

## 1 Concept

### 1.1 Introduction aux systèmes non-linéaires à deux dimensions

On peut également étudier des systèmes dynamiques décrits par plusieurs variables. La forme générale pour un système (fermé) à deux dimensions est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

#### Exemple 1

Pour aborder ce genre de systèmes d'équations différentielles, on démarre de l'exemple classique d'un système masse-ressort (voir Figure 1) défini par l'équation différentielle :

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

où  $m$  est la masse,  $k$  est la constante de raideur et  $x$  est le déplacement de cette masse. Même si cette équation est facile à résoudre analytiquement, elle va servir d'illustration pour comprendre l'étude de systèmes plus complexes et non-linéaires par la suite.

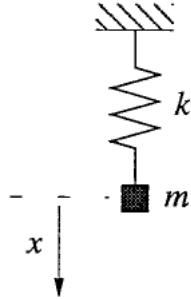


FIGURE 1 – Système masse-ressort [Figure 5.1.1-STR]

On peut décomposer cette équation différentielle d'ordre deux en deux équations différentielles d'ordre 1 en faisant intervenir la vitesse  $v$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{k}{m}x. \end{cases}$$

Pour alléger les notations, le ratio  $k/m$  sera noté  $\omega^2$ .

Ce système de deux équations assigne un vecteur  $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\omega^2 x)$  à chaque point  $(x, v)$  et, par conséquent, représente un *champ de vecteurs* dans le plan  $(x, v)$ . Ce plan s'appelle le *plan de phase*.

On va donc essayer de reproduire le même type d'étude graphique que celle faite pour un système à 1D mais avec deux variables. Les points fixes  $(x^*, v^*)$  s'obtiennent lorsque simultanément

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{v} = 0. \end{cases}$$

Intuitivement, la masse ayant une vitesse et une accélération nulle, elle est donc au repos.

Pour dessiner le champ de vecteurs, par analogie au système à 1D, il faudrait dessiner une flèche représentant  $\dot{x}$  qui pointe vers la droite (resp. gauche) lorsque cette dérivée est positive (resp. négative), mais également une flèche représentant  $\dot{v}$  qui pointe vers le haut (resp. le bas) lorsque cette dérivée est positive (resp. négative). Il faudrait ainsi évaluer les paires  $(\dot{x}, \dot{v})$  en chaque point du plan  $(x, v)$ , et dessiner un vecteur horizontal (resp. vertical) représentant  $\dot{x}$  (resp.  $\dot{v}$ ) dont la longueur est obtenue par la résolution numérique des équations donnant  $(\dot{x}, \dot{v})$  en fonction de  $(x, v)$  (et ce en chaque point  $(x, v)$ ).

Cependant, remplir le plan de phase de tous ces vecteurs est très chronophage et rendrait la lecture du graphique illisible. On dessinera donc uniquement la résultante des deux vecteurs pour certains points du plan.

Dans l'exemple du système masse-ressort, lorsque  $v = 0$  (càd, dans le plan de phase, sur l'axe- $x$ ),  $(\dot{x}, \dot{v}) = (0, -\omega^2 x)$ , le vecteur est donc uniquement vertical et de longueur  $-\omega^2 x$ . Plus  $x$  augmente, plus la longueur augmente. Le signe "−" signifie que le vecteur pointera vers le bas pour des  $x$  positifs et vers le haut pour des  $x$  négatifs. De même, lorsque  $x = 0$  (càd sur l'axe- $y$ ),  $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, 0)$ . Pour le reste du plan de phase, les composantes des vecteurs sont données par  $(v, -\omega^2 x)$  spécifié au point considéré. Le champ de vecteurs est illustré Figure 2. On peut déduire l'entièreté du champ de vecteurs comme illustré Figure 3.

