Chapitre 30. La différentielle

I. Définitions et premières propriétés

I.1. Définition.

Une application f d'un ouvert U de R vers un R-evn $(F, \| \quad \|_F)$ est **dérivable** en un point $a \in U$ de **dérivée** $\boldsymbol{f'(a)} \in \boldsymbol{R}$ ssi $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \rightarrow_{h \to 0} f'(a)$ ssi $f(a+h) =_{h \to 0} f(a) + hf'(a) + o(h)$

Une application f d'un ouvert U d'un R-evn E, vers un R-evn F est **différentiable** en un point $a \in U$ s'il existe une application $d_a f$ linéaire continue de $E \to F$, tel que $f(a+h) =_{h \to 0} f(a) + d_a f(h) + o(h)$

cad $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall h \in B_{\| \quad \|_E}(0_E, \delta) \cap (U - a)\ \ \|f(a+h) - f(a) - d_a f(h)\|_F \leq \varepsilon \|h\|_E$

Dans ce cas, $\boldsymbol{d_a f}$ est l'unique telle application, et on l'appelle **différentielle de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$.**

Une autre notation intéressante est $df(a).h = d_a f(h)$

Dans le cas ou $E = R$, dérivabilité et différentiabilité sont synonymes et $d_a f(h) = hf'(a)\ \ \forall h$

Dans le cas ou $F = R\ \ d_a f$ est une forme linéaire continue, si de plus la norme est associe à un produit scalaire, alors $E^* = L_c(E, R)$ s'identifie a E par l'isomorphisme $x \mapsto (x, .)$ et $d_a f$ est représenté par un unique vecteur $\vec{\nabla} f(a)$ appelé gradient de f en a, $\forall\, h \in E\ \ d_a f\,(h) = \left(\vec{\nabla} f(a), h\right)$

Généralisation espaces affines. Une application f d'un ouvert U d'un $\mathbb{R}$ean E, vers un $\mathbb{R}$ean F est **différentiable** en un point $a \in U$ ssi $\exists \overrightarrow{d_a f} \in L_c\left(\vec{E}, \vec{F}\right)\ \ f\left(a + \vec{h}\right) =_{\vec{h} \to \vec{0}} f(a) + \overrightarrow{d_a f}\left(\vec{h}\right) + o\left(\vec{h}\right)$ càd

$\exists \overrightarrow{d_a f} \in L_c\left(\vec{E}, \vec{F}\right) \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \vec{h} \in B_{\vec{E}}\left(\vec{0}, \delta\right) \cap (U - a)\ \ \left\|f\left(a + \vec{h}\right) - f(a) - \overrightarrow{d_a f}\left(\vec{h}\right)\right\|_{\vec{F}} \leq \varepsilon \left\|\vec{h}\right\|_{\vec{E}}$

Pour $h \in E, a \in U$ $\boldsymbol{f}$ **est directionnellement dérivable en $\boldsymbol{a}$ dans la direction $\boldsymbol{h}$** ssi $\frac{f(a+th)-f(a)}{t}$ admet une limite en $t \to 0, t \neq 0$, dans ce cas on note $\boldsymbol{f'(a, h)} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+th)-f(a)}{t} \in F$

$\boldsymbol{f}$ **est Gateaux-différentiable en $\boldsymbol{a}$** ssi f est directionnellement dérivable en a dans toutes les directions et $f'(a, .)$ est linéaire continue.

Si f est différentiable en a alors elle est Gateaux différentiable en a

Réciproque fausse. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (x, y) \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } y = x^2 \text{ et } x \neq 0 \\ \quad 0 \text{ sinon} \end{cases}$ n'est pas différentiable en $(0,0)$ car pas continue, mais f est Gateaux différentiable en $(0,0)$.

Démarche fréquente pour trouver un candidat de différentielle via la définition :

1) On cherche la dérivée différentielle pour toute direction.

2) On montre que $f'(a, .)$ Est linéaire continue (ce qui montre la Gateaux différentiabilité)

3) On montre que $\frac{\|f(a+h)-f(a)-f'(a,h)\|}{\|h\|} \to 0$

Attention à ne pas confondre df et $d_a f$. La continuité de df n'a rien à voir avec la continuité de $d_a f$

I.2. Premières propriétés

Différentiabilité en un point implique continuité en un point.

Si on remplace la norme sur E, ou celle sur F par des normes équivalentes, le caractère différentiable ne change pas, et si différentiabilité, la différentielle est inchangée. En particulier si E et F sont de dim finie, le caractère différentiable, et la différentielle ne dépendent plus des normes car toutes équivalentes.

Sur $C^0([a, b], R)$, l'identité id est linéaire, de plus $id: \| \quad \|_u \to \| \quad \|_1$ est continue donc différentiable, mais $id: \| \quad \|_1 \to \| \quad \|_u$ pas continue, donc pas différentiable, $\| \quad \|_u$ et $\| \quad \|_1$ ne sont pas équivalentes, donc le caractère différentiable dépend des normes choisies.

I.3. Application différentielle

Si une application f d'un ouvert d'un R-evn E, vers un R-evn F est continue en tout point de U, on dit que **f est de classe C^0 sur U.** On note $d^0f = f$, la différentielle d'ordre 0 = identité.
Si f est differentiable sur U on note $d^1f = df = a \mapsto d_af$.
Une application f d'un ouvert U d'un Revn E vers un Revn F est **de classe C^1 en un point a** $\in U$, ssi f est différentiable en tout point d'un voisinage ouvert V_a de a et
$df : (V_a, \| \quad \|_E) \to (L_c(E,F), \| \quad \|_{L_c(E,F)})$ est continue au point a
Une application f d'un ouvert U d'un Revn E vers un Revn F est **de classe C^1 sur U** ssi f est de classe C^1 en tout point $a \in U$ ssi f est différentiable sur U et $df : (U, \| \quad \|_E) \to (L_c(E,F), \| \quad \|)$ est continue

II. Quelques exemples et théorèmes classiques

II.1. Exemples

Une fonction constante est différentiable sur U et sa différentielle est la fonction nulle en tt point de U.
Une application R-linéaire continue d'un R-evn E, vers R-evn F est différentiable sur E et $d_af = f \ \forall a$
Une application R n-linéaire continue de n R-evns $E = E_1 \times \dots \times E_n$ vers un R-evn F, est differentiable sur E et on peut écrire en tout point $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$
$d_{(a_1,\dots,a_n)}f(h_1, \dots, h_n) = f(h_1, a_2, \dots, a_n) + f(a_1, h_2, a_3, \dots, a_n) + \dots + f(a_1, \dots, a_{n-1}, h_n)$
En particulier si $n = 2$, $d_{a,b}B(h,k) = B(h,b) + B(a,k)$
Lorsque l'espace de départ est de dimension finie, toute application linéaire ou n-linéaire est continue donc différentiable.
Tout produit scalaire réel sur un R-ev, définit un evn, est bilinéaire continu, et est différentiable.

II.2. Operations sur les fonctions différentiables

Soit U, V deux ouverts d'un R-evn E, soit un Revn F, soit $f : U \to F, g : V \to F$ soit $a \in U \cap V$, $\lambda \in R$, si f, g sont differentiables en a, alors leur somme l'est en a et la differentielle en a de la somme est la somme des differentielles en a. Si f est différentiable en a alors λf l'est de différentielle λd_af.
L'ensemble des applications de U dans F différentiable en a est un sev de $F(U,F)$.
Soit E, F, G R-evns, O ouvert de E, U ouvert de F, $f : O \to F, g : U \to G$ soit $a \in O$ tel que $f(a) \in U$.
Si f différentiable en a et g différentiable en f(a) alors $g \circ f$ est differentiable en a et $d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ d_af$. En prenant $E = F = R$ on retrouve la chain rule pour la dérivée.
Si f est a valeurs dans un produit fini de Revns, f est différentiable en un point a de son ouvert de definition dans un Revn E ssi ses composantes $f_i : E \to F_i$ le sont et dans ce cas on peut décomposer la différentielle $d_af(h) = (d_af_1(h), d_af_2(h), \dots, d_af_n(h))$
Ex : $d_{M,N}(MN)(H,K) = HN + MK$, Abus d'écriture le M,N en indice sont fixes, dans les parenthèses il s'agit des variables muettes de l'expression. $(M,N) \mapsto MN$. Si on veut être encore plus bref, on peut omettre M,N en indice $d(MN)(H,K) = HN + MK$, Attention les M,N a gauche sont des variables d'expression, ceux a droites se réfèrent à des constantes fixées.
$d(tr(M)M)(H) = tr(H)M + tr(M)H$

III. Différentielles et dérivées partielles

Soit $E = E_1 \times \dots \times E_k$ k R-evns et F un autre Revn. Soit f application d'un ouvert U de E vers F, et $a = (a_1, \dots a_k) \in U$.
On appelle **application partielle d'indice i élémentaire** l'application $\boldsymbol{h_{i,a}} : E_i \to E : x \mapsto (a_1, \dots, x, \dots, a_n)$, elle est differentiable sur E_i et $d_{x_0}h_{i,a}(h) = (0, \dots, h, \dots, 0)$.

