Probabilités

Cours de Olivier François
Notes de Julien Henry

Ensimag 1A

1 Simulation

On va décrire quelques méthodes de simulation de variables aléatoires. L'objectif est de pouvoir générer des variables aléatoires de lois classiques.

***Définition* 1.** SIMULATION
Le principe d'une simulation est de produire une variable X de loi donnée, soit par sa fonction de répartition F, soit par sa densité à partir d'un générateur de variables $U(0, 1$ indépendantes.

1.1 Méthode d'inversion

$$\forall x \in (0,1), F^{-1}(U) = \inf\{t \in \mathbb{R}, F(t) \geq u\}$$

On a alors

$$X = F^{-1}(U)$$

où U soit la loi $U(0,1)$.

1.2 Méthode de mélange

***Définition* 2.** Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de densité de probabilité. On dit que f est un **mélange** si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) + \dots$$

Algorithme :

1. Tirer N selon la loi p_n
2. Sachant que $N = n$, simuler f_n.

1.3 Méthode de rejet

Soit f une densité sur $[0, 1]$ et

$$C = \max_{[0,1]} f(x)$$

Il faut alors faire :

```
Repeter
U <- ALEA
V <- ALEA
Jusqu'à (V < f(U)/C)
X <- U
```

X admet f par densité.

Exemple. Loi $\varepsilon(\lambda), \lambda > 0$

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0 \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

$U \sim U(0,1)$,

$$X = -\frac{1}{\lambda}\log(U)$$

Soit $t \leq 0$:

$$\begin{aligned} P(X \leq t) &= P(-\log U \leq \lambda t) \\ &= P(U \geq e^{-\lambda t}) \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Dogme de l'inversion : Si $t \geq 0, U = 1 - e^{-\lambda t}$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{\lambda}\log(1-x)$$

Remarque. U et $1-U$ ont la même loi, donc :

$$X \longleftarrow -\frac{1}{\lambda}\log(ALEA)$$

est la manière standard de "programmer" l'inversion.

Exemple. On va calculer l'inverse généralisée de :

$$F(t) = \begin{cases} 0 \ si \ t < 0 \\ \dfrac{1+t}{2} \ sit \in [0,1] \\ 1 \ sinon \end{cases}$$

On voit déjà que :

$$\forall u \leq \frac{1}{2}, F^{-1}(u) = 0$$

$$\forall u \geq \frac{1}{2}, F^{-1}(u) = 2u - 1$$

Donc l'algorithme d'inversion nous dit que :

$$X = (2U-1)\,\mathbb{1}_{(U > \frac{1}{2})}$$

Propriété 1.

$$F^{-1}(u) \leq t \Leftrightarrow u \leq F(t)$$

Démonstration. Preuve de l'algorithme d'inversion
Soit $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(X \leq t) &= P(F^{-1}(U) \leq t) \\ &= P(U \leq F(t)) \\ &= F(t) \end{aligned}$$

Si on reprend l'exemple, on a :

$$\begin{aligned} P(X \leq 0) &= \frac{1}{2} \\ P(x < 0) &= 0 \end{aligned}$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

Avec la probabilité $\frac{1}{2}, X = 0$, sinon $X = U$.

$$X = B \times U$$

Avec $B \sim B(1, \frac{1}{2})$.

$$X = \mathbb{1}_{Pile} \times U$$

Autrement dit, on peut considérer $N \in \{1, 2\}$ tel que $p_1 = \frac{1}{2} = p_2$.
Si $N = 1$, alors on simule selon δ_0
Si $N = 2$, alors on simule selon $U(0, 1)$ □

Démonstration. Methode de mélange
Après 1. et 2., on obtient X :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, P(X \leq t) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X \leq T | N = n) P(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \left(\int_{-\infty}^{t} f_n(x)\ dx \right) \\
&= \int_{-\infty}^{t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} p_n f_n(x) \right) dx
\end{aligned}$$