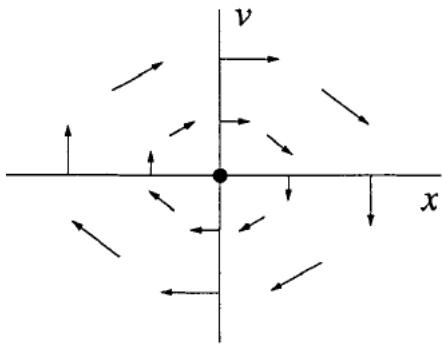


FIGURE 2 – Champ de vecteurs dessiné en quelques points [Figure 5.1.2-STR]

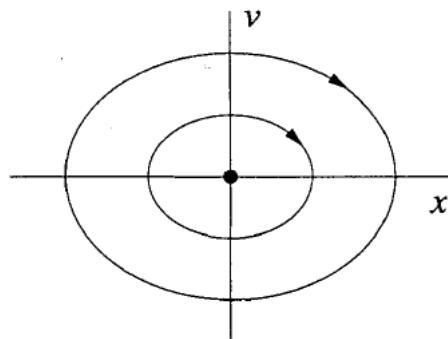


FIGURE 3 – Plan de phase [Figure 5.1.3-STR]

Le système masse-ressort est composé d'équations différentielles linéaires. Cependant, la même méthode peut être utilisée pour étudier un système d'équations différentielles non-linéaires.

## Exemple 2

Considérons le système décrit par les équations suivantes [Exemple 6.1.1,p.147-STR] :

$$\begin{cases} \dot{x} = x + e^{-y} \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

On peut dessiner les courbes  $\dot{x} = 0$  et  $\dot{y} = 0$ . Il s'agit donc de tracer  $f_1(x, y) = x + e^{-y} = 0$  et  $f_2(x, y) = -y = 0$  dans le plan  $(x, y)$ . Ces courbes s'appellent *nullclines*  $\heartsuit$ . Lorsque les nullclines se croisent, on a simultanément  $\dot{x} = 0$  et  $\dot{y} = 0$ , ce qui, *graphiquement*, donne la position des points fixes. *Mathématiquement*, les points fixes s'obtiennent en résolvant simultanément  $\dot{x} = 0$  et  $\dot{y} = 0$ . Dans l'exemple considéré, le seul point fixe  $(x^*, y^*)$  est égal à  $(-1, 0)$ .

Sur la nullcline- $x$ , définie par  $\dot{x} = 0$ , on peut facilement tracer le champ de vecteurs. En effet, la flèche sera uniquement verticale (le flux horizontal est bien nul par définition de la nullcline- $x$ ). Son orientation et sa longueur seront déterminées pour différentes valeurs de  $x$  et  $y$ . De manière analogue, sur la nullcline- $y$ , définie par  $\dot{y} = 0$ , on peut facilement tracer le champ de vecteurs car la flèche

sera uniquement horizontale (le flux vertical est bien nul). La construction du champ de vecteurs est illustrée Figure 4.

Ensuite, on dessine le champ de vecteurs pour différents points du plan en résolvant numériquement les équations différentielles en ces points. Grâce à cette représentation graphique, on comprend la dynamique du système dans son ensemble (voir le plan de phase Figure 5).

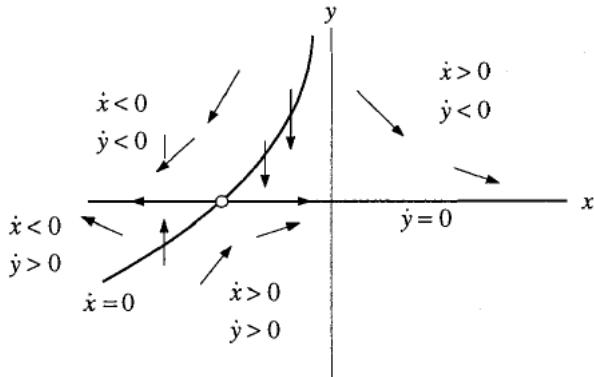


FIGURE 4 – Construction du champ de vecteurs [Figure 6.1.3-STR]

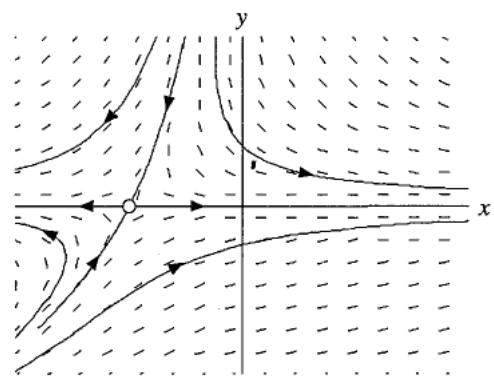


FIGURE 5 – Plan de phase complet [Figure 6.1.4-STR]

