	$\rightarrow \bullet \leftarrow$	$f'(x^*) < 0$ (pente négative)
instable	$\leftarrow \circ \rightarrow$	$f'(x^*) > 0$ (pente positive)

2 Exercices résolus au tableau

Exercice 0

Pour l'équation suivante : $\dot{x} = 3x - 4x^2 + x^3$
Dessiner le champ de vecteurs et indiquer la stabilité de chaque point fixe.

Exercice 1 = Exemple 2.2.3 [STR]

Pour l'équation suivante : $\dot{x} = x - \cos(x)$
Dessiner le champ de vecteurs et indiquer la stabilité de chaque point fixe.

Schéma de résolution : analyse de système 1D non-linéaire décomposé en deux sous-fonctions | Stabilité 1D approche graphique
Lorsque l'expression est un peu plus compliquée à dessiner, on peut écrire l'équation $\dot{x} = f_1(x) - f_2(x)$. Les points fixes s'obtiennent alors en calculant $f_1(x) - f_2(x) = 0$, autrement dit en déterminant les intersections des deux fonctions. La dérivée/ La vitesse $\dot{x}$ sera positive si $f_1(x)$ est supérieure à $f_2(x)$. Graphiquement, cela signifie que $f_1(x)$ est "au-dessus" de $f_2(x)$.

3 Exercices à faire

Exercice 2 = Exemple 2.2.1 [STR]

Le système est décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x} = x^2 - 1$$

1- Dessiner $\dot{x}$ en fonction de x.
2- Calculer les points fixes.
3- Dessiner le champ de vecteurs.
4- Identifier la stabilité des différents points fixes graphiquement.

Schéma de résolution : analyse de système non linéaire 1D

1- Ne pas hésiter à réaliser une étude de fonction de $x^2 - 1$. Calcul des zéros, croissance, courbure pour facilement dessiner la fonction.

2- Points fixes

- définition : $\dot{x} = 0$
- résoudre : ...

3- Stabilité graphique (étude globale) :

- définition :

$$\dot{x} > 0 : \text{champ de vecteur } \rightarrow$$

$$\dot{x} < 0 : \text{champ de vecteur } \leftarrow$$

4- Stabilité mathématique (étude locale) :

- calcul de la dérivée : $f'(x)$
- remplacer x dans $f'(x)$ par l'expression des différents points fixes x_i^* : $f'(x_i^*)$
- donner la stabilité en fonction du signe de la dérivée $f'(x_i^*)$:

$$\begin{array}{lll} f'(x_i^*) & > 0 & \text{point fixe instable} \\ f'(x_i^*) & < 0 & \text{point fixe stable} \end{array}$$

Exercice 3 = Paragraphe 2.3 Croissance de la population [p.21-STR]

La croissance de la population d'organismes peut être simplement modélisée par l'équation suivante :

$$\dot{N} = rN(1 - \frac{N}{K}),$$

où $N(t)$ est la population au temps t et r est le taux de croissance de la population. Le modèle tient compte d'un certain facteur K appelé "carrying capacity" qui correspond à une croissance négative (*i.e.* lorsque le taux de décès est supérieur au taux de natalité). ($K > 0$ et $r > 0$)
Énoncé :
1- Dessiner approximativement $\dot{N}$ en fonction de N (et/ou utiliser Matlab/Python/etc.) - Remarque : la population ne peut pas être négative.
2- Calculer mathématiquement les points fixes.
3- Déterminer graphiquement la stabilité du(des) point(s) fixe(s).
4- Déterminer mathématiquement la stabilité de chacun.

Schéma de résolution : analyse de système non-linéaire 1D avec des paramètres fixes
N'hésitez pas à noter l'équation gouvernant la dynamique du système et différencier les signaux et les constantes.

1- ...

2- Points fixes

- déf : $\dot{N} = 0$
- résoudre : ...

3- Stabilité graphique (étude globale) :

- déf :

$$\dot{N} > 0 \rightarrow$$

$$\dot{N} < 0 \leftarrow$$

4- Stabilité mathématique (étude locale) :

- calcul de la dérivée : $f'(N)$
- remplacer N dans $f'(N)$ par l'expression des différents points fixes $f'(N_i^*)$
- donner la stabilité en fonction du signe de $f'(N_i^*)$:

$$\begin{array}{lll} f'(N_i^*) & > 0 & \text{point fixe instable} \\ f'(N_i^*) & < 0 & \text{point fixe stable} \end{array}$$

Exercice 4 = Exemple 3.1.2 [STR]

Le système est décrit par l'équation suivante :

$$\dot{x} = r - x - e^{-x}.$$

Étudier la dynamique du système pour les différents valeurs possibles de l'entrée r (*i.e.* dessiner $\dot{x}$ en fonction de x dans les différentes configurations possibles gouvernées par r et donner la stabilité des points fixes s'ils existent).