Par définition, cela signifie que :

$$f_X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_n(x)$$

□

Exemple.

$$f_X(x) = \left(x + \frac{1}{4} \right) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \frac{1}{4} \mathbb{1}_{[1,2]}(x)$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 \ si\ t \leq 0 \\ \frac{2t^2+t}{4} \ si\ t \in (0, 1) \\ \frac{3}{4} + \frac{t}{4} \ si\ t \in (1, 2) \end{cases}$$

En fait, on peut dire que :

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \frac{1}{4} \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \\
&= \frac{1}{2}(2x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \right) \\
&= \frac{1}{2} f_1(x) + \frac{1}{2} f_2(x)
\end{aligned}$$

Simulation : $N \in \{1, 2\}, P(N = 1) = P(N = 2) = \frac{1}{2}$.

$$\text{Si } (N = 1), \text{ alors } X = \sqrt{(}U)$$
$$\text{Sinon } X = 2U$$

Etudier : Sachant que $B \sim B(1, \frac{1}{2})$,

$$X = B\sqrt{(}U) + (1 - B)2U$$

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[B]E[\sqrt{U}] + E[1 - B]E[2U] \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\
E[X^2] &= E[BU + (1 - B)4U^2] \\
&= \frac{1}{4} + \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

2 Fonctions génératrices

Définition 3. Soit X une variable aléatoire entière. Soit z un nombre tel que $|z| \leq 1$. On définit la fonction génératrice :

$$\begin{aligned} G_X(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\ z^n \\ &= E[z^X] \end{aligned}$$

Propriété 2. *G_X caractérise la loi de X. Si G_X est à la fois dérivable au point $z = 1$, alors on a*

$$\begin{aligned} G'_X(1) &= E[X] \\ G''_X(1) &= E[X(X-1)] \\ \Rightarrow Var(x) &= G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

Propriété 3. Indépendance
Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)\ G_Y(z)$$

1. $z^X = \varphi(X)$

$$E[\varphi(X)] = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)\ P(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\ P(X=n)$$

2. Caractérisation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

$$G_X(1) = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} G_X(z)\Big|_{z=1} &= \frac{\partial}{\partial z} E[z^X]\Big|_{z=1} \\ &= E\left[\frac{\partial}{\partial z} z^X\right]\Big|_{z=1} \\ &= E[X z^{X-1}]\big|_{z=1} \\ &= E[X] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= E\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} z^X\right]\Big|_{z=1} \\ &= E[X(X-1)z^{X-2}]\big|_{z=1} \\ &= E[X^2] - E[X] \\ Var(X) &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

Exemple. X et Y indépendantes. Loi de $X+Y$?

$$\begin{aligned} G_{X+Y} &= E[z^{X+Y}] \\ &= E[z^X z^Y] \\ &= E[z^X]E[z^Y] \end{aligned}$$

2.1 Lois classiques

2.1.1 Bernoulli

$X \in \{0,1\}$, $P(X=1)=p$

$$X = \mathbb{1}_A$$
$$P(A) = p = 1-q$$
$$G_X(z) = P(X=0) + P(X=1)z = q + pz$$
$$E[X] = p$$
$$Var(X) = G'_X(1) - G'_X(1)^2 = p - p^2 = pq$$

2.1.2 Binômiale : $Bin(n,p)$

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

X_i suit la loi $B(1,p)$. Les X_i sont indépendants.

$$G_X(z) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(z) = (q+pz)^n$$
$$E[X] = np$$
$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = nqp$$

2.1.3 Loi géométrique : $G(p)$

$$P(X=n) = p(1-p)^{n-1}, n \geq 1$$
$$G_X(z) = pz \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} z^{n-1} = \frac{pz}{1-qz}$$
$$G'(z) = \left.\frac{p}{(1-qz)^2}\right|_{z=1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$
$$G''(z) = \left.\frac{2pq}{(1-qz)^3}\right|_{z=1} = \frac{2q}{p^2}$$
$$E[X] = \frac{1}{p}$$
$$Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

