

Chapitre 7

Optimisation par méthodes à région de confiance et modèles réduits POD

Sommaire

7.1	Introduction	181
7.2	Méthodes à région de confiance	182
7.2.1	Introduction	182
7.2.2	Optimisation de fonctions modèles quadratiques	182
7.2.3	Optimisation de fonctions modèles générales	187
7.3	Méthodes à région de confiance et modèles réduits POD	189
7.3.1	Généralités	189
7.3.2	Utilisation de fonctions approchées basées sur des modèles réduits POD	190
7.3.3	Résultats de convergence	192
7.4	Application : réduction de traînée d'un cylindre circulaire	193
7.4.1	Définitions des fonctions objectif et modèle	193
7.4.2	Résultats numériques	194
7.4.3	Observations	194
7.5	Conclusions	208

7.1 Introduction

Ce chapitre a pour objet d'améliorer la méthode adaptative présentée au chapitre 6. En effet, l'inconvénient de la méthode précédente est qu'il n'existe aucune preuve de convergence de la solution du problème d'optimisation réduit vers celle du modèle précis de départ, au mieux il est seulement possible de s'assurer que la solution du problème d'optimisation construit sur le modèle réduit converge effectivement vers la solution du modèle simplifié. Dans ce contexte, on verra que les méthodes à région de confiance utilisant des modèles réduits de dynamique basés sur la POD ont l'avantage de permettre la démonstration que sous des conditions peu contraignantes, la solution du problème d'optimisation posé à partir du modèle simplifié de dynamique converge vers la solution du problème d'optimisation directement posé à partir du modèle précis. Une description complète des méthodes à région de confiance peut être trouvée dans Conn *et al.* (2000) et dans Nocedal et Wright (1999). En 1997, Alexandrov *et al.* ont proposé un cadre général de procédure d'optimisation couplant réductions de modèle et méthodes à régions de confiance. Fahl (2000) et Arian *et al.* (2000) ont ensuite appliqué ce type de méthode aux modèles réduits développés par POD, en parvenant à contrôler avec succès un écoulement de cavité entraînée.

Après avoir introduit les méthodes à région de confiance dans un cadre général (§ 7.2), il sera montré de quelle manière on peut appliquer ces méthodes pour optimiser une fonction construite par POD (§ 7.3). Les résultats issus de la minimisation du coefficient de traînée moyen sur la configuration du cylindre circulaire seront enfin présentés (§ 7.4). Comme au chapitre précédent, les paramètres de contrôle sont l'amplitude A et la fréquence St de la vitesse tangentielle imposée au cylindre.

7.2 Méthodes à région de confiance

7.2.1 Introduction

Cette partie présente les méthodes à région de confiance dans le cadre général de la résolution du problème d'optimisation non-linéaire suivant :

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}).$$

La fonction objectif $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est supposée être suffisamment régulière.

Les méthodes d'optimisation les plus courantes utilisent en général le gradient de la fonction objectif par rapport aux variables d'optimisation, noté ∇f , afin de construire une direction de descente \mathbf{d} . Une recherche linéaire est ensuite effectuée le long de cette direction pour déterminer un pas α qui réduise la fonction objectif f , de telle sorte que¹ $f(\mathbf{x} + \alpha \mathbf{d}) < f(\mathbf{x})$.

Le principe des méthodes à région de confiance est de remplacer le problème d'optimisation initial par une suite de sous-problèmes d'optimisation, plus simples à résoudre. Dans chaque sous-problème, la fonction objectif f est remplacée par une fonction modèle m , à un itérateur courant \mathbf{x} . La région de confiance est définie comme la *région* à l'intérieur de laquelle la *confiance* est donnée à la fonction modèle quant à sa qualité à fournir une bonne approximation de la fonction objectif. Ainsi, une contrainte supplémentaire existe sur les pas α . Si la décroissance de la fonction f , évaluée entre le point courant \mathbf{x} et le point \mathbf{x}^* qui minimise la fonction modèle m , n'est pas jugée suffisante, le rayon de la région de confiance est diminué, et, en général, la direction de recherche est modifiée.

Une bonne détermination du rayon de la région de confiance est alors un point essentiel dans la performance de telles méthodes². Un rayon trop petit peut être à l'origine de calculs inutiles, et peut, de plus, faire converger la solution vers un point qui ne correspond pas au minimum de la fonction f à l'intérieur de la région de confiance. Si par contre, le rayon de la région de confiance est trop grand, le point qui minimise la fonction modèle peut être assez éloigné du point qui minimise la fonction objectif. Le rayon doit alors être réduit, et il est nécessaire d'effectuer une autre minimisation à l'intérieur de la nouvelle région de confiance. En pratique, la taille de la région de confiance est déterminée en se basant sur la performance de l'algorithme au cours des dernières itérations. Si le modèle est bon, c'est à dire si la fonction modèle est capable de décrire correctement le comportement de la fonction objectif, le rayon de la région de confiance peut être augmenté afin de déterminer des pas plus performants : l'étape est dans ce cas un succès. Dans le cas contraire, si la fonction modèle ne prédit pas convenablement le comportement de la fonction objectif, on dit que l'étape a échoué, et le rayon de la région de confiance est diminué : une autre étape de minimisation est alors mise en œuvre à l'intérieur de la nouvelle région de confiance.

Les méthodes à région de confiance classiques sont tout d'abord introduites (§ 7.2.2). Ces méthodes utilisent des fonctions modèles quadratiques. Ensuite, des algorithmes à région de confiance, pour lesquels la forme de la fonction modèle peut être quelconque, sont présentés (§ 7.2.3). Dans ces deux parties, des algorithmes modèles, ainsi que les principaux résultats de convergence sont décrits. L'essentiel de la présentation des méthodes à région de confiance est fidèle à Fahl (2000).

Le lecteur familier avec les méthodes à région de confiance, ou celui désireux d'éviter les développements mathématiques, pourra aller directement à la section 7.3 où les méthodes à région de confiance sont appliquées aux modèles réduits construits par POD.

7.2.2 Optimisation de fonctions modèles quadratiques

Les méthodes à régions de confiance, dites classiques, consistent à résoudre une suite de sous-problèmes d'optimisation de fonctions quadratiques, en lieu et place d'un problème d'optimisation d'une fonction objectif, plus complexe. La fonction objectif f est donc remplacée par une fonction modèle quadratique m , dans une certaine région autour d'un point \mathbf{x} donné. Les deux premiers termes intervenant dans la fonction quadratique

1. Cette condition est uniquement donnée à titre indicatif, et n'est pas utilisée dans la pratique. Pour déterminer le pas α , on lui préférera la condition d'Armijo, de Goldstein ou de Wolfe (Nocedal et Wright, 1999).

2. Nous avons vu précédemment que la représentativité de la fonction objectif modèle est fortement dépendante de la dimension de la région considérée dans l'espace des paramètres de contrôle (voir § 6.6.2).

peuvent s'identifier aux deux premiers termes de la série de Taylor de f autour de l'itéré courant \mathbf{x} . La fonction modèle est alors dite basée sur le gradient exact de la fonction objectif. Dans des situations pour lesquelles il est difficile d'évaluer le gradient de la fonction objectif, une approximation de ce dernier peut être utilisée. Dans ce qui suit, on notera couramment f_k et m_k les fonctions objectif et modèle à l'itéré \mathbf{x}_k .

Fonctions modèles utilisant le gradient exact de la fonction objectif

Lorsque le gradient de la fonction objectif est connu, ou peut facilement être évalué de manière exacte, la fonction modèle m_k autour du point courant $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$m_k^{quad}(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T H_k \mathbf{s}. \quad (7.1)$$

Le vecteur $\nabla f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ représente le gradient de la fonction f au point courant \mathbf{x}_k , et $H_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique représentant le hessien de f à l'itéré \mathbf{x}_k , ou une approximation de ce dernier³. Quand le hessien exact est utilisé, la fonction quadratique est construite en utilisant les trois premiers termes de la série de Taylor de f en \mathbf{x}_k . Dans ce cas, la méthode est appelée *méthode à région de confiance de Newton*. Par la suite, aucune indication ne sera donnée quant à l'éventuelle exactitude du hessien : on supposera uniquement que H_k est une matrice symétrique uniformément bornée à l'itération k .

Les régions de confiance ajoutent au problème d'optimisation initial une contrainte (7.2b) sur la longueur du pas (voir également chapitre 6). On cherche la solution de chaque sous-problème de la forme :

$$\min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n} m_k^{quad}(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T H_k \mathbf{s}, \quad (7.2a)$$

sous les contraintes :

$$\|\mathbf{s}\| \leq \Delta_k. \quad (7.2b)$$

$\Delta_k > 0$ est le rayon de la région de confiance. Dans cette étude, la norme euclidienne $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ est choisie. Le choix d'autres normes est tout à fait possible. L'utilisation de la norme euclidienne permet de prouver que la solution \mathbf{s}_k^* du problème (7.2) minimise la fonction m_k^{quad} à l'intérieur de la région de confiance définie autour du point courant \mathbf{x}_k . L'ajustement du rayon de confiance Δ_k , présent dans la contrainte (7.2b), permet de définir une région autour de l'itéré courant \mathbf{x}_k pour lequel le développement de Taylor (7.1) de la fonction f est supposé représenter suffisamment bien⁴ le comportement non-linéaire de f .

Description d'un sous-problème standard à région de confiance Pour un point \mathbf{x}_k et un rayon Δ_k donnés, on résout le sous-problème (7.2). La résolution de ce problème peut s'effectuer de manière exacte. Cependant, pour alléger les calculs numériques, elle s'effectue souvent de manière approchée. La méthode du point de Cauchy, présentée par l'algorithme 7, est alors utilisée. Néanmoins, il n'existe *a priori* aucune preuve que le nouveau point, $\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k$, construit à l'aide de la solution \mathbf{s}_k du sous-problème (7.2), soit acceptable pour le problème de départ. En effet, rien ne prouve que l'on ait $f(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k) < f(\mathbf{x}_k)$. Il est alors nécessaire d'évaluer la valeur de la fonction f au nouveau point $\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k$, et de la comparer à la valeur de la fonction f au point \mathbf{x}_k . Pour ce faire, on évalue la *réduction réelle*, $ared_k$:

$$ared_k(\mathbf{s}_k) = f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k). \quad (7.3)$$

Cette réduction est ensuite comparée à la *réduction prédictive* par la fonction modèle, $pred_k$:

$$pred_k(\mathbf{s}_k) = m_k^{quad}(\mathbf{x}_k) - m_k^{quad}(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k). \quad (7.4)$$

L'efficacité de la fonction modèle peut être déterminée par le rapport suivant :

$$\rho_k = \frac{ared_k(\mathbf{s}_k)}{pred_k(\mathbf{s}_k)}. \quad (7.5)$$

3. Différentes méthodes d'approximation du hessien basées sur la connaissance du gradient de la fonction f sont présentées en annexe C. On peut citer parmi les méthodes les plus connues les méthodes BFGS, DFP et SR1.

4. La notion "suffisamment bien" est laissée à l'appréciation de l'utilisateur. Cette notion pourra être évaluée mathématiquement par l'intermédiaire des constantes η_1 et η_2 à fixer dans un algorithme à région de confiance (voir algorithme 6 par exemple).

Ce rapport est alors utilisé comme critère d'actualisation du rayon de la région de confiance Δ_k . Sans entrer dans des détails qui seront présentés à l'algorithme 6, certains critères de choix peuvent être formulés. Si ρ_k est négatif, le pas est rejeté, le rayon de confiance est diminué, et une autre minimisation de la fonction modèle est effectuée à l'intérieur de la nouvelle région de confiance. Si ρ_k est positif, le pas est accepté et le rayon de confiance est actualisé selon les valeurs prises par ρ_k . Si ρ_k est proche de 1, les fonctions modèle et objectif sont en bon accord à l'itération k , et le rayon de la région de confiance est augmenté afin d'obtenir des pas plus performants. Si ρ_k est proche de 0, la fonction modèle ne représente pas correctement la fonction objectif, et le rayon de confiance est diminué. Si ρ_k se situe entre 0 et 1, sans être proche de ses extrémités, la fonction modèle est supposée être acceptable, et le rayon de confiance n'est pas modifié.

Algorithme 6 (Région de confiance pour des fonctions modèles quadratiques)

Choix de constantes η_1 , η_2 , γ_1 , γ_2 et γ_3 telles que

$$0 < \eta_1 < \eta_2 < 1, \text{ et } 0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1 \leq \gamma_3.$$

Choix d'un rayon de confiance Δ_0 et d'un itéré \mathbf{x}_0 . Calcul de $f(\mathbf{x}_0)$. Initialisation $k = 0$.

1. Construction de la fonction modèle quadratique, $m_k^{quad}(\mathbf{x}_k + \mathbf{s})$, conformément à la relation (7.1), et détermination d'une solution approchée \mathbf{s}_k du problème (7.2)

$$\min_{\|\mathbf{s}\| \leq \Delta_k} m_k^{quad}(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}).$$

2. Calcul de $f(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k)$, et évaluation du critère de performance

$$\rho_k = \frac{\text{ared}_k(\mathbf{s}_k)}{\text{pred}_k(\mathbf{s}_k)}.$$

3. Actualisation du rayon de confiance :

- (a) Si $\rho_k \geq \eta_2$:
l'étape est un succès et le pas est accepté. $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k$ et choix de $\Delta_k \in [\Delta_k, \gamma_3 \Delta_k]$.
- (b) Si $\eta_1 \leq \rho_k \leq \eta_2$:
l'étape est un succès et le pas est accepté. $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k$ et choix de $\Delta_k \in [\gamma_2 \Delta_k, \Delta_k]$.
- (c) Si $\rho_k < \eta_1$:
l'étape est un échec et le pas est rejeté. $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$ et choix de $\Delta_k \in [\gamma_1 \Delta_k, \gamma_2 \Delta_k]$.

4. Si un critère de convergence est vérifié, l'algorithme est arrêté. Sinon, on pose $k = k + 1$ et retour à l'étape 1.

On choisit habituellement $\eta_1 = 0,25$ et $\eta_2 = 0,75$ (critères de performance), et $\gamma_1 = 0,25$, $\gamma_2 = 0,75$ et $\gamma_3 = 2$ (critères d'actualisation).

L'évaluation de l'étape 1, et notamment la résolution du sous-problème (7.2), est un point délicat de l'algorithme précédent.

Selon la forme de la matrice H_k qui intervient dans la fonction modèle, m_k^{quad} , définie en (7.1), trois algorithmes différents peuvent être utilisés pour déterminer une solution approchée du problème (7.2) :

- si la matrice H_k est définie positive, la méthode de *Dogleg* peut être utilisée.
- Si H_k est indéfinie, la méthode de *minimisation du sous espace en deux dimensions* semble être la mieux adaptée. Cette méthode est basée sur l'estimé de la plus négative des valeurs propres de la matrice H_k .
- Enfin, si la matrice H_k est de taille importante, creuse, et correspond au hessien exact, $\nabla^2 f_k$, on choisira la méthode de *Steihaug*.

