Chapitre 36. Les solutions d'une équation différentielle
I. Equations différentielles et solutions
I.1. Equations différentielles et solutions
Une équation différentielle ordinaire (EDO) d'ordre $n \in N^*$ sur un Kevn E, correspond à la donnée d'une fonction f d'un ouvert $U \subseteq R \times E^{n+1}$ vers E. On l'écrit $f\left(x, u, u', \ldots, u^{(n)}\right) = 0$
Une **solution d'une EDO $f\left(x, u, u', \ldots, u^{(n)}\right) = 0$** correspond à un couple (I, u) ou I est un intervalle ouvert non vide de R, et $u : I \to E$ est une fonction n-fois dérivable sur I telle que
$\forall x \in I \ \left(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)\right) \in U$ et $f\left(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)\right) = 0$
Cette contrainte d'intervalle ouvert est indispensable pour permettre d'énoncer les propriétés d'unicité des solutions simplement, cette contrainte implique notamment la connexité de I.
On note généralement $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_f} = \{(I, u)\}$ l'ensemble des solutions d'une EDO
On note $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{E}) = \{(I, u) : (I, u) \text{ solution}\}$ (solutions à I fixé).
Pour $(I, u), (J, v) \in S$ on dit que $(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{v})$ **prolonge** $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{u})$ et on note $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{u}) \leq (\boldsymbol{J}, \boldsymbol{v})$ ssi $I \subseteq J$ et $v_{|I} = u$
$\leq$ est une relation d'ordre partiel sur S.
Une **solution maximale d'une EDO** désigne tout élément maximal de $(S, \leq)$, autrement dit toute solution de l'EDO ne pouvant être strictement prolongée.
Une **solution globale d'une EDO** désigne une solution dont l'intervalle ne peut être prolongé sans sortir de U. Une solution globale est donc nécessairement maximale.
L'orbite = courbe trajectoire d'une solution $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{u})$d'une EDO $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}', \ldots, \boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{n})}\right) = \boldsymbol{0}$ est l'ensemble $\widetilde{\boldsymbol{u}} = u(I) \subseteq E$
Le graphe d'une solution $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{u})$ d'une EDO $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}', \ldots, \boldsymbol{u}^{(\boldsymbol{n})}\right) = \boldsymbol{0}$ est l'ensemble $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) = \left\{\left(x, u(x)\right) : x \in I\right\} \subseteq R \times E$
On appelle **orbite maximale,** l'orbite d'une solution maximale.
Une **EDO est sous forme résolue** quand on peut exprimer la dérivée la plus forte en fonction de *x* et des dérivées précédentes $u^{(n)} = g\left(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}\right)$ c'est-à-dire
$\exists g \ \forall (x, u_0, \ldots, u_n) \in U \ f(x, u_0, \ldots, u_n) = g(x, u_0, \ldots, u_{n-1}) - u_n$
Même lorsque une EDO est sous forme implicite avec une fonction très régulière, on ne peut souvent ramener à une forme résolue que localement à l'aide du théorème des fonctions implicites.
Une EDO d'ordre n $f\left(x, u, u', \ldots, u^{(n)}\right) = 0$ peut se reecrire comme une EDO d'ordre 1 a valeurs dans E^n : En posant $v = (u_0, \ldots, u_{n-1})$, les n équations : $u_1 = u_0', \ldots, u_{n-1} = u_{n-2}', f(x, u_0, \ldots, u_{n-1}, u_{n-1}') = 0$ forment les n composantes d'une EDO d'ordre 1 $g(x, v, v') = 0$ a valeurs dans E^n.
Si l'équation d'ordre n était sous forme résolue, l'équation d'ordre 1 le sera aussi. De plus, dans les deux cas (forme implicite ou forme résolue), si l'équation d'ordre *n* était autonome, celle d'ordre 1 le sera aussi. Si l'équation était linéaire, elle le reste.
Dans la suite, l'étude se concentre donc principalement sur les EDO résolues d'ordre 1 sur un Banach.
L'orbite d'une solution $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{u})$d'une EDO résolue d'ordre 1 $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ est l'ensemble $\widetilde{\boldsymbol{u}} = u(I) \subseteq E$
Le graphe d'une solution $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{u})$d'une EDO résolue d'ordre 1 $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ est l'ensemble $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}) = \left\{\left(x, u(x)\right) : x \in I\right\} \subseteq R \times E$
On peut identifier une solution et son graphe. Résoudre une équation, c'est déterminer l'ensemble de ses solutions, autrement dit c'est déterminer l'ensemble des graphes de ses solutions.
Dans le cas $E = R$, on peut faire une représentation graphique du graphe dans R^2, avec x en abscisse et u en ordonnée. L'orbite d'une solution correspond a l'ensemble des ordonnées associée a cette solution, c'est un intervalle (car u continue car dérivable).
Une **donnée de Cauchy d'une EDO d'ordre $\boldsymbol{n}$** correspond a un $n+1$-uplet $(x_0, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \in R \times E^n$ representant n conditions initiales $u(x_0) = u_0, u'(x_0) = u_1, \ldots, u^{(n-1)}(x_0) = u_{n-1}$ sur toutes les images des derivees successives sauf sur la plus haute.

