Espaces vectoriels

Une **loi de composition interne (l.c.i)** $\cdot$ sur un ensemble quelconque E est une fonction de $E \times E$ dans E

Une l.c.i. est **associative** si la priorité des opérations n'a pas d'importance dans un produit, càd $(xy)z = x(yz)$.

Une l.c.i. est **commutative** si l'ordre des opérations n'a pas d'importance dans un produit, càd $xy = yx$

Un élément de E est **neutre** pour la l.c.i. si composer un terme de E par l'élement à gauche ou à droite, ne change pas le terme. Si une l.c.i. admet un neutre, celui-ci est unique.

Si une l.c.i. admet neutre, x **symétrique à gauche** de y / y **symétrique à droite** de x signifie que le produit xy est égal au neutre. **Symétrique =** symétrique à gauche ET à droite. **Symétrisable =** $\exists$ symétrique. Parler de symétrique suppose l'existence d'un neutre.

Un **groupe** $(G,\cdot)$ est un ensemble G muni d'une l.c.i. $\cdot$ sur G tel que la l.c.i est associative, la l.c.i admet un neutre, tout élément est symétrisable par la l.c.i.

Un groupe est dit **commutatif/abélien** si sa loi est commutative

Un **anneau non-unitaire** correspond à un la donnée de $A, +, \times, 0_A$ tels que $(A, +)$ groupe commutatif de neutre 0_A et $\times$ l.c.i. associative sur A et distributive a gauche et a droite par rapport a $+$.

Un **anneau = anneau unitaire** correspond à un la donnée de $A, +, \times, 0_A, 1_A$ tel que $(A, +, \times, 0_A)$ anneau et 1_A élément neutre pour la multiplication.

Un **anneau commutatif** est un anneau dans lequel $\times$ est commutatif

On note $\boldsymbol{A}^{\times}$ l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau. On note $\boldsymbol{A}^{*} = A \setminus \{0_A\}$

L'ensemble des éléments inversibles d'un anneau unitaire est un groupe pour $\times$ d'element neutre 1_A.

Un **corps** est un anneau unitaire commutatif dans lequel tout élément non nul est inversible $A^{\times} = A^{*}$.

Une **l.c.e.** sur un ensemble E muni d'un ensemble K est une application de $K \times E$ vers E.

Définition d'un espace vectoriel.

On dit que $(\boldsymbol{E}, +, \cdot)$ **est un** $(\boldsymbol{K}, +_{\boldsymbol{K}}, \times)$ **espace vectoriel** ssi $(K, +_K, \times)$ est un corps, $(E, +)$ est un groupe abélien, $\cdot$ est une l.c.e. sur (E, K), et pour tous $x, y \in E, \alpha, \beta \in K$ on a $\begin{cases} 1_K x = x \\ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \\ (\alpha +_K \beta)x = \alpha x + \beta x \end{cases}$

Il est d'usage de ne pas expliciter $\cdot$ et $\times$ et d'utiliser le même symbole $+$ pour $+_E$ et $+_K$.

Définition explicite complète : $(\boldsymbol{E}, +, \cdot, \boldsymbol{0_E}, -)$ **est un** $\left(\boldsymbol{K}, +_{\boldsymbol{K}}, \times, \boldsymbol{1_K}, {}^{-1}\right)$ **espace vectoriel** ssi

Pour tous $x, y, z \in E$ et tous $\alpha, \beta, \gamma \in K$

$x + y \in E,\ 0_E \in E,\ -x \in E$ $(x + y) + z = x + (y + z)$ $x + 0_E = 0_E + x = x$ $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$ $x + y = y + x$	$\alpha + \beta \in K,\ 0_K \in K,\ -\alpha \in K$ $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ $\alpha + 0_K = 0_K + \alpha = \alpha$ $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0_K$ $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
$\alpha\beta \in K,\ \ 1_K \in K$ $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ $\alpha 1_K = 1_K \alpha = \alpha$ $\alpha\beta = \beta\alpha$ $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma = (\beta + \gamma)\alpha$ $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha^{-1} \in K$ et $\alpha^{-1}\alpha = \alpha\alpha^{-1} = 1_K$	$\alpha x \in E$ $1_K x = x$ $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Toute extension L d'un corps K peut etre vue comme un espace vectoriel sur K.

En particulier tout corps K est un espace vectoriel sur lui-même.

Un produit quelconque de K espaces vectoriels $\prod_{i \in I} \boldsymbol{E_i}$ muni des **lois produits** $(\boldsymbol{x_i})_{i \in I} + (\boldsymbol{y_i})_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I}$ et $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x_i})_{i \in I} = (\alpha x_i)_{i \in I}$ est un K espace vectoriel appelé **espace produit externe**.

Un $\boldsymbol{K}$ **sous-espace vectoriel** d'un K espace vectoriel E est une partie de E non vide stable par $+$ et $\cdot$ et qui est encore un K espace vectoriel pour les lois induites. Autrement dit F K sev de $(E,+,\cdot)$ ssi $\emptyset \neq F \subseteq E, \forall x,y \in F\ x+y \in F,\ \forall \alpha \in K\ \forall x \in F\ \ \alpha x \in F$, et $\left(F, +_{|F\times F}, \cdot_{|K\times F}\right)$ K ev.
Caractérisation sous-espace vectoriel. Une partie F d'un K ev $(E,+,\cdot)$ est un K sous-espace vectoriel de E ssi F est non vide (càd $0_E \in F$) et $\forall \alpha \in K\ \forall x,y \in F\ \ \alpha x + y \in F$
Un sous-espace contient toujours 0_E
L'intersection quelconque de Ksevs d'un même Kev est toujours un Ksev de ce Kev.
Si F, G sont deux K sevs de E et $F \subseteq G$ alors F est aussi un Ksev de G.