On appelle **application partielle d'indice i de f** l'application $\boldsymbol{f_{i,a}} \coloneqq f \circ h_{i,a} : h_{i,a}^{-1}(U) \subseteq E_i \to F$.
f admet en a une <u>différentielle</u> partielle d'indice i si son application partielle d'indice i est différentiable au point $a_i \in h_{i,a}^{-1}(U)$. Dans ce cas on la note $\boldsymbol{d_{i,a}f} \in \boldsymbol{L_c(E_i, F)}$
<u>Si $E_i = R$</u> **la <u>dérivée</u> partielle en a d'indice i de f** est $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)} = f'_{i,a}(a_i)$ et on a $d_{i,a}f(h_i) = h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$
Une fonction différentiable en un point a, admet en ce point a des différentielles partielles pour tout indice, autrement dit $d_a f$ existe $\Rightarrow \forall i \ \ d_{i,a}f$ existe. Dans ce cas $d_a f(h_1, \dots, h_k) = d_{1,a}f(h_1) + \cdots + d_{k,a}f(h_k)$
Une fonction qui admet en un point des différentielles partielles pour tout indice, n'est pas forcement différentiable en ce point. Par exemple $(x,y) \in R^2 \mapsto \begin{matrix} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{matrix}$ en $(0,0)$
Une fonction différentiable en un point, qui donc y admet des différentielles partielles pour tout indice, n'a pas forcément ses différentielles partielles continues au point : $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0.
Si toutes les différentielles partielles d'une fonction sont définies au voisinage d'un point a et continues en ce point a, alors la fonction est différentiable (et même C^1) en ce point.
Dans le cas particulier $E = R^k$ on peut écrire $d_a f(h_1, \dots, h_k) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$, cad $d_a f(\vec{h}) = \vec{h} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(a)$

IV. Matrice Jacobienne

Si $f: U \subseteq R^n \to R^m,\ f = (f_1, \dots, f_m)$ est différentiable en $a = (a_1, \dots a_n) \in U$
Alors la matrice jacobienne de f en a est la matrice de $d_a f \in L(R^n, R^m)$ dans les bases canoniques.

$$\boldsymbol{J_a f} = \boldsymbol{\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(a)} = \boldsymbol{\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(a)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(R)$$

Si $f: U \to R^p$ différentiable en a et $g: V \supseteq f(U) \to R^q$ différentiable en $f(a)$
Alors $J_{f(a)}(g \circ f) = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{f}} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}$ La chain-rule physicienne s'applique avec cette notation.
Formule pour l'inverse.

Chapitre 31. Le théorème des accroissements finis

I. Théorème des accroissements finis

I.1. Théorème des accroissements finis, cas réel

Th. Rolle. Une fonction d'un segment de R vers R continue sur le segment dérivable sur son intérieur, d'images égales aux extrémités du segment, alors la dérivée s'annule en un point intérieur au segment.
T.A.F. Une fonction d'un segment de R vers R continue, dérivable sur l'intérieur, alors il existe un point intérieur ou la dérivée égale la pente entre les extrémités de la courbe. $\exists c \in]a,b[\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Faux si l'espace d'arrivée n'est pas R, $(cos(x), sin(x))$

I.2. Théorème des accroissements finis, cas général

T.A.F. (Cauchy)

Pour deux fonctions f, g d'un segment $[a,b] \subseteq R$ vers R continues sur le segment dérivables sur son intérieur, alors $\exists c \in]a,b[\ \big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c)$

I.A.F. Une fonction f d'un segment de R vers un Kevn F, continue sur le segment, dérivable sur l'intérieur, et une autre fonction g continue sur le même segment, dérivable sur l'intérieur mais a valeurs dans R, Si $\forall x \in]a, b[\ \|f'(x)\| \leq g'(x)$ alors $\|f(b) - f(a)\|_F \leq g(b) - g(a)$
Une fonction f d'un segment de R vers un evn F, continue sur le segment, dérivable sur l'intérieur, dont la dérivée est bornée alors $\|f(b) - f(a)\|_F \leq \sup_{x\in]a,b[}\|f'(x)\|_F\ (b-a)$
L'I.A.F. s'applique encore si la fonction part d'un ouvert U d'un Revn E, sur un segment fixe $[x_0, y_0] \subseteq U$, Si f est <u>continue sur le segment</u>, <u>différentiable</u> sur son intérieur, de différentielle bornée en norme d'op ($\sup_{x\in]x_0,y_0[}\|d_x f\| < \infty$) alors $\|f(y_0) - f(x_0)\|_F \leq \sup_{x\in]x_0,y_0[}\|d_x f\|\ \|y_0 - x_0\|_E$
De plus si l'ouvert est supposé <u>convexe</u>, et f differentiable sur U de différentielle bornée sur U, alors on peut en déduire que f est k-lipschitzienne avec $k = \sup_{x\in U}\|d_x f\|_{L_c(E,F)}$. Faux si juste connexe.
$\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{\Omega \subseteq E \to F}$ **est localement lipschitzienne** sur Ω ssi $\forall x \in \Omega\ \exists \alpha > 0$ telle que $f_{|B(x,\alpha)}$ lipschitzienne. Si $\dim(E) < \infty$, Cela revient à dire $\forall K$ compact $\subseteq \Omega$, $f_{|K}$ est lipschitzienne.

I.3. Une forme forte du théorème des accroissements finis

Affaiblissement de l'hypothèse dérivable sur $]a, b[$ possible et utile pour certaines théories de primitives.
Soit f une fonction d'un segment de R vers un Banach E, continue sur le segment. Soit une autre fonction g continue sur le même segment, a valeurs réelles, mais cette fois on suppose seulement que les dérivées de ces deux fonctions sont définies sur $]a, b[\setminus D$ ou D est fini ou denombrable (avant on supposait $D = \{a, b\}$). Si $\forall x \in (a, b) \setminus D\ \ \|f'(x)\|_F \leq g'(x)$ alors $\|f(b) - f(a)\|_F \leq g(b) - g(a)$
On peut encore affaiblir, et supposer seulement la dérivabilité à droite et $\|f_d'(x)\|_F \leq g_d'(x)$. A vérifier.

II. Applications du théorème des accroissements finis

II.1. Fonctions a dérivées nulles

Si une fonction d'un ouvert U d'un Revn E, vers un Revn F, est différentiable sur U de différentielle nulle partout sur U ($df = 0$) alors cette fonction est constante sur les composantes connexes de U.

II.2. Différentielles partielles et différentiabilité

Une application d'un ouvert dans un produit fini de Revns vers un Revn supposée différentiable en un point de l'ouvert, est de classe C^1 en ce point ssi les différentielles partielles existent au voisinage de ce point et sont continues en ce point.
Différentiabilité seule n'entraine pas continuité de la différentielle $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, 0 si $x = 0$

II.3. Gateaux-différentiabilité

Soit une application f d'un ouvert U d'un Revn E, vers un Revn F. On dit que f est **Gateaux-différentiable** en un point $a \in U$ s'il existe une application linéaire continue $\phi_a f \in L_c(E, F)$ telle que
$\forall h \in E\ f(a + th) =_{t\to 0_R} f(a) + t\ \phi_a f(h) + o(h).$
$\boldsymbol{\phi_a f}$ est la **Gateaux-différentielle** de f en a.
Si f est différentiable en un point a, alors elle est Gâteaux-différentiable en a et sa différentielle coïncident avec la Gateaux-différentielle.
Si f est Gateaux-différentiable en tout point et $\phi f: U \to L_c(E, F)$ continue sur U, alors f est C^1 sur U.
II.4. Théorèmes d'interversion : voir fiche interversions