Pour une EDO résolue d'ordre 1 c'est un couple (x_0, u_0) on écrit $u(x_0) = u_0$

Un **problème de Cauchy d'ordre n sur un Kevn $\boldsymbol{E}$** correspond a une EDO d'ordre n sur E muni d'une donnee de Cauchy d'ordre n. On l'écrit $\begin{cases} f\left(x, u, u', \dots, u^{(n)}\right) = 0 \\ u(x_0) = u_0 \\ u'(x_0) = u_1 \\ \dots \\ u^{(n-1)}(x_0) = u_{n-1} \end{cases}$

Pour une EDO résolue d'ordre 1, on écrit $\begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$ (correspond à un triplet (f, x_0, u_0))

Une **solution d'un problème de Cauchy**, est une solution de l'EDO satisfaisant aux données de Cauchy.

Une donnée de Cauchy est un **point d'existence d'une EDO** ssi le problème de Cauchy formé par cette donnée et cette EDO admet <u>au moins une</u> solution.

Une donnée de Cauchy est un **point d'unicité globale d'une EDO** ssi le problème de Cauchy formé par cette donnée et cette EDO admet <u>au plus une</u> solution maximale.

Une donnée de Cauchy est un **point d'unicité locale d'une EDO** ssi c'est un point d'unicité globale pour la même EDO restreinte a un ouvert plus petit mais contenant toujours la donnée de Cauchy.

I.2. Equations autonomes et non autonomes.

I.2.1. Equations autonomes

Un **champ de vecteur** est une fonction d'un ouvert U d'un Kevn E, vers ce meme Kevn E.

Une **EDO autonome** est une EDO telle que f ne depend pas de x autrement dit elle peut se remettre sous la forme $f\left(u, u', \dots, u^{(n)}\right) = 0$.

Une EDO autonome résolue d'ordre 1 correspond donc à un champ de vecteur.

Soit une EDO autonome, résolue, d'ordre 1 $u' = f(u)$ sur un Banach E.

Tout $u_0 \in U$ vérifiant $f(u_0) = 0$, fournit une solution $u = u_0$ définie sur R de l'EDO, dont l'orbite est le singleton $\{u_0\}$.

Pour une solution (I, u) et un $x_0 \in I$ tel que $f\left(u(x_0)\right) \neq 0$ alors $f\left(u(x_0)\right) = u'(x_0)$ est un vecteur directeur de la tangente a l'orbite $\tilde{u}$ au point $u(x_0)$. Le graphe d'une solution d'un EDO autonome résolue est donc une courbe tracée dans U qui est en chacun de ses points tangente au vecteur du champ en ce point. Il est possible qu'un même point $u(x_0)$ appartienne simultanément à plusieurs orbites distinctes.

Une solution (I, u) d'une EDO autonome résolue peut être translatée : $\forall a \in R$, $\left(I + a, \tau_a u = x \mapsto u(x - a)\right)$ est encore une solution, de même orbite. Cela définit donc une action du groupe $(R, +)$ sur l'ensemble des solutions.

Exemples : $u' = u, u' = u^2, u' = \sqrt{|u|}$

Pour une EDO de Cauchy-Lipschitz <u>autonome</u>, deux solutions ont même orbite ssi elles déduisent l'une de l'autre par translation d'un réel a.