Familles.
On note $\boldsymbol{E^I}$ l'ensemble des familles quelconques d'un ensemble E indicées par un ensemble I
Une définition donnée relativement à une famille quelconque, et qui ne dépend pas de l'ordre de cette famille pourrait être donnée relativement à un ensemble quelconque, mais il est d'usage de privilégier l'écriture familiale dans la théorie des espaces vectoriels.
Le **support d'une famille quelconque $\boldsymbol{(x_i)_{i\in I}} \in \boldsymbol{E^I}$ d'un $\boldsymbol{K}$ev $\boldsymbol{E}$** est l'ensemble $\boldsymbol{supp}(\boldsymbol{(x_i)_{i\in I}}) = \{i \in I | x_i \neq 0_E\}$ des indices d'image non nulle.
On note $\boldsymbol{E^{(I)}}$ l'ensemble des familles de E indicées par I a support fini.
Si E est un Kev, et I ensemble quelconque d'indices, alors E^I est un Kev, et $E^{(I)}$ est un Ksev de E^I
La somme d'une famille quelconque $\boldsymbol{(x_i)_{i\in I}} \in \boldsymbol{E^I}$ sur un Kev E n'est pas forcement définie.
La **somme d'une famille $\boldsymbol{(x_i)_{i\in I}} \in \boldsymbol{E^{(I)}}$ a support fini** sur un Kev E est bien définie uniquement et notée $\sum_{i\in I} \boldsymbol{x_i} \in E$. Elle a un nombre fini de termes, $(E,+)$ est un groupe abélien, donc l'ordre n'importe pas.
Pour $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ et pour $(\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$ on a $(\alpha_i x_i)_{i\in I} \in E^{(I)}$ et donc $\sum_{i\in I} \alpha_i x_i \in E$ est bien définie.
Une **combinaison linéaire d'une famille quelconque $\boldsymbol{(x_i)_{i\in I}} \in \boldsymbol{E^I}$** sur un Kev E est un élément $x \in E$ tel que $\exists (\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)}\ x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$
Pour une famille quelconque $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ sur un Kev E on note $\mathbf{vect}\ \boldsymbol{(x_i)_{i\in I}} = \left\{\sum_{i\in I} \alpha_i x_i : (\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)}\right\}$ l'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille.
Cet ensemble est un Ksev de E, en fait c'est le plus petit Ksev qui contient la famille $(x_i)_{i\in I}$
$\mathbf{vect}\ \boldsymbol{(x_i)_{i\in I}}$ est aussi appelé **$\boldsymbol{K}$ sous-espace vectoriel engendré** par la famille $(x_i)_{i\in I}$.
Pour $A \subseteq E$ on note $\mathbf{vect}\ \boldsymbol{A} = \{\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k : n \in \mathbb{N}^*, (\alpha_k)_{1\leq k\leq n} \in K^n, (x_k)_{1\leq k\leq n} \in A^n\}$
Pour $A \subseteq E$ et tout $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ tel que $A = \{x_i : i \in I\}$ alors vect $A =$ vect $(x_i)_{i\in I}$
Pour F K sev de E, vect $F = F$
Pour $(F_i)_{i\in I}$ K sevs de E, vect $(\bigcup_{i\in I} F_i) = \{\sum_{k=1}^n x_k : n \in \mathbb{N}^*, \forall 1 \leq k \leq n\ \exists i \in I\ x_k \in F_i\}$
Pour $(F_k)_{1\leq k\leq n}$ K sevs de E, vect $(\bigcup_{k=1}^n F_k) = \{\sum_{k=1}^n x_k : (x_k \in F_k)_{1\leq k\leq n}\}$
Somme interne. Pour $(E_i)_{i\in I}$ K sevs de E, $\sum_{i\in I} \boldsymbol{E_i} =$ vect $(\bigcup_{i\in I} E_i)$
Somme interne finie. Pour $(E_k)_{1\leq k\leq n}$ K sevs de E, $\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{E_k} =$ vect $(\bigcup_{k=1}^n E_k)$
Produit externe. $\prod_{i\in I} \boldsymbol{E_i} = \{x: I \to E \mid \forall i \in I\ x_i \in E_i\}$
Somme externe. $\coprod_{i\in I} \boldsymbol{E_i} = \{x: I \to E \mid \forall i \in I\ x_i \in E_i \text{ et } \exists J \text{ fini} \subseteq I\ \forall i \in I \setminus J\ \ x_i = 0\}$
Dans le cas I fini, $\coprod_{i\in I} E_i = \prod_{i\in I} E_i$
Une famille quelconque $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ sur un Kev E est une **famille génératrice**, ssi tout élément de E s'exprime comme une combinaison linéaire de cette famille, càd ssi $E =$ vect $(x_i)_{i\in I}$ càd ssi la famille engendre l'espace vectoriel ssi $\mathbb{K}^{(I)} \to E: (\alpha_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$ morphisme surjectif.
Une famille quelconque $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ sur un Kev E est une **famille libre** ssi la seule combinaison linéaire de cette famille donnant 0_E est la combinaison nulle ssi $\forall (\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)}\ \sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I\ \alpha_i = 0_K$ ssi aucun élément de la famille ne s'exprime comme combinaison linéaire des autres ssi $\forall j \in I\ x_j \notin$ vect $(x_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$ ssi toute combinaison linéaire sur la famille admet une écriture unique, ssi $\mathbb{K}^{(I)} \to E: (\alpha_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} \alpha_i\, x_i$ morphisme injectif.

Une famille quelconque $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ sur un Kev E est une **famille liée** ssi ce n'est pas une famille libre ssi $\exists(\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)} \sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0_E$ et $\exists i \in I\ \alpha_i \neq 0$ càd ssi $\exists j \in I\ x_j \in$ vect $(x_i)_{i\in I\setminus\{j\}}$
Une famille quelconque $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ sur un Kev E est une **base** ssi c'est une famille libre et génératrice, ssi $\mathbb{K}^{(I)} \to E: (\alpha_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} \alpha_i\, x_i$ isomorphisme d'ev.
$(X^k)_{k\in N}$ est une base de $K[X]$
$(x \mapsto e^{ikx})_{k\in N}$ est une famille libre de C^R
$\forall n \in N^*\ \left(X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}\right)_{(i_1,\dots i_n)\in N^n}$ est une base de $K[X_1, \dots, X_n]$
Operations avec invariant sur une famille.
Soit une famille quelconque $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ sur un Kev E.
Remplacer un générateur. Si $x \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire des x_i, avec un $\alpha_k \neq 0$ alors on peut échanger x_k par x sans changer l'espace engendré.
Additionner à un générateur une combinaison linéaire des autres. Si on additionne à x_k une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille, ça ne change pas le sous-espace engendré.
Supprimer un générateur. S'il existe une équation linéaire entre les x_i telle que $\alpha_k \neq 0$ alors on peut enlever x_k de la famille sans changer l'espace engendré.
Enrichir une famille libre. Si on ajoute à une famille libre, un vecteur $x \in E$ qui ne s'exprime pas comme combinaison linéaire des autres, alors la famille reste libre.
Un K espace vectoriel est dit **de dimension finie** ssi il admet une famille génératrice finie.
Une famille libre d'un Kev a toujours un cardinal $\leq$ à celui d'une famille génératrice de ce Kev.
Un Kev est de dimension infinie ssi il admet une famille libre infinie.
Tout Ksev d'un Kev de dimension finie, est un Kev de dimension finie.
$K^{(N)}, S, C_0, C, K^N, K[X], K[[X]], F_{pol}(I, K), C^k(I, K)$ sont de dimension infinie.
Une base d'un Kev est une famille libre de cardinal maximal.
Une base d'un Kev est une famille génératrice de cardinal minimal.
Si un Kev admet des bases, elles ont donc toutes même cardinal.
Avec une base $(e_i)_{i\in I} \in E^I$ d'un Kev E, on a que $\forall x \in E\ \exists!\,(\alpha_i)_{i\in I} \in K^{(I)}\ x = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$, tout élément de l'espace E s'écrit comme combinaison linéaire unique de cette base.
Théorème de la base incomplète.
Toute famille libre d'un Kev peut être complétée en une base.
Toute famille génératrice d'un Kev contient une base
Tout K espace vectoriel admet au moins une base.
La **dimension d'un K espace vectoriel E de dimension finie**, notée $\mathbf{dim_K}\, \boldsymbol{E} \in N$ est le cardinal de n'importe laquelle de ses bases. En dimension infinie on note $\mathbf{dim_K}\, \boldsymbol{E} = \infty$
Une famille libre d'un Kev de dimension finie, a un cardinal $\leq \dim E$, et c'est une base ssi son cardinal est $= \dim E$
Une famille génératrice d'un Kev de dimension finie, a un cardinal $\geq \dim E$, et c'est une base ssi son cardinal est $= \dim E$
Un Ksev a toujours une dimension inférieure à celle de son Kev. F Ksev de $E \Rightarrow \dim F \leq \dim E$
Un Ksev de dimension finie égale à celle de son Kev, coïncide avec son Kev. $\dim F = \dim E < \infty \Rightarrow F = E$
Un Kev de dimension infinie peut admettre un Ksev propre de dimension infinie.
Pour une extension L d'un corps K de K-dimension finie m de base $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq m} \in L^m$, et E un L espace vectoriel de L-dimension finie n de base $(e_j)_{1\leq j\leq n} \in E^n$ alors, E est aussi un K espace vectoriel de K-dimension finie $\dim_K E = \dim_L E \dim_K L = nm$ dont $(\varepsilon_i e_j)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ est une base.

