Fonction exponentielle. $\exists\,!\,\mathbf{exp}\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases}\exp' = \exp\\ \exp 0 = 1\end{cases}$

On note aussi $\boldsymbol{e^x} = \exp x$.

$\forall x \in \mathbb{R}\, \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}\; e^{x+y} = e^x e^y$

$\forall x \in \mathbb{R}\;\; e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$\forall k \geq 1\;\; \forall x \in \mathbb{R}\;\; \frac{d^k}{dx^k} e^x = e^x$

$e^x \to_{x\to\infty} \infty\,,\;\; e^x \to_{x\to-\infty} 0,\;\; e^0 = 1$

La fonction exponentielle est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$

L'exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ et convexe sur $\mathbb{R}$, strictement positive sur $\mathbb{R}$

Fonction logarithme naturel. $\exists\,!\,\mathbf{ln}\ :\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln x = \exp^{-1} x$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\;\; \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*\;\; \ln(xy) = \ln x + \ln y$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

$\forall k \geq 1\;\; \forall x \in \mathbb{R}\; \frac{d^k}{dx^k} \ln x = (-1)^{k-1}\;\; (k-1)!\, x^{-k}$

$\ln x \to_{x\to 0^+} -\infty\,,\;\;\ln x \to_{x\to\infty} \infty,\;\; \ln 1 = 0$

Le logarithme est la réciproque de l'exponentielle, donc est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$

ln est croissante et concave sur $\mathbb{R}_+^*$ strictement < 0 sur $]0,1[$ et strictement > 0 sur $]1,\infty[$

Fonction exponentielle de base $\boldsymbol{a > 0}$. $\exists\,!\,\mathbf{exp}_{\boldsymbol{a}}\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x \mapsto \mathbf{exp}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a^x} = e^{x \ln a}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}\; a^{x+y} = a^x a^y$

$\forall x \in \mathbb{R}\;\; a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$\forall r \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R}\;\; (a^x)^r = a^{xr}$

$\forall x \in \mathbb{R}\; \frac{d}{dx} a^x = (\ln a) a^x \quad \forall k \geq 1\, \forall x \in \mathbb{R}\; \frac{d^k}{dx^k} a^x = (\ln a)^k a^x$

Si $a = 1,\;\; x \mapsto 1^x$ est la fonction constante 1.

Si $a > 1$:

$a^x \to_{x\to\infty} \infty\,,\;\; a^x \to_{x\to-\infty} 0,\;\; a^0 = 1$

$x \mapsto a^x$ est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$

$x \mapsto a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et convexe sur $\mathbb{R}$, strictement positive sur $\mathbb{R}$

Si $a \in]0,1[$:

$a^x \to_{x\to\infty} 0\,,\;\; a^x \to_{x\to-\infty} \infty,\;\; a^0 = 1$

$x \mapsto a^x$ est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$

$x \mapsto a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et convexe sur $\mathbb{R}$, strictement positive sur $\mathbb{R}$

Fonction logarithme de base $\boldsymbol{a > 0, a \neq 1}$. $\exists\,!\,\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x \mapsto \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{x} = \frac{\ln x}{\ln a}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*\;\; \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\, \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R}_+^*\;\; \log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$

Pour deux bases $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\;\; \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

$\forall x \in \mathbb{R}\; \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a} \quad \forall k \geq 1\;\; \forall x \in \mathbb{R}\; \frac{d^k}{dx^k} \log_a x = (-1)^{k-1}\; \frac{(k-1)!\, x^{-k}}{\ln a}$

Si $a = 1,\;\; \log_1$ n'est pas défini car $\ln 1 = 0$

Si $a > 1$:

$\log_a x \to_{x\to 0^+} -\infty$, $\log_a x \to_{x\to\infty} \infty$, $\log_a 1 = 0$
$\log_a$ est la réciproque de $x \mapsto a^x$, donc est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$
$\log_a$ est croissante et concave sur $\mathbb{R}_+^*$ strictement < 0 sur $]0,1[$ et strictement > 0 sur $]1,\infty[$
Si $a \in]0,1[$:
$\log_a x \to_{x\to 0^+} \infty$, $\log_a x \to_{x\to\infty} -\infty$, $\log_a 1 = 0$
$\log_a$ est la réciproque de $x \mapsto a^x$, donc est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$
$\log_a$ est décroissante et concave sur $\mathbb{R}_+^*$ strictement > 0 sur $]0,1[$ et strictement < 0 sur $]1,\infty[$
Fonctions puissances d'exposant $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ fixé. $\exists! \quad {}^{\boldsymbol{\alpha}}: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}: x \mapsto \boldsymbol{x^\alpha} = e^{\boldsymbol{\alpha}\ln x}$
$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \ (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha = \frac{1}{x^\alpha}$
$\forall r \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \ (x^\alpha)^r = x^{\alpha r}$
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ \frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1} \quad \forall k \geq 1\ \forall x \in \mathbb{R} \ \frac{d^k}{dx^k} x^\alpha = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$
Si $\alpha \neq 0$ alors $x \mapsto x^\alpha$ est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ de réciproque $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$
Si $\alpha < 0$: $x^\alpha \to_{x\to 0^+} \infty$, $x^\alpha \to_{x\to\infty} 0$, $x \mapsto x^\alpha$ est convexe, décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$
Si $\alpha \in]0,1[$: $x^\alpha \to_{x\to 0^+} 0$, $x^\alpha \to_{x\to\infty} \infty$, $x \mapsto x^\alpha$ est concave, croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
Si $\alpha > 0$: $x^\alpha \to_{x\to 0^+} 0$, $x^\alpha \to_{x\to\infty} \infty$, $x \mapsto x^\alpha$ est convexe, croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
Croissances comparées.
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \ \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} \to_{x\to\infty} 0$ en particulier $\frac{\ln x}{x} \to_{x\to\infty} 0$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \ x^\beta |\ln x|^\alpha \to_{x\to 0^+} 0$ en particulier $x \ln x \to_{x\to\infty} 0$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \ \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \to_{x\to\infty} \infty$ en particulier $\frac{e^x}{x} \to_{x\to\infty} \infty$
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \ |x|^\beta e^{\alpha x} \to_{x\to -\infty} 0$ en particulier $x e^x \to_{x\to-\infty} 0$
Fonctions circulaires.
$\exists\,!\ \mathbf{cos}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} \cos'' = -\cos \\ \cos 0 = 1 \\ \cos' 0 = 0 \end{cases}$
$\exists\,!\ \mathbf{sin}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} \sin'' = -\sin \\ \sin 0 = 0 \\ \sin' 0 = 1 \end{cases}$
$\forall x \in \mathbb{R} \ \cos x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
$\forall x \in \mathbb{R} \ \sin x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
La dérivée de cos est – sin, et la dérivée de sin est cos.
cos est une fonction paire, sin est une fonction impaire.
cos et sin, sont C^∞ sur $\mathbb{R}$
$\boldsymbol{\pi} = 2\min\{x \in \mathbb{R}_+^* \mid \cos x = 0\}$
cos et sin sont 2π-periodiques.
$\forall k \in \mathbb{Z}$ cos est un C^∞ difféomorphisme de $]k\pi, (k+1)\pi[$ sur $]-1,1[$
$\forall k \in \mathbb{Z}$ sin est un C^∞ difféomorphisme de $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ sur $]-1,1[$
$\forall k \geq 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \frac{d^k}{dx^k} \cos x = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$
$\forall k \geq 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \frac{d^k}{dx^k} \sin x = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$
$\forall x \in \mathbb{R} \ \cos x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\forall x \in \mathbb{R} \ \sin x = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ x = k\pi$