Schéma de résolution : analyse de système non-linéaire 1D et paramétrique

1- Déterminer les points fixes graphiquement pour différentes configurations dictées par r. Indice : s'inspirer de l'Exercice TP1 | n*1 [STR]

2- Dessiner le champ de vecteurs

3- Étude de stabilité (graphique uniquement)

4 Pour s'exercer

Exercice 5 = Exercice 2.3.2 [p.39-STR] "Autocatalysis"
La dynamique du système est gouvernée par l'équation suivante :

$$\dot{x} = k_1 a x - k_{-1} x^2$$

k_1 et k_{-1} sont des constantes positives. Énoncé :

1- Déterminer les points fixes graphiquement et analytiquement

2- Dessiner le champ de vecteurs

3- Déterminer la stabilité des points fixes

en discutant les différentes valeurs possibles de l'entrée a (avec $a \geq 0$).

TP2

Exercice 0

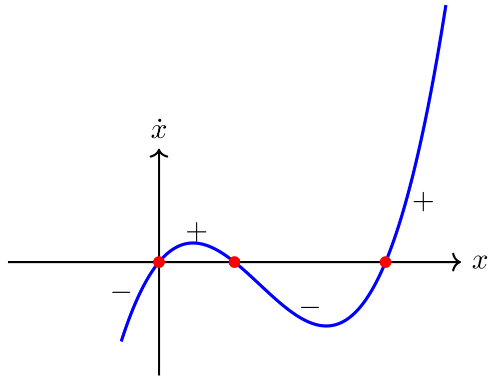
Étape 1 : Factorisation
Factorisons $f(x) = 3x - 4x^2 + x^3$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 4x^2 + 3x \\ &= x(x^2 - 4x + 3) \\ &= x(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

Étape 2 : Points fixes
Les points fixes sont obtenus en résolvant $\dot{x} = 0$:

$$x(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x^* \in \{0, 1, 3\}$$

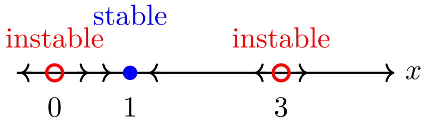
Étape 3 : Tracé qualitatif de $\dot{x} = f(x)$
On trace (qualitativement) la cubique passant par les trois points fixes :



Étape 4 : Analyse du signe de $\dot{x} = x(x-1)(x-3)$

- $x < 0$: $\dot{x} < 0$ (flèches vers la gauche)
- $0 < x < 1$: $\dot{x} > 0$ (flèches vers la droite)
- $1 < x < 3$: $\dot{x} < 0$ (flèches vers la gauche)
- $x > 3$: $\dot{x} > 0$ (flèches vers la droite)

Étape 5 : Champ de vecteurs et stabilité



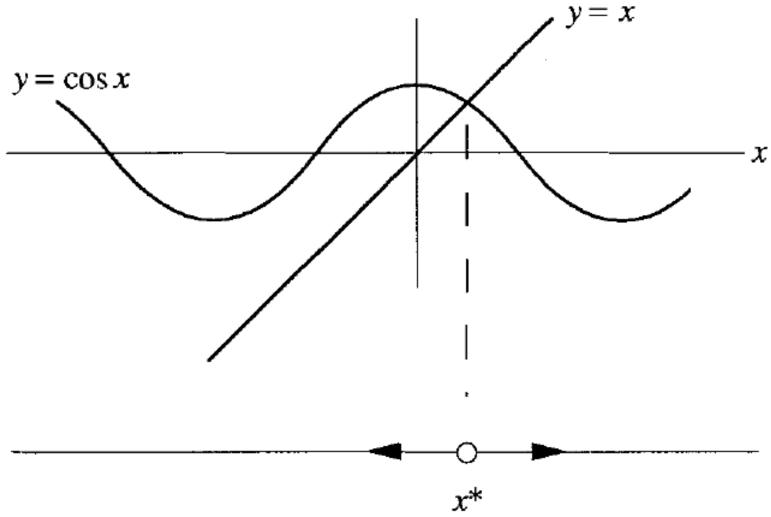
Conclusion :
En observant graphiquement le champ de vecteurs :

- $x^* = 0$: **instable** (les trajectoires s'éloignent)
- $x^* = 1$: **stable** (les trajectoires convergent)
- $x^* = 3$: **instable** (les trajectoires s'éloignent)