Le point central de ces algorithmes est de vérifier que la décroissance de la fonction m_k^{quad} est au moins égale à celle obtenue en appliquant la méthode du *point de Cauchy*⁵. Le point de Cauchy est défini comme le

5. Ces méthodes peuvent être comparées aux méthodes de recherches linéaires, dites inexactes, pour lesquelles on cherche un pas (non nécessairement optimal), le long d'une direction de descente. Ce pas permet de construire un nouveau point où l'on évalue la décroissance de la fonction. Cette décroissance doit être au moins égale à une certaine proportion de la décroissance prédictive par le modèle linéaire au même point.

point minimisant la fonction m_k^{quad} le long de la plus grande pente, $-\nabla f_k$, et devant satisfaire la contrainte imposée par le rayon de confiance. Une méthode de recherche d'une solution quasi-exacte du problème (7.2), due à Moré et Sorensen, peut également être utilisée. Le détail de ces méthodes peuvent être trouvées dans Nocedal et Wright (1999). On se contentera ici de présenter la méthode du point de Cauchy.

Point de Cauchy

De manière similaire aux méthodes de recherches linéaires, la détermination de pas optimaux n'est pas une condition nécessaire pour obtenir une convergence globale. Sous certaines conditions, une bonne approximation de ces pas peut être acceptable. Il suffit de déterminer une solution approchée, s_k , à l'intérieur de la région de confiance, qui produise une réduction suffisante de la fonction modèle. Cette réduction peut être obtenue par la méthode du point de Cauchy s_k^C . Cette dernière est décrite dans l'algorithme 7.

Algorithme 7 (Point de Cauchy)

Déterminer un vecteur s_k^S , solution du problème (7.2) linéarisé, soit

$$s_k^S = \arg \min_{s \in \mathbb{R}} (f_k + \nabla f_k^T s), \text{ sous les contraintes } \|s\| \leq \Delta_k. \quad (7.6)$$

Déterminer le scalaire $\lambda_k > 0$ minimisant $m_k(\lambda s_k^S)$, soit

$$\lambda_k = \arg \min_{\lambda > 0} m_k(\lambda s_k^S), \text{ sous les contraintes } \|\lambda s_k^S\| \leq \Delta_k. \quad (7.7)$$

Finalement, $s_k^C = \lambda_k s_k^S$.

Calcul pratique du point de Cauchy

La résolution du problème (7.6) donne aisément la solution suivante :

$$s_k^S = -\frac{\Delta_k}{\|\nabla f_k\|} \nabla f_k.$$

La détermination de λ_k dépend du signe de $\nabla f_k^T H_k \nabla f_k$:

- si $\nabla f_k^T H_k \nabla f_k \leq 0$, la fonction $m_k(\lambda_k s_k^S)$ décroît de façon monotone avec λ , et ce, même si $\nabla f_k \neq 0$. Le pas λ_k est donc la plus grande valeur qui satisfasse le rayon de confiance, et donc $\lambda_k = 1$.
- si $\nabla f_k^T H_k \nabla f_k > 0$, la fonction $m_k(\lambda_k s_k^S)$ est convexe et quadratique en λ . Le pas λ_k est alors soit la valeur qui minimise la fonction quadratique $\frac{\|\nabla f_k\|^3}{\Delta_k \nabla f_k^T H_k \nabla f_k}$, soit la valeur limite 1 déterminée précédemment.

En résumé, on a :

$$s_k^C = -\lambda_k \frac{\Delta_k}{\|\nabla f_k\|} \nabla f_k,$$

avec

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 & \text{si } \nabla f_k^T H_k \nabla f_k \leq 0, \\ \min \left\{ \frac{\|\nabla f_k\|^3}{\Delta_k \nabla f_k^T H_k \nabla f_k}, 1 \right\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Condition de décroissance suffisante

Comme nous venons de le voir, le point de Cauchy s_k^C permet de valider ou non une solution approchée du sous-problème à région de confiance. La convergence des méthodes à région de confiance est prouvée lorsque le pas s_k produit une décroissance suffisante de la fonction modèle m_k . A chaque itération, la réduction de la fonction modèle en un point doit au moins être égale à un multiple de la décroissance obtenue au point de Cauchy. La condition de la fraction de décroissance de Cauchy (*Fraction of Cauchy Decrease*, fcd) doit alors être vérifiée. Elle s'écrit de la manière suivante :

$$m_k^{quad}(\mathbf{x}_k) - m_k^{quad}(\mathbf{x}_k + s_k) \geq c_{fcd} [m_k^{quad}(\mathbf{x}_k) - m_k^{quad}(\mathbf{x}_k + s_k^C)], \quad c_{fcd} > 0. \quad (7.8)$$

Or, il a été montré (Powell, 1975) que pour la décroissance de Cauchy, on a :

$$m_k^{quad}(\mathbf{x}_k) - m_k^{quad}(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k^C) \geq \frac{1}{2} \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| \min \left\{ \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|}{\|H_k\|}, \Delta_k \right\}. \quad (7.9)$$

En combinant les relations (7.8) et (7.9), et en supposant que la recherche du point \mathbf{s}_k , effectuée à l'algorithme 6, est un succès, c'est à dire si $f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k) \geq \eta_1 [m_k^{quad}(\mathbf{x}_k) - m_k^{quad}(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k)]$, on aboutit à la condition de décroissance suffisante :

$$f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k) \geq \frac{1}{2} \eta_1 c_{fcd} \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| \min \left\{ \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|}{\|H_k\|}, \Delta_k \right\}. \quad (7.10)$$

Résultats de convergence

Différents théorèmes de convergence globale découlent de la condition de décroissance suffisante (7.10).

Théorème 1 (Convergence globale faible)

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable sur $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)\}$, et soit $\{\mathbf{x}_k\}$ une suite d'itérés générés par l'algorithme 6, avec $\{H_k\}$ uniformément bornée. Si de plus le pas \mathbf{s}_k vérifie la condition (7.8), on a alors :

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| = 0. \quad (7.11)$$

Une convergence forte peut par ailleurs être énoncée si l'on impose des contraintes supplémentaires sur la fonction objectif.

Théorème 2 (Convergence globale forte)

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable, avec un gradient continu au sens de Lipschitz, inférieurement borné sur $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)\}$, et soit $\{\mathbf{x}_k\}$ une suite d'itérés générés par l'algorithme 6, avec $\{H_k\}$ uniformément bornée. Si de plus le pas \mathbf{s}_k vérifie la condition (7.8), on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| = 0. \quad (7.12)$$

Les preuves de ces deux théorèmes peuvent être trouvées dans Nocedal et Wright (1999).

Fonctions modèles utilisant un gradient approché de la fonction objectif

Dans la section précédente, une classe d'algorithmes à région de confiance, qui utilisent des fonctions modèles quadratiques construites à l'aide du gradient exact de la fonction objectif, a été présentée. Généralement, le gradient de la fonction objectif est très difficile à obtenir, et seule une approximation numérique de ce dernier est accessible⁶.

En notant \mathbf{g}_k une approximation du gradient exact $\nabla f(\mathbf{x}_k)$, et H_k une approximation du hessian exact⁷, une fonction quadratique basée sur un gradient approché peut s'écrire de la manière suivante :

$$\widetilde{m}_k^{quad}(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}) = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_k^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T H_k \mathbf{s}. \quad (7.13)$$

Les fonctions (7.13) et (7.2) sont supposées posséder les mêmes propriétés. Afin de prouver la convergence de telles méthodes, il est nécessaire de prendre en compte la différence entre les gradients exact et approché, $\nabla f(\mathbf{x}_k) - \mathbf{g}_k$.

Différentes méthodes existent pour prendre en compte cette erreur. Le lecteur intéressé par une revue complète de ces méthodes pourra se référer à Fahl (2000). La méthode qui est le plus utilisée est sans doute celle proposée par Carter (1991), soit :

6. Les méthodes d'optimisation présentées au chapitre 2, et qui seront utilisées par la suite, fournissent uniquement une approximation du gradient (cf section discrétilsation vs. différenciation).

7. Il est en effet impossible d'obtenir un hessian exact sans connaître le gradient exact de la fonction f .

$$\frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_k) - \mathbf{g}_k\|}{\|\mathbf{g}_k\|} \leq \xi, \text{ avec } \xi \in [0, 1]. \quad (7.14)$$

Comme nous l'avons précisé précédemment, il suffit de déterminer une condition de décroissance suffisante afin d'être en mesure de prouver la convergence de méthodes à région de confiance. Pour les méthodes à région de confiance qui utilisent un gradient approché, Moré (1983) propose une condition de décroissance suffisante, similaire à celles utilisées pour des fonctions modèles qui utilisent un gradient exact. Il remplace simplement la norme du gradient exact, $\|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|$, par la norme du gradient approché, $\|\mathbf{g}_k\|$:

$$f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k) \geq \frac{1}{2}\eta_1 c_{fcd} \|\mathbf{g}_k\| \min \left\{ \Delta_k, \frac{\|\mathbf{g}_k\|}{\|H_k\|} \right\}.$$

Cette condition de décroissance, couplée à la condition (7.14), permet de prouver la convergence globale de méthodes à région de confiance basées sur des gradients approchés (Fahl, 2000). On a donc $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{g}_k\| = 0$.

La condition (7.14) donne finalement un résultat de convergence globale forte :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| = 0.$$

7.2.3 Optimisation de fonctions modèles générales

Les principes de base d'un algorithme standard à région de confiance, qui utilise des fonctions modèles quadratiques (§ 7.2.2), viennent d'être présentés. Nous allons maintenant nous attacher à décrire les principes d'un algorithme qui utilise des fonctions modèles générales, m^{nonlin} , où aucune hypothèse de non-linéarité n'est effectuée.

La plupart des résultats présentés ici ont été développés par Fahl (2000), et sont basés sur les travaux de Toint (1988) et Carter (1991). L'objectif est encore une fois de déterminer une condition de décroissance suffisante, afin de prouver ultérieurement la convergence d'algorithmes qui font intervenir des modèles d'ordre faible basés sur la POD. Ces méthodes pourront alors être appliquées dans des procédures de contrôle d'écoulements.

On considère une fonction objectif $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Pour un point \mathbf{x}_0 donné, on définit par X le sous espace ouvert convexe contenant le sous espace $X_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)\}$. Les seules restrictions sur la fonction objectif f sont les suivantes :

- (F1) f est continûment dérivable dans X ,
- (F2) f est bornée inférieurement, et
- (F3) ∇f est L-Lipschitzienne dans X .

De plus, bien que la fonction modèle soit supposée être quelconque, elle doit tout de même vérifier certaines conditions qui sont assez peu restrictives (Toint, 1988; Carter, 1991; Fahl, 2000) :

- (M1) m_k^{nonlin} est dérivable dans un ouvert convexe contenant le rayon de la région de confiance $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \leq \Delta_k\}$,
- (M2) $m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_k)$, et
- (M3) pour $\xi \in [0, 1]$, $\mathbf{g}_k = \nabla m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k)$ est une approximation de $\nabla f(\mathbf{x}_k)$ qui vérifie la condition

$$\frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_k) - \mathbf{g}_k\|}{\|\mathbf{g}_k\|} \leq \xi.$$

Un algorithme pour les méthodes à région de confiance qui utilisent des fonctions modèles quelconques possède la même structure que l'algorithme 6. Le problème (7.2) est simplement remplacé par le problème suivant :

$$\min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n} m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}), \quad \text{sous les contraintes} \quad \|\mathbf{s}\| \leq \Delta_k. \quad (7.15)$$

Il a été montré précédemment que la convergence d'algorithmes à région de confiance qui utilisent des fonctions modèles quadratiques est liée à une condition de décroissance suffisante (fraction de Cauchy) construite

pour une étape à succès ($\rho \geq \eta_1$). On rappelle que le point de Cauchy est l'unique point minimisant la fonction modèle le long de la plus grande pente, $-\nabla f_k$, à l'intérieur de la région de confiance. *A priori*, lorsque la fonction modèle n'est pas quadratique, rien ne prouve que le point de Cauchy produise une décroissance suffisante de la fonction modèle. Il semble alors intéressant de généraliser cette condition de décroissance suffisante aux fonctions quelconques, non nécessairement quadratiques. Pour ce faire, la décroissance prédictive à un itéré k , $m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k) - m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k)$, doit être comparée à la décroissance prédictive le long de la plus grande pente, $m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k) - m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{g}_k)$, pour un pas λ_k positif.

L'algorithme 8, proposé par Toint (1988), permet de déterminer un pas qui produit une décroissance suffisante pour une fonction modèle générale.

Algorithme 8 (Détermination du pas)

Choix de constantes $\alpha, \beta, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ et μ telles que :

$$0 < \alpha < \beta < 1, \quad 0 < \nu_1 < 1, \quad 0 < \nu_2, \quad 0 < \nu_3 \quad \text{et} \quad 0 < \mu \leq 1. \quad (7.16)$$

1. *Détermination de λ_k^A . Deux méthodes peuvent être utilisées.*

(a) *Méthode 1 :*

$$m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k - \lambda_k^A \mathbf{g}_k) \leq m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k) - \alpha \lambda_k^A \|\mathbf{g}_k\|^2 \quad (7.17a)$$

$$\|\lambda_k^A \mathbf{g}_k\| \leq \Delta_k \quad (7.17b)$$

$$\lambda_k^A \geq \min \left\{ \nu_1 \frac{\Delta_k}{\|\mathbf{g}_k\|}, \nu_2 \right\}. \quad (7.17c)$$

(b) *Méthode 2 :*

$$m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k - \lambda_k^A \mathbf{g}_k) \leq m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k) - \alpha \lambda_k^A \|\mathbf{g}_k\|^2 \quad (7.18a)$$

$$\|\lambda_k^A \mathbf{g}_k\| \leq \Delta_k \quad (7.18b)$$

$$\lambda_k^A \geq \lambda_k^B > 0 \quad (7.18c)$$

$$m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k - \lambda_k^B \mathbf{g}_k) \leq m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k) - \beta \lambda_k^B \|\mathbf{g}_k\|^2. \quad (7.18d)$$

2. *Si $\Delta_k > \nu_3$: choix de \mathbf{s}_k tel que*

$$m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k) - m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k) \geq \mu [m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k) - m_k^{nonlin}(\mathbf{x}_k - \lambda_k^A \mathbf{g}_k)] \quad (7.19a)$$

$$\|\mathbf{s}_k\| \leq \Delta_k. \quad (7.19b)$$

L'étape 1 de l'algorithme 8 s'apparente à une méthode de recherche linéaire inexacte (méthode d'Armijo, voir annexe C), à l'intérieur de la région de confiance, le long de la plus grande pente (Nocedal et Wright, 1999). Cette étape fournit un pas de Cauchy généralisé, $\mathbf{s}_k^{GC} = \lambda_k^A \mathbf{g}_k$.

L'étape 2 précise que si le rayon de la région de confiance est trop grand, il est possible de quitter la direction de plus grande descente. Afin d'éviter ce cas défavorable, il est alors envisagé de déterminer un pas \mathbf{s}_k qui vérifie une certaine condition de décroissance. Il s'agit de la condition sur la fraction de décroissance de Cauchy généralisée (théorème 3).