$\exists\,!\,\mathbf{tan}\ :\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}: x\mapsto\frac{\sin x}{\cos x}$. On a $\in D_{\tan}\Leftrightarrow \cos x\neq 0$
$\exists\,!\,\mathbf{cotan}\ :\mathbb{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}: x\mapsto\frac{\cos x}{\sin x}$. On a $x\in D_{\text{cotan}}\Leftrightarrow \sin x\neq 0$
tan est une fonction impaire, cotan est une fonction paire.
tan est C^∞ sur $D_{\tan}$, et cotan est C^∞ sur D_{cotan}
$\tan x\to_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\infty,\ \tan x\to_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}-\infty,\ \text{cotan}\ x\to_{x\to 0^+}\infty,\ \text{cotan}\ x\to_{x\to\pi^-}-\infty$
$\forall x\in D_{\tan}\ \tan' x=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ et $\forall x\in D_{\text{cotan}}\ \text{cotan}' x=-(1+\text{cotan}^2\,x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\forall k\in\mathbb{Z}$ tan est un C^∞ difféomorphisme de $]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[$ sur $\mathbb{R}$
$\forall k\in\mathbb{Z}$ cotan est un C^∞ difféomorphisme de $]k\pi,(k+1)\pi[$ sur $\mathbb{R}$
Fonctions circulaires réciproques.
$\exists!\,\mathbf{arccos}: [-1,1]\to[0,\pi]: x\mapsto\cos^{-1}x$
$\forall k\in\mathbb{Z}$ arccos est un C^∞ difféomorphisme de $]-1,1[$ sur $]0,\pi[$, et est continue sur $[-1,1]$
$\arccos(-1)=\pi,\quad \arccos(1)=0$
$\forall x\in]-1,1[\ \arccos' x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\forall x,y\in\mathbb{R}\ \begin{cases}y=\cos(x)\\ x\in[0,\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\arccos(y)\\ y\in[-1,1]\end{cases}$
$\exists!\,\mathbf{arcsin}: [-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]: x\mapsto\sin^{-1}x$
arcsin est un C^∞ difféomorphisme de $]-1,1[$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, et est continue sur $[-1,1]$
$\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2},\quad \arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$
arcsin est une fonction impaire.
$\forall x\in]-1,1[\ \arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\forall x,y\in\mathbb{R}\ \begin{cases}y=\sin(x)\\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\arcsin(y)\\ y\in[-1,1]\end{cases}$
$\exists!\,\mathbf{arctan}: \mathbb{R}\to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[: x\mapsto\tan^{-1}x$
$\arctan x\to_{x\to\infty}\frac{\pi}{2},\ \arctan x\to_{x\to-\infty}-\frac{\pi}{2}$
arctan est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$
arctan est une fonction impaire.
$\forall x\in\mathbb{R}\ \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$
$\forall x\in\mathbb{R}\ \arctan' x=\frac{1}{1+x^2}$
$\forall x,y\in\mathbb{R}\ \begin{cases}y=\tan(x)\\ x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\arctan(y)\\ y\in\mathbb{R}\end{cases}$
Formules circulaires. Soient $a,b\in\mathbb{C}$
$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b),\ \cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b),\ \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$
$\cos(a)+\cos(b)=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),\ \cos(a)-\cos(b)=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\sin(a)+\sin(b)=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right),\ \sin(a)-\sin(b)=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
$\cos(a)\cos(b)=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$
$\sin(a)\sin(b)=\frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$
$\sin(a)\cos(b)=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$

$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$
$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}, \quad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$
Pour $a, b, a+b \in D_{\tan}$ alors $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$
Pour $a, b, a-b \in D_{\tan}$ alors $\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$
Pour $a, b \in D_{\tan}$ alors $\tan(a) + \tan(b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a)\cos(b)}$
Pour $\frac{a}{2} \in D_{\tan}, t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$, alors $\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin(a) = \frac{2t}{1+t^2}$ $\tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$
Pour $\frac{a}{2} \in D_{\tan}, t = \tan\left(\frac{a}{2}\right), \sin(a) \neq 0$ alors $t = \frac{\sin(a)}{1+\cos(a)} = \frac{1-\cos(a)}{\sin a}$

Formules circulaires réciproques.