Définition des application linéaires.

Une **application linéaire = morphisme d'espace vectoriels**, d'un Kev E vers un Kev F sur le même corps K est une application $u: E \to F$ telle que $\forall x, y \in E \ u(x+y) = u(x) + u(y)$ et $\forall \alpha \in K \ \forall x \in E \ u(\alpha x) = \alpha u(x)$, càd telle que $\forall \alpha \in K \ \forall x, y \in E \ u(\alpha x + y) = \alpha u(x) + u(y)$
Une application linéaire $u: E \to F$ vérifie aussi $\forall k \in Z \ u(kx) = ku(x)$ quel que soit le corps K.
On note $\boldsymbol{L_K(E,F)}$ ou juste $\boldsymbol{L(E,F)}$ l'ensemble des applications linéaires d'un Kev E vers un Kev F.
Le **noyau d'une application linéaire** $u \in L(E,F)$ est $\mathbf{ker}\,\boldsymbol{u} = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\})$
L'**image d'une application linéaire** $u \in L(E,F)$ est $\boldsymbol{im\,u} = \{u(x) : x \in E\} = u(E)$
Le noyau d'une application linéaire $u \in L(E,F)$ est un Ksev de E
L'image d'une application linéaire $u \in L(E,F)$ est un Ksev de F
Une application linéaire $u \in L(E,F)$ est injective ssi $\ker u = \{0_E\}$
Une application linéaire $u \in L(E,F)$ est surjective ssi $\operatorname{im} u = F$
La composée de 2 applications linéaires $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$ est une application linéaire $v \circ u \in L(E,G)$
Un **endomorphisme** d'ev est une application linéaire $u \in L(E,E)$ d'un Kev dans lui-même. On note $\boldsymbol{L_K(E)} = L_K(E,E)$ les endomorphismes d'ev de E.
Un **isomorphisme** d'ev est une application linéaire $u \in L(E,F)$ bijective. On note $\boldsymbol{GL_K(E,F)}$ les isomorphismes d'evs de E vers F.
Un **automorphisme** d'ev est une application linéaire qui est à la fois un endomorphisme d'ev et un isomorphisme d'ev. On note $GL_K(E)$ les automorphisme d'ev de E.
L'inverse d'un isomorphisme d'ev est aussi une application linéaire, et donc aussi un isomorphisme d'ev. Càd $\forall u \in GL_K(E,F), \ u^{-1} \in GL_K(F,E)$.

Espace vectoriel quotient.
Pour E un Kev, et H un Ksev de E, l'espace vectoriel quotient est l'ensemble $\frac{E}{H}$ identique à celui du groupe quotient, muni des lois $\overline{v} + \overline{w} = \overline{v+w}$ et $\alpha\overline{v} = \overline{\alpha v}$.
L'espace vectoriel quotient est bien un espace vectoriel.
La **surjection canonique** $E \to \frac{E}{H} : v \mapsto \overline{v}$ est une application linéaire surjective de noyau H.
Th. factorisation. Un morphisme d'ev $f: E \to F$, **est factorisable** sur un Ksev H de E càd $\exists \overline{f}: \frac{E}{H} \to F$ tel que $f = \overline{f} \circ \pi$ ssi $f(H) = \{0_B\}$ ssi $H \subseteq \ker(f)$.
Dans ce cas $\overline{f}$ est unique, $\overline{f}$ est un morphisme d'ev et on a $\forall a + H \in \frac{E}{H} \ \overline{f}(a+H) = f(a)$, $im(\overline{f}) = im(f), \ker(\overline{f}) = \frac{\ker(f)}{H}$
De plus $\overline{f}$ est surjective ssi f l'est et $\overline{f}$ est injective ssi $\ker(f) = H$.
Th. isomorphisme. Un morphisme d'ev $f: E \to F$, est toujours factorisable sur son noyau en une application $\overline{f}: \frac{E}{\ker(f)} \to F$ injective telle que $f = \overline{f} \circ \pi$. Donc $\frac{E}{\ker(f)} \approx im(f)$
Ce résultat peut se comprendre comme une généralisation du théorème du rang.

Caractérisation somme directe. Pour $(E_i)_{i\in I}$ K sevs d'un même Kev E :
$\coprod_{i\in I} E_i \to \sum_{i\in I} E_i : (x_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} x_i$ est toujours un morphisme surjectif, mais pas toujours bijectif.
$\coprod_{i\in I} E_i$ muni des injections canoniques $i_j: E_j \mapsto \coprod_{i\in I} E_i : x_j \mapsto (\dots 0, x_j, 0, \dots)$ est toujours une somme catégorique. Càd $\forall Y$ $\mathbb{K}$ ev $\forall \big(f_j: E_j \to Y \text{ morphisme}\big)\ \exists! f: \coprod_{i\in I} E_i \to Y \ \forall i \in I \ f_i = f \circ i_i$
Preuve par analyse synthèse : on doit prendre $f((x_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} f(x_i) = \sum_{i\in I} f_i(x_i)$ et ça marche.
Mais $\sum_{i\in I} E_i$ muni de ses injections $E_j \to \sum_{i\in I} E_i : x_j \mapsto x_j$ n'est pas toujours une somme catégorique
La famille $\boldsymbol{(E_i)_{i\in I}}$ est en somme directe, et on note $\boldsymbol{\oplus_{i\in I} E_i} = \sum_{i\in I} E_i$
$\Leftrightarrow \coprod_{i\in I} E_i \to \sum_{i\in I} E_i : (x_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} x_i$ isomorphisme

$\Leftrightarrow \forall x \in \sum_{i\in I} E_i \ \exists! \, (x_i)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} E_i \ \ x = \sum_{i\in I} x_i$
$\Leftrightarrow \forall (x_i)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} E_i \quad \sum_{i\in I} x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I \ x_i = 0_E$
$\Leftrightarrow \forall i \in I \ E_i \cap \sum_{j\in I, j\neq i} E_j = \{0_E\}$
$\Leftrightarrow \forall (B_i \text{ base de } E_i)_{i\in I} \ \ \vee_{i\in I} B_i$ base de $\sum_{i\in I} E_i$
$\Leftrightarrow \exists (B_i \text{ base de } E_i)_{i\in I} \ \ \vee_{i\in I} B_i$ base de $\sum_{i\in I} E_i$
$\Leftrightarrow \sum_{i\in I} E_i$ muni de ses injections $i_j : E_j \to \sum_{i\in I} E_i$ est une somme catégorique :
càd $\forall Y$ $\mathbb{K}$ ev $\forall \left(f_j : E_j \to Y \text{ morphisme}\right) \exists! \, f : \sum_{i\in I} E_i \to Y \ \forall i \in I \ \ f_i = f \circ i_i = f_{|E_i}$
Dans ce cas : on peut écrire $\oplus_{i\in I} E_i \approx \coprod_{i\in I} E_i$ et $\dim(\oplus_{i\in I} E_i) = \sum_{i\in I} \dim(E_i)$