Quelques remarques concernant l'algorithme 8 peuvent être formulées :

1. Existence d'une solution de l'algorithme 8

L'algorithme est bien posé. En effet, si les constantes (7.16) sont fixées, il existe toujours un pas \mathbf{s}_k qui satisfasse les conditions (7.17) ou (7.18), ainsi que la condition (7.19). La démonstration de ce lemme peut être trouvée dans Toint (1988).

2. Comportement asymptotique de la solution de l'algorithme 8

Un résultat sur le comportement asymptotique des directions des pas $\{s_k\}$, déterminés par l'algorithme 8, dans la résolution du problème (7.15), peut être énoncé :

Soient $\{\Delta_k\}$, $\{g_k\}$ et $\{s_k\}$ les séquences respectives de rayons de confiance, de gradients de la fonction modèle et de pas déterminés par l'algorithme 8. Si $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| > 0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = 0$, on a :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-s_k^T g_k}{\|s_k\| \|g_k\|} = 1.$$

Le lecteur intéressé par une démonstration de ce lemme pourra se référer à Carter (1991).

Il reste maintenant à déterminer une condition de décroissance suffisante, afin de prouver la convergence d'algorithmes à région de confiance qui utilisent des fonctions modèles générales. Pour un itéré k , l'approximation du hessien, H_k , donne des informations sur la courbure de la fonction objectif, qui serviront à énoncer une condition de décroissance suffisante.

En effet, en définissant une mesure de courbure $\omega(f, x, s)$:

$$\omega(f, x, s) = \frac{2}{\|s\|^2} (f(x + s) - f(x) - \nabla f(x)^T s), \quad (7.20)$$

pour une fonction f vérifiant la condition **(F1)**, et pour un pas $s \neq 0$ déterminé par l'algorithme 8, il est possible de prouver que la décroissance de la fonction m_k^{nonlin} est inférieurement bornée.

Un théorème basé sur les travaux de Toint (1988) peut être énoncé :

Théorème 3 (Décroissance de Cauchy pour des fonctions générales)

Soit $g_k \neq 0$ une approximation du gradient exact de la fonction objectif. En combinant l'algorithme 8 et la condition (7.20), on obtient :

$$\omega_k = \begin{cases} 0 & \text{si la méthode 1 de l'algorithme 8 est utilisée,} \\ \omega(m_k^{nonlin}, x_k, -\lambda_k^B g_k) & \text{si la méthode 2 de l'algorithme 8 est utilisée.} \end{cases}$$

i.e.

$$\omega_k \geq 0,$$

et il existe une constante $c_s > 0$ telle que l'algorithme 8 produise un pas s_k qui vérifie

$$m_k^{nonlin}(x_k) - m_k^{nonlin}(x_k + s_k) \geq c_s \|g_k\|^2 \min \left\{ \frac{\|g_k\|^2}{1 + \omega_k}, \Delta_k \right\}. \quad (7.21)$$

Pour une étape à succès de l'algorithme 6, une condition de décroissance suffisante peut être obtenue :

$$f(x_k) - f(x_k + s_k) \geq \eta_1 c_s \|g_k\| \min \left\{ \frac{\|g_k\|}{\|1 + \omega_k\|}, \Delta_k \right\}. \quad (7.22)$$

La condition (7.22) est identique à la condition (7.10) déterminée pour des fonctions modèles quadratiques. Les théorèmes 1 et 2, associés à la condition (7.22), prouvent la convergence des méthodes à région de confiance pour des fonctions modèles quelconques.

Ces résultats sont très importants dans l'optique de coupler des méthodes à région de confiance avec des modèles réduits basés sur la POD.

7.3 Méthodes à région de confiance et modèles réduits POD

7.3.1 Généralités

Dans cette partie, on considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{J}(\phi(\mathbf{c}), \mathbf{c}). \quad (7.23)$$

La fonction $\mathcal{J} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est supposée suffisamment régulière, et les vecteurs $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ et $\phi(\mathbf{c}) \in \mathbb{R}^m$ sont constitués respectivement des variables de contrôle et des variables d'état du problème. Les relations qui lient les variables de contrôle (variables d'entrée) aux variables d'état (variables de sortie) sont habituellement décrites par des équations aux dérivées partielles. Ces dernières peuvent représenter un modèle de connaissance de type Navier-Stokes en Mécanique des Fluides. Numériquement, les variables d'état s'obtiennent par résolution de ces équations. Celles-ci peuvent, par exemple, être résolues en espace par une méthode de type éléments finis. Cependant, le coût de calcul CPU associé à cette résolution varie en fonction du maillage choisi, et peut être très élevé⁸. On cherche alors à remplacer la fonction objectif

$$f(\mathbf{c}) = \mathcal{J}(\phi(\mathbf{c}), \mathbf{c})$$

par une fonction modèle qui permet d'engendrer des coûts de calcul moins élevés. Ceci est effectué en remplaçant le modèle constitué des équations d'état exactes par un modèle approché, plus simple à résoudre. La résolution de ces modèles donnent, respectivement, l'évolution des variables d'état exactes, ϕ , et celle de variables d'état approchées, $\tilde{\phi}$, en fonction des variables de contrôle \mathbf{c} . Dans l'esprit des méthodes d'optimisation à région de confiance qui utilisent des fonctions modèles générales (§ 7.2.3), on peut remplacer la fonction

$$\mathcal{J}(\phi(\mathbf{c}), \mathbf{c}) \quad (7.24)$$

par la fonction

$$\mathcal{J}(\tilde{\phi}(\mathbf{c}), \mathbf{c}). \quad (7.25)$$

Ainsi, à l'itéré k , la fonction m_k ,

$$m_k(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}) = \mathcal{J}(\tilde{\phi}(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}), \mathbf{c}_k + \mathbf{s}) \quad (7.26)$$

est une fonction modèle de la fonction objectif f ,

$$f(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}) = \mathcal{J}(\phi(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}), \mathbf{c}_k + \mathbf{s}). \quad (7.27)$$

L'utilisation de fonctions modèles est très répandue en optimisation⁹. Cependant, il n'existe pas de preuve d'optimalité de la solution obtenue si aucune précaution n'est prise (voir résultats de la méthode adaptative au chapitre 6). Lors de la résolution du problème (7.23), au cours duquel la fonction objectif (7.24) est remplacée par la fonction modèle (7.25), il est nécessaire de relier la solution de ce sous-problème à la solution réelle. Ceci peut être effectué par l'intermédiaire de méthodes à région de confiance, présentées à la section 7.2.3.

7.3.2 Utilisation de fonctions approchées basées sur des modèles réduits POD Régions de confiance et POD ROM

Dans ce qui suit, les méthodes à région de confiance qui utilisent des fonctions modèles basées sur la POD seront présentées. L'objectif est de résoudre le problème d'optimisation :

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{J}(\phi_{NS}(\mathbf{c}), \mathbf{c}). \quad (7.28)$$

Les vecteurs \mathbf{c} et $\phi_{NS}(\mathbf{c})$ représentent respectivement les paramètres de contrôle et les variables d'état obtenues par une méthode de type éléments finis. L'indice NS signifie que les équations d'état qui relient les variables de contrôle aux variables d'état sont les équations de Navier-Stokes.

La résolution du problème d'optimisation (7.28) est extrêmement coûteux autant en temps de calcul qu'en capacité mémoire (voir discussion au chapitre 5).

Il est possible, par résolution d'un système dynamique d'ordre réduit, de reconstruire ces variables par POD. En notant ϕ_{POD} ces variables, le problème (7.28) peut être remplacé par une suite de sous-problèmes de la forme

$$\min_{\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n} \mathcal{J}(\phi_{POD}(\mathbf{c}), \mathbf{c}). \quad (7.29)$$

8. Il est, rappelons-le, nécessaire de résoudre plusieurs fois ces équations dans un processus d'optimisation.

9. On parle généralement en anglais de *surrogate optimization* (Booker *et al.*, 1999).

Puisque le modèle réduit ne représente *a priori* que la dynamique de l'écoulement correspondant au contrôle \mathbf{c} utilisé pour le construire, il est nécessaire de réactualiser la base POD au cours du processus itératif (voir chapitre 6). Le problème est alors de déterminer à quel moment il est nécessaire d'effectuer cette réactualisation.

Les méthodes à région de confiance répondent généralement bien à ce problème.

Description de la méthode d'optimisation par région de confiance et modèles réduits POD Soient Δ_k le rayon de la région de confiance et \mathbf{c}_k les paramètres de contrôle obtenus pour un itéré k . Pour évaluer la fonction $\mathcal{J}(\phi_{NS}(\mathbf{c}_k), \mathbf{c}_k)$, il est nécessaire de déterminer les variables $\phi_{NS}(\mathbf{c}_k)$. Ces variables sont déterminées par résolution des équations de Navier-Stokes. Lors de cette résolution, il est possible d'extraire des réalisations (snapshots) de l'écoulement contrôlé, et ainsi de générer une base POD $\{\Phi_i\}_{i=1,\dots,N_{POD}}^k$. Cette base est utilisée pour construire un modèle d'ordre faible. L'intégration temporelle de ce modèle d'ordre faible permet de reconstruire les champs $\phi_{POD}(\mathbf{c}_k)$, et donc d'évaluer la fonction $\mathcal{J}(\phi_{POD}(\mathbf{c}_k), \mathbf{c}_k)$. On définit ensuite la fonction

$$m_k(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k) = \mathcal{J}(\phi_{POD}(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k), \mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k) \quad (7.30)$$

comme fonction modèle de la fonction objectif

$$f(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k) = \mathcal{J}(\phi_{NS}(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k), \mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k), \quad (7.31)$$

à l'intérieur de la région de confiance $\|\mathbf{s}_k\| \leq \Delta_k$.

On est alors amené à résoudre le problème¹⁰

$$\min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n} m_k(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}) \quad \text{sous les contraintes} \quad \|\mathbf{s}\| \leq \Delta_k. \quad (7.32)$$

Il faut ensuite évaluer la performance des nouveaux paramètres de contrôle $\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k$ obtenus par résolution du problème (7.32). On compare ainsi la décroissance réelle de la fonction objectif, $ared_k = f(\mathbf{c}_k) - f(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k)$, à la décroissance prédictive par la fonction modèle, $pred_k = m_k(\mathbf{c}_k) - m_k(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k)$. Si la décroissance de la fonction objectif est jugée suffisante, en comparaison de celle obtenue par la fonction modèle, le pas $\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k$ est accepté. Afin d'évaluer la valeur de la fonction objectif en ce point, $f(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k)$, il est nécessaire de déterminer une nouvelle solution du modèle de précision, $\phi_{NS}(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k)$. Un autre jeu de réalisations, qui correspond au nouveau contrôle \mathbf{c}_{k+1} , est disponible. Ce jeu est alors adapté pour construire un nouveau modèle réduit, qui est représentatif de la dynamique modifiée par application des paramètres de contrôle \mathbf{c}_{k+1} .

L'algorithme 9 présente en détail la procédure de la méthode d'optimisation couplant région de confiance et modèles réduits basés sur la POD.

Algorithme 9 (Fonctions modèles construites par POD)

Choix de constantes $\eta_1, \eta_2, \gamma_1, \gamma_2$ et γ_3 telles que

$$0 < \eta_1 < \eta_2 < 1, \quad \text{et} \quad 0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1 \leq \gamma_3.$$

Choix d'un rayon de confiance Δ_0 , et choix de paramètres de contrôle initiaux \mathbf{c}_0 . Détermination d'un jeu de réalisations \mathcal{U}_0 qui correspond au contrôle \mathbf{c}_0 et évaluation de la fonction objectif, $f(\mathbf{c}_0)$. Initialisation $k = 0$.

1. Calcul d'une base POD à partir des réalisations \mathcal{U}_k et construction d'un modèle réduit contrôlé.
2. Construction de la fonction modèle, m_k , et résolution (approchée) du problème

$$\mathbf{s}_k = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n} m_k(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}) \quad \text{sous les contraintes} \quad \|\mathbf{s}\| \leq \Delta_k.$$

3. Détermination d'un jeu de réalisations \mathcal{U}_{k+} qui correspond au contrôle $\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k$, et évaluation de la fonction objectif, $f(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}_k)$. Calcul de ρ_k :

$$\rho_k = \frac{ared_k(\mathbf{s}_k)}{pred_k(\mathbf{s}_k)}.$$

10. Nous avons vu précédemment qu'il n'est pas nécessaire de calculer le minimiseur exact du problème (7.32). Il est suffisant de déterminer un pas vérifiant une certaine décroissance de la fonction modèle. La méthode est décrite par l'algorithme 8. Cependant, l'utilisation de modèles réduits s'accompagne de faibles coûts de calcul, et permet ainsi de résoudre ce problème de manière exacte (Nocedal et Wright, 1999).

4. Actualisation du rayon de la région de confiance :

- (a) Si $\rho_k \geq \eta_2$, l'étape est un succès et le pas est accepté.
 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k$, $\mathcal{U}_{k+1} = \mathcal{U}_{k+}$, et choix de $\Delta_k \in [\Delta_k, \gamma_3 \Delta_k]$. Si un critère de convergence est vérifié, l'algorithme est arrêté. Sinon on pose $k = k + 1$ et retour à l'étape 1
- (b) Si $\eta_1 \leq \rho_k \leq \eta_2$, l'étape est un succès et le pas est accepté.
 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{s}_k$, $\mathcal{U}_{k+1} = \mathcal{U}_{k+}$ et choix de $\Delta_k \in [\gamma_2 \Delta_k, \Delta_k]$. Si un critère de convergence est vérifié, l'algorithme est arrêté. Sinon on pose $k = k + 1$ et retour à l'étape 1
- (c) Si $\rho_k < \eta_1$, l'étape est un échec et le pas est refusé.
 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k$, $\mathcal{U}_{k+1} = \mathcal{U}_k$ et choix de $\Delta_k \in [\gamma_1 \Delta_k, \gamma_2 \Delta_k]$. On pose $k = k + 1$ et on retourne à l'étape 2.

7.3.3 Résultats de convergence

En général, les fonctions objectif f étudiées vérifient les hypothèses **(F1)** - **(F3)** énoncées au paragraphe 7.2.3. Les restrictions sur la fonction modèle peuvent aussi être vérifiées, exceptée la restriction **(M2)**. En effet, il est impossible de vérifier exactement $m_k(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_k)$. Ceci est dû à la troncature énergétique effectuée lors de la construction d'un modèle réduit basé sur la POD. Cependant, comme il a été énoncé à la section 7.2.3 notamment, la convergence de méthodes à région de confiance peut être prouvée lorsqu'une condition de décroissance suffisante est couplée avec une étape à succès ($\rho \geq \eta_1$). On est donc amené à déterminer les conditions pour lesquelles l'algorithme 9 fournit un pas acceptable. En utilisant les notations utilisées dans les sections précédentes, le théorème 4 énonce ces conditions.