♡ *Comment calculer les flèches ?*

Les flèches indiquent la vitesse d'une "particule" en un point du plan. Plus la flèche est grande, plus la vitesse est grande. Ensuite, sa direction permet de savoir vers où la particule va bouger au temps suivant. Pour calculer la flèche pour le point de coordonnées  $(x_1, y_1)$ , il faut remplacer dans les équations du système les valeurs numériques connues (*i.e.* les coordonnées) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + e^{-y_1} \\ \dot{y}_1 = -y_1. \end{cases}$$

On obtient ainsi une valeur pour  $\dot{x}_1$  qui indique la vitesse horizontale en ce point. Si la valeur est positive, la particule se déplace vers la droite. Si la valeur est négative, la particule se déplace vers la gauche. La valeur de  $\dot{y}_1$  indique la vitesse verticale en ce point. Si la valeur est positive, la particule se déplace vers le haut. Si la valeur est négative, la particule se déplace vers le bas. Pour avoir la flèche résultante qui définit le vecteur vitesse, il suffit de calculer la résultante *i.e.* la somme des deux vecteurs. L'amplitude donne bien la vitesse de la particule et la direction indique bien vers où la particule se déplace.

## 1.2 Linéarisation d'un système à 2D autour des points fixes

La section précédente permet sur base d'une étude graphique de déterminer les points fixes et leur stabilité. On souhaiterait développer une mesure plus *quantitative* de la stabilité sans devoir passer à chaque fois par le dessin du champ de vecteurs.

♡ Par analogie au système à 1D, on va étendre la technique de **linéarisation** afin d'*approximer* le plan de phase et le champ de vecteurs *aux alentours des points fixes*.

Considérons le système à 2D<sup>1</sup> :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Les points fixes  $(x^*, y^*)$  sont définis en résolvant  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  simultanément. Dès lors

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = 0 \\ g(x^*, y^*) = 0. \end{cases}$$

1. On utilise  $(x_1, x_2)$  ou  $(x, y)$  pour insister sur le fait que le nom des variables n'est pas important.

On note  $u$  et  $v$  les petites perturbations selon les deux directions (horizontale et verticale), depuis le point fixe, telles que  $x = x^* + u$  et  $y = y^* + v$ . Pour étudier la stabilité en ce point, on veut déterminer ce qu'il se passe lorsque le système, se trouvant initialement au point fixe, est faiblement perturbé : va-t-il retourner en ce point ou va-t-il s'en éloigner ? Autrement dit, est-ce que la perturbation diminue (tend vers 0) ou grandit (explose) ?

On peut reproduire le développement appliqué au système à 1D mais cette fois-ci pour les deux variables  $u$  et  $v$  et les deux fonctions  $f$  et  $g$ .

La première équation différentielle du système (1) devient :

$$\dot{x} = \frac{d(x^* + u)}{dt} = \frac{dx^*}{dt} + \frac{du}{dt} = \dot{u} = f(x, y).$$

On développe le dernier terme :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x^* + u, y^* + v) && \text{substitution} \\ &= f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} + v \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} + \mathcal{O}(u^2, v^2, uv) && \text{Taylor} \\ &= u \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} + v \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} + \text{termes quadratiques.} && \text{définition du point fixe} \end{aligned}$$

De même pour la deuxième équation du système :

$$\dot{y} = y^* + \dot{v} = \dot{v} = g(x, y),$$

et

$$g(x, y) = u \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} + v \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} + \text{termes quadratiques.}$$

Remarque : pour un système à 1D, la petite perturbation était notée  $\eta$  et pour un système à 2D elle est notée  $u$  (resp.  $v$ ) pour la première (resp. deuxième) variable.

Le système de deux équations différentielles non-linéaires défini par (1) devient :

$$\begin{cases} \dot{u} = u \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} + v \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} + \text{termes quadratiques} \\ \dot{v} = u \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} + v \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} + \text{termes quadratiques.} \end{cases} \quad (2)$$

Et matriciellement, cela peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \text{termes quadratiques.}$$

On définit

$$A = \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{array} \right) \Big|_{(x^*, y^*)}$$

comme étant la *matrice jacobienne*  $\heartsuit$  évaluée au point fixe. Il s'agit de l'analogie pour le système 1D de la dérivée de  $f(x)$  évaluée au point fixe  $f'(x^*)$ . L'expression plus compliquée vient de l'apparition de la deuxième variable et de la deuxième fonction  $g$ . Le déterminant de cette matrice est appelé le *jacobien*.