Pour $x \in [-1,1]$ $\begin{cases} \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \\ \arccos(-x) = \pi - \arccos(x) \\ \arcsin(-x) = -\arcsin(x) \end{cases}$

Pour $x \in \mathbb{R}^*$ $\begin{cases} \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = sgn(x)\frac{\pi}{2} \\ \arctan(-x) = -\arctan(x) \end{cases}$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} xy < 1 \Rightarrow \arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \\ xy < 1 \Rightarrow \arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + sgn(x)\pi \end{cases}$

Fonctions hyperboliques.

$\exists\,!\,\mathbf{cosh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} \cosh'' = \cosh \\ \cosh 0 = 1 \\ \cosh' 0 = 1 \end{cases}$

$\exists\,!\,\mathbf{sinh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} \sinh'' = \sinh \\ \sinh 0 = 0 \\ \sinh' 0 = 1 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\forall x \in \mathbb{R}\ \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
La dérivée de cosh est sinh, et la dérivée de sinh est cosh.
cosh est une fonction paire, sinh est une fonction impaire.
cosh et sinh, sont C^∞ sur $\mathbb{R}$
$\forall k \geq 1\ \ \forall x \in \mathbb{R} \frac{d^k}{dx^k}\cosh x = \begin{cases} \cosh x \text{ si } k \text{ pair} \\ \sinh x \text{ si } k \text{ impair} \end{cases}$
$\forall k \geq 1\ \ \forall x \in \mathbb{R} \frac{d^k}{dx^k}\sinh x = \begin{cases} \sinh x \text{ si } k \text{ pair} \\ \cosh x \text{ si } k \text{ impair} \end{cases}$
$\cosh x \to_{x\to\infty} \infty,\ \cosh x \to_{x\to-\infty} \infty,\ \sinh x \to_{x\to\infty} \infty,\ \sinh x \to_{x\to-\infty} -\infty$
$\forall k \in \mathbb{Z}$ cosh est un C^∞ difféomorphisme de $]0,\infty[$ sur $]1,\infty[$ et de $]-\infty,0[$ sur $]1,\infty[$
$\forall k \in \mathbb{Z}$ sinh est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$
$\exists\,!\,\mathbf{tanh}\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \frac{\sinh x}{\cosh x}$
$\exists\,!\,\mathbf{cotanh}\ : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}: x \mapsto \frac{\cosh x}{\sinh x}$
tanh est une fonction impaire, cotanh est une fonction paire.
tanh est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et cotanh est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$
$\tanh x \to_{x\to\infty} 1,\ \tanh x \to_{x\to-\infty} -1$

$\text{cotanh}\, x \to_{x\to\infty} 1,\ \text{cotanh}\, x \to_{x\to 0^+} \infty$, $\text{cotanh}\, x \to_{x\to-\infty} -1,\ \text{cotanh}\, x \to_{x\to 0^-} -\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \tanh' x = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*\ \text{cotanh}' x = 1 - \text{cotanh}^2 x = -\frac{1}{\sinh^2 x}$

$\forall k \in \mathbb{Z}$ tanh est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$

$\forall k \in \mathbb{Z}$ cotanh est un C^∞ difféomorphisme de $]0,\infty[$ sur $]1,\infty[$ et de $]-\infty,0[$ sur $]-\infty,-1[$

Fonctions hyperboliques réciproques.