Caractérisation E = somme directe. Pour $(E_i)_{i\in I}$ K sevs d'un même Kev E :
$\coprod_{i\in I} E_i \to E : (x_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} x_i$ est un morphisme, mais ni forcément surjectif ni injectif.
Alors $E = \oplus_{i\in I} E_i$
$\Leftrightarrow \coprod_{i\in I} E_i \to E : (x_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} x_i$ isomorphisme
$\Leftrightarrow \forall x \in E \ \ \exists! \, (x_i)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} E_i \ \ x = \sum_{i\in I} x_i$
$\Leftrightarrow \forall (x_i)_{i\in I} \in \coprod_{i\in I} E_i \quad \sum_{i\in I} x_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in I \ x_i = 0_E$ <u>et</u> $E = \sum_{i\in I} E_i$ (surjectivité)
$\Leftrightarrow \forall i \in I \ E_i \cap \sum_{j\in I, j\neq i} E_j = \{0_E\}$ <u>et</u> $E = \sum_{i\in I} E_i$
$\Leftrightarrow \forall (B_i \text{ base de } E_i)_{i\in I} \ \ \vee_{i\in I} B_i$ base de E
$\Leftrightarrow \exists (B_i \text{ base de } E_i)_{i\in I} \ \ \vee_{i\in I} B_i$ base de E
$\Leftrightarrow E$ muni de ses injections $i_j : E_j \to E$ est une somme catégorique :
càd $\forall Y$ $\mathbb{K}$ ev $\forall \left(f_j : E_j \to Y \text{ morphisme}\right) \exists! \, f : E \to Y \ \forall i \in I \ \ f_i = f \circ i_i = f_{|E_i}$
Dans ce cas : on peut écrire $E \approx \coprod_{i\in I} E_i$ et $\dim(E) = \sum_{i\in I} \dim(E_i)$

Caractérisation somme directe à 2 objets. Pour F, G K sevs d'un même Kev E :
$F \times G \to F + G : (f, g) \mapsto f + g$ est toujours un morphisme surjectif, mais pas toujours bijectif.
$F \times G$ est toujours une somme catégorique, mais pas forcément $F + G$.
$\boldsymbol{F + G}$ **est en somme directe**, et on note $\boldsymbol{F \oplus G} = F + G$
$\Leftrightarrow F \times G \to F + G : (f, g) \mapsto f + g$ isomorphisme
$\Leftrightarrow \forall x \in F + G \ \ \exists! \, (f, g) \in F \times G \ x = f + g$
$\Leftrightarrow \forall (f, g) \in F \times G \quad f + g = 0 \Rightarrow f = g = 0$
$\Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$
$\Leftrightarrow \forall B_F$ base de F, B_G base de G, $B_F \vee B_G$ base de $F + G$
$\Leftrightarrow \exists B_F$ base de F, B_G base de G, $B_F \vee B_G$ base de $F + G$
$\Leftrightarrow F + G$ est une somme catégorique.
Dans ce cas : on peut écrire $F \oplus G \approx F \times G$ et $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$

Caractérisation supplémentaire. Pour F, G K sevs d'un même Kev E :
$F \times G \to E : (f, g) \mapsto f + g$ est un morphisme, mais ni forcément surjectif ni injectif.
$F \times G$ est toujours une somme catégorique, mais pas forcément $F + G$.
$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ **sont supplémentaires dans** $\boldsymbol{E}$ càd $E = F \oplus G$
$\Leftrightarrow F \times G \to F + G : (f, g) \mapsto f + g$ isomorphisme
$\Leftrightarrow \forall x \in F + G \ \ \exists! \, (f, g) \in F \times G \ x = f + g$
$\Leftrightarrow \forall (f, g) \in F \times G \quad f + g = 0 \Rightarrow f = g = 0$ <u>et</u> $E = F + G$ (surjectivité)
$\Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$ <u>et</u> $E = F + G$
$\Leftrightarrow \forall B_F$ base de F, B_G base de G, $B_F \vee B_G$ base de E

$\Leftrightarrow \exists B_F$ base de F, B_G base de G, $B_F \vee B_G$ base de E
$\Leftrightarrow$ E muni de ses injections $i_F: F \to E, i_g: G \to E$ est une somme catégorique.
$\Leftrightarrow$ La restriction de la surjection canonique $\pi_G: G \to E/F$ est un isomorphisme.
$\Leftrightarrow$ La restriction de la surjection canonique $\pi_F: F \to E/G$ est un isomorphisme.
Dans ce cas : on peut écrire $E \approx F \times G$, $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$, $\frac{E}{F} \approx G$, $\frac{E}{G} \approx F$

Propriétés des applications linéaires.
Théorème. Soit $B = (e_i)_{i\in I} \in E^I$ une base d'un Kev E, et $(y_i)_{i\in I} \in F^I$ une famille quelconque d'un Kev F, alors il existe une unique application linéaire de $L_K(E,F)$ qui envoie la base fixée sur la famille fixée, càd $\exists! u \in L_K(E,F)\ \forall i \in I\ u(e_i) = y_i$
Une application linéaire de $L_K(E,F)$ est un isomorphisme d'ev ssi l'image d'une base quelconque de E, est une base de F ssi l'image de toute base de E est une base de F.
L'image d'une application linéaire est engendrée par l'image d'une base de l'espace de départ E.
Deux Kevs de dimension finie, sont de même dimension ssi ils sont isomorphes.
Deux Kevs isomorphes sont de même dimension (finie ou infinie).
Tout Kev de dimension finie n est isomorphe au Kev $(K^n, +, \times)$
Deux Kev E, F sont tous 2 de dimension finie ssi l'espace $L_K(E,F)$ des morphismes entre eux, est de dimension finie. Dans ce cas on a $\dim L_K(E,F) = \dim_K E \dim_K F$
Soit $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ un Kev somme directe finie de n Kevs, et F un Kev, alors une application linéaire de E vers F est déterminée par ses n restrictions sur chaque E_i, et réciproquement.

Projecteur.
Etant donné $E = F \oplus G$, **le projecteur de E de base F de direction G** est l'unique fonction $p: E = F \oplus G \to E: x = f + g \mapsto f$. Il est bien défini car l'écriture $x = f + g$ est unique par hypothèse.
Un projecteur p est donc caractérisé uniquement par son couple (base, direction) càd (F, G)
Un projecteur est toujours un endomorphisme sur son espace E.
Le projecteur de E sur F de direction G, est d'image F, et de noyau G
Un projecteur p est donc caractérisé par son couple (noyau, image). C'est l'unique projecteur de noyau $\ker p$ et d'image $\operatorname{im} p$. Un projecteur p vérifie donc toujours $E = \ker p \oplus \operatorname{im} p$
Un endomorphisme $u \in L_K(E)$ est un projecteur ssi il est idempotent càd ssi $p \circ p = p$
Si $E = F \oplus G$, il existe toujours un projecteur de E de base F de direction G, et un autre de base G et de direction F, donc il existe toujours deux projecteurs p et q de E dont la somme vaut l'identité et dont les images respectives sont F et G.
$E = F \oplus G$ ssi $\pi_G: G \to \frac{E}{F}$ est un isomorphisme, et dans ce cas le projecteur p de base G de direction F factorisé sur son noyau : $\overline{p}: \frac{E}{F} \to G$ est en fait l'isomorphisme réciproque.