En supposant que les termes quadratiques sont négligeables, le système de deux équations différentielles en  $x$  et  $y$  est linéarisé en  $u$  et  $v$  aux alentours de  $(x^*, y^*)$  et on se retrouve avec l'étude d'un système linéaire à 2D noté :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3)$$

où  $u$  et  $v$  représentent les deux variables *locales*  $\heartsuit$  (du système linéarisé) associées à  $x$  et  $y$ .

### 1.3 $\heartsuit$ Rappel Algèbre Linéaire : valeurs propres & vecteurs propres

Relire le chapitre "Algèbre linéaire : concepts à maîtriser".



- Révision des vecteurs propres, valeurs propres
- Résolution d'équations différentielles linéaires
  - premier ordre
  - deuxième ordre couplées/non couplées

### 1.4 Linéarisation et stabilité des points fixes

Pour un système à 1D, on a développé un outil plus quantitatif afin d'étudier facilement la stabilité du point fixe. Il suffit, en effet, d'analyser le signe de la dérivée première évaluée au point fixe.

Pour un système à 2D, la section 1.2 développe par analogie un outil similaire pour linéariser le système autour de son point fixe. On se retrouve ainsi avec l'étude de 4 dérivées premières, celles des fonctions  $f$  et  $g$  par rapport aux deux variables  $x$  et  $y$ , reprises sous la forme de la matrice jacobienne  $A$ .

#### Comment déterminer la stabilité des points fixes à l'aide de la matrice jacobienne ?

Reprenons l'équation (3), elle peut s'écrire sous la forme condensée :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\eta} = A\eta. \quad (4)$$

Cela ressemble à l'équation  $\dot{\eta} = f'(x^*)\eta$  pour les systèmes à 1D qui nous donnait  $\eta(t) = \eta(0)e^{f'(x^*)t}$  comme solution. La différence pour les systèmes à 2D, c'est que la matrice  $A$  couple les deux variables  $u$  et  $v$  ce qui rend l'étude de la stabilité légèrement moins immédiate que d'étudier le signe de la dérivée première ( $f'(x^*)$ ).

Pour résoudre cette équation différentielle linéaire couplée (4) et connaître  $u(t)$  et  $v(t)$ , on utilise les outils de découplage abordés dans le rappel (section 3) en faisant intervenir

$$A\nu = \lambda\nu$$

où  $\nu$  correspond aux vecteurs propres et  $\lambda$  correspond aux valeurs propres.

Dès lors, on obtient comme solution :

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \nu_1^{(1)} \\ \nu_2^{(1)} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} \nu_1^{(2)} \\ \nu_2^{(2)} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} \quad (5)$$

avec  $c_1$ ,  $c_2$  déterminés par les conditions initiales, les vecteurs propres

$$\nu^{(1)} = \begin{pmatrix} \nu_1^{(1)} \\ \nu_2^{(1)} \end{pmatrix}, \nu^{(2)} = \begin{pmatrix} \nu_1^{(2)} \\ \nu_2^{(2)} \end{pmatrix}$$

et leurs valeurs propres associées  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

Par analogie au système 1D ( $\eta(t) = \eta(0)e^{f'(x^*)t}$ ), on peut voir que les valeurs propres vont dicter la stabilité du système. En effet, comme pour les systèmes 1D, pour un facteur positif de l'exponentielle, le système va s'éloigner du point fixe s'il subit une petite perturbation et inversement pour un facteur négatif. Dans un système 1D, ce facteur était donné par la dérivée première de  $f$  évaluée au point fixe. Dans le cas des systèmes à 2D, on va se référer également aux facteurs des exponentielles pour déterminer la stabilité. Cependant, il ne s'agit plus de la dérivée première mais bien des valeurs propres de la matrice jacobienne (évaluée au point fixe).