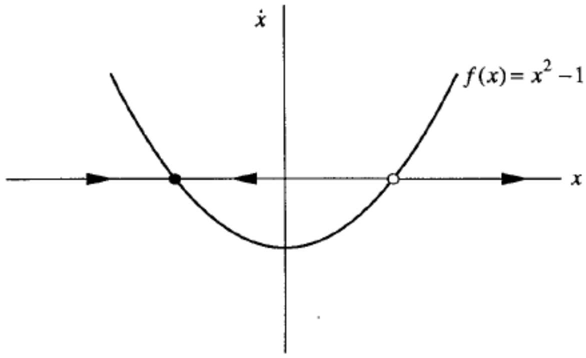
Vérification analytique : $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$

- $f'(0) = 3 > 0 \Rightarrow$ instable
- $f'(1) = -2 < 0 \Rightarrow$ stable
- $f'(3) = 6 > 0 \Rightarrow$ instable

Exercice 1 = Exemple 2.2.3 [STR]



Exercice 2 = Exemple 2.2.1 [STR]



Point(s) fixe(s) ?
- Graphiquement : intersection de $f(x)$ avec axe des $x \Rightarrow$ 2 points fixes
- Mathématiquement : résoudre $\dot{x} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Stabilité ? Selon le champ de vecteurs et/ou calcul de la pente, on a $x = -1$ stable et $x = +1$ instable

Exercice 3 = Paragraphe 2.3 [STR]
Les points fixes sont donnés par

$$\dot{N} = 0 \iff rN(1 - \frac{N}{K}) = 0 \iff N_1^* = 0, N_2^* = K.$$

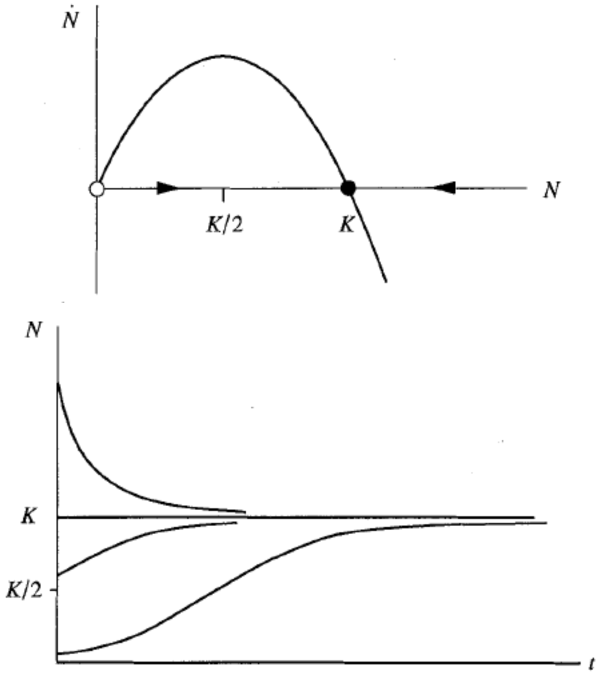
Leur stabilité s'évalue analytiquement en considérant $f(N) = rN(1 - \frac{N}{K})$ et donc

$$f'(N_1^*) = r > 0 \rightarrow \text{instable},$$

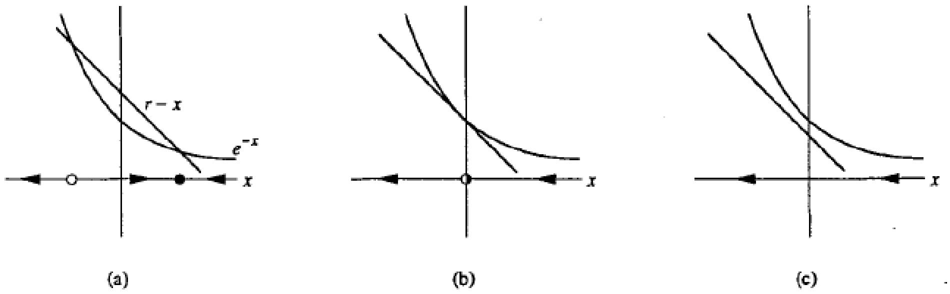
et

$$f'(N_2^*) = -r < 0 \rightarrow \text{stable}.$$

Graphiquement, on a :



Exercice 4 = Exemple 3.1.2 [STR]
(a) : $r > 1$, 2 PF (celui de gauche instable et celui de droite stable) ;
(b) : $r = 1$, 1 PF en $x = 0$, si $x(0) > 0$, alors $x(t)$ converge et stationne en $x = 0$ sinon $(x(0) < 0)$ $x(t)$ diverge à $-\infty$;
(c) : $r < 1$, pas de PF, $\dot{x}$ toujours < 0 donc x décroît indéfiniment.



Exercice 5 = Exercice 2.3.2 [STR]
$x_1^* = 0$, instable ; $x_2^* = k_1 a/k_{-1}$ stable ; si $a = 0$, $x_1^* = x_2^* = 0$.