Affinités vectorielles.
Etant donné $E = F \oplus G$, on appelle **affinité vectorielle** sur F (de **base** F), de **direction** G, de **rapport** $\lambda \in K$, l'unique endomorphisme de E, qui se restreint a l'identité sur F et a l'homothétie de rapport λ sur G. Autrement dit $u(x = x_F + x_G) = x_F + \lambda x_G$.
Pour une affinité vectorielle u on a donc toujours $F = \ker(u - Id_E)$, $G = \ker(u - \lambda Id_E)$, donc toujours $E = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u - \lambda Id_E)$
L'identité de E est une affinité vectorielle de direction $G = \{0\}$ donc le rapport n'importe pas.
Une **homothétie de rapport λ** est une affinité vectorielle de rapport λ avec $F = \{0\}$ cad $u = \lambda Id_E$.
Un **projecteur** est une affinité vectorielle de rapport $\lambda = 0$. Dans ce cas $E = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u)$ mais en fait $u^2 = u, \ker(u - Id_E) = im(u)$ et donc $E = im(u) \oplus \ker(u)$.

Une **symétrie** est une affinité vectorielle de rapport $\lambda = -1$. Dans ce cas $E = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u + Id_E)$, $u^2 = Id_E$
Une **dilatation** est une affinité vectorielle sur un hyperplan càd de direction une droite et de rapport $\lambda \neq 1$. Dans ce cas $H = \ker(u - Id_E)$ hyperplan et $D = \ker(u - \lambda Id_E)$ droite.
Une dilatation **fixe son hyperplan** : $H = \ker(u - Id_E)$ ssi $\forall x \in H\ u(x) = x$ ssi $u|H = Id_H$
Une **réflexion** est une dilatation de rapport $\lambda = -1$, autrement dit c'est une symétrie sur un hyperplan.
Soient f un endomorphisme d'un espace vectoriel *E*, $H = Ker(f - id)$ l'ensemble des vecteurs invariants, et $D = Im(f - id)$
On dit que f est une **transvection** si f est l'identité, ou si H est un hyperplan (**base** de la transvection) (ce qui revient à dire que D, **direction** de la transvection, est une droite) et D est inclus dans H (càd que pour tout *x* de *E*, $f(x) - x \in H$).
Une transvection appartient $SL(E)$, n'est jamais l'identité, fixe toujours un hyperplan.

Codimension et rang.
Tout supplémentaire du noyau d'un morphisme d'ev est un espace isomorphe à l'image du morphisme.
Deux supplémentaires d'un même Ksev d'un Kev, sont isomorphes. $E = A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B \approx C$
Un Ksev d'un Kev (de dimension quelconque) admet toujours un supplémentaire dans ce Kev.
Deux Kevs isomorphes sont de même dimension (finie ou infinie). Réciproque vraie en dimension finie.
La **codimension d'un Ksev** d'un Kev, est la dimension d'un supplémentaire quelconque de ce Ksev.
Pour F Ksev de E un Kev, on peut donc inconditionnellement écrire : $\dim_K E = \dim_K F + \operatorname{codim}_K F$
En explicitant le supplémentaire $E = F \oplus G$, on peut toujours écrire $\dim_K E = \dim_K F + \dim_K G$
Ainsi, $\dim_K E/F = \dim_K G = \operatorname{codim}_K F$ (car $\pi_G : G \to E/F$ est un isomorphisme)
Pour F Ksev de E Kev, on a donc toujours $\dim_K E = \dim_K F + \dim_K E/F = \dim_K F + \operatorname{codim}_K F$
Pour F Ksev de E Kev de dimension finie, on a $\dim_K E/F = \operatorname{codim}_K F = \dim_K E - \dim_K F$
Un **hyperplan** d'un Kev E, est un K sous-espace vectoriel de <u>codimension</u> 1. En dimension finie n c'est donc un Ksev de dimension $n - 1$.
Le degré d'un polynôme P sur un corps K, est égal à la codimension de l'idéal qu'il engendre dans K[X].
$\deg \mathrm{P} = \operatorname{codim}_{K[X]} \langle \mathrm{P} \rangle$.
Le K **rang** d'une K application linéaire u est la K dimension de son image. On le note $\boldsymbol{rg_K(u)}$
Le **rang d'une famille quelconque** $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ sur un Kev E est la dimension de l'espace qu'elle engendre. $\mathbf{rg}_{\boldsymbol{K}}\, (\boldsymbol{x_i})_{\boldsymbol{i\in I}} = \dim_K \operatorname{vect}\, (x_i)_{i\in I}$
L'image d'une application linéaire est engendrée par l'image d'une base de l'espace de départ E.
Autrement dit $\forall u \in L_K(E,F)\ \forall (e_i)_{i\in I}$ base de E, $\operatorname{im} u = \operatorname{vect} u((e_i)_{i\in I})$
Le rang d'une application linéaire est égal au rang de la famille image d'une base de l'espace de départ E. Autrement dit $\forall u \in L_K(E,F)\ \forall (e_i)_{i\in I}$ base de E, $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u((e_i)_{i\in I})$
Théorème du rang. Le rang d'une application linéaire est toujours égal à la codimension de son noyau.
$\forall u \in L_K(E,F)\ \ rg_K(u) = \operatorname{codim}_K \ker u$. On a donc toujours $\dim_K E = \dim_K \ker u + \dim_K \operatorname{im} u$
Si E est de dimension finie, u est toujours de rang fini et $rg_K(u) = \dim_K E - \dim_K \ker u$
Pour $(\alpha_i)_{0\leq i\leq n}$ $n+1$ scalaires distincts d'un corps K, $u : K[X] \to K^{n+1} : P \mapsto \big(P(\alpha_i)\big)_{0\leq i\leq n}$ est linéaire surjective de rang $n+1$.
Pour $u \in L_K(E,F)$ linéaire injective, on a $\dim_K E \leq \dim_K F$
Pour $u \in L_K(E,F)$ linéaire surjective, on a $\dim_K E \geq \dim_K F$
Pour $u \in L_K(E,F)$ isomorphisme d'ev, on a $\dim_K E = \dim_K F$
Pour $u \in L_K(E,F)$ linéaire, et $\dim_K E = \dim_K F < \infty$, alors ($u$ injectif ssi u surjectif ssi u isomorphisme)
Dans E Kev de dim finie, $\forall u, v \in L(E)\ \ rg(v \circ u) = rg(u) - \dim(\operatorname{im} u \cap ker\ v)$
Dans E Kev de dim finie, $\forall u \in L(E)$, $(E = \operatorname{im} u \oplus \ker u \Leftrightarrow \operatorname{im} u = \operatorname{im} u^2 \Leftrightarrow \ker u = \ker u^2)$
Pour F, G deux Ksevs d'un Kev E, $\dim_K F \times G = \dim_K F + \dim_K G$