Il y a différents cas possibles de stabilité :

- Les deux valeurs propres ont leur partie réelle positive :  $\Re\{\lambda_1\} > 0, \Re\{\lambda_2\} > 0$ ; le point fixe est instable.
- Les deux valeurs propres ont des parties réelles négatives :  $\Re\{\lambda_1\} < 0, \Re\{\lambda_2\} < 0$ ; le point fixe est stable.
- Une des deux valeurs propres a une partie réelle positive et l'autre a une partie réelle négative ; le point fixe est un "saddle node" (point de selle). Dans la direction associée à la valeur propre négative, il est attractif (la trajectoire converge vers le point, ce point paraît donc stable) et dans la direction associée à la valeur propre positive, il est répulsif (la trajectoire diverge du point, ce point paraît donc instable). Si l'on prend une perturbation de composantes quelconques, càd pas uniquement dirigée dans la direction stable (*stable manifold of the saddle*), elle ne tendra pas vers 0, ce qui rend le système instable en général.
- Les deux valeurs propres sont nulles ; le point fixe est dit marginalement stable.

### Que se passe-t-il si les valeurs propres sont complexes ?

La stabilité ne s'étudie que par la partie réelle des valeurs propres, tandis que la partie imaginaire de celles-ci indique un comportement oscillatoire.

En effet, si l'on est en présence de valeurs propres et vecteurs propres complexes, on a  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \lambda \in \mathbb{C}$  et  $\nu^{(1)} = \overline{\nu^{(2)}} = \nu \in \mathbb{C}^2$ , et la solution du système est donnée par

$$x(t) \propto c_1 e^{\Re(\lambda)t} ((\cos(\Im(\lambda)t)\Re(\nu) - \sin(\Im(\lambda)t)\Im(\nu)),$$

où l'on considère  $c_1$  réelle pour simplifier les notations.

Cette solution témoigne donc d'un comportement oscillatoire dont la fréquence est régie par la partie imaginaire des valeurs propres, et où la stabilité est elle régie par leur partie réelle.

Ces notions seront approfondies dans les prochains TPs. A ce stade, la partie réelle des valeurs propres indique la convergence/stabilité des points fixes et la présence d'une partie imaginaire des valeurs propres indique que la trajectoire/solution va converger vers le point en tournant dans le plan de phase. On appelle cela une *spirale* ou un *foyer*.

## Notions clés

### Algèbre Linéaire

- Résoudre une équation différentielle simple avec et sans entrée
- Comprendre l'utilisation des vecteurs propres et valeurs propres dans le découplage d'un système d'équations différentielles
- Découpler un système d'équations différentielles et résoudre entièrement le système
- Comprendre le lien entre valeurs propres et stabilité du système

### Notions à maîtriser et à savoir dessiner/obtenir

champ de vecteurs, plan de phase, points fixes, nullclines.

### Étude de système 2D

Approche	Globale   Graphique	Locale   Mathématique
	Plan de phase	$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$
	nullcline-x : $\dot{x} = 0 \rightarrow f(x, y) = 0$	
	nullcline-y : $\dot{y} = 0 \rightarrow g(x, y) = 0$	
Points fixes (PF)	intersection(s) des nullclines	résoudre : $\dot{x} = \dot{y} = 0 : (x^*, y^*) = \dots$
Stabilité	(i) calculer $\dot{x} = f(x, y)$ et $\dot{y} = g(x, y)$ $\dot{x} > 0 : \rightarrow   \dot{x} < 0 : \leftarrow$ $\dot{y} > 0 : \uparrow   \dot{y} < 0 : \downarrow$ (ii) tracer les résultantes	(i) calculer la matrice jacobienne $J$ (ii) évaluer $J$ en $(x^*, y^*)$ (iii) calculer les VaP (iv) étudier le signe des VaP

### Interprétation des signes des VaP

- Valeurs propres purement réelles
  - $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$  : point instable
  - $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$  : point stable
  - $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$  : point de selle
  - $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$  : point de selle
- Valeurs propres complexes

Il faut étudier le signe de la partie réelle des deux valeurs propres ( $\Re\{\lambda_1\}$ ? et  $\Re\{\lambda_2\}$ ?). La partie complexe indique la présence de spirale (spirale stable/spirale instable).
- Deux valeurs propres sont nulles et réelles, il s'agit d'un point marginalement stable.
- Deux valeurs propres purement complexes, il s'agit d'un centre (la trajectoire est alors une ellipse).

Pour mieux visualiser les différents cas de figure, vous pouvez visiter cette page (en anglais, crédits : UBC) qui reprend les "portraits de phase" des systèmes linéaires. Vous y verrez comment, graphiquement et de manière animée, les valeurs propres influent sur la dynamique d'un système 2D.