Chapitre 32. Les différentielles d'ordre supérieur

I. Dérivées successives et différentielles successives

$L_{c,2}(E \times F, G)$ est isométriquement isomorphe a $L_c\big(E, L_c(F,G)\big)$
$\forall k \geq 2\ L_{c,k}(E_1 \times \ldots \times E_k, F)$ est isometriquement isomorphe a $L_c\big(E_1, L_c(E_2, L_c(\ldots, L_c(E_k, F)) \ldots)\big)$
Une application f d'un ouvert U d'un Revn E vers un Revn F est $\boldsymbol{k}$**-fois differentiable en un point** $\boldsymbol{a} \in U$ ssi elle l'est $k-1$ fois en tout point d'un voisinage ouvert V_a de a et que $d^{k-1}f : (V_a, \|\quad\|_E) \to \big(L_{c,k-1}(E^{k-1}, F), \|\quad\|_{L_{c,k-1}}\big)$ est différentiable en a. Dans ce cas on note $\boldsymbol{d_a^k f} = d_a\big(d^{k-1}f\big)$.
Une application f d'un ouvert U d'un Revn E vers un Revn F est $\boldsymbol{k}$**-fois différentiable sur** $\boldsymbol{U}$ ssi elle l'est en tout point de U. Dans ce cas $d^k f : (U, \|\quad\|_E) \to \big(L_{c,k}(E^k, F), \|\quad\|_{L_{c,k}}\big)$ est bien définie.
Une application f d'un ouvert U d'un Revn E vers un Revn F est **de classe** $\boldsymbol{C^k}$ **en un point** $\boldsymbol{a} \in U$, ssi f est k-fois differentiable en tout point d'un voisinage ouvert V_a de a et
$d^k f : (V_a, \|\quad\|_E) \to \big(L_{c,k}(E^k, F), \|\quad\|_{L_{c,k}}\big)$ est continue au point a. Autrement dit ssi f C^{k-1} en a et $d^{k-1}f : (V_a, \|\quad\|_E) \to \big(L_{c,k}(E^k, F), \|\quad\|_{L_{c,k}}\big)$ est C^1 en a.
Une application f d'un ouvert U d'un Revn E vers un Revn F est **de classe** $\boldsymbol{C^k}$ **sur U** ssi elle est C^k en tout point de U ssi f C^{k-1} sur U et $d^{k-1}f : (U, \|\quad\|_E) \to \big(L_{c,k-1}(E^{k-1}, F), \|\quad\|_{L_{c,k-1}}\big)$ est C^1 sur U.
Une application f d'un ouvert U d'un Revn E vers un Revn F est ∞**-fois différentiable en un point** $\boldsymbol{a \in U}$ ssi $\boldsymbol{f}$ **est de classe** $\boldsymbol{C^\infty}$ **en** $\boldsymbol{a}$ ssi $\forall k \in N$ f est k-fois différentiable en a ssi $\forall k \in N$ f est C^k en a.
Une application f d'un ouvert U d'un Revn E vers un Revn F est ∞**-fois différentiable sur** $\boldsymbol{U/C^\infty}$ **sur U** ssi elle l'est en tout point de U.
Par exemple pour une fonction C^2 en a, on peut voir $d_a^2 f$ comme une application bilineaire continue de $E \times E \to F$ ou comme une application linéaire continue $E \to L_c(E,F)$.
Pour une fonction C^k en a on privilégie point de vue k-lineaire continue : $d_a^k f \in L_{c,k}\big(E^k, F\big)$
On écrira donc $d_a^k f(h_1, \ldots, h_k)$ pour son image en un point.
On appellera $d_a^k f$ la **différentielle d'ordre** $\boldsymbol{k}$ **linéaire au point** $\boldsymbol{a}$**.**
On appellera $d^k f$ la **fonction différentielle globale d'ordre** $\boldsymbol{k}$ (pas forcement linéaire).
En pratique on évoque assez rarement la fonction différentielle globale, on manipule généralement $d_a^k f$ mais avec l'habitude de ne pas mentionner a explicitement, donc en écrivant $d^k f$ ce qui peut créer confusion. Quand on écrit $d^k f$ en physique et même en maths, il s'agit bien souvent de la différentielle linéaire ponctuelle en un point fixé sous-entendu.
Soit $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ n R-evns et F un autre Revn. Soit f application d'un ouvert U de E vers F, et $a = (a_1, \ldots a_n) \in U$.
On appelle **application partielle d'indice** $\boldsymbol{i}$ **elementaire** : $\boldsymbol{h_{i,a}} : E_i \to E : x \mapsto (a_1, \ldots, x, \ldots, a_n)$, elle est differentiable sur E_i et $d_{x_0} h_{i,a}(h) = (0, \ldots, h, \ldots, 0)$.
On appelle **application partielle d'indice** $\boldsymbol{i}$ **de f** l'application $\boldsymbol{f_{i,a}} \coloneqq f \circ h_{i,a} : h_{i,a}^{-1}(U) \subseteq E_i \to F$.
f admet en a une **<u>différentielle</u>** **partielle d'indice i** ssi son application partielle d'indice i est différentiable au point $a_i \in h_{i,a}^{-1}(U)$. Dans ce cas on la note $\boldsymbol{d_{i,a} f = d_{a_i} f_{i,a}} \in L_c(E_i, F)$
f admet en a une **<u>différentielle</u>** **partielle d'ordre** $\boldsymbol{k}$ **d'indice** $(\boldsymbol{i_1}, \ldots, \boldsymbol{i_k})$ ssi sa différentielle partielle d'ordre $k-1$ d'indice $(i_2, \ldots, i_k)$ est différentiable au point $a_{i_1} \in h_{i_1,a}^{-1}(U)$. Dans ce cas on la note $\boldsymbol{d^k_{i_1,\ldots,i_k,a} f} = d_{i_1,a}\big(d^{k-1}_{i_2,\ldots,i_k,a} f\big) \in L_{c,k}\big(E_{i_1} \times \ldots \times E_{i_k}, F\big)$
<u>Si $E_i = R$</u> la **<u>dérivée</u>** **partielle en** $\boldsymbol{a}$ **d'indice** $\boldsymbol{i}$ **de** $\boldsymbol{f}$ est $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)} = f'_{i,a}(a_i)$ et on a $d_{i,a} f(h_i) = h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$

la **<u>dérivée</u> partielle en $\boldsymbol{a}$ d'ordre $\boldsymbol{k}$ d'indice $(\boldsymbol{i_1}, \dots, \boldsymbol{i_k})$ de $\boldsymbol{f}$** est $\frac{\boldsymbol{\partial^k f}}{\boldsymbol{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}\right)(a)$

f est différentiable en $a \Rightarrow \forall i \;\; d_{i,a}f$ existe au voisinage de a (mais pas forcément continue en a)

f C^1 en $a \Leftrightarrow \forall i \;\; d_{i,a}f$ existe au voisinage de a et continue en $a \Leftrightarrow f$ est différentiable en a et df continue en a

Formules utiles différentielles.

Dans ce cas $d_a f(h_1, \dots, h_k) = d_{1,a}f(h_1) + \cdots + d_{k,a}f(h_k)$

Dans ce cas si de plus, $E = R^k$ on a : $d_a f(h_1, \dots, h_k) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \vec{h} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(a)$

$d_a^n f \in L_{c,n}\left(\left(E = R^k\right)^n, F\right)$ alors $d_a^n f\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}\right) = \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a)$ avec $a, e_i \in R^k$

$d_a^n f \in L_{c,n}\left(\left(E = R^k\right)^n, F\right)$ alors $d_a^n f(h_1, \dots, h_n) = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_n \le k} h_{1,i_1} \dots h_{n,i_n} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(a)$

Si $E = R$, $d_a^n f \in L_{c,n}((E = R)^n, F)$ et $d_a^n f(1^n) = d_a^n f(1, \dots, 1) = f^{(n)}(a)$

II. Premiers exemples et résultats classiques

Soit E, F Revns, soit U ouvert de E

Une fonction constante de $U \to F$, est de classe C^∞ sur U, et sa fonction différentielle globale est nulle a tout ordre.

Une fonction linéaire continue $u \in L_c(E, F)$ est C^∞ sur E, $du : E \to L_c(E, F) : a \mapsto d_a u = u$, et donc $\forall k \ge 2 \;\; d^k u = 0$.

Une fonction k-lineaire continue $f \in L_{c,k}(E_1 \times \dots \times E_k, F)$ est C^∞ sur $E_1 \times \dots \times E_k$.

Une fonction $f = (f_i)_{1 \le i \le m} : U \to F_1 \times \dots F_m$ est k-fois differentiable (resp C^k/C^∞) en un point $a \in U$ ssi ses composantes le sont, et dans ce cas

$\forall h_1, \dots, h_k \in E \;\; d_a^k f(h_1, \dots, h_k) = \left(d_a^k f_1(h_1, \dots, h_k), \dots, d_a^k f_m(h_1, \dots, h_k)\right)$

Th. composition. Soit E, F, G R-evns, $U \subseteq E$ ouvert, $a \in U$, $f : U \to F$, $V \subseteq F$ ouvert tel que $f(U) \subseteq V$, $g : V \to G$. Si f k-fois differentiable (resp C^k, resp C^∞) en a et g k-fois differentiable (resp C^k, resp C^∞) en $f(a)$ alors $g \circ f$ k-fois differentiable (resp C^k, resp C^∞) en a

On a $d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ d_a f$ a l'ordre 1. Qu'a-t-on à l'ordre k (une formule compliquée?)