Remarque. $p = \frac{1}{10}$, $E[X] = 10$

$$Var(X) = \frac{9}{10} * 100 = 90$$
$$SD(X) = \sqrt{Var(X)} = 9,5$$

SD = standard derivation = écart type

2.1.4 Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

$$P(X=n)=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, n\geq 0$$
$$G_X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}}{n!}\lambda^n z^n = e^{-\lambda}e^{\lambda z}=e^{\lambda(z-1)}$$
$$E[X]=\lambda=Var(X)$$

Exemple. Si $X\equiv\mathcal{P}(\lambda)$ et $Y\equiv\mathcal{P}(\mu)$, X et Y indépendantes. Alors

$$X+Y\equiv\mathcal{P}(\lambda+\mu)$$
$$G_{X+Y}(z)=G_X(z)G_Y(z)=e^{\lambda(z-1)+\mu(z-1)}=e^{(\lambda+\mu)(z-1)}$$

Remarque. Lien avec l'analyse Le produit de convolution devient un produit classique.

$$\begin{aligned}P(X+Y=n) &= \sum_{i=0}^{n}P(X+Y=n|X=i)P(X=i)\\ &= \sum_{i=0}^{n}P(Y=n-i|X=i)P(X=i)\\ &= \sum_{i=0}^{n}P(Y=n-i)P(X=i)\\ &= P_Y * P_X(n)\end{aligned}$$

Exemple. Sommes aléatoires
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi G_X. Soit N indépendante de X_n, de loi G_N.

$$S=X_1+X_2+\cdots+X_N$$

Résultat : $G_S(z)=G_N(G_X(z))$

$$\begin{aligned}E[z^S] &= E\left[\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{1}_{N=n}z^{X_1+\cdots+X_n}\right]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}E[\mathbb{1}_{N=n}z^{X_1+\cdots+X_n}]\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}P(N=n)(E[z^{X_1}])^n\\ &= G_N(E[z^{X_1}])\end{aligned}$$

3 Fonctions caractéristiques

***Définition* 4.** Soit X une variable aléatoire réelle de loi de densité f_X. On définit la fonction caractéristique par :

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R}, \Phi_X(t) &= \int e^{itx}f_X(x)\\ &= E[e^{itX}]\\ &= E[z^X], z=e^{it}\end{aligned}$$

Propriété 4. *Φ_X caractérise la loi de X :*

$$\forall x\in\mathbb{R}, f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int e^{itx}\Phi_X(t)\ dt$$

Propriété 5. *Si X^k est intégrable, alors la fonction caractéristique est k fois dérivable en 0.*

$$E[X^k] = (-i)^k \Phi_X^{(k)}(0)$$

Propriété 6. *Si X est Y sont indépendantes, alors :*

$$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t)$$

Exemple. Loi Normale
La fonction caractéristique de la loi normale $N(0,1)$ est :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_X(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$$

Exemple. Loi $\varepsilon(\lambda, \lambda > 0$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x), x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi_X(t) &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{itx-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda - it)x} dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - it} \end{aligned}$$

$$\Phi_X(t) = \frac{1}{1 - i\frac{t}{\lambda}}$$

Exemple. Loi $G(a, \lambda), a > 0, \lambda > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

$(a = 1)$, $G(1, \lambda) \equiv \varepsilon(\lambda)$

$$\Phi_X(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-(\lambda - it)x} dx$$

On effectue un changement de variables : $y = (\lambda - it)x$, $dy = (\lambda - it)dx$

$$\Phi_X(t) = \lambda^a \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(\lambda - it)^a} = \left(\frac{1}{1 - i\frac{t}{\lambda}} \right)^a$$