## 2 Exercices résolus au tableau

**Exercice 1** = Lapin versus Mouton [Section 6.4, p.155-STR]

Les populations des lapins et des moutons sont respectivement notées  $x(t)$  et  $y(t)$  (avec  $x, y \geq 0$ ). Leur dynamique est gouvernée par le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3 - x - 2y) \\ \dot{y} = y(2 - x - y). \end{cases}$$

Étudier l'évolution des deux populations sachant qu'elles sont liées et interpréter le résultat. Tracer la trajectoire en partant du point  $(x, y) = (1, 0.5)$ .

### Schéma de résolution : analyse d'un système non-linéaire 2D

- 1- Calculer les points fixes  $(x^*, y^*)$  :  
 $\dot{x} = 0$  et simultanément  $\dot{y} = 0$  :
- 2- Déterminer la matrice jacobienne
- 3- Évaluer la matrice jacobienne pour les différents points fixes et déterminer les valeurs propres
- 4- Déterminer la stabilité des différents points sur base des valeurs propres
- 5- Dessiner le champ de vecteurs. Pour cela, faites un tableau :



Point	$x_i$	$y_i$	$\dot{x}_i$	$\dot{y}_i$	vitesse
A	coord. en $x$	coord. en $y$	vitesse horizontale	vitesse verticale	résultante

Vous remplissez ce tableau des points que vous choisissez dans les différentes zones délimitées par les nullclines. Vous calculez numériquement les vitesses horizontale et verticale. Les signes de ces vitesses vous permettent de déterminer la direction de la vitesse résultante.

- 6- Pour tracer une trajectoire, il suffit de "relier" les flèches du champ de vecteurs entre elles. Cela permet de représenter le déplacement de la particule en commençant en un point du plan.!!! La trajectoire est toujours parallèle aux champs de vecteurs!!!

## 3 Exercices à faire

**Exercice 2**

Un système à deux variables est gouverné par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = 10x - 5xy \\ \dot{y} = 3y + xy - 3y^2 \end{cases}$$

- 1- Calculer les points fixes.
- 2- Calculer la stabilité des points fixes.
- 3- Dessiner le plan de phase, les nullclines et le champ de vecteurs.

**Exercice 3** = Exercice 6.7.1-STR

Un pendule amorti est gouverné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -bx_2 - \sin x_1 \end{cases}$$

où  $b$  est un paramètre,  $b \in \mathbb{R}_0^+$ .

- 1- Calculer les points fixes.
- 2- Déterminer la nature (classification + stabilité) des points fixes. Discuter en fonction du paramètre  $b$ .
- 3- Dessiner le plan de phase, les nullclines et le champ de vecteurs pour les différents cas qualitatifs. (Tracer la trajectoire à partir de  $(x_1, x_2) = (2, 1)$  de manière qualitative pour les 3 cas).

#### Exercice 4 = Exercice 6.3.6-STR

Un système à deux variables est gouverné par l'équation suivante :

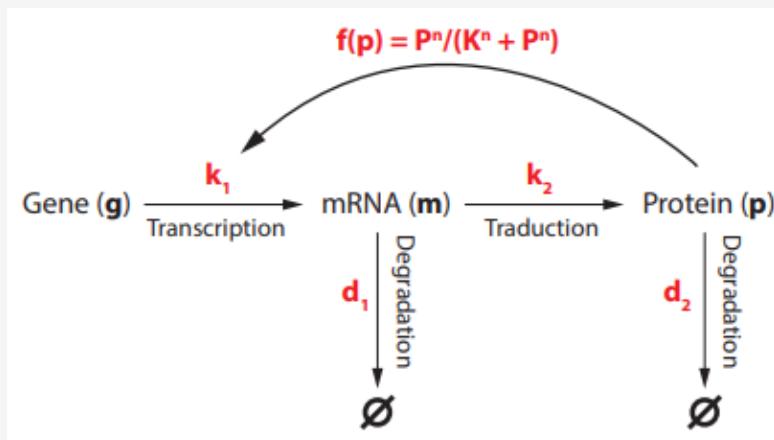
$$\begin{cases} \dot{x} = xy - 1 \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$$

- 1- Calculer les points fixes (valeurs réelles uniquement).
- 2- Calculer la stabilité des points fixes.
- 3- Dessiner le plan de phase, les nullclines et le champ de vecteurs.