Théorème 4 (Détermination d'un pas acceptable, Fahl, 2000)

*Supposons que la fonction objectif f vérifie les conditions **(F1)** - **(F3)**, et que la fonction modèle m_k vérifie la condition **(M1)** en un point courant \mathbf{x}_k . Soit $\mathbf{g}_k \neq \mathbf{0}$, une approximation du gradient $\nabla f(\mathbf{x}_k)$ qui vérifie la condition **(M3)** définie par l'équation (7.14), pour $\xi \in [0, 1 - \eta_1]$. On suppose, de plus, que le pas \mathbf{s}_k est déterminé par l'algorithme 8, et que l'inégalité $|\omega(m_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k)| \leq c_\omega$ est vérifiée pour une constante c_ω .*

Alors, pour un rayon de confiance Δ_k suffisamment petit, on a $\rho_k > \eta_1$ et donc l'étape k est un succès.

Ce théorème permet d'énoncer un résultat de convergence faible, similaire à celui énoncé au théorème 1.

Théorème 5 (Convergence faible)

*Supposons que la fonction objectif f vérifie les conditions **(F1)** - **(F3)**, et que $\{\mathbf{x}_k\}$ est une suite d'itérés générés par l'algorithme 9 avec une suite de pas $\{\mathbf{s}_k\}$ déterminée conformément à l'algorithme 8. On suppose, de plus, que la fonction modèle m_k vérifie les conditions **(M1)** et **(M3)**, pour $\xi \in [0, 1 - \eta_2]$. En définissant*

$$b_k = 1 + \max\{\max\{\omega_i, |\omega(m_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{s}_i)|\}, i = 0, \dots, k\},$$

et en supposant qu'il existe une constante $c_b > 0$ telle que

$$b_k \leq c_b \quad \forall k,$$

on a,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf \|\mathbf{g}_k\| = 0.$$

La condition (7.14) combinée au théorème 5 permet d'énoncer un résultat de convergence forte.

Théorème 6 (Convergence forte)

Sous les conditions du théorème 5, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{g}_k\| = 0.$$

Comme à la section 7.13, l'utilisation de la condition (7.14) prouve immédiatement que l'on a $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\| = 0$.

Nous venons de décrire les outils mathématiques qui permettent de prouver la convergence de la solution d'un problème d'optimisation par région de confiance, et ce, pour toutes sortes de fonctions objectif. Il reste maintenant à le vérifier numériquement.

7.4 Application : réduction de traînée d'un cylindre circulaire

L'objectif de cette partie est de mettre en œuvre la méthode à région de confiance qui utilise des fonctions modèles construites par POD (§ 7.3), afin de minimiser le coefficient de traînée moyen du cylindre. Conformément au chapitre 6, les paramètres de contrôle sont l'amplitude A et le nombre de Strouhal St de la vitesse tangentielle du cylindre.

7.4.1 Définitions des fonctions objectif et modèle

On rappelle que le coefficient de traînée s'écrit (voir chapitre 1 avec $p = P/(\rho U_\infty^2)$) :

$$C_D(u, p) = \int_{\Gamma_c} \frac{P - P_\infty}{1/2 \rho U_\infty^2} n_x d\Gamma - \frac{2}{Re} \int_{\Gamma_c} \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) d\Gamma. \quad (7.33)$$

Les variables u et p présentes dans cette relation peuvent être obtenues soit par résolution du modèle de Navier-Stokes, soit par reconstruction à l'aide d'un modèle d'ordre réduit basé sur la POD.

Dans les deux cas, les variables u et p dépendent des paramètres de contrôle \mathbf{c} . Si ces variables sont obtenues par résolution du modèle de Navier-Stokes, il y a une dépendance implicite aux paramètres de contrôle du fait de leurs présences dans les conditions aux limites. Si par contre, ces variables sont obtenues par un modèle réduit POD, il y a une dépendance explicite, car les paramètres de contrôle apparaissent directement dans le modèle réduit (4.20).

En notant $\phi(\mathbf{c}) = (u_{NS}, p_{NS})^T$ et $\tilde{\phi}(\mathbf{c}) = (u_{POD}, p_{POD})^T$, la fonction objectif est

$$f(\mathbf{c}) = \mathcal{J}(\phi(\mathbf{c})) = \frac{1}{T} \int_0^T C_D(\phi(\mathbf{c})) dt,$$

et la fonction objectif modèle est¹¹

$$m_k(\mathbf{c}) = \tilde{\mathcal{J}}(\tilde{\phi}(\mathbf{c})) = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} a_i(t) N_i dt.$$

Ces deux fonctions peuvent alors être utilisées dans une procédure d'optimisation couplant méthodes à région de confiance et modèles réduits POD, suivant la méthodologie énoncée à l'algorithme 9.

Nous avons vu précédemment qu'il existe différentes méthodes pour résoudre le sous-problème d'optimisation présent à l'étape 2 de l'algorithme 9 :

$$\mathbf{s}_k = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n} m_k(\mathbf{c}_k + \mathbf{s}) \quad \text{sous les contraintes} \quad \|\mathbf{s}\| \leq \Delta_k.$$

Ces méthodes consistent à déterminer une décroissance suffisante de la fonction objectif, par rapport à la décroissance prédictive par la fonction modèle. Dans cette étude, le plus simple pour déterminer la solution des sous-problèmes d'optimisation est de résoudre le système optimal construit au chapitre 6.

Pour mémoire, le système optimal est constitué des systèmes et équations suivantes :

- système d'état (POD ROM)

$$\begin{aligned} \frac{d a_i(t)}{dt} &= \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{B}_{ij} a_j(t) + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{C}_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ &+ \mathcal{D}_i \frac{d \gamma}{dt} + \left(\mathcal{E}_i + \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{F}_{ij} a_j(t) \right) \gamma(\mathbf{c}, t) + \mathcal{G}_i \gamma^2(\mathbf{c}, t), \end{aligned} \quad (7.34a)$$

muni des conditions initiales suivantes :

$$a_i(0) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0), \Phi_i(\mathbf{x})). \quad (7.34b)$$

11. Cette fonction est définie au chapitre 6. On rappelle que des modes de non-équilibre $\{\Phi_i\}_{i=N_{gal}+1, \dots, N_{gal}+N_{neq}}$ ont été ajoutés au modèle réduit POD afin d'en améliorer la robustesse.

– système adjoint

$$\frac{d\xi_i(t)}{dt} = - \sum_{j=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \left(\mathcal{B}_{ji} + \gamma(\mathbf{c}, t) \mathcal{F}_{ji} + \sum_{k=0}^{N_{gal}+N_{neq}} (\mathcal{C}_{jik} + \mathcal{C}_{jki}) a_k(t) \right) \xi_j(t) - \frac{1}{T} N_i, \quad (7.35a)$$

muni des conditions terminales suivantes :

$$\xi_i(T) = 0. \quad (7.35b)$$

– conditions d’optimalité

$$\nabla_{\mathbf{c}} \mathcal{L} = \int_0^T \left(\sum_{i=0}^{N_{gal}+N_{neq}} \mathcal{L}_i \right) \nabla_{\mathbf{c}} \gamma dt. \quad (7.36)$$

Ce système peut être résolu à l’aide de la méthode itérative décrite par l’algorithme 5 (chapitre 6). Lors de cette résolution, une contrainte supplémentaire, imposée par le rayon de la région de confiance, doit toutefois être prise en compte. Dans cette étude, les directions de descente sont construites à l’aide d’une méthode de gradient conjugué de type Fletcher-Reeves¹². La recherche linéaire est effectuée par une méthode d’Armijo à rebroussement, dans laquelle la longueur du pas initial, le long de chaque direction de descente, vérifie la contrainte imposée par la région de confiance.

Les résultats numériques sont présentés au paragraphe suivant.

7.4.2 Résultats numériques

Cette section présente les résultats numériques de la procédure d’optimisation décrite précédemment. Le but est de minimiser le coefficient de traînée moyen d’un cylindre. Les paramètres de contrôle sont l’amplitude et la fréquence de la vitesse tangentielle du cylindre. Ces résultats seront commentés à la section suivante.

Afin d’évaluer la robustesse de cette méthode, comme cela a été effectué au chapitre 6, différents paramètres de contrôle initiaux, $\mathbf{c}_0 = (A; St)$, seront utilisés. La région des paramètres de contrôle étudiée est représentée sur la carte A.1. Les paramètres initiaux sont choisis près des extrémités de cette zone d’étude, à savoir $\mathbf{c}_0 = (1,0; 0,2)$, $\mathbf{c}_0 = (1,0; 1,0)$, $\mathbf{c}_0 = (6,0; 0,2)$ et $\mathbf{c}_0 = (6,0; 1,0)$.

Les figures 7.2, 7.6, 7.10 et 7.14 représentent pour chacun de ces paramètres de contrôle initiaux, les évolutions des valeurs de la fonction objectif au cours du processus d’optimisation. De même, les évolutions de l’amplitude (*resp.* de la fréquence) de forçage sont représentées sur les figures 7.3, 7.7, 7.11 et 7.15 (*resp.* figures 7.4, 7.8, 7.12 et 7.16). Ces résultats sont synthétisés dans l’espace des paramètres de contrôle sur les figures 7.1, 7.5, 7.9 et 7.13. Finalement, les valeurs numériques associées à ces différentes figures sont données dans les tables 7.1, 7.2, 7.3 et 7.4.

7.4.3 Observations

Les paramètres de contrôle obtenus en utilisant une procédure d’optimisation couplant méthodes à région de confiance et modèles réduits POD sont $A = 4,25$ et $St = 0,738$. Ces paramètres sont obtenus en une dizaine d’itérations (10 résolutions du modèle de Navier-Stokes).

12. Les directions de descente sont construites à l’aide de la quantité $\nabla_{\mathbf{c}} \mathcal{L}$.

Itéré	A	St	f_k	m_k	ρ_k	Δ_k	état
0	1,000	0,200	1,43919	1,44694	1,000	0,500	succès
1	1,500	0,300	1,24054	1,29806	1,443	1,000	succès
2	2,500	0,414	1,16469	1,16503	0,390	1,000	succès
3	2,500	0,414	1,16469	1,16503	-0,265	0,500	échec
4	2,000	0,483	1,07219	1,12108	1,468	1,000	succès
5	3,000	0,622	1,01329	1,02549	0,351	1,000	succès
6	3,000	0,622	1,01329	1,02549	-0,008	0,500	échec
7	3,500	0,722	1,00050	1,01013	0,597	0,500	succès
8	4,000	0,730	0,99329	0,99794	0,542	0,500	succès
9	4,000	0,730	0,99329	0,99794	0,057	0,250	échec
10	4,250	0,738	0,99298	0,99413	0,255	0,250	succès
11	4,250	0,738	0,99298	0,99413	-0,335	0,125	échec
12	4,250	0,738	0,99298	0,99413	-0,335	0,063	échec
13	4,250	0,738	0,99298	0,99413	-0,341	0,031	échec
14	4,250	0,738	0,99298	0,99413	-0,358	0,016	échec
15	4,250	0,738	0,99298	0,99413	0,045	0,008	échec
16	4,250	0,738	0,99298	0,99413	0,089	0,004	échec
17	4,250	0,738	0,99298	0,99413	0,216	0,002	succès

TABLE 7.1 – Processus d'optimisation par régions de confiance et modèles réduits POD. Evolution en fonction des itérés des valeurs des paramètres de contrôle, des fonctionnelles objectif f_k et modèle m_k , de ρ_k et du rayon Δ_k de la région. Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St = 0,2$.

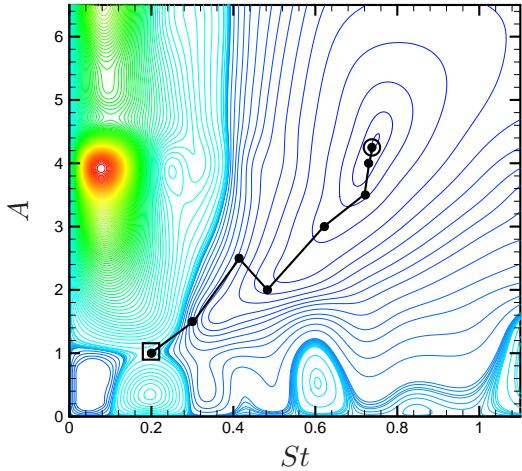


FIGURE 7.1 – Evolution des paramètres de contrôle dans le plan (A, St). Conditions initiales : $A = 1,0$ et $St = 0,2$.

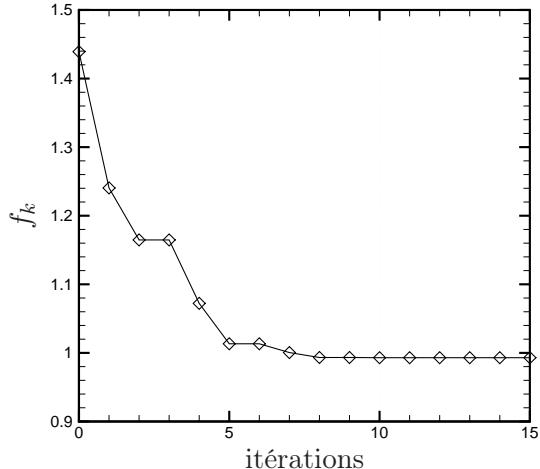


FIGURE 7.2 – Evolution de la fonction objectif en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 1,0$ et $St = 0,2$.

Ces résultats sont semblables à ceux prédicts par expérimentation numérique (voir figure A.1). Les paramètres de contrôle, obtenus par méthodes à région de confiance, convergent vers les paramètres de contrôle optimaux, et ce, quels que soient les paramètres de contrôle initiaux utilisés. Ceci prouve la performance et la robustesse de la méthode d'optimisation décrite dans ce chapitre.

Les figures 7.17 et 7.18 représentent respectivement l'évolution temporelle des coefficients de traînée et de portance, pour un écoulement non contrôlé et pour l'écoulement forcé par les paramètres de contrôle optimaux. Ces résultats sont comparés avec les coefficients obtenus pour l'écoulement de base stationnaire instable. Cet écoulement de référence génère le coefficient de traînée le plus faible pour la configuration étudiée (figure 1.29 et Protas, 2000). Le coefficient de traînée moyen passe d'une valeur égale à 1,39 dans le cas non

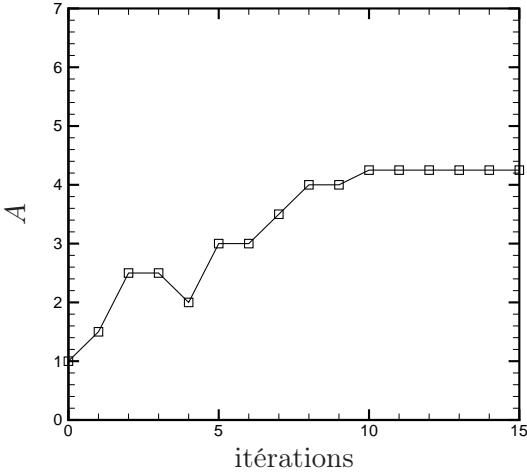


FIGURE 7.3 – Evolution de l'amplitude en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 1,0$ et $St = 0,2$.

