

Modélisation d'un écoulement sanguin – Julien Dautre

Problème

Le sang est composé à 45% de cellules baignant dans un fluide appelé plasma. Afin de modéliser proprement son écoulement il convient donc de mesurer l'impact que peut avoir la présence de nombreux petits obstacles à l'intérieur des vaisseaux sanguins. [1]

On va donc modéliser ici l'écoulement du plasma considéré comme un liquide incompressible de masse volumique $\rho = 1025 \text{ kg.m}^{-3}$ et de viscosité dynamique $\mu = 6.10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.s^{-1}$ à travers une artériole (petit vaisseau de diamètre $D = 0.02 \text{ mm}$) contenant une douzaine de cellules de diamètre $7 \mu\text{m}$ (il s'agit de globules rouges, celles les plus représentées dans le sang).

Modélisation

Les équations de Navier-Stokes permettent de décrire la dynamique d'un fluide. Dans notre cas, le nombre de Reynolds $Re = \frac{UD}{\nu} = \frac{4Q\rho}{\mu\pi D} = 2,0.10^{-5}$ est très petit. Cela signifie que les phénomènes de viscosité l'emportent sur ceux inertiels. De plus on se place en régime stationnaire. On obtient alors le système elliptique simplifié suivant :

$$\begin{cases} \mu \Delta \mathbf{u} = \nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation caractérise un fluide incompressible (de masse volumique constante). Le problème est plan ce qui explique l'absence du terme des forces volumiques (poids) dans la première équation.

Conditions aux limites

On impose un profil de vitesse parabolique en amont du vaisseau (forme d'un écoulement de Poiseuille) de la forme $\mathbf{u} = -U(e - y)(e + y)\mathbf{e}_x$. On impose $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur les bords du vaisseau et des cellules. On impose une pression nulle en aval du vaisseau $p = 0$ (condition de bord libre).

Placement des cellules

On place aléatoirement les cellules au sein du vaisseau suivant une loi uniforme selon x et selon y .

Résultats

Voici la résolution du problème donnée par l'exécution du code contenu dans le fichier : *simple.edp*.

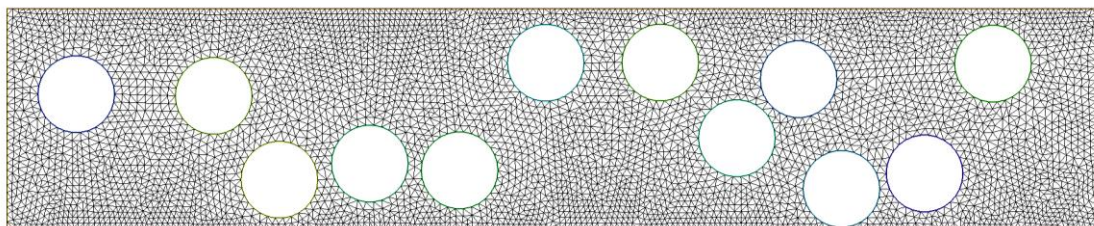


Fig. 1 – Maillage réalisé

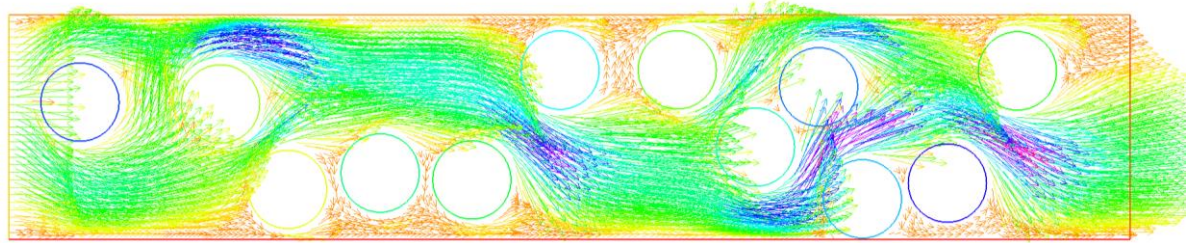


Fig. 2 – Champ de vitesse solution

Le fichier *final.edp* résout 100 problèmes de ce type avec des placements de cellules différents du fait de son caractère aléatoire. Pour chaque résolution, on note les valeurs du champ de vitesse en sortie du vaisseau et on les conserve. On effectue la moyenne des valeurs obtenues pour la composante horizontale de la vitesse et on la compare à celle du profil de vitesse en entrée. Le graphe suivant représente la déformation moyenne induite par la présence d'obstacles dans le vaisseau :

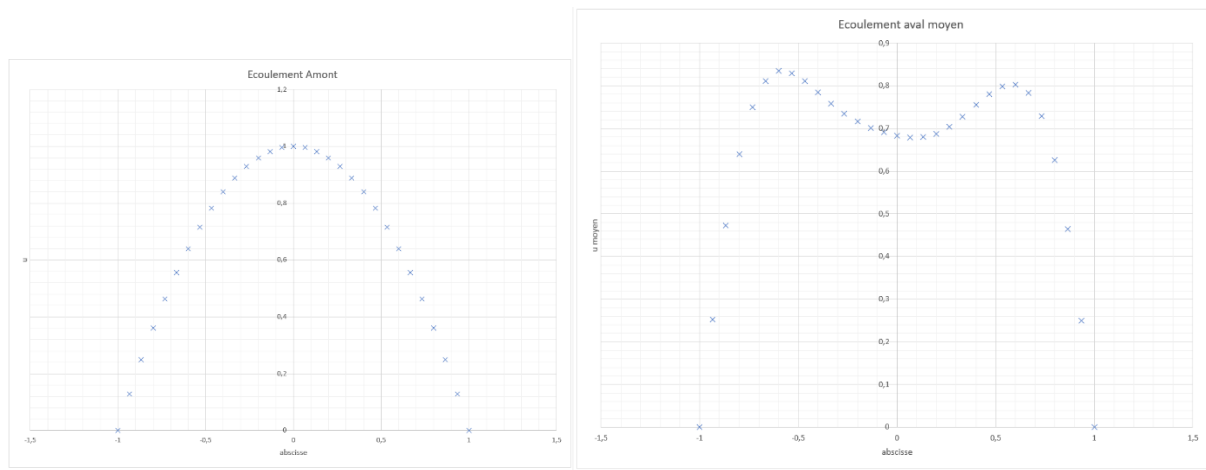


Fig. 3 - Ecoulement en amont et celui moyen en sorti (les grandeurs sont adimensionnées)

On obtient un profil de sortie plus écrasé contre les parois, avec un front très déformé. On retrouve un peu la forme d'un écoulement turbulent (ce qui n'était pas notre hypothèse de départ).

Conclusion

Le sang est très complexe à modéliser. Les hypothèses de fluide newtonien et incompressible faites ici ne sont pas rigoureusement vraies mais permettent de simplifier considérablement le problème tout en restant raisonnables.

On a pu mettre en avant un aspect de sa composition qui influe sur son écoulement dans les petits vaisseaux de l'organisme. Les résultats présentés ici permettront, couplés à d'autres modèles numériques, de décrire l'apparition d'AVC, d'anévrismes etc. ou même de modéliser la dispersion d'un médicament injecté dans le sang.

Sources

[1] Vincent Chabannes, Vers la simulation des écoulements sanguins Médecine humaine et pathologie. Université de Grenoble, 2013