## 4 Pour s'exercer

#### Exercice 5 = Janvier 2020 - Q1 (ii) → (vii)

La dynamique de la synthèse d'une protéine à partir de son gène peut être étudiée par modélisation mathématique d'un système entrée-sortie où l'entrée est la concentration en gène actif  $g$  et la sortie la concentration en protéine  $p$  (voir figure ci-dessous). Ce processus se déroule en 2 étapes. Le gène est d'abord transcrit en ARN messager (mRNA, de concentration  $m$ ) selon un taux de transcription  $k_1$ . Le mRNA est alors soit dégradé avec un taux de dégradation  $d_1$ , soit traduit en protéine avec un taux de traduction  $k_2$ . La protéine peut ensuite elle-même être dégradée/utilisée avec un taux de dégradation  $d_2$ .



Nous considérons par ailleurs le cas où la synthèse des protéines est régulée par un mécanisme appelé autoactivation : la protéine synthétisée stimule la transcription de son gène spécifique. Cela peut être modélisé par un taux de transcription qui dépend de la concentration en protéine  $p$  via une fonction

$f(p) = p^n/(K^n + p^n)$ , où  $K$  et  $n$  sont des paramètres régulant la dynamique de l'autoactivation. En utilisant la loi d'action des masses, le schéma proposé dans la figure ci-dessus peut être transcrit en un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\begin{aligned}\dot{m} &= gk_1 \frac{p^n}{K^n + p^n} - d_1 m \\ \dot{p} &= k_2 m - d_2 p\end{aligned}$$

où  $gk_1 \frac{p^n}{K^n + p^n}$  modélise la dynamique de la transcription avec autoactivation,  $d_1 m$  modélise la dégradation du mRNA,  $k_2 m$  modélise la dynamique de la traduction, et  $d_2 p$  modélise la dégradation de la protéine. Dans cet exercice, nous considérerons les valeurs suivantes pour les différents paramètres :  $k_1 = k_2 = d_1 = d_2 = n = 1, K = 0.5$ .

- (ii) Le système est-il linéaire ? Temps-invariant ?
- (iii) Tracez un plan de phase qualitatif du système comprenant les isoclines et identifiez le(s) point(s) d'équilibre du système graphiquement. Placez un vecteur associé au champ de vecteurs et de longueur qualitative dans les différents quadrants délimités par les isoclines. Pour faciliter la construction du plan de phase, utilisez  $g = 1$  et travaillez uniquement dans la région physiologique.
- (iv) Calculez analytiquement le(s) point(s) d'équilibre du système en fonction de  $g$ .
- (v) Déterminez analytiquement des critères de stabilité pour chaque point fixe en fonction de  $g$ .
- (vi) Identifiez le comportement du système global en fonction de ces critères (en terme d'évolution temporelle et de convergence de la quantité de protéines synthétisées pour différentes valeurs de  $g$ ).
- (vii) Prouvez analytiquement que la convergence vers le(s) point(s) d'équilibre stable(s) sera toujours monotone.

### Exercice 6 = Janvier 2021 - Q1

On considère le modèle dynamique suivant où  $\mu$  est un paramètre réel.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y \\ \dot{y} &= 1 - x^2.\end{aligned}$$

- (i) Le système d'équations est-il linéaire ? Si non, identifiez toutes les non-linéarités.
- (ii) Calculez le(s) point(s) fixe(s) ainsi que leur type (noeuds stable/instable, spirale stable/instable, point de selle, etc.)
- (iii) Esquissez le plan de phase dans la zone  $x \in [-3, 3], y \in [-3, 3]$  en traçant qualitativement les champs de vecteurs autour de chaque point fixe. Reliez-les champs de vecteurs ensemble par continuité.
- (iv) Comment le système évolue-t-il si on démarre au point  $(x_0, y_0) = (0, 3)$  ? Tracez qualitativement la trajectoire correspondante dans le plan de phase.
- (v) Quel est l'effet de la modification  $\dot{y} = 2(1 - x^2)$  sur la dynamique du système ? Justifiez graphiquement dans le plan de phase.