Grassmann. Pour F, G deux Ksevs d'un Kev E, $\dim_K(F+G)+\dim_K(F\cap G)=\dim_K F+\dim_K G$
En <u>dimension finie</u> on peut donc écrire $\dim_K(F+G)=\dim_K F+\dim_K G-\dim_K(F\cap G)$
Pour $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ Ksevs d'un Kev E, $\dim_K \sum_{i=1}^n E_i \leq \sum_{i=1}^n \dim_K E_i$
Caractérisation somme directe 2. Pour F, G deux Ksevs d'un Kev E <u>de dimension finie</u>,
$$E=F\oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} E=F+G \\ F\cap G=\{0_E\}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E=F+G \\ \dim_K E=\dim_K F+\dim_K G\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F\cap G=\{0_E\} \\ \dim_K E=\dim_K F+\dim_K G\end{cases}$$
Caractérisation somme directe n. Pour $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ deux Ksevs d'un Kev E <u>de dimension finie</u>,
$$E=\oplus_{i=1}^n E_i \Leftrightarrow \begin{cases} E=\sum_{i=1}^n E_i \\ \forall k, E_k\cap \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n E_i=\{0_E\}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E=\sum_{i=1}^n E_i \\ \dim_K E=\sum_{i=1}^n \dim_K E_i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall k, E_k\cap \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n E_i=\{0_E\} \\ \dim_K E=\sum_{i=1}^n \dim_K E_i\end{cases}$$
K-Algèbre.
On dit que $(\boldsymbol{E},+,\cdot,\times)$ **est une** $(\boldsymbol{K},+_{\boldsymbol{K}},\times_{\boldsymbol{K}})$**-algèbre (unitaire)** ssi $(E,+,\cdot)$ est un $(K,+_K,\times_K)$-espace vectoriel, $(E,+,\times)$ est un anneau (unitaire), et pour tous $x,y\in E, \alpha\in K$ $\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)$
Toute extension L d'un corps K peut être vue comme une algèbre sur K.
En particulier tout corps K est une algèbre sur lui-même.
$K[X], K[X_1,\dots,X_n], M_n(K)$ sont des K-algèbres. $C([a,b],C)$ est une C-algèbre.
$(L_K(E),+,\cdot,\circ)$ est une K- algèbre.
Une $\boldsymbol{K}$**-sous-algèbre** d'une K-algèbre E est une partie non vide F de E, telle que $1_F=1_E$ / $1_E\in F$, et qui munie des lois induites $+,\cdot,\times$ est encore une K-algèbre.
Caractérisation sous-algèbre. Une partie $F\subseteq E$ d'une K-algèbre E, est une $\boldsymbol{K}$**-sous-algèbre** de E
ssi $(F,+,\times)$ est un sous-anneau unitaire de $(E,+,\times)$ et $(F,+,\cdot)$ K-sev de $(E,+,\cdot)$
ssi $\forall\alpha\in K$ $\forall x,y\in F$ $\alpha x+y\in F$, $xy\in F$ et $1_E\in F$
On a donc (dans le cas unitaire toujours supposé par défaut) $1_F=1_E$.
$T_n^S(K)$ et $T_n^I(K)$ sont des K sous-algèbres de $M_n(K)$
Le centre d'une K-algèbre est l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les autres pour $\times$.
Le centre d'une K-algèbre en est une K sous-algèbre.
Le centre des endomorphismes sur un Kev de dimension finie, s'avère être l'ensemble des homothéties vectorielles $C_{L_K(E)}=\{\lambda Id_E : \lambda\in K\}$. C'est une K sous-algèbre de $(L_K(E),+,\cdot,\circ)$
Le centre du groupe linéaire est $Z\big(GL(E)\big)=\{\lambda Id_E : \lambda\in K^*\}$, c'est un sous-groupe de $(GL(E),\circ)$
Morphisme de $\boldsymbol{K}$-algèbres.
Un **morphisme d'algèbres**, d'une K-algèbre E vers une K-algèbre F <u>sur le même corps</u> K est à la fois un morphisme d'anneau et un morphisme d'espaces vectoriels de E vers F càd que c'est une application $u: E\to F$ telle que $\forall\alpha\in K$ $\forall x,y\in E$ $u(\alpha x+y)=\alpha u(x)+u(y)$, $u(xy)=u(x)u(y)$, $u(1_E)=1_F$.

Dualité.
Rappels topologiques. On suppose K = R ou C
Entre deux Kevs E, F on note $\boldsymbol{L(E,F)}$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F
Entre deux Kevns E, F on note $\boldsymbol{L_c(E,F)}$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F
Une application linéaire f d'un Kevn E vers un Kevn F vérifie les équivalences :
f continue ssi f continue en 0 ssi f bornée sur $B_f(0,1)$ ssi f bornée sur $S(0,1)$ ssi $\exists M\in R_+$ $\forall x\in E$ $\|f(x)\|_F\leq M\|x\|_E$ ssi f lipschitzienne ssi f uniformément continue.
Un **opérateur borné entre deux evn** désigne une application linéaire <u>continue</u>.
Une application linéaire n'est jamais bornée au sens strict.
Pour un Kev E, on note $\boldsymbol{E^\star}=L(E,R)$ **le dual algébrique de E.**
Pour un Kevn E, on note $\boldsymbol{E'}=L_c(E,R)$ **le dual topologique de E.**
Sur un Kev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
Toute application linéaire d'un Kevn <u>de dimension finie</u> vers un Kevn <u>quelconque</u> est continue.