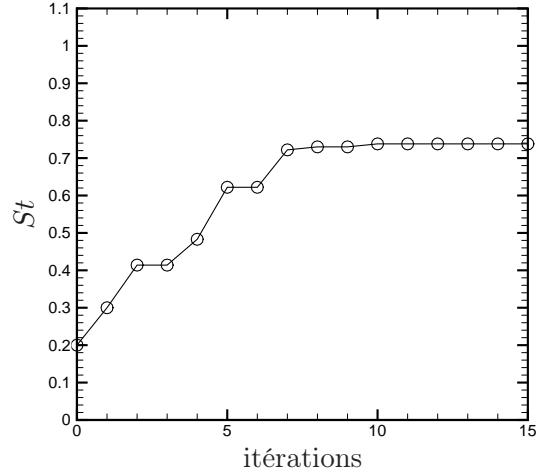


FIGURE 7.4 – Evolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 1,0$ et $St = 0,2$.

Itéré	A	St	f_k	m_k	ρ_k	Δ_k	état
0	1,000	1,000	1,35884	1,35761	1,000	0,500	succès
1	1,500	0,900	1,30473	1,30400	1,679	1,000	succès
2	2,500	0,700	1,07851	1,09053	1,576	2,000	succès
3	4,500	0,708	0,99797	1,00069	0,436	2,000	succès
4	4,500	0,708	0,99797	1,00069	-5,186	1,000	échec
5	4,500	0,708	0,99797	1,00069	-0,193	0,500	échec
6	4,000	0,730	0,99329	0,99794	0,996	1,000	succès
7	4,000	0,730	0,99329	0,99794	-0,518	0,500	échec
8	4,000	0,730	0,99329	0,99794	0,057	0,250	échec
9	4,250	0,738	0,99298	0,99413	0,255	0,250	succès
10	4,250	0,738	0,99298	0,99413	-0,335	0,125	échec
11	4,250	0,738	0,99298	0,99413	-0,335	0,063	échec
12	4,250	0,738	0,99298	0,99413	-0,341	0,031	échec
13	4,250	0,738	0,99298	0,99413	-0,358	0,016	échec
14	4,250	0,738	0,99298	0,99413	0,045	0,008	échec
15	4,250	0,738	0,99298	0,99413	0,089	0,004	échec
16	4,250	0,738	0,99298	0,99413	0,216	0,002	succès

TABLE 7.2 – Evolution en fonction des itérés des valeurs des paramètres de contrôle, des fonctionnelles objectif f_k et modèle m_k , de ρ_k et du rayon Δ_k de la région. Paramètres de contrôle initiaux : $A = 1,0$ et $St = 1,0$.

contrôlé à une valeur égale à 0,99 lorsque les paramètres de contrôle optimaux sont appliqués. Une réduction relative de 30% est obtenue. La valeur du coefficient de traînée pour l'écoulement contrôlé s'approche de la valeur du coefficient de traînée obtenue pour l'écoulement de base stationnaire instable ($C_D = 0,94$). Les courbes polaires, pour l'écoulement non contrôlé et pour l'écoulement forcé par les paramètres optimaux, sont représentées sur la figure 7.19. L'écoulement forcé est maintenant complètement dominé par la fréquence de contrôle, comme le montre la figure 7.20. L'écoulement est dit accroché en fréquence, ou plus couramment, on parle de *lock-on flow* (voir section A.2).

Les isovaleurs de vorticité ω_z , pour un écoulement non contrôlé et pour l'écoulement forcé avec les paramètres de contrôle optimaux, sont représentés sur les figures 7.21a et 7.21b. On constate que l'application du contrôle optimal, déterminé par l'algorithme à région de confiance couplé à des modèles réduits POD, permet de supprimer totalement l'allée tourbillonnaire de Von Kármán. En terme de vorticité, l'écoulement

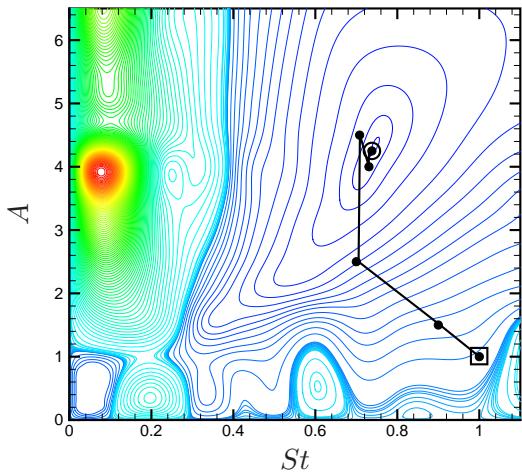


FIGURE 7.5 – Evolution des paramètres de contrôle dans le plan (A, St). Conditions initiales : $A = 1,0$ et $St = 1,0$.

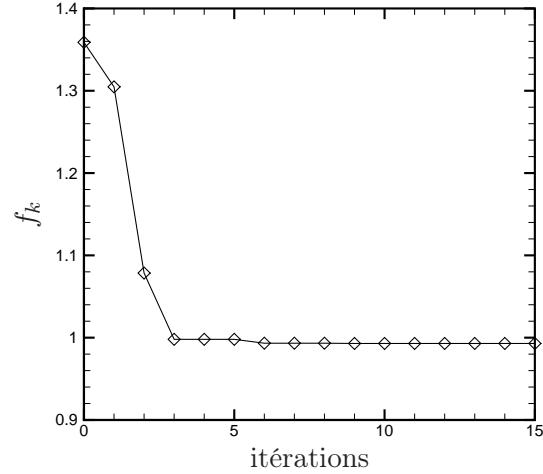


FIGURE 7.6 – Evolution de la fonction objectif en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 1,0$ et $St = 1,0$.

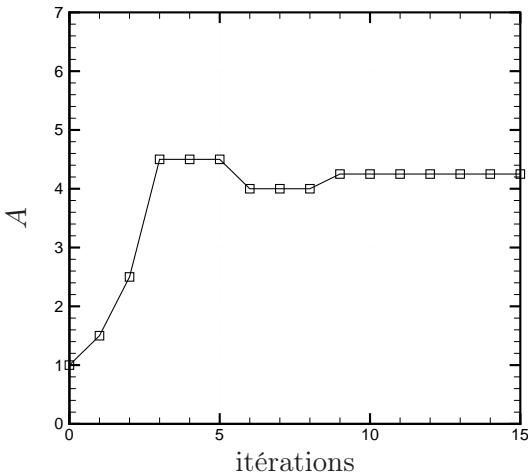


FIGURE 7.7 – Evolution de l'amplitude en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 1,0$ et $St = 1,0$.

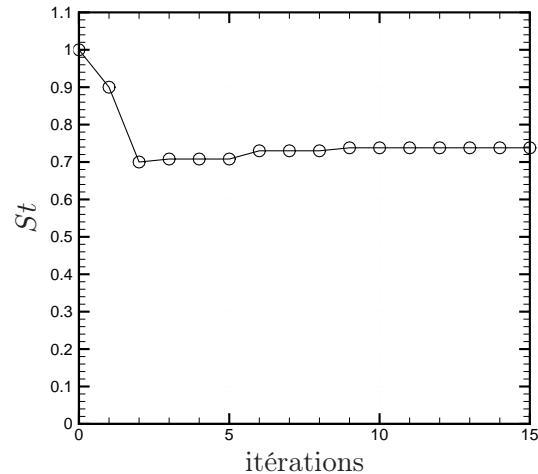


FIGURE 7.8 – Evolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 1,0$ et $St = 1,0$.

contrôlé se rapproche de l'écoulement de base stationnaire instable (figure 7.21c). Néanmoins, l'écoulement contrôlé est encore fortement instationnaire dans un sillage très proche du cylindre. La figure 7.25 représente, pour différents instants répartis uniformément sur une période de contrôle, les isovaleurs de vorticité ω_z . Sur cette figure, il est également possible de suivre l'évolution temporelle des coefficients aérodynamiques, et ainsi, d'associer les valeurs correspondantes à chaque instant étudié. Dans le même esprit, les figures 7.24 et 7.26 représentent respectivement les évolutions des lignes de courant et des isobares pendant une période de contrôle.

La figure 7.22 présente la superposition des profils de vitesse instantanés¹³ pour l'écoulement non contrôlé,

13. Les profils de vitesse instantanés sont représentés afin de visualiser les caractères symétrique et anti-symétrique du sillage. Habituellement, uniquement les profils de vitesse moyen sont représentés, et il n'est pas possible d'observer un caractère anti-symétrique.

Itéré	A	St	f_k	m_k	ρ_k	Δ_k	état
0	6,000	0,200	2,28016	2,61982	1,000	0,500	succès
1	6,000	0,300	1,68637	1,69102	0,812	1,000	succès
2	5,000	0,492	1,16159	1,16547	1,688	2,000	succès
3	3,000	0,616	1,01432	1,02637	1,518	4,000	succès
4	3,000	0,616	1,01432	1,02637	-0,038	2,000	échec
5	3,000	0,616	1,01432	1,02637	-0,083	1,000	échec
6	3,000	0,616	1,01432	1,02637	0,031	0,500	échec
7	3,500	0,716	0,99938	1,00916	0,682	0,500	succès
8	4,000	0,730	0,99329	0,99794	0,480	0,500	succès
9	4,000	0,730	0,99329	0,99794	0,057	0,250	échec
10	4,250	0,738	0,99298	0,99413	0,255	0,250	succès
11	4,250	0,738	0,99298	0,99413	-0,335	0,125	échec
12	4,250	0,738	0,99298	0,99413	-0,335	0,063	échec
13	4,250	0,738	0,99298	0,99413	-0,341	0,031	échec
14	4,250	0,738	0,99298	0,99413	-0,358	0,016	échec
15	4,250	0,738	0,99298	0,99413	0,045	0,008	échec
16	4,250	0,738	0,99298	0,99413	0,089	0,004	échec
17	4,250	0,738	0,99298	0,99413	0,216	0,002	échec

TABLE 7.3 – Evolution en fonction des itérés des valeurs des paramètres de contrôle, des fonctionnelles objectif f_k et modèle m_k , de ρ_k et du rayon Δ_k de la région. Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St = 0,2$.

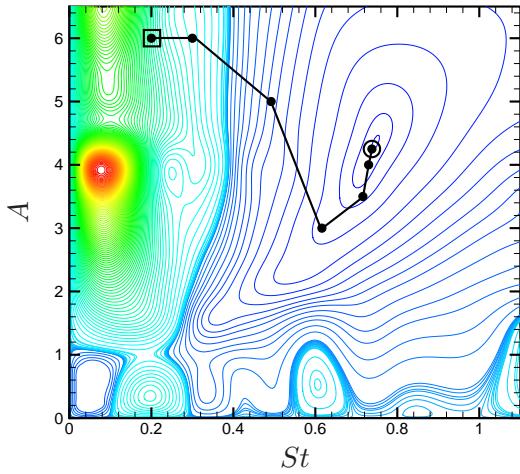


FIGURE 7.9 – Evolution des paramètres de contrôle dans le plan (A, St). Conditions initiales : $A = 6,0$ et $St = 0,2$.

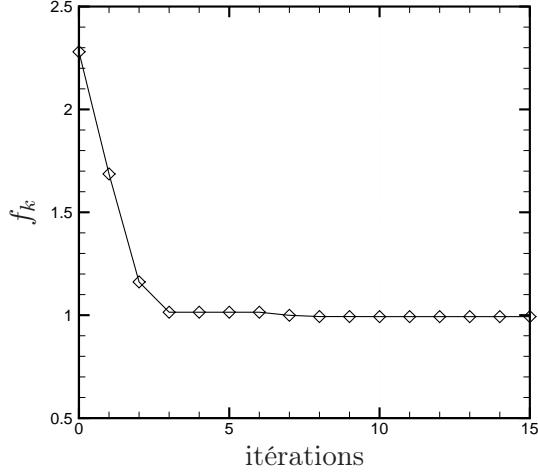


FIGURE 7.10 – Evolution de la fonction objectif en fonction du nombre d’itérations. Conditions initiales : $A = 6,0$ et $St = 0,2$.

pour l’écoulement forcé par les paramètres de contrôle optimaux, et pour l’écoulement de base stationnaire instable. Les profils de vitesse, en composante u , sont évalués à $t = 200$ pour différentes abscisses x/D . On constate que plus on s’éloigne du cylindre dans le sillage et plus les profils de vitesse obtenus pour l’écoulement contrôlé se rapprochent de ceux obtenus pour l’écoulement de base stationnaire instable. Dans ces deux cas, les profils présentent une symétrie par rapport à l’axe longitudinal de l’écoulement, tandis que les profils de vitesse obtenus pour l’écoulement non contrôlé ont un fort caractère anti-symétrique. Ces résultats sont généralisés à tout le sillage sur la figure 7.23. On constate, pour l’écoulement contrôlé et pour l’écoulement de base stationnaire instable, que les profils de vitesse dans le sillage proche ont une forme en "U", alors que les profils de vitesse dans un sillage plus éloigné ont une forme en "V" (Ma *et al.*, 2000).

L’inconvénient des procédures d’optimisation mises en œuvre dans cette étude est qu’il n’existe *a priori*

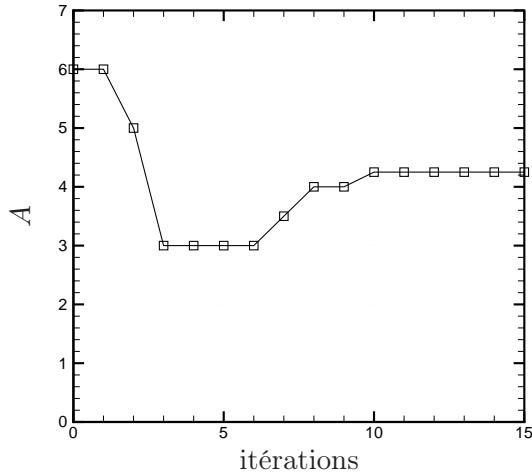


FIGURE 7.11 – Evolution de l'amplitude en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 6,0$ et $St = 0,2$.

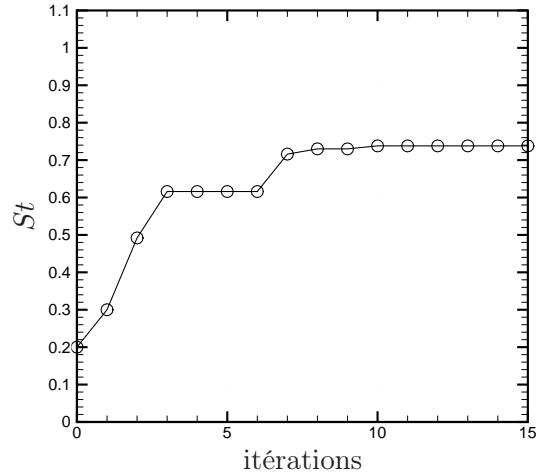


FIGURE 7.12 – Evolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre d'itérations. Conditions initiales : $A = 6,0$ et $St = 0,2$.