### Exercice 7 = Janvier 2022 - Q1

On considère le modèle dynamique suivant avec  $\mu$  comme paramètre réel :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^3 \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

- (i) Le système d'équations est-il linéaire ? Si non, identifiez toutes les non-linéarités.
- (ii) Calculez le(s) point(s) fixe(s). Discutez en fonction du paramètre  $\mu$  si nécessaire.
- (iii) Calculez la nature du(des) point(s) fixe(s) (noeud stable/instable, spirale stable/instable, point de selle, etc.). Discutez en fonction du paramètre  $\mu$  si nécessaire.
- (iv) Donnez l'équation des nullclines.
- (v) Dessinez le(s) plan(s) de phase complet de votre système. Tracez autant de plans de phase que de situations possibles lors de votre discussion paramétrique. Indiquez le(s) point(s) fixe(s), leur stabilité,

tracez les nullclines, dessinez le champ de vecteurs. Tracez suffisamment de vecteurs pour avoir une bonne idée de la dynamique de votre système ; au minimum un vecteur dans les différents quadrants délimités par les nullclines. Expliquez comment vous trouvez ces vecteurs et montrez vos calculs pour les obtenir.

(vi) Comment le système évolue-t-il si on démarre au point  $(x_0, y_0) = (0.5, 2)$  dans le plan de phase (ou les différents plans de phase en fonction du paramètre  $\mu$ ) ? Pour cela, tracez qualitativement la trajectoire correspondante dans le plan de phase.

(vii) Quel est l'effet de la modification  $\dot{y} = 2 - y$  sur la dynamique du système ? Expliquez en quelques phrases sans refaire l'étude complète du plan de phase.

(viii) Dessinez un graphique  $x^*$  (l'abscisse de votre(s) point(s) fixe(s)) en fonction de  $\mu$ . Indiquez la nature du(des) point(s) fixe(s) d'abscisse  $x^*$  dans les différentes régions obtenues lors de votre discussion paramétrique. Vous pouvez utiliser une légende claire et expliquez brièvement la construction de ce graphique.

(ix) En fonction du résultat de (iii) :

- Si vous avez obtenu un point fixe du type "noeud", comment faut-il modifier le système pour avoir un point fixe du type "spirale" ?
- Si vous avez obtenu un point fixe du type "spirale", comment faut-il modifier le système pour avoir un point fixe du type "noeud" ?

### **Exercice 8 = Aout 2021 - Q1**

On considère le modèle dynamique suivant où les deux variables  $x$  et  $y$  sont définies entre -6 et 6.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos y \\ \dot{y} &= x.\end{aligned}$$

- (i) Le système d'équations est-il linéaire ? Si non, identifiez toutes les non-linéarités.
- (ii) Calculez le(s) point(s) fixe(s) ainsi que leur type (noeuds stable/instable, spirale stable/instable, point de selle, etc.).
- (iii) Esquissez le plan de phase en traçant qualitativement les champs de vecteurs autour de chaque point fixe.
- (iv) Comment le système évolue-t-il si on démarre au point A  $(x_0, y_0) = (-1, 4)$  ? Tracez qualitativement la trajectoire correspondante dans le plan de phase. Tracez l'évolution temporelle de la variable  $x(t)$  et  $y(t)$  sur un même graphique. Il faut donc tracer deux trajectoires dans le plan de phase et dessiner deux graphiques temporels, un associé au point A et un associé au point B avec les tracés de  $x$  et  $y$  dans les deux graphiques.
- (v) Esquissez le bassin d'attraction d'un seul point fixe de votre choix. Pour cela, discutez des directions préférentielles et les vitesses associées à ces directions.
- (vi) Quel est l'effet de la modification  $\dot{y} = -x$  sur la dynamique du système ? Justifiez graphiquement dans le plan de phase.

## 5 Sources supplémentaires

- Phase portrait of a system of ODEs (Matlab) :  
<http://matlab.cheme.cmu.edu/2011/08/09/phase-portraits-of-a-system-of-odes/>
- Phase portrait of a system of ODEs (Python) :  
<https://kitchingroup.cheme.cmu.edu/blog/2013/02/21/Phase-portraits-of-a-system-of-ODEs/>
- Exemple supplémentaire (Matlab) :  
[http://educ.jmu.edu/~strawbem/Phase\\_how\\_to.pdf](http://educ.jmu.edu/~strawbem/Phase_how_to.pdf)
- The `phaseportrait` package (Python) :  
<https://pypi.org/project/phaseportrait/>