Soit E, F R-evns, $U \subseteq E$ ouvert, $a \in U$, $f : U \to F$, $g : U \to F$, soit $\lambda \in R$. Si f et g k-fois differentiables (resp C^k resp C^∞) en a, alors

$f + g$ k-fois differentiable (resp C^k resp C^∞) en a et $d_a^k(f + g) = d_a^k f + d_a^k g$

λf k-fois differentiable (resp C^k resp C^∞) en a et $d_a^k(\lambda f) = \lambda d_a^k f$

si $F = R$, fg k-fois differentiable (resp C^k resp C^∞) en a

si $F = R$, et $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ k-fois différentiable (resp C^k resp C^∞) en a

Exemple :

Pour un espace de Banach, l'ensemble des automorphismes continus $GL_c(E)$ est ouvert dans $L_c(E)$, l'application de cet ensemble qui a un automorphisme associe son inverse $u \mapsto u^{-1}$ est C^∞ sur $GL_c(E)$ et $\forall v \in L_c(E)$ $d_u(u^{-1})(v) = -u^{-1} \circ v \circ u^{-1}$

III. Théorème de Schwartz

Théorème de Schwartz. Une fonction f d'un ouvert U d'un R-evn E, vers un R-evn F, 2-fois differentiable en un point $a \in U$, a une differentielle ponctuelle d'ordre 2 $d_a^2 f \in L_{c,2}(E^2, F)$ qui en plus

d'être bilinéaire continue, est symétrique : $\forall h, k \in E\ d_a^2 f(h,k) = d_a^2 f(k,h)$
Dans le cas produit $E = E_1 \times \ldots \times E_n$,
$\forall i, j\ d_{i,j,a}^2 f$ existe au voisinage de a et continue en $a \Rightarrow f$ 2-fois différentiable en a cad $d_a^2 f$ existe.
f 2-fois différentiable en $a \Rightarrow \forall i, j\ d_{i,j,a}^2 f$ existe au voisinage de a, mais pas forcément continues en a.
f 2-fois différentiable en $a \Rightarrow \forall i, j\ d_{i,j,a}^2 f = d_{j,i,a}^2 f$
$\forall i, j\ d_{i,j,a}^2 f$ existe au voisinage de a n'implique pas f 2-fois différentiable en a ni $\forall i, j\ d_{i,j,a}^2 f = d_{j,i,a}^2 f$
$\forall i, j\ d_{i,j,a}^2 f$ existe au voisinage de a et continue en $a \Leftrightarrow f$ de classe C^2 en a
Dans $E = R^n$, mêmes résultats en prenant $d_{i,j,a}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$

Contre-exemple Peano. $(x,y) \mapsto \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Théorème de Schwartz (k). Une fonction f d'un ouvert U d'un R-evn E, vers un R-evn F, k-fois differentiable en un point $a \in U$, a une différentielle d'ordre k $d_a^k f \in L_{c,k}(E^k, F)$ qui en + d'être k-linéaire continue, est symétrique : $\forall \sigma \in S_k\ \forall h_1, \ldots, h_k \in E\ d_a^k f(h_{\sigma(1)}, \ldots, h_{\sigma(k)}) = d_a^k f(h_1, \ldots, h_k)$
Dans le cas produit $E = E_1 \times \ldots \times E_n$,
f k-fois différentiable en $a \Rightarrow \forall i_1, \ldots, i_k\ d_{i_1,\ldots,i_k,a}^k f$ existe au voisinage de a
f k-fois différentiable en $a \Rightarrow \forall \sigma \in S_k\ \forall i_1, \ldots, i_k\ d_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(k)},a}^k f = d_{i_1,\ldots,i_k,a}^k f$
$\forall i_1, \ldots, i_k\ d_{i_1,\ldots,i_k,a}^k f$ existe au voisinage de a et continue en $a \Rightarrow f$ k-fois différentiable en a
f de classe C^k en $a \Leftrightarrow \forall i_1, \ldots, i_k\ d_{i_1,\ldots,i_k,a}^k f$ existe au voisinage de a et continue en a
f de classe C^k en $a \Leftrightarrow f$ de classe C^1 en a et $\forall i\ d_{i,a} f$ de classe C^{k-1} en a
Si $E = R^n$, f k-fois différentiable en $a \Rightarrow \forall \sigma \in S_k\ \forall i_1, \ldots, i_k\ \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial x_{i_{\sigma(k)}}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a)$

IV. Matrice hessienne

Une fonction f d'un ouvert U de R^n, vers R, 2-fois différentiable en un point $a \in U$, a pour différentielle ponctuelle d'ordre 2 en a une forme bilinéaire continue symétrique.
La **matrice hessienne de f en a** est la matrice représentative de cette forme bilinéaire $\boldsymbol{H_a f} = [d_a^2 f]^{B_0, B_0}$ dans la base canonique de R^n.
On a $\forall i, j\ \ d_a^2 f(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ donc on peut écrire $H_a f = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right]_{(1 \le i, j \le n)}$

V. Formules de Taylor

En notant $\boldsymbol{h^n} = (h, \ldots, h) \in E^n$ n fois, $d_a^n f(h^n) = d_a^n f(h, h, \ldots, h)$
Si $E = R$, on a $d_a^n u(1^n) = u^{(n)}(a)$
Si E n'est pas R, $d_a^n f(h^n)$ ne se simplifie pas mais $d_{a+th}^n f(h^n) = d_t^n u(1^n) = u^{(n)}(t)$ avec $u(t) = f(a + th)$. Donc en appliquant TL a u entre 0 et 1, on obtient les formes générales pour le calcul diff.
Formule de Taylor-Lagrange, reste intégral. Si f est C^{n+1} d'un ouvert U d'un R-evn E, vers un Banach F, alors $\forall a \in U\ \forall h \in E | [a, a+h] \subseteq U$
$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} d_a^k f(h^k) + \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n d_{a+th}^{n+1} f(h^{n+1}) dt$
Inégalité de Taylor-Lagrange. Si f est $n+1$ fois différentiable d'un ouvert U d'un R-evn E, vers un Banach F, telle que $\exists C \in R\ \forall x \in U\ \|d_x^{n+1} f\| \le C$ alors $\forall a \in U\ \forall h \in E | [a, a+h] \subseteq U$

$\left\|f(a+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}d_a^k f\left(h^k\right)\right\|_F \leq C\frac{\|h\|_E{}^{n+1}}{(n+1)!}$

En particulier $f(a+h) =_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}d_a^k f\left(h^k\right)+O(h^{n+1})$

En particulier $f(a+h) =_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}d_a^k f\left(h^k\right)+o(h^{n})$. Mais hypothèse plus forte que TY.

Formule de Taylor-Young. Si f est n fois différentiable d'un ouvert U d'un R-evn E, vers un Banach F, $f(a+h) =_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}d_a^k f\left(h^k\right)+o(h^{n})$

Unicité de Taylor-Young. Si de plus f est C^n et $f(a+h) =_{h\to 0} f(a)+\sum_{k=0}^{n}\frac{L_k(h^k)}{k!}+o(h^n)$ alors $\forall k \in \{0,\dots,n\}\ L_k = d_a^k f$

VI. Formes différentielles

Une **1-forme différentielle de classe $\boldsymbol{C^k}$ d'un ouvert $\boldsymbol{U}$ d'un espace euclidien $\boldsymbol{E}$**, est un champ C^k de formes linéaires $\omega \in C^k(U,E^\star)$. On note $\boldsymbol{\omega_x} \in E^\star$ l'image d'un point $x\in U$.

Pour un espace euclidien de base $(e_1,\dots,e_n)$ on définit $\boldsymbol{dx_k} = e_k^*$, on peut aussi voir dx_k comme une 1-forme différentielle constante $\boldsymbol{dx_k}: U \to E: x \mapsto dx_k = e_k^*$

Une 1-forme différentielle $\omega \in C^k(U,E^\star)$ s'écrit donc $\omega = \sum_{k=1}^{n} P_k\, dx_k$ avec $P_k \in C^k(U,\mathbb{R})$.

Donc $\forall x \in U\ \ \omega_x = \sum_{k=1}^{n} P_k(x)\, dx_k$ et $\forall h = \sum_{k=1}^{n} h_k e_k \in E\ \ \omega_x(h) = \sum_{k=1}^{n} P_k(x) h_k$

La différentielle globale d'une fonction scalaire (vers $\mathbb{R}$) C^{k+1} définie sur un ouvert U d'un espace euclidien, est toujours une 1-forme différentielle sur U, de classe C^k. (donc exacte)

Une 1-forme différentielle $\boldsymbol{C^k}$ sur un ouvert $\boldsymbol{U}$ d'un euclidien est exacte ssi c'est la différentielle globale d'une fonction scalaire C^{k+1}, càd $\exists f \in C^{k+1}(U,\mathbb{R})\ \ \omega = df$, càd ω admet une primitive sur U.

Une fonction scalaire $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{C^{k+1}(U,\mathbb{R})}$ est primitive d'une 1-forme différentielle $\boldsymbol{\omega}$ $\boldsymbol{C^k}$ sur $\boldsymbol{U}$ ssi $\omega = df$.

Un champ de vecteurs $\boldsymbol{\vec{A}: U \to E: x \mapsto \vec{A}(x) = \sum_{k=1}^{n} P_k(x) e_k}$ d'un espace euclidien dérive d'une fonction scalaire $\boldsymbol{f}$ ssi $df = \sum_{k=1}^{n} P_k\, dx_k$.

Une fonction scalaire $\boldsymbol{f}$ est un potentiel d'un champ de vecteurs $\boldsymbol{\vec{A}}$ ssi le champ de vecteurs en dérive.

Une **1-forme différentielle $\boldsymbol{C^1}$ sur un ouvert $\boldsymbol{U}$ d'un euclidien est fermée** ssi $\forall i,j \in [\![1,p]\!]\ \frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j}$

Une 1-forme différentielle C^1 exacte sur un ouvert U est fermée sur U. (Par Schwartz)

Un ouvert $\boldsymbol{U}$ est étoilé par rapport à un de ses point $\boldsymbol{x \in U}$ ssi pour tout autre point $y \in U$ de l'ouvert, le segment $[x,y] \subseteq U$

Poincaré. Une 1-forme différentielle C^1 fermée sur un ouvert <u>étoilé</u> U, est exacte sur U.