I.2.2. Equations non autonomes

Dans ce cas, la propriété d'invariance par translation n'est plus vraie.

Une EDO non autonome résolue $u' = f(x, u)$ avec $f : U \subseteq R \times E \to E$ peut être vue comme restriction d'une EDO autonome résolue dans E. On pose **l'extension naturelle de $\boldsymbol{f}$** : $\hat{\boldsymbol{f}} : U \to R \times E : v \mapsto \left(1, f(v)\right)$, c'est un champ de vecteur sur $\widehat{\boldsymbol{E}} = R \times E$, qui définit une EDO autonome $v' = \hat{f}(v) \Leftrightarrow \begin{cases} s' = 1 \\ u' = f(s, u) \end{cases}$.

Une solution (I, u) de l'EDO non autonome donne une solution $\left(I, (x, u)\right)$ de son extension naturelle autonome. Réciproquement une solution $\left(I, (s, u)\right)$ de son extension naturelle donne une solution de l'EDO non autonome : en fixant un $x_0 \in I \neq \emptyset$, on pose $a = s(x_0) - x_0$ en résolvant $s' = 1$, on a $s(x) = x + a$, on repose $I \coloneqq I - a, s \coloneqq s - a, u \coloneqq u(x + a)$, ainsi $s(x) = x$, et par la propriété

d'invariance $(I,(x,u))$ est encore solution de l'extension, (I,u) est solution de l'EDO non autonome.
Dans le cas $E=R$, **l'isocline de pente $p \in E=R$, d'une EDO résolue $u'=f(x,u)$,** est l'ensemble $\{(x,u) \in U \mid f(x,u)=p\}$. C'est l'ensemble de niveau p de l'application f.
Tout point du graphe d'une solution situe sur l'isocline de pente p, est un point dont la pente vaut p.
Les isoclines forment une partition de l'ouvert U.

I.3. Solutions maximales, points d'existence, points d'unicité

Toute solution d'une EDO est majorée dans $(S,\leq)$ par une solution maximale (Zorn).
Pour résoudre une EDO, il suffit donc de donner l'ensemble de ses solutions maximales, les autres solutions ne sont que des restrictions.
Si tout point de l'ouvert de définition d'une EDO, est un point d'unicité locale pour cette EDO, alors tous ces points sont en fait des points d'unicité globaux pour cette EDO. (vérifier si vrai pour tout ordre)
Une EDO autonome/un champ de vecteur est dit **complet** ssi toutes ses solutions maximales sont définies sur R.

I.4. Ensembles α et ω limites, bouts d'une solution

On note $\boldsymbol{VA(f,x_0)}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une fonction f d'un intervalle I vers un Kevn E, en un point $x_0 \in I$.
En général $VA(f,x_0)=\bigcap_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}\overline{f(]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[)}=\bigcap_{n\geq n_0}\overline{f(]x_0-1/n,x_0+1/n[)}$
Si $I=]a,b[$ on définit $\boldsymbol{\alpha\lim(f)}=VA(f,a)=\bigcap_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}\overline{f(]a,a+\varepsilon[)}=\bigcap_{n\geq n_0}\overline{f(]a,a+1/n[)}$
Si $I=]a,b[$ on définit $\boldsymbol{\omega\lim(f)}=VA(f,b)=\bigcap_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}\overline{f(]b-\varepsilon,b[)}=\bigcap_{n\geq n_0}\overline{f(]b-1/n,b[)}$
Il n'y a a priori pas de raison pour que ces ensembles α et ω limites soient non vides, mais c'est souvent le cas.
Si il existe $x\in]a,b[$, $f([x,b[)$ (resp. $f(]a,x])$) est relativement compact dans E, alors $\omega\lim f$ (resp. $\alpha\lim f$) est non vide, compact et convexe. Remarque : ∃ peut etre remplace par ∀ dans le si, c'est équivalent.
On appelle **bout gauche d'une solution $(I=]a,b[,u)$ d'une EDO résolue d'ordre 1 $u'=f(x,u)$** l'ensemble $\boldsymbol{B_g(u)}=\{a\}\times\alpha\lim(u)$ si $a>-\infty$, $\boldsymbol{B_g(u)}=\emptyset$ si $a=-\infty$
On appelle **bout droit d'une solution $(I=]a,b[,u)$ d'une EDO résolue d'ordre 1 $u'=f(x,u)$** l'ensemble $\boldsymbol{B_d(u)}=\{b\}\times\omega\lim(u)$ si $b<\infty$, $\boldsymbol{B_d(u)}=\emptyset$ si $b=\infty$
En général un bout se résume à un simple couple. Je pense la technicité de cette définition est requise pour traiter certaines fonctions bizarres comme $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ dont un bout en 0 occuperait un segment.

