TME Semaine 4 - Prise en main de GLPK

Les exercices 1 et 2 sont obligatoires et les réponses à ces exercices doivent être soumises sur Moodle avant la fin de la séance. Le rendu à prévoir est un fichier texte, avec vos solutions et justifications pour chacune des questions. Si vous travaillez en binômes, une seule soumission est nécessaire, en indiquant bien vos deux noms sur le fichier.

1 Prise en main

Exercice 1 : Résolution d'un programme linéaire

Q 1.1. Résoudre à l'aide de GLPK le programme linéaire suivant :

$$
\begin{array}{rccccccc}
max\ z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 5 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 7 \\
 & x_i \geq 0, & \forall & i \in & \{1, \ldots, 3\} & & &
\end{array}
$$

Q 1.2. Donner la solution et la valeur d'une solution optimale en utilsant GLPK (format .lp). Indiquer quelles sont les contraintes du problèmes qui sont serrées (c'est-à-dire qui ont atteint leur borne). Indiquer les variables en bases et hors-bases de la formulation standard.

Q 1.3. Augmenter de 1 la valeur du terme de droite de la deuxième contrainte, que remarquez-vous concernant la base optimale ainsi que sa solution et sa valeur ? Pouvait-on prévoir la nouvelle valeur optimale ? Même question, si, à la place, on augmente de 1 le terme de droite de la contrainte 1.

2 Etude de cas

Exercice 2 : Aide à la décision pour une exploitation laitière

Un exploitant laitier dispose de 60 kilo-litres (kl) de lait qu'il peut soit transformer en produits laitiers, soit vendre sous forme de lait cru. Les produits laitiers sont soit des fromages, soit des yaourts. L'exploitant ne dispose que de 2600 euros à investir pour l'exploitation de ses 60 kl.

Les frais d'exploitation et les gains attendus pour ces trois types de production sont indiqués dans le tableau suivant :

	Frais d'exploitation en euro/kl	Gains en euro/kl
Fromages	65	90
Yaourts	70	90
Lait cru	40	70

Q 2.1.
a) En tenant compte du fait que les frais d'exploitation sont à déduire des gains, écrire (en le justifiant) le programme linéaire permettant de maximiser les bénéfices de l'entreprise.
b) Indiquez la solution et vérifiez que le bénéfice obtenu est 1800 euros.

Q 2.2. Est-il rentable d'utiliser au moins 10 kl pour les produits laitiers ?

Q 2.3. A partir de quel bénéfice (par kl), l'exploitant a-t-il intérêt à produire des fromages ?

Q 2.4. L'exploitant n'a utilisé aucune des modifications des questions précédentes. L'exploitant peut emprunter de l'argent pour gérer l'exploitation. Est-ce que cet emprunt serait rentable ?

Q 2.5. Un agriculteur voisin propose à l'exploitant d'acheter une partie des 60 kl de lait. A partir de quel prix ceci est-il envisageable ?

Q 2.6. On lui propose 20 euros par kl pour exploiter à sa place une partie du lait. L'exploitant hésite à mettre en œuvre un autre projet qui demande un investissement de 1600 euros. Quel bénéfice doit-il être certain d'obtenir pour cet investissement ?

3 Pour aller plus loin (partie facultative)

Lorsque les problèmes à résoudre deviennent plus complexes ou avec un grand nombre de variables, il est difficile de taper à la main toutes les variables ou inégalités. C'est pourquoi il existe, associé à GLPK et avec tous les solveurs existants, des "langages de modélisation" que l'on appelle modeleur.

Le modeleur GNU MathProg

Le langage-modeleur GNU MathProg est une partie du langage AMPL. Il s'agit d'un langage de description d'un PL sous un format assez naturel. En fait, ce format permet de diviser un PL entre sa structure et ses données. Pour l'utiliser, `glpsol` nécessite ainsi plusieurs options :

`--math`: pour indiquer que le fichier est dans ce format

`--data fichierdata`: indique le fichier des données

Pour comprendre ce qu'est un modeleur, prenons le célèbre exemple de Dantzig (1963) : trouver le coût minimal de transport en respectant les demandes des clients et de l'approvisionnement des usines. La description du problème dans un fichier de format "modeleur" se comprend elle-même :

`Fichier Transport_description.math`

```
set I;
/* I est  l'ensemble des usines de production */

set J;
/* J est l'ensemble des clients */

param a{i in I};
/* a[i] est la capacité de production de l'usine i en nombre de caisses */

param b{j in J};
/* b[j] est la demande du client j en nombre de caisses */

param d{i in I, j in J};
/* d[i,j] est la distance en milliers de kilomètres entre une usine i et un client j */

param f;
/* f est le coût de transport en dollars par caisse et par milliers de kilomètre */

param c{i in I, j in J} := f * d[i,j] / 1000;
/* c[i,j] est le coût de transport en Kilo-dollars par caisse de l'usine i au client j */

var x{i in I, j in J} >= 0;
/* x[i,j] est une variable de décision égale au nombre de caisses tranportées de l'usine i vers le client j */
/* Si on veut les variables x entières, on écrit: var x{i in I, j in J} >= 0, integer; */

minimize cost: sum{i in I, j in J} c[i,j] * x[i,j];
/* Objectif: coût total de transport minimum en kilo-dollars */

s.t. CteCapacite{i in I}: sum{j in J} x[i,j] <= a[i];
/* Contrainte due à la capacité max de production de chaque usine i */

s.t. CteDemande{j in J}: sum{i in I} x[i,j] >= b[j];
/* Contrainte due à la demande de chaque client j */
```

Dans un deuxième fichier, on place les données de l'instance du problème. Notez que les dimensions du problème ne sont pas données dans le fichier de description.

```
Fichier Transport_pbm_numero1.data

data;

set I := Seattle San-Diego;

set J := New-York Chicago Topeka;

param a := Seattle     350
           San-Diego   600;

param b := New-York    325
           Chicago     300
           Topeka      275;

param d :              New-York   Chicago   Topeka :=
           Seattle     2.5        1.7       1.8
           San-Diego   2.5        1.8       1.4   ;

param f := 90;

end;
```

En fait un même fichier de description produira autant de PL ou PLNE qu'il y a des fichiers de données associés. Un fichier modeleur plus un fichier de données permet ainsi à glpsol de générer un PL ou un PLNE :

- on peut visualiser le résultat par exemple en demandant l'écriture dans un fichier au format Cplex lp du PL ou PLNE provenant du fichier modeleur :

```
glpsol --check --wlp Transport_pbm_numero1.lp --data Transport_pbm_numero1.data
      --math Transport_description.math
```

- on peut résoudre directement le problème modélisé dans le fichier modeleur :

```
glpsol -o Transport_output.txt --data Transport_pbm_numero1.data
      --math Transport_description.math
```

Exercice 3 : Problème de transport

Q 3.1. Trouver la solution optimale du problème de transport présenté en introduction en utilisant GLPK.

Q 3.2. Une nouvelle usine ouvre à Atlanta de capacité 400 caisses. La distance en milliers de kilomètres entre l'usine d'Atlanta et les différents clients est de 1,2 pour New-York, 0,9 pour Chicago et de 1,1 pour Topeka. Est-ce-que le coût total est amélioré suite à cette ouverture d'usine ?

4 Et si vous avez déjà fini

Exercice 4 : Essence sans plomb

Résoudre à l'aide de GLPK le programme linéaire modélisant le problème proposé dans l'énoncé de l'exercice “Essence sans plomb” du fascicule de TD.