L'intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle $\boldsymbol{\omega = \sum_{k=1}^{n} P_k dx_k}$ $\boldsymbol{C^0}$ sur $\boldsymbol{U}$ ouvert d'un euclidien $\boldsymbol{E}$, le long d'un arc géométrique orienté $\boldsymbol{\Gamma}$ de paramétrage direct $\boldsymbol{(I, x(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) e_i)}$ $\boldsymbol{C_m^1 \cap C^0}$ d'image incluse dans l'ouvert $\boldsymbol{U}$ est $\int_\Gamma \boldsymbol{\omega} = \int_I \left(\sum_{k=1}^{n} P_k\left(x(t)\right)x_k'(t)\right)dt$ en notation physicienne :

$\int_\Gamma \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{P_k dx_k} = \int_I \sum_{k=1}^{n} P_k(x)\frac{dx_k}{dt}dt$

L'intégrale curviligne est indépendante du paramétrage direct choisi de Γ.

Si on prend un paramétrage indirect l'intégrale change de signe. $\int_{\Gamma^-}\omega = -\int_\Gamma \omega$

Linéarité de l'intégrale curviligne pour un même arc. $\int_\Gamma \alpha\omega_1 + \omega_2 = \alpha\int_\Gamma \omega_1 + \int_\Gamma \omega_2$

Chasles pour l'intégrale curviligne. Si la fin de Γ_1 est le début de Γ_2 dans U: $\int_{\Gamma_1\cup\Gamma_2}\omega = \int_{\Gamma_1}\omega + \int_{\Gamma_2}\omega$

Intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle exacte. $\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma df = f(B) - f(A)$ en notant A le début, et B la fin de l'arc Γ dans U, pour n'importe quelle primitive f de ω sur U.

L'intégrale curviligne d'une 1-forme différentielle exacte le long d'un lacet de U est nulle : $\oint_\Gamma df = 0$
Green-Riemann. TODO
Aire d'un domaine D délimité par un arc orienté Γ = $\iint_D dxdy = \int_\Gamma xdy = -\int_\Gamma ydx = \frac{1}{2}\int_\Gamma (xdy - ydx)$
Aire d'un domaine D délimité par un arc en coordonnées polaires : $\frac{1}{2}\int_\Gamma \rho^2 d\theta$

Chapitre 33 Théorème d'inversion locale des fonctions implicites et du rang
I. Difféomorphisme
Pour $k \in N^*$, un $\boldsymbol{C^k}$ **difféomorphisme (global)** est une application d'un ouvert d'un Revn, vers un autre ouvert d'un autre Revn, qui est bijective, de classe C^k et dont la réciproque est également de classe C^k.
Deux ouverts de 2 Revn possiblement distincts, sont $\boldsymbol{C^k}$**-difféomorphes** ssi il y a un C^k difféomorphisme entre les deux.
La composée de 2 C^k difféomorphismes est un C^k difféomorphisme.
R est C^∞ difféomorphe a chacun de ses intervalles ouverts.
$R \to R: x \mapsto x^3$ n'est pas un C^k difféomorphisme.
Pour $k \in N^*$, une application f d'un ouvert d'un Revn, vers un autre Revn, est un $\boldsymbol{C^k}$ **difféomorphisme local en un point $\boldsymbol{x_0}$** de son domaine ouvert ssi en restreignant son domaine a un voisinage ouvert de x_0, et son codomaine a un voisinage ouvert de $f(x_0)$, on obtient un C^k difféomorphisme.
Pour $k \in N^*$, une application f d'un ouvert d'un Revn, vers un autre Revn, est un $\boldsymbol{C^k}$ **difféomorphisme local sur son ouvert** ssi elle l'est en tout point de son domaine ouvert.
Les précédentes définitions de cette section se généralisent au cas k- différentiable, en remplaçant le terme C^k par k-différentiable.
$R^* \to R_+^*: x \to x^2$ n'est pas un C^k difféomorphisme, mais c'est un C^∞ difféomorphisme local sur R^*.
Pour un 1-différentiable difféomorphisme $f: U \subseteq E \to V \subseteq F$, alors $\forall a \in U$ $d_a f \in GL(E,F)$ et $(d_a f)^{-1} = d_{f(a)}(f^{-1})$. Reciproque fausse en général ($x \mapsto x^2$)
Un C^k difféomorphisme local sur tout un R-evn E, et bijectif vers tout un R-evn F, est un C^k difféomorphisme global de $E \to F$.
Un homéomorphisme C^1 n'est pas forcément un C^1 difféomorphisme ($x \mapsto x^3$)
Un ouvert de R^n ne peut être difféomorphe a un ouvert de R^m si $m \neq n$ ($d_a f \in GL(R^n, R^m) \Rightarrow n = m$)
Un ouvert de R^n ne peut être homéomorphe a un ouvert de R^m avec $m \neq n$. (Th. Brower)
Soient $U \subseteq E, V \subseteq F, W \subseteq G, T \subseteq H$ 4 ouverts dans 4 Revns, deux applications $f \in C^k(U,V), g \in C^k(W,T)$ sont $\boldsymbol{C^k}$**-conjuguées** s'il existe $\varphi: U \to W, \psi: V \to T$ deux C^k difféomorphismes tels que $g \circ \varphi = \psi \circ f$, autrement dit tels que le diagramme
$$\begin{array}{ccc} U & \to_f & V \\ \downarrow_\varphi & & \downarrow_\psi \\ W & \to_g & T \end{array}$$
commute.
Distordre l'input de f puis appliquer g revient a appliquer f puis distordre son output.
Soient $U \subseteq E, V \subseteq F, W \subseteq G, T \subseteq H$ 4 ouverts dans 4 Revns, $\boldsymbol{f \in C^k(U,V)}$ **est $\boldsymbol{C^k}$ localement conjuguée a $\boldsymbol{g \in C^k(W,T)}$ au voisinage d'un point $\boldsymbol{x_0 \in U}$** ssi en restreignant le domaine de f a un voisinage ouvert de x_0, et le codomaine de f a un voisinage ouvert de $f(x_0)$, $\overline{f}$ est C^k conjuguée à une restriction de g, notee $\overline{g} \in C^k(\overline{W}, \overline{T})$ telle que $\overline{W}$ ouvert inclus dans W, $\overline{T}$ ouvert inclus dans T.

$\forall k \in N^*$ tout C^k diffeomorphisme est C^k conjugue a l'identité par le diagramme $\begin{array}{ccc} U & \to_f & V \\ \downarrow_{Id_E} & & \downarrow_{f^{-1}} \\ U & \to_{Id_E} & U \end{array}$

II. Théorème d'inversion locale

II.1. Enonce et exemples

Théorème d'inversion locale.* Pour $k \in N^* \cup \{\infty\}$, une application f de classe C^k sur ouvert U d'un Banach E, vers un autre Banach F, dont la différentielle en $x_0 \in U$ est inversible cad isomorphisme d'ev cad $d_{x_0}f \in GL(E,F)$, alors f est C^k difféomorphisme local en x_0. N'implique pas f bijective de E sur F

Pour pouvoir appliquer ce théorème il est implicite que E et F doivent être isomorphes. En dimension finie, cela suppose $\dim(E) = \dim(F) = n$, dans ce cas via le choix de bases on identifie, E et F a R^n et on a $d_{x_0}f \in GL(E,F) \Leftrightarrow J_{x_0}f$ inversible $\Leftrightarrow \det J_{x_0}f \neq 0$

$U = R^2 \setminus \{(0,0)\} \to R^2 : (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$ est un C^∞ difféomorphisme local sur U mais pas un diffeomorphisme global sur U

L'hypothèse C^1 est indispensable dans le th inversion locale : $R \to R : x \mapsto x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage 0.

Théorème d'inversion globale. Pour $k \in N^* \cup \{\infty\}$, une application f de classe C^k sur ouvert U d'un Banach E, vers un autre Banach F, <u>injective</u> et dont la différentielle est inversible en tout point de U alors $f(U)$ est un ouvert (ce point-là n'a pas besoin d'injectivité de f) et f est un C^k difféomorphisme de U sur $f(U)$.

II.2. Lemmes du théorème d'inversion locale

Dans un espace de Banach E, la boule ouverte (de $L_c(E)$) de centre l'identité de rayon 1, ne contient que des automorphismes. $B(Id_E, 1) \subset GL_c(E)$. De plus $\forall u \in B(Id_E, 1)$ $\|u^{-1}\|_{L_c(E)} \leq \frac{1}{1 - \|Id_E - u\|_{L_c(E)}}$

L'ensemble des automorphismes continus $GL_c(E)$ d'un Banach E, est un ouvert de $\left(L_c(E), \|\ \ \|_{L_c(E)}\right)$.

Soit $f = I_U + g$ avec $g : U \subseteq E \to E$ q-lipschitzienne, avec $(E, \|\ \ \|)$ Banach, U ouvert de E alors f est un homeomorphisme de U sur $f(U)$, $f(U)$ est un ouvert de E, et l'application $f^{-1} - I_{f(U)} : f(U) \to U$ est $\frac{q}{1-q}$-lipschitzienne.

II.3. Applications du théorème d'inversion locale

II.3.1. Perturbation de l'identité

Pour g une application C^1 d'un Banach dans lui-même dont la différentielle en tout point du Banach, est uniformément bornée en norme d'opérateur par un $M > 0$ cad $\forall a \in E$ $\|d_a g\|_{L_c(E)} \leq M$, alors on a pour tout $0 < \varepsilon < \frac{1}{M}$ l'application $f_\varepsilon = Id_E + \varepsilon g$ est C^1 diffeomorphisme du Banach E dans lui-même.