II. Les théorèmes d'existence et d'unicité

II.1. Les théorèmes

Soit une EDO d'ordre 1 résolue, et <u>continue</u> $u'=f(x,u)$ d'ouvert $U\subseteq R\times E$ vers un <u>Banach</u> E quelconque, on note $\boldsymbol{C^0(I,E\,;U)}=\{u\in C^0(I,E)\mid \forall x\in I\ (x,u(x))\in U\}$
On peut définir pour $x_0\in I$, $\boldsymbol{I_{x_0}}: C(I,E\,;U)\to C^1(I,E): u\mapsto u(x_0)+\int_{x_0}^{x} f(s,u(s))ds$, grâce à l'intégrale de Riemann. (On a pas étudié l'intégrale de Lebesgue sur un Banach quelconque).
Mise sous forme intégrale. Soit un intervalle I, $x_0\in I$ et $u\in C^0(I,E\,;U)$, alors (I,u) est solution de l'EDO $u'=f(x,u)$ ssi $I_{x_0}(u)=u$.
Intuition des théorèmes : On cherche à résoudre l'équation intégrale, on construit d'abord un espace fonctionnel F tel que $I(F)\subseteq F$, puis on cherche a resoudre un problème de point fixe $I(u)=u$.

II.1.2 Théorème d'Ascoli Péano et méthode d'Euler

Th. Si $E=R^n$ ou Rev de dim finie, et f continue alors tout point de l'ouvert U est un point d'existence pour l'EDO $u'=f(x,u)$.

II.1.3 Théorème de Cauchy Lipschitz.

f lipschitzienne par rapport à sa seconde variable ssi $\exists K\in R\ \forall(x_1,u_1),(x_2,u_2)\in U\ \|f(x_1,u_1)-f(x_2,u_2)\|\leq K\|u_1-u_2\|$

f **localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable** ssi tout point de U possede un voisinage sur lequel f est lipschitzienne par rapport à sa seconde variable.
On dit qu'une **EDO est de Cauchy Lipschitz** ssi elle vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz c'est-à-dire : E Banach sur R, f continue et f localement lipschitzienne par rapport a la 2$^{\text{nde}}$ variable.
Un **problème de Cauchy Lipschitz** correspond à un problème de Cauchy vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy Lipschitz, c'est-à-dire dont l'EDO est de Cauchy-Lipschitz.
Th C.L. Pour une EDO de Cauchy Lipschitz tout point de l'ouvert U est un point d'existence et d'unicité locale (donc global car $\forall U$).
Autrement dit, tout problème de Cauchy-Lipschitz admet exactement une solution maximale (I, u).
Corollaire : Toute autre solution du problème est forcément restriction de cette solution maximale.
Corollaire : Les graphes des solutions maximales forment une partition de l'ouvert U.
Deux solutions d'une EDO de Cauchy-Lipschitz dont les orbites se coupent, représentent la même solution maximale, et donc coïncident sur l'intersection de leurs intervalles.
Pour une EDO de Cauchy-Lipschitz autonome, deux solutions ont même orbite ssi elles déduisent l'une de l'autre par translation d'un réel a.
Pour un problème de Cauchy-Lipschitz autonome, une solution non injective, donne une solution maximale définie sur $I = R$ et périodique.
Théorème des bouts. Les bouts de l'unique solution maximale d'un problème de Cauchy-Lipschitz, sont contenus dans la frontière de l'ouvert U de definition de l'EDO.
Corollaire : Si l'ouvert de définition est de la forme $U = J \times E$ avec J intervalle ouvert de R, alors l'unique solution maximale d'un problème de Cauchy-Lipschitz est globale, c'est-à-dire $I = J$.
Dans le contexte d'un problème de Cauchy-Lipschitz autonome, $u' = f(u), u(x_0) = u_0$, on note $u(x) = \boldsymbol{\varphi(u_0, x)}$ la solution vérifiant $u(x_0) = u_0$, et on l'appelle **flot du champ de vecteur $\boldsymbol{f}$.**
Un **point d'équilibre** d'une EDO de Cauchy-Lipschitz autonome, est un point x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

Chapitre 37. Exemples explicites et études quantitatives.