Itéré	A	St	f_k	m_k	ρ_k	Δ_k	état
0	6,000	1,000	1,04186	1,04645	1,000	0,500	succès
1	5,500	0,900	1,01924	1,02398	1,283	1,000	succès
2	4,500	0,700	0,99985	1,00247	0,559	1,000	succès
3	4,500	0,700	0,99985	1,00247	0,042	0,500	échec
4	4,000	0,730	0,99329	0,99794	1,118	1,000	succès
5	4,000	0,730	0,99329	0,99794	-0,518	0,500	échec
6	4,000	0,730	0,99329	0,99794	0,057	0,250	échec
7	4,250	0,738	0,99298	0,99413	0,255	0,250	succès
8	4,250	0,738	0,99298	0,99413	-0,335	0,125	échec
9	4,250	0,738	0,99298	0,99413	-0,335	0,063	échec
10	4,250	0,738	0,99298	0,99413	-0,341	0,031	échec
11	4,250	0,738	0,99298	0,99413	-0,358	0,016	échec
12	4,250	0,738	0,99298	0,99413	0,045	0,008	échec
13	4,250	0,738	0,99298	0,99413	0,089	0,004	échec
14	4,250	0,738	0,99298	0,99413	0,216	0,002	échec

TABLE 7.4 – Evolution en fonction des itérés des valeurs des paramètres de contrôle, des fonctionnelles objectif f_k et modèle m_k , de ρ_k et du rayon Δ_k de la région. Paramètres de contrôle initiaux : $A = 6,0$ et $St = 1,0$.

aucune preuve que le minimum atteint corresponde au minimum global de la fonction étudiée. En effet, il est souvent possible de prouver une convergence vers un extremum local de la fonction à optimiser, mais il n'existe à l'heure actuelle aucune information concernant l'éventuelle globalité de l'extremum obtenu. L'expérimentation numérique (figure A.1 et Bergmann, 2004) montre qu'il existe au moins un autre minimum local, auquel correspond une valeur du coefficient de traînée moyen égale à 1,24. Ce minimum est atteint pour des paramètres de contrôle égaux à $A = 0,5$ et $St = 0,05$. Il ne serait dès lors pas surprenant qu'il existe encore d'autres minima locaux.

Pour la même configuration d'étude, He *et al.* (2000) utilisent les équations de Navier-Stokes comme équations d'état dans une procédure d'optimisation. Les paramètres de contrôle optimaux obtenus dans leur étude sont $A = 3$ et $St = 0,74$. L'application de ces paramètres permet de réduire le coefficient de traînée moyen d'une valeur égale à 1,35 sans contrôle, à une valeur égale à 0,95. Une réduction relative de 30% est également obtenue.

Les différences entre les valeurs des paramètres de contrôle obtenus dans notre étude et dans celle de He

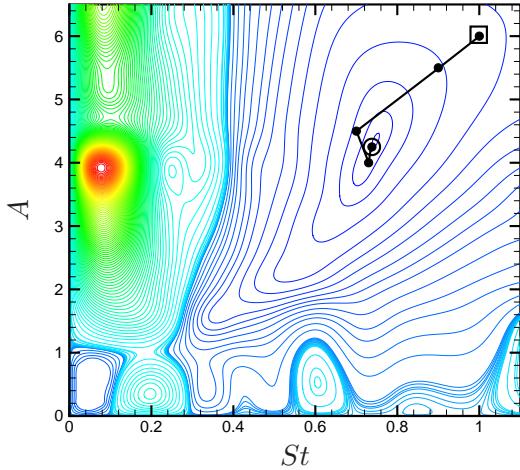


FIGURE 7.13 – Evolution des paramètres de contrôle dans le plan (A, St). Conditions initiales : $A = 6,0$ et $St = 1,0$.

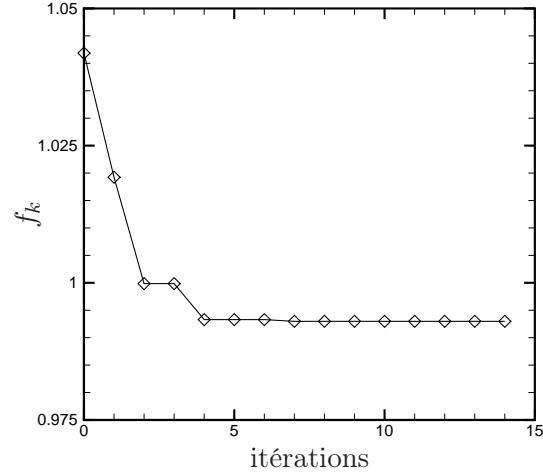


FIGURE 7.14 – Evolution de la fonction objectif en fonction du nombre d’itérations. Conditions initiales : $A = 6,0$ et $St = 1,0$.

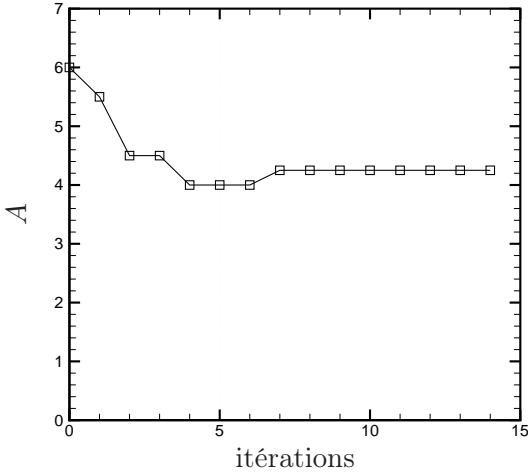


FIGURE 7.15 – Evolution de l’amplitude en fonction du nombre d’itérations. Conditions initiales : $A = 6,0$ et $St = 1,0$.

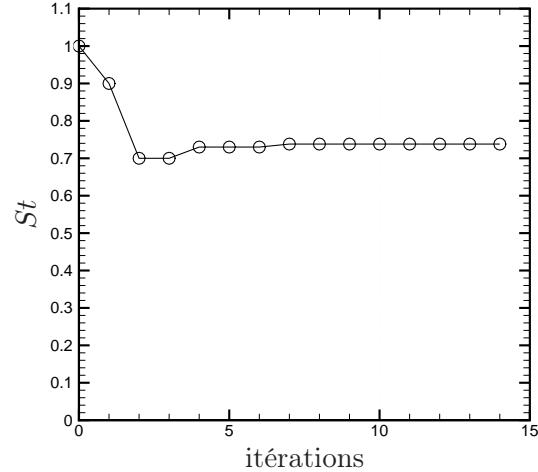


FIGURE 7.16 – Evolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre d’itérations. Conditions initiales : $A = 6,0$ et $St = 1,0$.

et al. (2000) peuvent traduire le fait qu’il s’agisse de deux minima locaux¹⁴. Mais les raisons les plus probables s’expliquent certainement par l’utilisation de méthodes numériques différentes pour résoudre les équations de Navier-Stokes. Les différentes écritures du coefficient de traînée peuvent également être à l’origine de résultats légèrement différents¹⁵.

Afin de prouver l’efficacité de la méthode d’optimisation présentée dans cette étude, les valeurs des paramètres de contrôle ne sont cependant pas primordiales. Le résultat important, est que ces valeurs correspondent effectivement au minimum déterminé par expérimentation numérique (voir figure A.1 et Bergmann,

14. Le minimum obtenu dans l’étude de He et al. (2000) n’a cependant pas été détecté dans notre étude par expérimentation numérique (voir figure A.1).

15. Le coefficient de traînée peut être évalué en formulation contraintes ou en formulation de vorticité. L’intégration sur le cylindre peut être effectuée en cartésien ou en cylindrique.

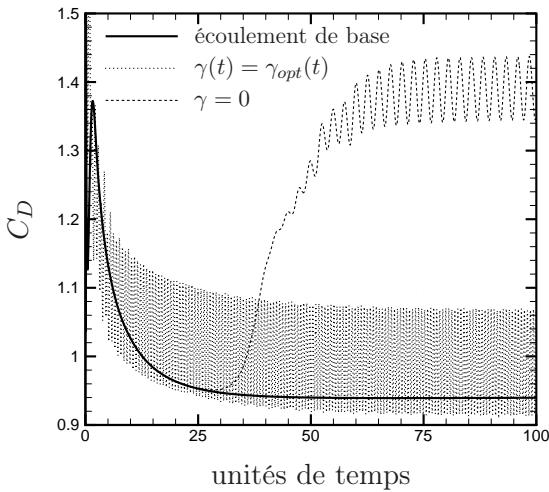


FIGURE 7.17 – Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de traînée dans le cas non contrôlé, dans le cas où le contrôle optimal est appliqué, et pour l'écoulement de base stationnaire instable.

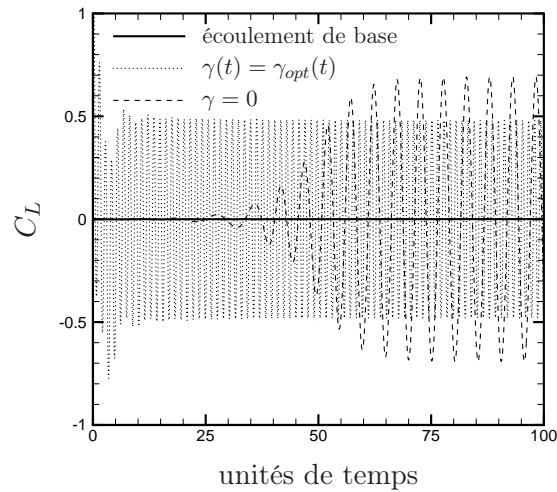


FIGURE 7.18 – Comparaison de l'évolution temporelle des coefficients de portance dans le cas non contrôlé, dans le cas où le contrôle optimal est appliquée, et pour l'écoulement de base stationnaire instable.

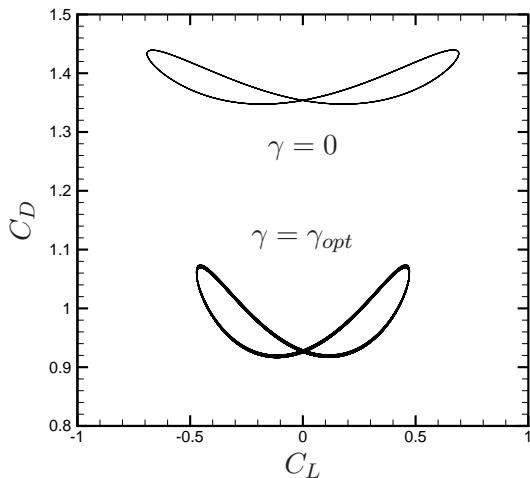


FIGURE 7.19 – Courbes polaires : évolution du coefficient de traînée en fonction du coefficient de portance. Le cycle haut correspond au cas non contrôlé et le cycle du bas correspond au cas où le contrôle optimal est appliquée.

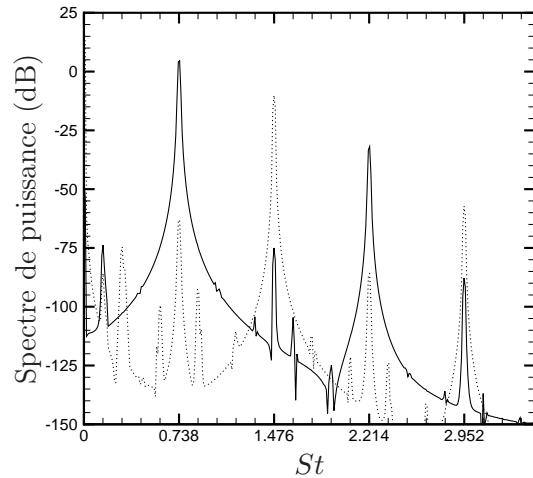


FIGURE 7.20 – Spectres de puissance du coefficient de traînée ··· et du coefficient de portance – pour l'écoulement contrôlé.

2004). Il est fort possible qu'une résolution plus fine des équations de Navier-Stokes, tant spatialement que temporellement¹⁶, fournirait des résultats légèrement différents. Cependant, ceci ne remet pas en cause la performance des méthodes numériques utilisées et mises au point dans cette étude.

16. On rappelle que l'ordre de discrétisation temporelle dans cette étude est égal à 1. Il serait sans doute intéressant de tester cette méthode d'optimisation avec un solveur plus efficace. Une méthode de discrétisation temporelle d'ordre 2 (A.D.I.) a été implémenté dans un nouveau solveur par D. Ruiz, M. Braza et Y. Hoarau à l'I.M.F.T. et à l'E.N.S.E.E.I.H.T. Dans cette optique, une collaboration avec l'I.M.F.T. serait souhaitable.

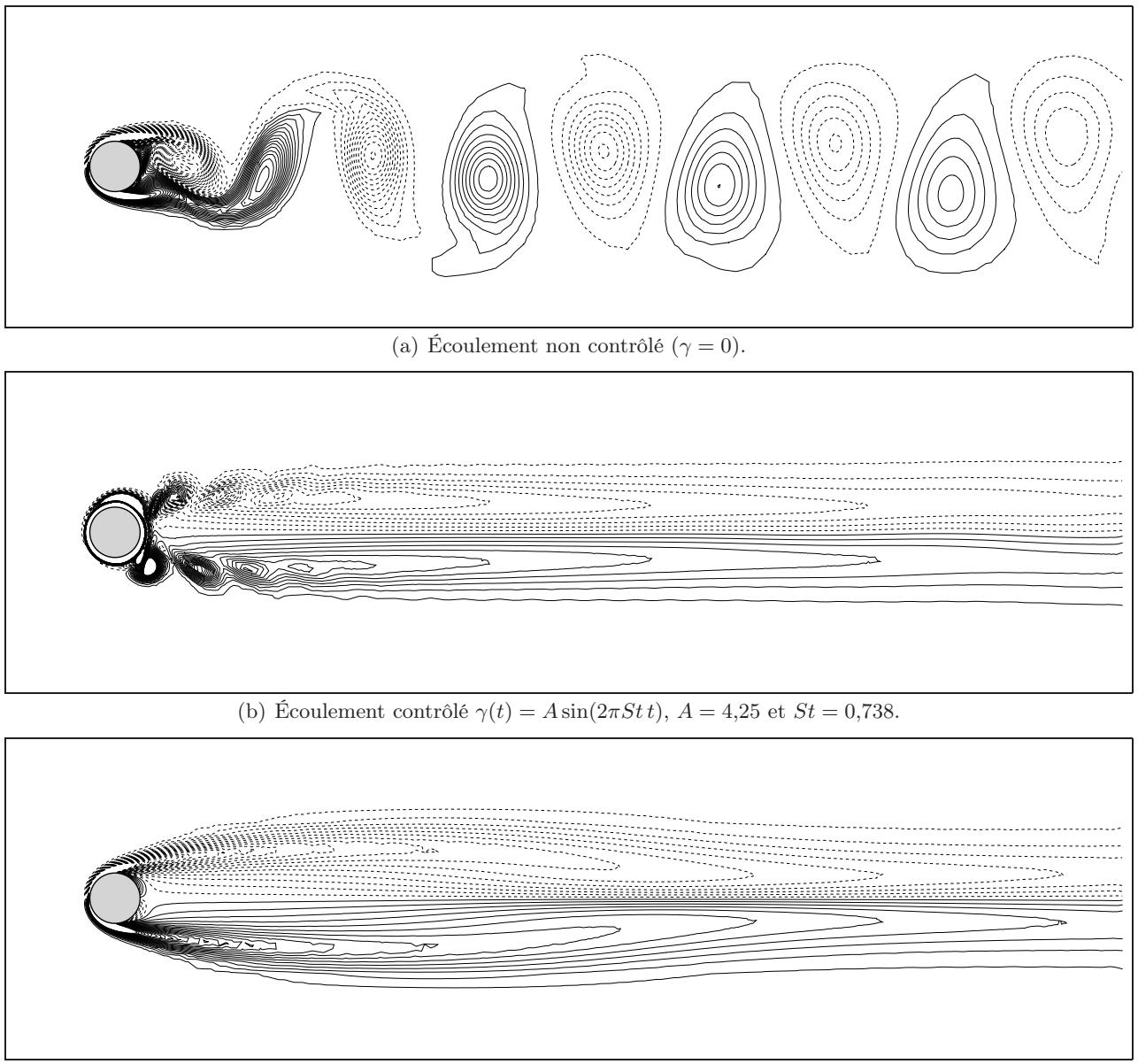


FIGURE 7.21 – Représentation des iso-contours de vorticité pour un écoulement non contrôlé, pour un écoulement contrôlé avec les paramètres de contrôle optimaux $A = 4,25$ et $St = 0,738$ et pour l'écoulement de base stationnaire instable.