II.3.2. Isométries de R^{n*}

Une application C^1 de R^{n*} vers R^{n*} isométrique, dont la différentielle est inversible en tout point de R^{n*}, est surjective.

III. Théorème des fonctions implicites*

Soit une application $f \in C^k(U \subseteq E \times F, G)$ avec E, F, G 3 Banachs et U ouvert, et soit un point $(x_0, y_0) \in U$ d'image $z_0 = f(x_0, y_0) \in G$.

Si la différentielle partielle pour la 2-ieme variable, $d_{2,(x_0,y_0)}f \in L(F,G)$ est inversible cad $\in GL(F,G)$, alors $\exists \varphi$ C^k d'un voisinage ouvert $V_{x_0} \subseteq E$ de x_0 vers un voisinage ouvert $V_{y_0} \subseteq F$ de y_0 telle que $\forall x \in V_{x_0}, y \in V_{y_0}$ on a $z_0 = f(x,y) \Leftrightarrow y = \varphi(x)$

En particulier $\forall x \in V_{x_0}\ f\big(x, \varphi(x)\big) = z_0$ et $\varphi(x_0) = y_0$
De plus $d_{x_0}\varphi = -\big(d_{2,(x_0,y_0)}f\big)^{-1} \circ d_{1,(x_0,y_0)}f$
Remarque : Les 2 precedents th permettent de résoudre des équations. Le th inversion locale donne existence d'une unique solution, alors que le th. fonctions implicites en donne une infinité (un graphe). On peut faire une analogie avec résolution système linéaires. Lorsqu'il y a autant d'inconnues que d'équations, la méthode de Cramer permet d'obtenir une unique solution, s'il y a plus d'inconnues que d'équations, on exprime certaines inconnues en fonction des autres.
Exemples : TODO

Chapitre 34 Problèmes d'extrema
I. Extrema libres
I.1. Définitions générales sur les extrema
Soit f d'un espace topologique E vers R, et $x_0 \in E$
x_0 est un **point de minimum (resp. maximum) de f** ssi $\forall x \in E\ f(x) \geq f(x_0)$ (resp. $f(x) \leq f(x_0)$)
x_0 est un **point de minimum (resp. maximum) <u>strict</u> de f** ssi c'est un point de minimum de f, qui est l'unique antécédent de son image, ssi $\forall x \in E \setminus \{x_0\}\ f(x) > f(x_0)$
x_0 est un **point de minimum (resp. maximum, resp. strict) <u>local</u> de f** ssi c'est un point de minimum de f restreinte a un certain voisinage de x_0 ssi $\exists V \in V_{x_0}\ \forall x \in V\ f(x) \geq f(x_0)$
Un **minimum (resp. maximum (strict ou non) (local ou non))** est l'image d'un point de minimum (resp…)
Un **extremum** est un minimum ou un maximum. Pluriel : minima, maxima, extrema
x_0 est un point de minimum de f ssi x_0 est un point de maximum de $-f$.
Un **point critique** d'une application d'un ouvert d'un R-evn vers R, est un point de l'ouvert en lequel, l'application est différentiable de différentielle nulle $d_a f = 0_{L_c(E,R)}$.
Une **valeur critique** d'une application d'un ouvert d'un R-evn vers R, est un l'image d'un point critique.
Un **point selle = point col** d'une application d'un ouvert d'un R-evn vers R, est un point critique x_0 pour lequel $\forall V \in V_{x_0}\ \exists y, z \in V_a\ f(y) < f(x_0) < f(z)$. Autrement dit, c'est un point critique qui n'est pas un extremum local.
I.2. Préliminaires sur les formes bilinéaires continues
Sur un Revn E, une forme bilinéaire continue ϕ est ***c*-coercive** avec $c \in R_+^*$ ssi $\forall x \in E\ b(x,x) \geq c\|x\|^2$
Il existe des formes bilinéaires ni positives ni négatives. Par ex $(R^2)^2 \to R$: $\big((x,y),(x',y')\big) \mapsto xx' - yy'$
Une forme bilinéaire continue coercive est définie positive. Réciproque vrai en dim. finie.
Sur un Revn E de dimension finie, une forme bilinéaire continue est coercive ssi elle est définie positive.
En dimension finie réciproque fausse : $(E, \|\ \ \|_\infty)$, $b(f,g) = \int_{[a,b]} fg$, $f_n(x) = I_{[0,1/n]}(x) \times (1 - nx)$
I.3. Conditions nécessaires à l'existence d'un extremum
1^er^ ordre. Une fonction d'un <u>ouvert</u> d'un Revn vers R, qui admet un extremum local en un point où elle est supposée différentiable, alors ce point est un point critique pour cette fonction. $d_{x_0}f = 0_{L_c(E,R)}$
En dimension finie $d_{x_0}f = 0 \Leftrightarrow J_{x_0}f = 0$
2^nd^ ordre. Une fonction d'un <u>ouvert</u> d'un Revn vers R, qui admet un minimum (resp. max) local en un point où elle est supposée 2x différentiable, alors la forme bilinéaire $d_{x_0}^2 f$ est positive (resp. négative).
En dimension finie $d_{x_0}^2 f$ positive $\Leftrightarrow H_{x_0}f$ positive, et $d_{x_0}^2 f$ négative $\Leftrightarrow H_{x_0}f$ négative.
Attention les réciproques de ces 2 conditions nécessaires sont fausses. Ex : $x \mapsto x^3$ en 0.

Ces deux conditions nécessaires ne permettent pas de trouver directement les extrema mais sont quand même très utiles car permettent de restreindre très fortement l'ensemble des candidats possibles.
Pour une application convexe et différentiable sur un ouvert convexe d'un Banach, tout point critique est un point de minimum.

I.4. Condition suffisante à l'existence d'un extremum

Une fonction f d'un ouvert d'un Revn vers R, qui admet un point critique x_0 où $d^2_{x_0}f$ existe et est coercive, alors f admet un minimum local strict en ce point critique.
L'hypothèse $d^2_{x_0}f$ coercive est indispensable, et en dim finie équivaut a $d^2_{x_0}f$ def positive.
On retrouve la version $R \to R$ $f'(x) = 0$ et $f''(x) > 0$ implique x min local strict de f.
Une fonction convexe coercive d'un convexe fermé dans un Banach séparable vers R, admet un minimum. (difficile, utilise la topologie faible).

II. Extrema liés

Les résultats précédents ne s'appliquent plus forcément sur des parties non ouvertes du domaine de la fonction, en particulier lorsque ces parties sont définies par des contraintes sous forme d'égalités ou d'inégalités non strictes. Ex : $(x, y) \mapsto x^2 + y^3$ n'a pas de min sur R^2 mais a un min en 0 sur $C: y = x^2$
Un point d'extrema sur une partie non ouverte n'est pas forcément un point critique.

II.1. Enonce du théorème des multiplicateurs de Lagrange et exemples

Soit une fonction (qu'on cherche à optimiser) f d'un ouvert U d'un Banach E vers R, Soit $g = (g_i)_{1\le i\le p} \in C^1(U, R^p)$ une fonction représentant les contraintes, et $P = g^{-1}(\{0_{R^p}\}) \subseteq U$.
Si f admet un extremum local en un point $x_0 \in P$ où elle est différentiable, et où la différentielle de g $d_{x_0}g \in L(E, R^p)$ est surjective alors $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in R$ tels que $d_{x_0}f = \sum_i \lambda_i d_{x_0} g_i$, c'est-à-dire que la différentielle en x_0 de f doit être une combinaison linéaire réelle des différentielles ponctuelles des contraintes composantes. Les réels λ_i s'appellent les **multiplicateurs de Lagrange**. Un tel extremum vérifiant ces conditions est un **extremum lié.**
$d_{x_0}g$ surjective signifie $d_{x_0}g$ est de rang p, si $p = 1$, cela se simplifie en $d_{x_0}g \neq 0$.
Sous $E = R^n$, la combinaison linéaire se traduit par $J_{x_0}f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i J_{x_0} g_i$
Si la combinaison linéaire est impossible cela permet de conclure qu'il n'y a pas d'extremum de f sur P
On peut utiliser d'autre raisonnements pour montrer l'existence d'un extremum sur P, par exemple, si P est compact, on sait qu'il y en a au moins un.

Applications convexes.

La stricte convexité permet de montrer l'unicité dans un problème d'optimisation.
Une fonction strictement convexe d'un convexe C vers $\mathbb{R}$ alors il existe au plus un $x_0 \in C$ tel que $(x_0) = \inf_{x\in C} f(x)$.
La convexité n'assure pas en général l'existence d'un problème d'optimisation.
Une fonction différentiable d'un ouvert convexe de R^n vers R, est convexe
ssi $\forall x, y \in \Omega^2$ $f(y) \ge f(x) + d_x f\ (y - x)$ la fonction est au-dessus de ses tangentes.
ssi $\forall x, y \in \Omega^2$ $\left(d_y f - d_x f\right)(y - x) \ge 0$.
Une fonction 2x différentiable d'un ouvert convexe Ω de R^n vers R est convexe ssi $\forall x \in \Omega$ $d^2_x f \ge 0$.
Une fonction 2x différentiable d'un ouvert convexe Ω de R^n vers R dont $d^2_x f$ est définie positive, est strictement convexe, mais réciproque fausse ($x \mapsto x^4$).