I. Equations linéaires autonomes et exponentielles

Tout endomorphisme f sur un Banach E admet une **exponentielle** : $\boldsymbol{exp(f)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!}$
On a $\exp\left(0_{L(E)}\right) = Id_E$
Une définition alternative est $\exp(f) = \lim_{n\to\infty} \left(Id_E + \frac{f^n}{n}\right)^n$
Pour $f, g \in L(E)$, on a $\exp(f+g) = \exp(f) \circ \exp(g) = \exp(g) \circ \exp(f)$
Pour $f \in L(E)$, on a $\exp(f)$ inversible d'inverse $\exp(-f)$
Dans un Kev de dim finie et oriente, pour $f \in L(E)$ on a $\det(\exp(f)) = \exp\left(tr(f)\right)$
Pour une matrice $M \in M_n(C)$ $\exp(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$
Un vecteur propre associe à la valeur propre $\lambda \in C$ d'un endomorphisme f sur un Banach complexe, est un vecteur propre associe à la valeur propre $\exp(\lambda)$ de $\exp(f)$.
Dans un R/Cev de dim. finie E, pour un base B, et $f \in L(E)$ on a $[\exp f]_B = \exp[f]_B$
Dans un Banach, un problème de Cauchy d'ordre 1 résolu autonome $u' = f(u), u(x_0) = u_0$ défini par un endomorphisme continu $f \in L_c(E)$ est un probleme de Cauchy-Lipschitz et admet donc une unique solution maximale, qui s'avère être la fonction $u: R \to E$ définie par $\forall x \in R$ $u(x) = \exp\left((x - x_0)f\right)(u_0)$

II. Les équations à variables séparées

Grace au théorème de Cauchy Lipschitz on peut souvent se contenter de deviner les solutions, et vérifier qu'elles satisfont bien une EDO donnée.

Une **EDO a variables séparées** est de la forme $\frac{du}{dx} = f(x)g(u)$ avec f continue d'un intervalle J vers R et g localement lipschitzienne d'un intervalle L vers R, on suppose donc $U = J \times L$ et $E = R$.
En général la méthode est de séparer les variables $\frac{du}{g(u)} = f(x)dx$ (si $1/g$ existe) et d'intégrer pour deviner les solutions.
On prend F primitive de f, G primitive de $1/g$
Les solutions de l'EDO sont définies implicitement par $h(x, y) = G(x) - F(y) =$ constante $c \in R$.
Les graphes des solutions de l'EDO sont les composantes connexes non vides des niveaux $H_c = H^{-1}(\{c\})$ pour $c \in R$. A vérifier.

III. Intégrabilité.

III.1. Intégrales premières et conséquences.

Une **intégrale première d'une EDO autonome $u' = X(u)$ / d'un champ de vecteur X sur R^n** est une fonction $H: U \to R$ qui est constante sur toute orbite de l'EDO cad $\forall (I, u)$ solution de l'EDO $H \circ u$ constante sur I. En pratique, seul le cas H derivable, ou meme C^∞ est intéressant.
Une fonction dérivable $H: U \to R$ est une integrale premiere d'un champ X ssi $\forall u \in U\ d_u H\big(X(u)\big) = 0$
Si $n = 2$, et $H: U \subseteq R^2 \to R$ est C^k et $\frac{\partial H}{\partial y}$? alors $H(x, y) = c \in R$ defini implicitement une courbe C^k appelée **courbe de niveau c de H**.
Pour $n = 2$, et $H: U \subseteq R^2 \to R$ est une intégrale première C^1 d'un champ de vecteur C^1 $X: U \to R^2$, alors si on restreint H et X à l'ouvert $\widehat{U} = \{(x, y) \in R^2 \mid X(x, y) \neq 0 \text{ et } d_{(x,y)} H \neq 0\}$, alors les orbites de $\widehat{X}$ sont les composantes connexes des courbes de niveau de $\widehat{H}$.
Exemples : TODO
généralisation dimension n avec sous-variétés : TODO.