Réduction des coûts de calcul

L'utilisation de méthodes à région de confiance couplées à des modèles réduits POD permet de réduire de manière significative les coûts de calcul, tant en encombrement mémoire qu'en temps CPU, pour atteindre un objectif fixé. Afin de chiffrer avec précision la réduction effective obtenue, les coûts de calcul engendrés dans notre étude peuvent être comparés à ceux obtenus par une méthode basée sur la théorie du contrôle optimal appliquée aux équations de Navier-Stokes (He *et al.*, 2000).

Afin d'obtenir des résultats pertinents concernant les coûts de calcul, les paramètres numériques suivants sont supposés être identiques dans notre étude et dans celle de He *et al.* (2000).

L'horizon d'étude est choisi égal à $T = 20$, et le pas de discrétisation temporelle égal à $\Delta t = 0,01$. Le maillage bidimensionnel utilisé comporte 12 000 noeuds. Nous pouvons également raisonnablement penser que le nombre d'itérations globales, qui correspond à la détermination d'une direction de descente couplée avec une

recherche linéaire, est identique dans les deux études (ici, nous avons effectué environ 10 itérations globales). Afin de simplifier les calculs, nous pouvons de ce fait raisonner par rapport à une seule de ces itérations. On s'intéresse alors uniquement à la détermination d'un gradient couplée avec une recherche linéaire.

En mémoire Le stockage mémoire concerne uniquement l'évaluation du gradient de la fonction objectif. On considère alors une seule résolution du système optimal, sans recherche linéaire.

- Système d'état Navier-Stokes, He *et al.* (2000) : afin de déterminer le gradient de la fonction objectif, il est nécessaire de stocker en mémoire les trois variables d'état (2 composantes de vitesse plus le champ de pression) ainsi que les trois variables adjointes associées. Dans le cas où les équations de Navier-Stokes sont utilisées, ces variables peuvent être évaluées sur une base locale de type éléments finis. Il est alors nécessaire de stocker toutes les variables en chaque nœud du maillage. Ces variables doivent également être stockées à chaque pas de temps. Il est alors nécessaire de stocker en mémoire $Nv = (\text{nombre de variables}) \times (\text{nombre de nœud du maillage}) \times (\text{nombre de pas de temps})$ valeurs. Numériquement, on obtient $Nv = (3 \times 2) \times (12\,000) \times (20/0,01) = 144$ millions de valeurs.
- Système d'état POD, présente étude : afin de restituer 99,9% de l'énergie totale du système, on conserve environ 14 modes Galerkin. Le mode correspondant au champ moyen, ainsi que 5 modes de non-équilibre sont également utilisés. On a donc 20 variables d'état. Les coefficients du système réduit POD doivent également être stockés, soit 3 coefficients linéaires, 2 coefficients quadratiques et 1 coefficient cubique (la base POD peut éventuellement être stockée pour une utilisation ultérieure, soit $20 \times 12\,000$ valeurs). On est donc amené à stocker $(20 \times 2) \times (20/0,01) + (3 \times 20 + 2 \times 20^2 + 20^3) = 88\,860$ variables.

L'utilisation d'un modèle d'ordre réduit POD, en lieu et place du modèle de Navier-Stokes, dans un processus de contrôle optimal, permet de réduire le stockage mémoire d'un facteur égal à $144\,000\,000/88\,860 \simeq 1\,600$.

Si la base POD est conservée, on doit stocker $88\,860 + 20 \times 12\,000 = 332\,860$ variables. La reduction obtenue est alors égale à 440.

En temps de calcul A chaque itération, la résolution du système d'état de Navier-Stokes est remplacé par la résolution d'un système d'état POD. On peut légitimement estimer que le coût de calcul associé à la résolution du système POD est égale à 1% du temps de calcul associé à la résolution du système de Navier-Stokes. La même estimation peut être effectuée en ce qui concerne les équations adjointes, les conditions d'optimalité et la recherche linéaire. Pour générer le système réduit POD, il est cependant nécessaire de résoudre les équations de Navier-Stokes. Les coûts de calcul intervenant pour construire et résoudre le système d'état POD sont du même ordre de grandeur que ceux intervenant pour uniquement résoudre le système d'état de Navier-Stokes. Le temps de résolution des équations adjointes et des conditions d'optimalité construites par POD, plus une recherche linéaire, est négligeable devant leurs homologues construites par Navier-Stokes. Une évaluation numérique donne¹⁷ :

$$\frac{\overbrace{1 \times \text{eqs. Navier-Stokes}}^{\text{temps système optimal POD}}}{\underbrace{1 \times \text{eqs. Navier-Stokes} + 1 \times \text{eqs. adjointes} + N_{CO} \times \text{C.O.} + N_{RL} \times \text{eqs. Navier-Stokes (RL)}}_{\text{temps système optimal Navier-Stokes}}} \leq \frac{1}{4}.$$

temps recherche linéaire

Le temps de calcul associé à la construction et à la résolution du système optimal réduit POD est inférieur à $\frac{1}{4}$ du temps nécessaire à la résolution d'un système optimal Navier-Stokes.

Dans cette étude, il a également été nécessaire de déterminer des modes POD de non-équilibre. Pour chaque mode, une résolution du modèle de Navier-Stokes est nécessaire. Le temps total pour aboutir à l'objectif fixé est alors légèrement augmenté.

17. N_{RL} correspond au nombre d'étapes de recherches linéaire effectuées le long d'une direction de descente. On a $N_{RL} \geq 1$. De même, N_{CO} correspond au nombre de conditions d'optimalité. On a également $N_{CO} \geq 1$.

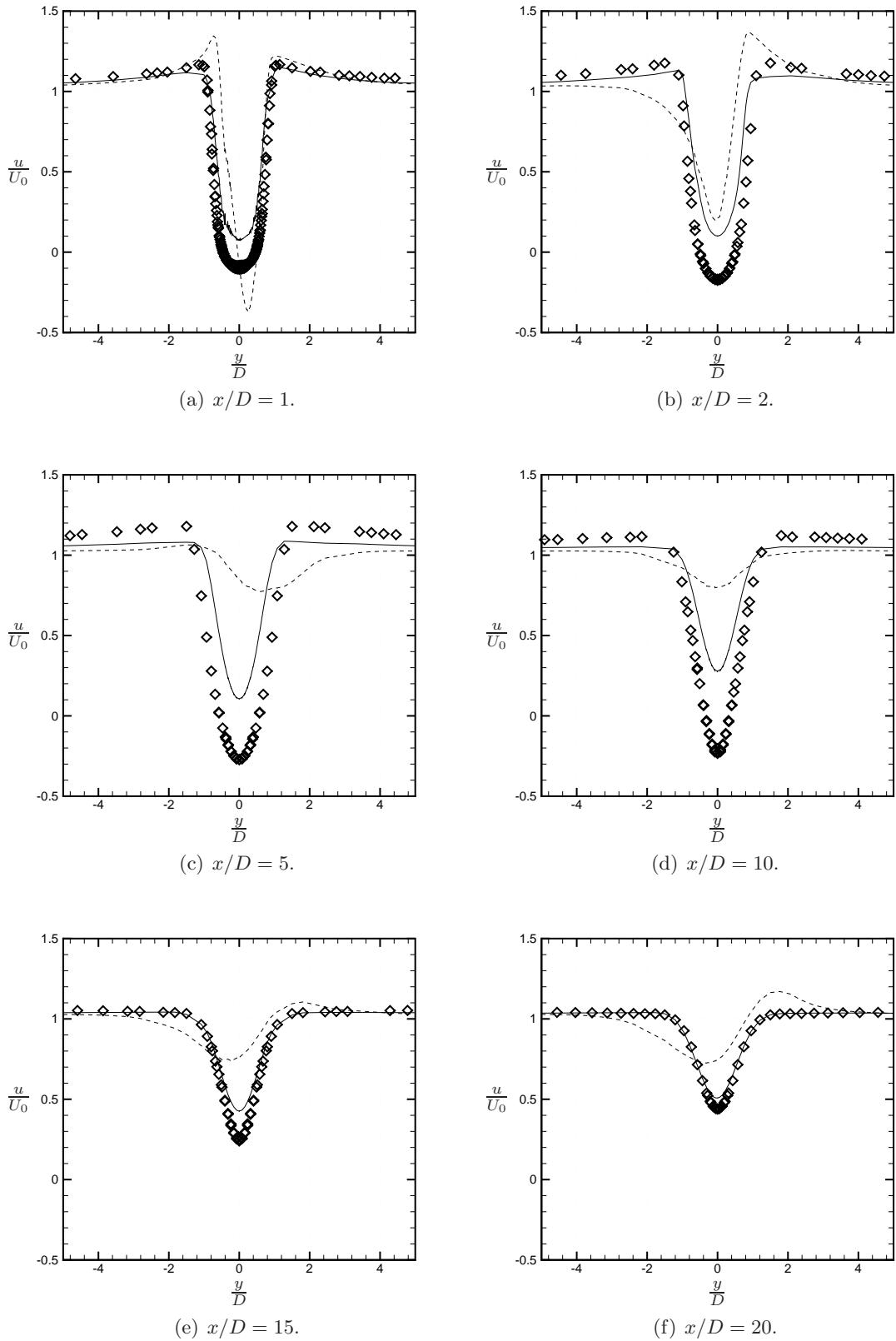


FIGURE 7.22 – Comparaison des valeurs de la composante u de vitesse à différentes abscisses situées dans le sillage du cylindre. Écoulement naturel (---), écoulement forcée par les paramètres de contrôle optimaux (—) et écoulement de base stationnaire instable (\diamond).

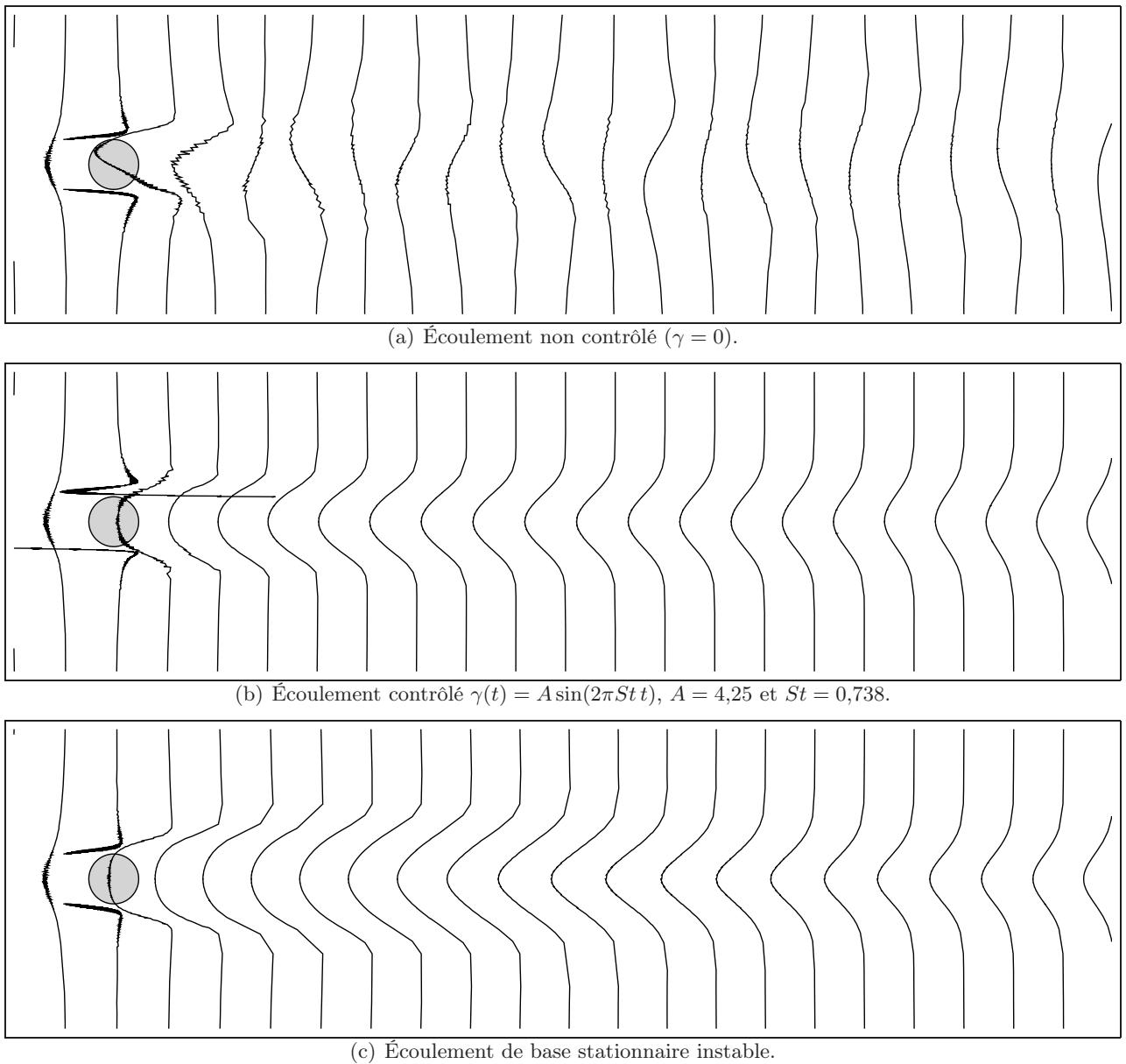


FIGURE 7.23 – Représentation des valeurs de la composante de vitesse u à différentes abscisses x pour un écoulement non contrôlé, pour un écoulement contrôlé avec les paramètres de contrôle optimaux $A = 4,25$ et $St = 0,738$ et pour l'écoulement de base stationnaire instable.