Chapitre 35 La notion de sous-variété.
I. Difféomorphisme
Pour $k \in N^*$, un $\boldsymbol{C^k}$ **difféomorphisme (global)** est une application d'un ouvert d'un Revn, vers un autre ouvert d'un autre Revn, qui est bijective, de classe C^k et dont la réciproque est également de classe C^k.
La composée de 2 C^k difféomorphismes est un C^k difféomorphisme.
R est C^∞ difféomorphe a chacun de ses intervalles ouverts.
Pour $k \in N^*$, une application f d'un ouvert d'un Revn, vers un autre Revn, est un $\boldsymbol{C^k}$ **difféomorphisme local en un point** $\boldsymbol{x_0}$ de son domaine ouvert ssi en restreignant son domaine a un voisinage ouvert de x_0, et son codomaine a un voisinage ouvert de $f(x_0)$, on obtient un C^k difféomorphisme.
Pour $k \in N^*$, une application f d'un ouvert d'un Revn, vers un autre Revn, est un $\boldsymbol{C^k}$ **difféomorphisme local sur son ouvert** ssi elle l'est en tout point de son domaine ouvert.
Les précédentes définitions de cette section se généralisent au cas k- différentiable, en remplaçant le terme C^k par k-différentiable.
Pour un 1-différentiable difféomorphisme $f: U \subseteq E \to V \subseteq F$, alors $\forall a \in U\ d_a f \in GL(E,F)$ et $(d_a f)^{-1} = d_{f(a)}(f^{-1})$.
Un C^k difféomorphisme local sur tout un R-evn E, et bijectif vers tout un R-evn F, est un C^k difféomorphisme global de $E \to F$.
Soient $U \subseteq E, V \subseteq F, W \subseteq G, T \subseteq H$ 4 ouverts dans 4 Revns, deux applications $f \in C^k(U,V), g \in C^k(W,T)$ sont $\boldsymbol{C^k}$**-conjuguées** s'il existe $\varphi: U \to W, \psi: V \to T$ deux C^k difféomorphismes tels que $g \circ \varphi = \psi \circ f$. Distordre l'input de l'une puis appliquer l'autre revient à appliquer l'une puis distordre son output. Autrement dit $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. Intuitivement g est une version distordue de f.
Soient $U \subseteq E, V \subseteq F, W \subseteq G, T \subseteq H$ 4 ouverts dans 4 Revns, $\boldsymbol{f \in C^k(U,V)}$ **est** $\boldsymbol{C^k}$ **localement conjuguée a** $\boldsymbol{g \in C^k(W,T)}$ **au voisinage d'un point** $\boldsymbol{x_0 \in U}$ ssi en restreignant le domaine de f a un voisinage ouvert de x_0, et le codomaine de f a un voisinage ouvert de $f(x_0)$, $\overline{f}$ est C^k conjuguée à une restriction de g, notee $\overline{g} \in C^k(\overline{W}, \overline{T})$ telle que $\overline{W}$ ouvert inclus dans W, $\overline{T}$ ouvert inclus dans T.
Théorème d'inversion locale. Pour $k \in N^* \cup \{\infty\}$, une application f de classe C^k sur ouvert U d'un Banach E, vers un autre Banach F, dont $d_{x_0} f \in GL(E,F)$, alors f est C^k difféomorphisme local en x_0.
Théorème d'inversion globale. Pour $k \in N^* \cup \{\infty\}$, une application f de classe C^k sur ouvert U d'un Banach E, vers un autre Banach F, <u>injective</u> et dont la différentielle est inversible en tout point de U alors $f(U)$ est un ouvert et f est un C^k difféomorphisme de U sur $f(U)$.
Le **rang d'une application linéaire entre 2 Rev de dimension finie** est la dimension de son image.
Le **rang d'une application différentiable entre 2 Rev** $\boldsymbol{E, F}$ **de dimension finie en un point** $\boldsymbol{x_0 \in E}$ est le rang de sa différentielle en ce point x_0. $\boldsymbol{rg_{x_0} f} = rg\left(d_{x_0} f \in L(E,F)\right) \leq \min(dim(E), dim(F))$
Pour une application linéaire, ces deux dernières définitions coïncident.
Le rang d'une application différentiable en un point est invariant par C^k conjugaison.
Soit une fonction différentiable f d'un ouvert U d'un Revn dim finie E, vers un autre Revn dim finie F,
f est une **immersion en un point** $\boldsymbol{x_0 \in U}$ ssi $d_{x_0} f$ injective ssi $rg_{x_0} f = \dim E$
f est une **immersion** (sur U) ssi f est une immersion en tout point de U
f est une **submersion en un point** $\boldsymbol{x_0 \in U}$ ssi $d_{x_0} f$ surjective ssi $rg_{x_0} f = \dim F$
f est une **submersion** (sur U) ssi f est une submersion en tout point de U
f est un **plongement** (sur U) ssi f est une immersion et un homéomorphisme de U vers $f(U)$.
Les immersions et les submersions sont donc des applications dont le rang est maximum.
S'il existe une immersion de $E \to F$ alors $\dim(E) \leq \dim(F)$
S'il existe une submersion de $E \to F$ alors $\dim(E) \geq \dim(F)$
Soit E, F Revns de dim finie n, m, et soit $a \in E$.
Une submersion C^k en un point a est C^k localement conjuguée au voisinage de a a la projection

canonique $p: R^n \to R^m$. (dans ce cas $n = \dim E \geq m = \dim F$).
Une submersion correspond intuitivement à une projection canonique distordue.
Une immersion C^k en un point a est C^k localement conjuguée au voisinage de a a l'injection canonique $i: R^n \to R^m$. (dans ce cas $n = \dim E \leq m = \dim F$)
Une immersion correspond intuitivement à une injection canonique distordue.
En fait pour être plus précis l'une des deux distorsions C^k s'avère être l'identité.
Forme normale locale submersion. Une submersion C^k en un point a, alors $\exists\varphi$ C^k difféomorphisme local en a, tel que au voisinage de $f(a)$, $f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m)$
Forme normale locale immersion. Une immersion C^k en un point a, alors $\exists\psi$ C^k difféomorphisme local en $f(a)$, tel que au voisinage de a, $\psi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$
Une submersion C^k est une application ouverte.
Une submersion C^k d'un compact non vide vers une partie connexe est surjective.
Une forme linéaire est une submersion ssi elle est non nulle.
Si $\dim(E) > 2$, une forme linéaire n'est jamais une immersion. Si $\dim E = 1$, une forme linéaire est une immersion ssi elle est non nulle.
Soit une fonction $f \in C^1(E, F)$ avec E, F Revns de dim finie n, m, et soit $a \in E$.
Si f est de rang n (resp. m) en a, alors il existe un voisinage ouvert de a, sur lequel le rang de f est constant egal a n (resp. m). Autrement dit, l'ensemble des points de E ou f est de rang n (resp. m) est une partie ouverte de E.
Théorème du rang constant. Soit une fonction $f \in C^k(E, F)$ avec E, F Revns de dim finie n, m, et soit $a \in E$. Alors f est de rang constant sur un voisinage de a ssi f est C^k conjuguée localement en a a une application linéaire de R^n vers R^m.
Cartes, atlas, variétés différentielles.
Une **carte locale** d'un espace topologique E, vers un Revn F correspond à un couple (U, φ) où U est un ouvert de E et $\varphi: U \to F$ est un homéomorphisme de U sur $\varphi(U) \subseteq F$. La réciproque φ^{-1} est appelée **paramétrisation de $\boldsymbol{U}$** relativement à la carte φ. Les **coordonnées locales** d'un point $x \in U$ relativement à la carte φ sont données par l'image $\varphi(x)$. Définition analogue pour les autres classes de régularité.
Pour 2 cartes locales φ_1, φ_2, l'application de **changement de cartes de $\boldsymbol{\varphi_1}$ a $\boldsymbol{\varphi_2}$** est $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$
Un **atlas $\boldsymbol{C^k}$** correspond à une famille de cartes locales dont les ouverts recouvrent l'espace de départ telle que tous les changement de cartes sur cette famille sont des C^k difféomorphismes.
Deux atlas C^k sont dit **compatibles** ssi leur réunion donne encore un atlas C^k. C'est une relation d'eq.
Tout atlas C^k est contenu dans un atlas C^k maximal.
Une **variété différentielle de classe $\boldsymbol{C^k}$ de dimension $\boldsymbol{d}$** est un espace topologique M séparé à base dénombrable d'ouverts, muni d'un atlas C^k maximal a valeurs dans R^d.
On peut remplacer « séparé à base dénombrable d'ouverts » par « métrisable séparable (admet une partie dénombrable dense) » ou par « séparé et dénombrable à l'infini càd : $M = \bigcup_{n \in N} K_n$ avec $\forall n\, K_n \subseteq Int(K_{n+1})$ et K_n compact »
Une variété différentielle est une variété topologique. Une variété C^k est une variété C^l pour $l \leq k$
Si $k = \infty$ on parle de variété **lisse**, si $k = \omega$ on parle de variété **analytique réelle**. En pratique les termes « lisse » et « différentielle » sont omis, l'ordre de régularité n'est précisé qu'au besoin.
Dans le cas complexe avec changements de cartes holomorphes on parle de variétés (analytiques) complexes ou holomorphes.
On peut lire dans les cartes les propriétés relatives au calcul différentiel.
Une application f entre deux variétés C^k M, N, est une application **de classe $\boldsymbol{C^l}$ en $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$** avec $1 \leq l \leq k$, ssi il existe des cartes $(U \ni x, \varphi), (V \supseteq f(U), \psi)$, telles que l'application retranscrite dans les cartes càd $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subseteq R^{\dim M} \to \psi(V) \subseteq R^{\dim N}$ est une application C^l en $\varphi(x)$