Exemple. Somme de deux variables indépendantes : $X + Y$

$$\begin{aligned} \Phi_{X+Y}(t) = E[e^{it(X+Y)}] &= E[\underbrace{e^{itX} - e^{itY}}_{\text{indépendance}}] \\ &= E[e^{itX}]E[e^{itY}] \\ &= \Phi_X(t)\Phi_Y(t) \end{aligned}$$

Exemple. Application du précédent
$\begin{cases} X \sim \varepsilon(\lambda) \\ Y \sim \varepsilon(\lambda) \end{cases}$, avec X, Y indépendantes.

$$\begin{aligned} \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t) & \\ &= \left(\frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}} \right)^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $X+Y$ sut la loi $G(a=2,\lambda)$. En général, X et Y indépendantes avec :

$$\begin{cases} X \sim G(a,\lambda) \\ Y \sim G(b,\lambda) \end{cases}$$

Alors on peut en déduire que $X+Y$ suit $G(a+b,\lambda)$.
Exemple. Calcul des moments : $(E[X], E[X^2], \dots)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\Phi_X(t) &= \frac{\partial}{\partial t}E[e^{itX}]\Big|_{t=0} \\ &= E\left[\frac{\partial}{\partial t}e^{itX}\right]\Big|_{t=0} \\ &= iE[Xe^{itX}]\big|_{t=0} \\ &= iE[X] \end{aligned}$$

D'où $E[X] = \frac{1}{i}\Phi'_X(0) = (-i)\Phi_X(0)$. Si X^2 est intégrable, alors

$$\Phi''_X(0) = -E[X^2]$$

Exemple. Application à la loi $\varepsilon(\lambda)$

$$\begin{aligned} \Phi_X(t) &= \frac{1}{1-i\frac{t}{\lambda}} \\ \Phi'_X(0) &= \frac{\frac{i}{\lambda}}{\left(1-i\frac{t}{\lambda}\right)^2}\Bigg|_{t=0} \\ &= \frac{i}{\lambda} \end{aligned}$$

Donc $E[X] = \frac{1}{\lambda}$. En dérivant deux fois, on obtient :

$$E[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$$

Exemple. Loi normale $N(0,1)$
$E[X]=0$, $E[X^2] = Var(X) = 1$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, Var(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} E[e^{itX}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{itx-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{2}+itx-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx \end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $y = x - it$, $dy = dx$.

$$E[e^{itX}] = e^{-\frac{t}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy\right)$$

Exemple. Loi normale $N(m,\sigma^2)$
$Y = m + \sigma X$. $E[Y] = m$, et $Var(X) = \sigma^2$.

$$\forall y \in \mathbb{R}, f_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_Y(t) &= E[e^{itY}] \\
&= E[e^{itm+it\sigma X}] \\
&= e^{itm}E[e^{i(t\sigma)X}] \\
&= e^{itm}\Phi_X(t\sigma) \\
&= e^{itm-\frac{t^2\sigma^2}{2}}
\end{aligned}$$

Exemple. TENDANCE VERS LA LOI NORMALE
Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes, d'espérance 0, de variance $Var(X_i) = \sigma^2$, de même loi. On forme :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E[S_n] = 0.\ Var[S_n] = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n\sigma^2.\ Z_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma}.\ Var[Z_n] = 1.$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{Z_n}(t) = E[e^{it\frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma}}] & \\
&= \Phi_{S_n}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \\
&= \Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n
\end{aligned}$$

On fait un développement limité :

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) &\approx \Phi_X(0) + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\underbrace{\Phi'_X(0)}_{=0} + \frac{t^2}{2\sigma^2 n}\Phi''_X(0) \\
&\approx 1 - \frac{t^2}{2\sigma^2 n}E[X^2] \\
&\approx 1 - \frac{t^2}{2n}
\end{aligned}$$

$$\Phi_{Z_n}(t) \approx e^{-\frac{t^2}{2}}$$