III.2. Système de Lotka-Volterra : TODO

IV. Quelques inéquations différentielles et intégrales

IV.1. Inéquations intégrales

Lemme de Gronwall. Soit 3 fonctions φ, ψ, u réglées (continues par ex) sur un intervalle $I = [t_0, t_1] \subseteq R$, à valeurs positives vérifiant $\forall t \in I\ \ 0 \leq u(t) \leq \varphi(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(s)u(s)ds$, alors,
$\forall t \in I \quad 0 \leq u(t) \leq \varphi(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi(s)\psi(s)e^{-\int_s^t \psi(r)dr} ds$

Cas particulier 1. Si une fonction u continue d'un intervalle $I = [t_0, t_0 + l[$ ($t_0 \in R, l > 0$) vers R_+ vérifie $\forall t \in I\ 0 \leq u(t) \leq b + \int_{t_0}^{t} \psi(s)u(s)ds$ alors $\forall t \in I\ \ 0 \leq u(t) \leq be^{\int_{t_0}^{t} \psi(s)ds}$

Cas particulier 2. Si une fonction u continue d'un intervalle $I = [t_0, t_0 + l[$ ($t_0 \in R, l > 0$) vers R_+ vérifie $\forall t \in I\ 0 \leq u(t) \leq a\int_{t_0}^{t} u(s)ds + b$ alors $\forall t \in I\ \ 0 \leq u(t) \leq be^{a(t-t_0)}$

IV.2. Application : comparaison des solutions d'une équation différentielle

Soit une ODE $u' = f(t, u)$ sur E Banach sur R, f continue et f $K > 0$-lipschitzienne par rapport à la 2nde variable, et on suppose $U = J \times V$ ouvert avec J intervalle ouvert de R et V ouvert de E.
Deux solutions u, v definies sur un meme intervalle I, vérifient $\forall t_0 \in I\ \ \forall t \in I\ \ \|u(t) - v(t)\| \leq \|u(t_0) - v(t_0)\| e^{K|t-t_0|}$.
Explication effet papillon $e^{K|t-t_0|} \to \infty$ très vite même si $\|u(t_0) - v(t_0)\|$ faible.
On peut généraliser a des solutions approchées :
Deux fonctions u, v definies sur un meme intervalle I telles que $\exists \varepsilon > 0\ \forall t \in I\ \big\|u'(t) - f\big(t, u(t)\big)\big\| \leq \varepsilon$, $\big\|v'(t) - f\big(t, v(t)\big)\big\| \leq \varepsilon$, vérifient alors : $\forall t_0 \in I\ \forall t \in I\ \|u(t) - v(t)\| \leq \|u(t_0) - v(t_0)\| e^{K|t-t_0|} + \frac{2\varepsilon}{K}\big(e^{K|t-t_0|} - 1\big)$

V. Equations non autonomes sur la droite

VI. Introduction à l'étude qualitative des champs plans

VI.1. Esquisse d'une méthode d'étude
VI.2. Le système de Van der Pol.

Chapitre 38. Le flot d'un champ de vecteurs
I. Le flot : Définition et exemples
I.1. Première approche de la notion de flot : le cas autonome.
I.2. Le cas non autonome
I.3. Les changements de variables et le flot
II. Le flot des équations linéaires
II.1. Retour sur la résolution d'une équation linéaire
II.2. Flot et résolvante
II.3. Dépendance du flot relative aux paramètres
II.4. Retour sur l'exponentielle
III. Propriétés de régularité
III.1. Topologie du domaine et continuité du flot
III.2. La régularité du flot
III.2.1. La dérivabilité du flot

Chapitre 39. Etude locale d'un champ de vecteurs.
I. Le théorème de redressement du flot.
II. Quelques questions de stabilité
III. Le théorème de conjugaison de Grobman-Hartman
III.1. Endomorphismes hyperboliques
III.2. Un théorème de point fixe hyperbolique
III.3. Le théorème de conjugaison pour les difféomorphismes
III.4. Le théorème de conjugaison pour les champs
IV. Le théorème de la variété invariante
V. Le système de Van der Pol