Une application f entre deux variétés C^k M, N, est **de classe C^l** ssi elle l'est en tout point $x \in M$.
Ainsi définie, la C^l ($l \leq k$) différentiabilité est indépendante du choix des cartes, car conservée par changement de cartes supposés C^k par définition d'une variété. (Motive ce choix dans la définition).
Pour $l > k$ cela n'a pas toujours de sens, des atlas C^k compatible pouvant ne pas être C^l compatibles.
La sphère S^n de R^{n+1} munie de la topologie induite par celle de R^{n+1} est une variété analytique lisse réelle de dimension n en prenant comme atlas les projection stéréographiques Nord et Sud p_N, p_S definies respectivement sur $S^n \setminus \{N\}$ et $S^n \setminus \{S\}$. Le changement de carte $p_S \circ p_N^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$ est un difféomorphisme lisse et même analytique.

I. Sous-variétés de R^n

On note pour $0 \leq d \leq n$, $E^{n,d} = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid \forall k > d\ x_k = 0\} = R^d \times \{0\}^{n-d} \approx R^d$

I.1. Définitions

Soit $n \in N^*, k \in N^* \cup \{\infty, \omega\}, d \in \{0, \dots, n\}$, et $M \subseteq R^n$

1. Définition locale par redressement.

En un point $x \in M$, on dit que (U, ϕ) **est un redressement en M au point a, de classe C^k, de dimension d** ssi ϕ est C^k difféomorphisme d'un voisinage ouvert $U \subseteq R^n$ de x sur un voisinage ouvert $V \subseteq R^n$ de 0 (par ex $V = B(0,1)$), tel que $\phi(x) = 0$ et $\phi(U \cap M) = V \cap (R^d \times \{0\}^{n-d})$
M est une **sous-variété de R^n de classe C^k de dimension d**, ssi M admet en chacun de ses points un redressement de classe C^k et de dimension d.
En termes vagues : chaque point d'une sous-variété admet un voisinage induit sur M qui est une distorsion d'un ouvert/d'une boule unité de R^d contenant 0 (ou un point fixé).

2. Définition locale par équation/fonction implicite.

M est une **sous-variété de R^n de classe C^k de dimension d**, ssi M admet en chaque $x \in M$, un voisinage $U \subseteq R^n$ de x, et $f: U \to R^{n-d}$ une C^k submersion en x telle que $U \cap M = f^{-1}(\{0\})$
En termes vagues : M sous-variété de dim. d ssi chacun de ses points admet un voisinage induit sur M qui peut se voir comme l'image réciproque de 0 (un point fixé) par une projection canonique distordue sur R^{n-d}

3. Définition locale par paramétrage.

M est une **sous-variété de R^n de classe C^k de dimension d**, ssi M admet en chaque $x \in M$, un voisinage $U \subseteq R^n$ de x, un voisinage $V \subseteq R^d$ de 0, et $f: V \to R^n$ une C^k immersion en 0, telle que $f(0) = x$ et f homéomorphisme de V sur $U \cap M$.
En termes vagues : M sous-variété de dim. d ssi chacun de ses points admet un voisinage induit sur M qui peut se voir comme l'image directe d'une injection canonique distordue d'un voisinage de 0 de R^d vers R^n

4. Définition locale par graphe.

M est une **sous-variété de R^n de classe C^k de dimension d**, ssi M admet en chaque $x \in M$, un voisinage $U \subseteq R^n$ de x, un ouvert $V \subseteq R^n$ et $f: V \to R^{n-d}$ de classe C^k telle que $U \cap M$ soit le graphe de f cad $U \cap M = \{(y, f(y)): y \in V\}$
Exemples : $S^{n-1}(\mathbb{R}^n)$, $SL_n(\mathbb{R}), O_n(\mathbb{R})$ sont des sous-variétés de dimension $n-1, n^2-1, \frac{n(n-1)}{2}$.

Lien avec les variétés différentielles.

Une sous-variété M de R^n est une variété : notant $p = \dim M$, la définition par redressement donne pour tout $x \in R^n$ sur un voisinage U_x, un difféomorphisme $\varphi_x: U_x \to R^p \times R^{n-p}$ tel que $\varphi_x(U_x \cap M) \subseteq R^p \times \{0\}^{n-p}$. Notant π la projection $R^p \times R^{n-p} \to R^p$, alors $\{(U_x \cap M, (\pi \circ \varphi)_{|U_x \cap M}): x \in M\}$ est un atlas de M de régularité celle de M comme sous-variété de R^n.
On s'intéresse à formuler une réciproque.
Une application f entre deux variétés C^k M, N, est un **plongement C^k** ssi f est un homeomorphisme de M sur $f(M)$ et f est une immersion C^k (lue dans les cartes, f est en tout point une immersion C^k).

Une application $f: M \to R^n$ avec M variete C^k est un plongement C^k ssi $f(M)$ est une sous-variété C^k de R^n et f est un C^k difféomorphisme de M sur $f(M)$

Théorème de Whitney. Pour $k \in N \cup \{\infty, \omega\}$ et M une variété C^k de dimension n non nécessairement compacte, alors il existe un C^k plongement de M dans R^{2n}

Intuitivement toute variété différentielle peut être vue comme sous-variété de R^p pour p suffisamment grand.

Propriétés.

Une partie finie ou dénombrable de R^n est une sous-variété de R^n de classe C^∞ et de dimension 0.

Toute sous-variété C^∞ connexe de dimension 1 est difféomorphe soit a R soit a S^1.

Espace Tangent.

Soit M une sous-variété de R^n de classe C^1 de dimension d

$v \in R^n$ est un **vecteur tangent à la sous-variété M en $x \in M$** ssi $\exists \delta > 0\ \exists \gamma:]-\delta, \delta[\to R^n\ C^1$, $im(\gamma) \subseteq M$ et $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$, autrement dit ssi v est le vecteur tangent en x d'une courbe C^1 sur la variété passant par x.

L' **espace vectoriel tangent à la sous-variété M en $x \in M$** est l'espace vectoriel $\boldsymbol{T_x M}$ des vecteurs tangents a M en x.

L'espace affine tangent à la sous-variété M en $x \in M$ est l'espace affine correspondant $x + T_x M$

Suivant la façon dont est définie la sous-variété, on peut donner la valeur de $T_x M$

Définition implicite : si U est un voisinage de x dans R^n et $f: U \to R^{n-p}$ une C^k-submersion en x tels que $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$, alors $T_x M = ker(d_x f)$

Définition par paramétrage : si U est un voisinage de x dans R^n et V est un voisinage de 0 dans R^p, $f: V \to R^n$ une C^k-immersion en 0 envoyant 0 sur x tels que $f_{|V}$ est un homéomorphisme de V sur $U \cap M$, alors $T_x M = Im(d_0 f)$

Définition par redressement : si U et V sont des voisinages respectifs de x dans R^n et de 0 dans R^n, si $f: U \to V$ un C^k-difféomorphisme envoyant x sur 0 et tel que $f(U \cap M) = V \cap (R^p \times \{0\})$, alors $T_x M = (d_x f)^{-1}(R^p \times \{0\})$.

Exemples de sous-variétés.

Tout ouvert de $R^p \times \{0\} \subseteq R^n$

$S^n = \{x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ sous-variété analytique réelle.

Les espaces projectifs $P^n(R)$ peuvent être vu comme sous-variétés, mais $P^2(R)$ pas une sous- variété de R^3.

Les groupes $GL_n(R)$ (ouvert de R^{n^2}), $SL_n(R), O_n(R), SO_n(R), GL_n(C), SL_n(C)$ sous-variétés analytiques U_n, SU_n sous-variétés analytique réelles mais pas complexes.

Contre-exemples (pas des sous-variétés).

$\{x^2 - y^2 = 0\} \subseteq R^2, \{x^2 + y^2 - z^2 = 0\} \subseteq R^3,\ \{(t^2, t^3): t \in R\}$

R replie sur lui-même, R replie sur lui-même en oscillant, les géodésiques irrationnelles du tore $\left\{\left(e^{it}, e^{i\sqrt{2}t}\right): t \in R\right\} \subseteq C^2$.

I.2. Niveaux de fonctions et sous-variétés

I.3. Images de fonctions et sous-variétés

II. L'espace tangent a une sous-variété de R^n