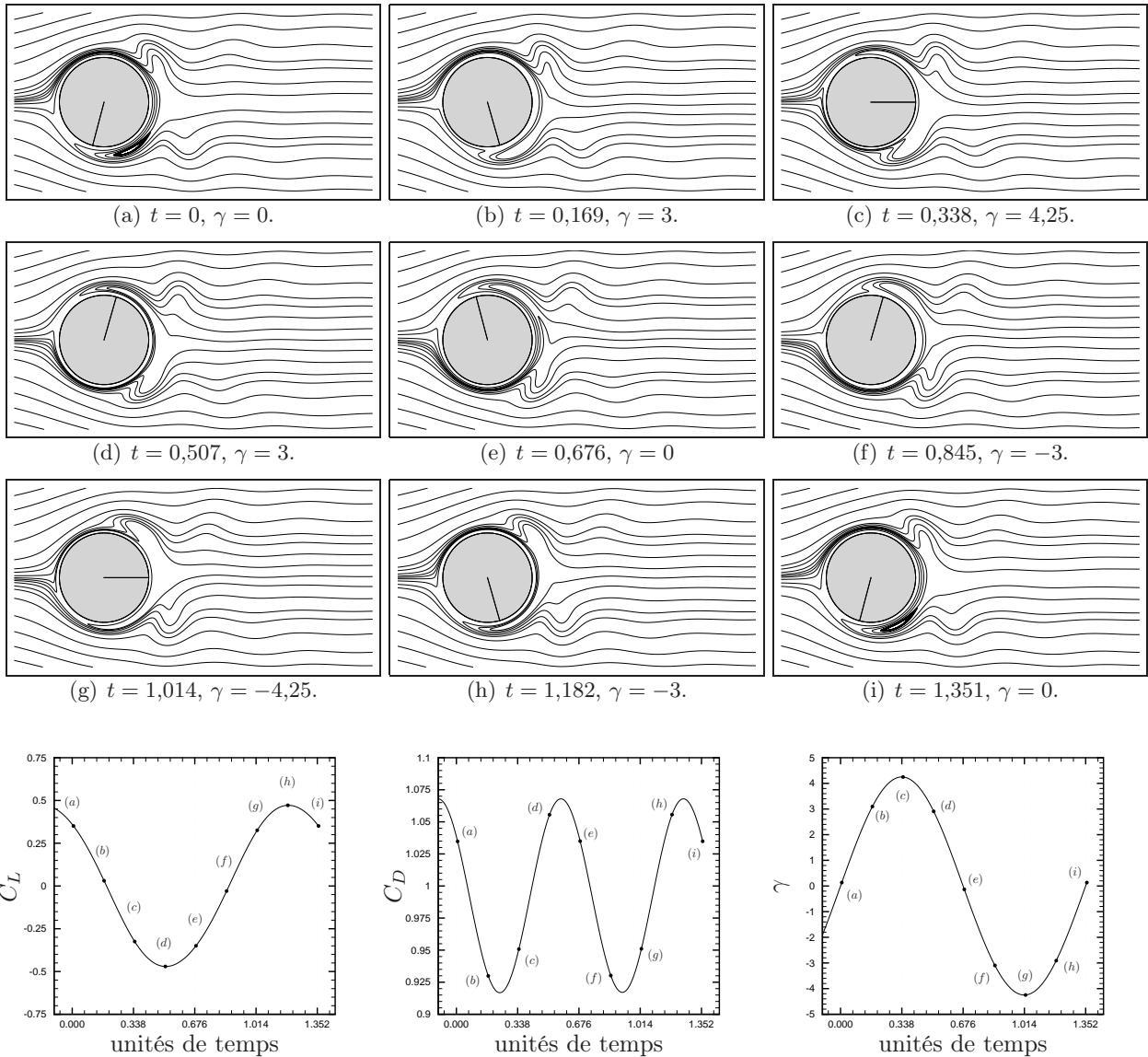


FIGURE 7.24 – Représentation des lignes de courant et évolution temporelle des coefficients de portance (C_L), de traînée (C_D) et de la loi de contrôle (γ) pendant une période de l’écoulement contrôlé ($\gamma(t) = A \sin(2\pi St t)$ avec $A = 4,25$ et $St = 0,738$).

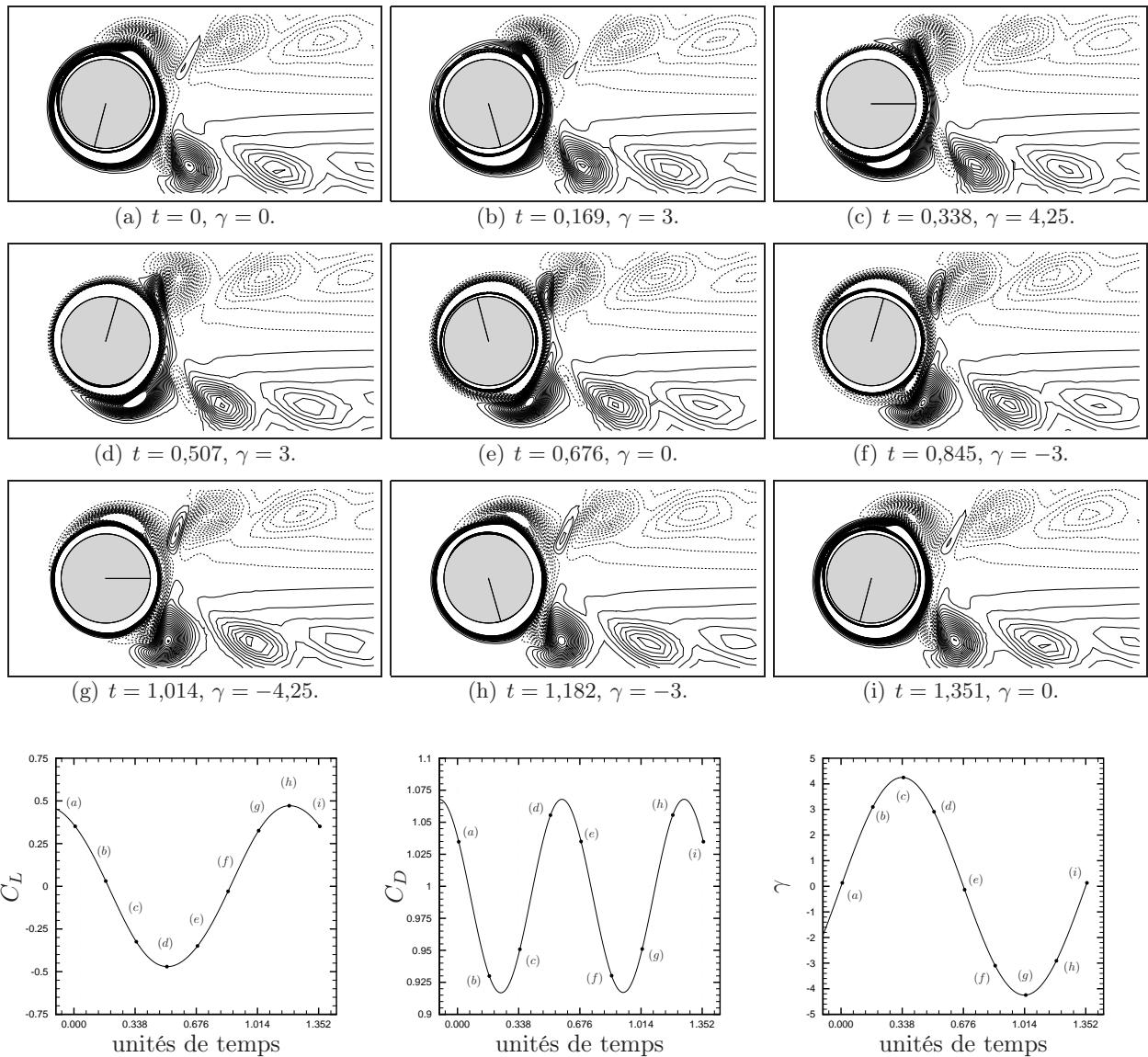


FIGURE 7.25 – Représentation des iso-contours de vorticité $(-20; 20)$ et évolution temporelle des coefficients de portance (C_L), de traînée (C_D) et de la loi de contrôle ($\gamma(t)$) pendant une période de l'écoulement contrôlé ($\gamma(t) = A \sin(2\pi Stt)$ avec $A = 4,25$ et $St = 0,738$).

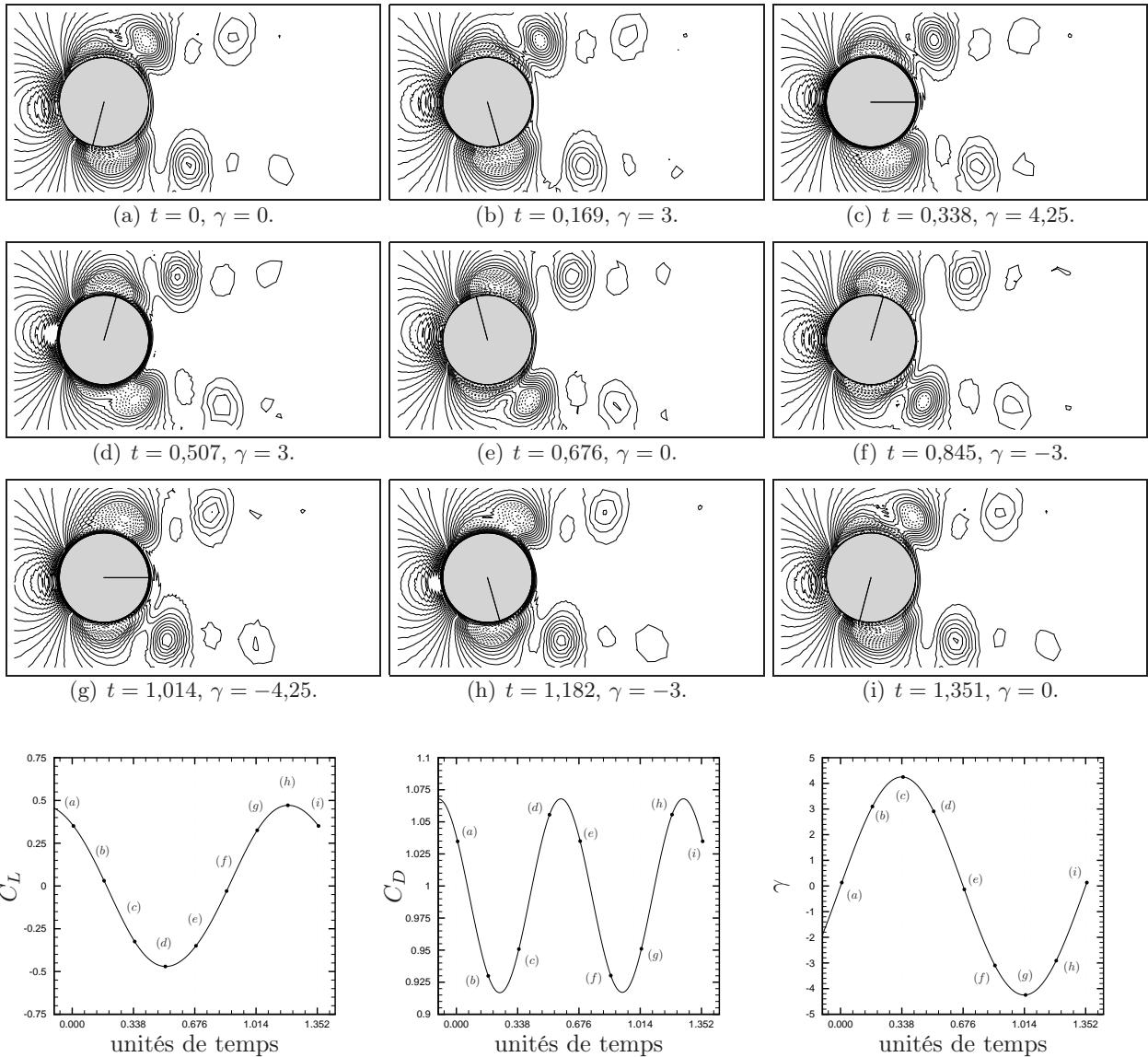


FIGURE 7.26 – Représentation des isobares et évolution temporelle des coefficients de portance (C_L), de traînée (C_D) et de la loi de contrôle (γ) pendant une période de l’écoulement contrôlé ($\gamma(t) = A \sin(2\pi Stt)$ avec $A = 4,25$ et $St = 0,738$).

7.5 Conclusions

Une procédure d’optimisation couplant méthodes à région de confiance et modèles réduits basés sur la POD a été mise en œuvre. Comme dans le chapitre précédent, l’objectif était de minimiser le coefficient de traînée moyen du cylindre. Les paramètres de contrôle étaient l’amplitude A et la fréquence St de la vitesse tangentielle du cylindre. Les paramètres de contrôle obtenus dans cette étude sont $A = 4,25$ et $St = 0,738$. Le coefficient de traînée moyen est réduit d’une valeur égale à 1,39 sans contrôle à une valeur égale à 0,99 lorsque ces paramètres de contrôle sont appliqués, soit une réduction relative égale à 30%. Non seulement le coefficient de traînée moyen est réduit, mais il est minimisé. En effet, l’utilisation de méthodes à région de confiance prouve mathématiquement la convergence des paramètres de contrôle obtenus sur le modèle réduit vers les paramètres de contrôle optimaux du système Navier-Stokes. En se référant à l’expérimentation numérique (voir figure A.1), on constate que les paramètres de contrôle obtenus par la présente procédure d’optimisation sont confondus avec les paramètres qui minimisent le coefficient de traînée moyen, au moins dans la zone étudiée par expérimentation numérique. Cependant, rien ne prouve que le minimum obtenu soit global. Par exemple, He *et al.* (2000), en appliquant la théorie du contrôle optimal directement aux équations

de Navier-Stokes, obtiennent des résultats qui semblent correspondre à un autre minimum. Dans leur étude, la valeur du coefficient de traînée moyen passe d'une valeur égale à 1,35 sans contrôle à une valeur égale à 0,95 lorsque les paramètres de contrôle "optimaux" $A = 3$ et $St = 0,74$ sont appliqués, soit encore une réduction relative de 30%. La complexité de la fonction définie par le coefficient de traînée moyen suggère qu'il existe plusieurs minima locaux. Les méthodes d'optimisation actuelles ne sont pas en mesure de justifier de la globalité d'un minimum. La pratique montre tout de même que des méthodes basées sur des algorithmes génétiques permettent, pour des coûts de calcul très élevés, de déterminer le minimum global d'une fonction, même si aucune preuve mathématique de ce résultat n'existe.

La méthode décrite dans ce chapitre permet toutefois de réduire considérablement les coûts de calcul. Ainsi, le système optimal obtenu en utilisant un modèle POD en lieu et place du modèle de Navier-Stokes comme système d'état, permet de stocker 600 fois moins de valeurs numériques et est résolu environ 4 fois plus rapidement. Ces résultats correspondent à une évaluation réalisée pour des écoulements bidimensionnels, et il est tout à fait imaginable que l'on puisse obtenir des réductions de coûts de calcul encore bien plus importantes pour des écoulements tridimensionnels. On voit donc bien l'intérêt d'utiliser des modèles d'ordre réduits, et ce, tout en gardant des preuves de convergence pour la solution obtenue.