Toute application n-linéaire d'un produit fini de Kevn de dimensions finies vers un Kevn quelconque est continue.
Dans un Kevn, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est complet et donc fermé.
Un Kevn complet de dimension infinie ne possède pas de base algébrique dénombrable.
Riesz. Un Kevn est de dim finie ssi il est localement compact ssi la boule unité fermée est compacte.
Les parties compactes d'un Kevn de dimension finie sont exactement les fermés bornés.
La norme d'opérateur/subordonnée/triple/duale a $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L_c(E,F)}$ est $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L_c(E,F)}} = \sup_{\|x\|_E \le 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$
Caractérisation: $\|f\|_{L_c(E,F)} = \inf\{M \in R_+ \mid \forall x \in E \ \|f(x)\|_F \le M\|x\|_E\}$
$\left(L_c(E,F), \| \quad \|_{L_c(E,F)}\right)$ est un Kevn complet si $(F, \| \quad \|_F)$ l'est.
Le dual topologique E' d'un Revn est donc toujours complet car R l'est.
En dimension finie tout opérateur est borné. $L(E,F) = L_c(E,F)$
Pour 3 Kevn $E, F, G,\ \forall f \in L_c(E,F)\ \forall g \in L_c(F,G)$ alors $g \circ f \in L_c(E,G)$ et $\|g \circ f\| \le \|g\|\|f\|$
$\forall u \in GL_c(E)\ \|u^{-1}\| \ge \|u\|^{-1}$
$E' \times E \to R: (f,x) \mapsto \langle f,x\rangle = f(x)$ est **le crochet de dualité**.
Théorèmes
Un sev d'un Kev E est un hyperplan ssi c'est le noyau d'un forme linéaire non nulle.
Une forme linéaire non nulle est complètement déterminée par la donnée de l'image d'un vecteur n'appartenant pas à son noyau.
Pour un hyperplan vectoriel d'un Kev E, on peut obtenir un supplémentaire algébrique en prenant la droite vectorielle dirigée par n'importe quel vecteur n'appartenant pas à l'hyperplan.
Deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles ssi elles ont même noyau hyperplan ssi le noyau de l'un est inclus dans le noyau de l'autre.
Dans un Kevn, un hyperplan est fermé ssi une forme linéaire de noyau cet hyperplan est continue.
Dans ce cas si $K = R$, le complémentaire de l'hyperplan possède deux composantes connexes
$C_+ = \{x \in E \mid \phi(x) > 0\}$ et $C_- = \{x \in E \mid \phi(x) < 0\}$
Bidual.
Le bidual d'un Kev E est l'espace dual de $E^\star$ c'est-à-dire l'espace $E^{\star\star} = (E^\star)^\star$
Ayant fixe un $x \in E$, l'application qui a une forme linéaire associe son crochet de dualité par cet élément, est un élément du bidual de E. Autrement dit $\forall x \in E\ \ (.|x) \in E^{\star\star}$. On le note $\boldsymbol{\hat{x}} = (.|x)$.
L'application $J: E \to E^{\star\star} : x \mapsto \hat{x}$ est linéaire. **C'est l'application linéaire canonique de E dans $\boldsymbol{E^{\star\star}}$**
L'application linéaire canonique de $E \to E^{\star\star}$ est injective (AC) mais pas forcément surjective.
Elle n'est pas surjective dans $R[X]$ muni de $P \mapsto P(1)$
Le bidual topologique peut être muni de la norme $\|\xi\|_{E''} = \sup_{\|f\|_{E'} \le 1} \|\xi(f)\|$
L'application linéaire canonique J est une isométrie, $\forall x \in E\ \ \|\hat{x}\|_{E''} = \|x\|_E$
Un Kev E est **réflexif** ssi le morphisme canonique injectif dans son bidual est aussi surjectif.
Un Kevn réflexif est donc isométriquement isomorphe et peut être identifié à son bidual topologique, $E'' = E$
Un Kevn non réflexif est isométriquement isomorphe a un sous espace de son bidual topologique.
Quoi qu'il en soit, on peut toujours plonger un Kevn dans son bidual topologique.
Orthogonalité version dualité.
On peut définir un concept d'orthogonalité pour la dualité algébrique ou topologique.
On suppose K = R ou C, donc en particulier K est complet et donc le dual topologique est complet.
L'**orthogonal dual algébrique (resp. topologique) d'une partie non vide d'un Kev (resp. Kevn)**, est l'ensemble des formes linéaires quelconques (resp. continues) s'annulant sur la partie.

L'**orthogonal vectoriel algébrique (resp. topologique) d'une partie <u>non vide</u> du <u>dual</u> d'un Kev (resp. Kevn)**, est l'ensemble des vecteurs annulant toutes les formes linéaires quelconques (resp. continues) de la partie.

Propriétés générales s'appliquant au cas algébrique et topologique. (à vérifier)

L'orthogonal dual/vectoriel est toujours un K-sous-espace vectoriel.

L'orthogonal dual du singleton nul, est l'espace dual entier. $\{0_E\}^\perp = E^\star$

L'orthogonal dual de l'espace entier, est le singleton de la forme linéaire nulle. $E^\perp = \{0_{E^\star}\}$

L'orthogonal vectoriel du singleton de la forme linéaire nulle, est l'espace vectoriel entier. $\{0_{E^\star}\}^\perp = E$

L'orthogonal vectoriel de l'espace dual, contient mais <u>n'est pas toujours</u> le singleton nul. $\{0_E\} \subseteq (E^\star)^\perp$

En dimension finie, l'orthogonal vectoriel de l'espace dual, est le singleton nul. $(E^\star)^\perp = \{0_E\}$

L'orthogonal dual (resp. vec) d'une partie non vide est aussi l'orthogonal dual (resp. vec) du sous-espace engendré par la partie. $A^\perp = (vect\ A)^\perp$

Pour l'orthogonal dual (resp. vectoriel) on a $\emptyset \neq A_1 \subseteq A_2 \subseteq E \Rightarrow A_2^\perp \subseteq A_1^\perp$

L'orthogonal dual (resp. vec) de l'orthogonal d'une partie d'un Kev, contient la partie. $A \subseteq (A^\perp)^\perp$

Propriétés topologiques. (à vérifier)

L'orthogonal dual topologique d'une partie est un Ksev <u>fermé</u> donc complet du dual topologique.

L'orthogonal vectoriel topologique d'une partie duale est un Ksev fermé du Kevn. (complet si E banach)

On peut écrire $A^\perp = \overline{A}^\perp = \overline{A^\perp} = vect(A)^\perp = \overline{vect(A)}^\perp = \overline{vect(A)^\perp}$

On a $\overline{vect(A)} \cap A^\perp = \{0\}$

Pour un <u>sous-espace vectoriel</u> F du Kevn E on a $\overline{F} = (F^\perp)^\perp$ et donc $F \subseteq \overline{F} = (F^\perp)^\perp$

Pour un <u>sous-espace vectoriel</u> N du dual topologique E' on a juste $N \subseteq \overline{N} \subseteq (N^\perp)^\perp$

Cependant si le Kevn E est <u>réflexif</u>, on a également $\overline{N} = (N^\perp)^\perp$ et donc $N \subseteq \overline{N} = (N^\perp)^\perp$

Pour deux sev fermés F, G d'un Kevn E, on a

$F \cap G = (F^\perp + G^\perp)^\perp \quad F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$

$(F \cap G)^\perp = \overline{F^\perp + G^\perp} \quad (F^\perp \cap G^\perp)^\perp = \overline{F + G}$

Pour deux sev fermés F, G d'un <u>Banach</u> E, on a

$F + G$ fermé dans E ssi $F + G$ fermé dans E ssi $F + G = (F^\perp + G^\perp)^\perp$ ssi $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$

En dimension finie.

L'orthogonal dual/vectoriel est toujours un K-sous-espace vectoriel fermé complet.

$\{0_E\}^\perp = E^\star$, $E^\perp = \{0_{E^\star}\}$, $\{0_{E^\star}\}^\perp = E$, $\{0_E\} = (E^\star)^\perp$

$\forall A \neq \emptyset \quad A^\perp = \overline{A}^\perp = \overline{A^\perp} = vect(A)^\perp = \overline{vect(A)}^\perp = \overline{vect(A)^\perp}$

$\forall A_1, A_2 \quad \emptyset \neq A_1 \subseteq A_2 \subseteq E \Rightarrow A_2^\perp \subseteq A_1^\perp$

$\forall A \quad A \subseteq (A^\perp)^\perp$

$\forall A \quad \overline{vect(A)} \cap A^\perp = vect\ A \cap A^\perp = \{0\}, \quad E^\star = vect\ A \Leftrightarrow A^\perp = \{0_E\}$

Pour un <u>sous-espace vectoriel</u> F on a $F = (F^\perp)^\perp$, $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ $(= codim\ F = \dim E/F)$

$\forall A_1, A_2 \quad (A_1 \cup A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$

$\forall A_1, A_2 \quad (A_1 \cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$

Base duale et antéduale.

Etant donnée une base $B = (e_i)_{1 \le i \le n} \in E^n$ d'un Kev E de <u>dimension finie</u> n, il existe une unique famille $(\boldsymbol{e_i^\star})_{\boldsymbol{1 \le i \le n}} \in (E^\star)^n$ de forme linéaires vérifiant $\forall i\ \forall j\ \ e_i^\star(e_j) = \langle e_i^\star, e_j \rangle = \delta_{i,j} 1_K$. Cette famille est appelée **base duale de $\boldsymbol{B}$**, et notée **$\boldsymbol{B^\star}$.**

La base duale d'une base B d'un Kev E, est bien une base du dual $E^\star$

Etant donnée une base $B^\star = (e_i^\star)_{1 \le i \le n} \in (E^\star)^n$ du dual d'un Kev E de <u>dimension finie</u> n, il existe une unique famille $(e_i)_{1 \le i \le n} \in E^n$ de vecteurs vérifiant $\forall i\ \forall j\ \ e_i^\star(e_j) = \langle e_i^\star, e_j \rangle = \delta_{i,j} 1_K$. Cette famille est appelée **base antéduale de $\boldsymbol{B^\star}$**, et notée **B.**

La base antéduale d'une base $B^\star$ du dual d'un Kev E, est bien une base de E

La base antéduale de la base duale redonne la base initiale, ce qui justifie les notations prises.
En dimension finie, fixer une base revient donc à fixer sa version vectorielle B et sa version duale $B^\star$
Dans une base fixée, un vecteur $x \in E$ peut toujours s'écrire $x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i^\star, x \rangle e_i$
Dans une base fixée, une forme linéaire $\phi \in E$ peut toujours s'écrire $\phi = \sum_{i=1}^{n} \langle \phi, e_i \rangle e_i^\star$
Systèmes d'équations linéaires d'un sous-espace
Un Ksev F d'un Kev E de dimension finie n, est de dimension $r \in \{0, \dots, n\}$ ssi il existe une famille libre de $n - r$ formes linéaires $(\phi_i)_{r+1 \leq i \leq n}$ telles que $\forall x \in E \ (x \in F \Leftrightarrow \forall i \in \{r+1, \dots, n\} \ \phi_i(x) = 0_E)$ càd ssi F s'exprime comme l'intersection des noyaux de $n - r$ formes linéaires indépendantes.
L'intersection des noyaux d'une famille quelconque de formes linéaires de rang r sur un Kev E de dimension finie n, est un Ksev de dimension $n - r$
Transposée.
La **transposée d'une application linéaire** $u \in L_K(E, F)$ est l'application $\boldsymbol{t_u}: F^\star \to E^\star: \phi \mapsto \phi \circ u$.
La transposée d'une application linéaire est elle-même linéaire $t_u \in L_K(F^\star, E^\star)$
On a $\forall u \in L_K(E, F) \ \forall v \in L_K(F, G) \quad t_{v \circ u} = t_u \circ t_v$
$\forall u \in L_K(E, F) \ \ rg\ t_u = rg\ u$
En dimension finie $\ker t_u = (\operatorname{im} u)^\perp$, $\operatorname{im} t_u = (\ker u)^\perp$
Pour F $\mathbb{K}$sev de E, alors $\frac{E^\star}{F^\perp} \approx F^\star$ (car $E^\star \to F^\star: \phi \mapsto \phi_{|F}$ est surjective de noyau $F^\perp$)
Corollaire : $\dim E = \dim(F) + \dim(F^\perp)$

Exercices.
Deux sev d'un de même dimension d'un même $\mathbb{K}$ev de dimension finie, admettent un supplémentaire commun.
Pour $f, g \in L_{\mathbb{K}}(E, F)$ avec E de dim finie, $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f + g) \leq rg(f) + rg(g)$
Pour $f, g \in L_{\mathbb{K}}(E)$ avec E de dim finie, $fg = 0$ et $f + g \in GL(E) \Rightarrow rg(f) + rg(g) = \dim(E)$
Pour f, g projecteurs sur E de dim finie de carac $\neq 2$, $f + g$ projecteur ssi $f \circ g = g \circ f = 0$
Dans ce cas $im(f + g) = im(f) \oplus im(g)$ et $\ker(f + g) = \ker(f) \cap \ker(g)$
Deux sev de même codimension d'un $\mathbb{K}$ev, dont l'un contient l'autre, alors ils sont égaux.
Dans une suite exacte finie de $\mathbb{K}$evs (dont f_0 injective, f_{n-1} surjective) alors $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim E_k = 0$
Grassmann pour la codimension. $codim(F + G) + codim(F \cap G) = codim(F) + codim(G)$
$A^2 = -I_n$ ssi n pair et A semblable a une matrice diagonale par bloc, dont tous les blocs diagonaux sont $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
L'indice de nilpotence d'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ev E de dimension finie est $\leq \dim(E)$
Une famille libre de n fonctions $f_1, \dots, f_n$ d'un ensemble E vers un corps $\mathbb{K}$ ($F(E, \mathbb{K})$ $\mathbb{K}$ev) alors il existe $x_1, \dots x_n \in E$ tels que $\left[f_i(x_j)\right]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in GL_n(\mathbb{K})$
Identités de Jacobi et de Sylvester. (TODO)
Une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ n'est pas inversible ssi $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \ P - \lambda M \in GL_n(\mathbb{C})$
$\forall \varphi \in L(M_n(\mathbb{C})) \ \ \varphi(GL_n(\mathbb{C})) \subseteq GL_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \varphi^{-1}(GL_n(\mathbb{C})) \subseteq GL_n(\mathbb{C})$
Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ a pour coefficients $a_{i,j} = \sum_{k|i, k|j} \psi(k)$ avec $\psi: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, alors $\det A = \psi(1)\psi(2) \dots \psi(n)$
Si $a_{i,j} =$ nombre de diviseurs communs a i et j, $\det A = 1$
Si $a_{i,j} =$ somme des diviseurs communs a i et j, $\det A = n!$
Si $a_{i,j} = i \wedge j$, $\det A = \phi(1) \dots \phi(n)$ avec ϕ indicatrice d'Euler.
Tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}$ corps commutatif et $n \geq 2$, contient au moins une matrice inversible.
La dimension maximale d'un sous-espace de $M_n(\mathbb{K})$ ne contenant aucune matrice inversible est $n(n-1)$.
Une application $p: M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^+$ tel que $p(\lambda A) \leq |\lambda| p(A), p(A + B) \leq p(A) + p(B), p(AB) \leq p(A)p(B)$ est soit nulle, soit une norme sur $M_n(\mathbb{C})$

Une matrice de transvection est inversible, d'inverse une matrice de transvection.
Finir l'exo TODO.
Deux matrices carrées semblables dans $M_n(\mathbb{C})$ le sont dans $M_n(\mathbb{R})$
Deux matrices carrées semblables sur une extension $\mathbb{L}$ d'un corps $\mathbb{K}$ infini, sont aussi semblables dans $\mathbb{K}$.
C'est encore vrai dans le cas $\mathbb{K}$ fini.