$\exists!\, \mathbf{arccosh}: [1,\infty[\to [0,\infty[: x \mapsto \cosh^{-1} x$

$\forall k \in \mathbb{Z}$ arccosh est un C^∞ difféomorphisme de $]1,\infty[$ sur $]0,\infty[$, et est continue sur $[1,\infty[$

$\text{arccosh}(1) = 0, \quad \text{arccosh}(x) \to_{x\to\infty} \infty$

$\forall x \in]1,\infty[\ \ \text{arccosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\forall x \in]1,\infty[\ \ \text{arccosh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

$\forall x,y \in \mathbb{R}\ \ \begin{cases} y = \cosh(x) \\ x \in [0,\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{arccosh}(y) \\ y \in [1,\infty[\end{cases}$

$\exists!\, \mathbf{arcsinh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sinh^{-1} x$

arcsinh est un C^∞ difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

$\text{arcsinh}(x) \to_{x\to\infty} \infty,\ \text{arcsinh}(x) \to_{x\to-\infty} -\infty$

arcsinh est une fonction impaire.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \text{arcsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\forall x \in]1,\infty[\ \ \text{arcsinh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$\forall x,y \in \mathbb{R}\ \ \begin{cases} y = \sinh(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{arcsinh}(y) \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\exists!\, \mathbf{arctanh}:]-1,1[\to \mathbb{R} : x \mapsto \tanh^{-1} x$

$\text{arctanh}\, x \to_{x\to 1^-} \infty, \quad \text{arctanh}\, x \to_{x\to -1^+} -\infty$

arctanh est un C^∞ difféomorphisme de $]-1,1[$ vers $\mathbb{R}$

arctanh est une fonction impaire.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \text{arctanh}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \text{arctanh}' x = \frac{1}{1-x^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ \text{arctanh}\, x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\forall x,y \in \mathbb{R}\ \ \begin{cases} y = \tanh(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \text{arctanh}(y) \\ y \in]-1,1[\end{cases}$

Formules hyperboliques. Soient $a, b \in \mathbb{C}$

$\cosh(a+b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$

$\cosh(a-b) = \cosh(a)\cosh(b) - \sinh(a)\sinh(b)$

$\sinh(a+b) = \sinh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\sinh(b)$

$\sinh(a-b) = \sinh(a)\cosh(b) - \cosh(a)\sinh(b)$

$\cosh(a) + \cosh(b) = 2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right),\ \ \cosh(a) - \cosh(b) = 2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sinh(a) + \sinh(b) = 2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right),\ \sinh(a) - \sinh(b) = 2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cosh(a)\cosh(b) = \frac{1}{2}(\cosh(a+b) + \cosh(a-b))$

$\sinh(a)\sinh(b) = \frac{1}{2}(\cosh(a+b) - \cosh(a-b))$

$\sinh(a)\cosh(b) = \frac{1}{2}(\sinh(a+b) + \sinh(a-b))$

$\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1$

$\cosh(2a) = 2\cosh^2(a) - 1 = 1 - 2\sinh^2(a) = \cosh^2(a) + \sinh^2(a)$

$\sinh(2a) = 2\sinh(a)\cosh(a)$

$\cosh^2(a) = \frac{1+\cosh(2a)}{2}$, $\sinh^2(a) = \frac{1-\cosh(2a)}{2}$

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ alors $\tanh(a+b) = \frac{\tanh(a)+\tanh(b)}{1+\tanh(a)\tanh(b)}$

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ alors $\tanh(a-b) = \frac{\tanh(a)-\tanh(b)}{1-\tanh(a)\tanh(b)}$

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ alors $\tanh(a) + \tanh(b) = \frac{\sinh(a+b)}{\cosh(a)\cosh(b)}$

Pour $a \in \mathbb{R}, t = \tanh\left(\frac{a}{2}\right)$, alors $\cosh(a) = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ $\sinh(a) = \frac{2t}{1-t^2}$ $\tanh(a) = \frac{2t}{1+t^2}$

Pour $a \in \mathbb{R}, t = \tanh\left(\frac{a}{2}\right)$, $\sinh(a) \neq 0$ alors $t = \frac{\sinh(a)}{1+\cosh(a)} = \frac{1-\cosh(a)}{\sinh a}$

Formulaire dérivées.

Fonction	**Dérivée**	**Domaine dérivabilité**	**Domaine définition**
1	0	$\mathbb{R}$	idem
$x^k, k \in \mathbb{N}, k \geq 1$	kx^{k-1}	$\mathbb{R}$	idem
$x^k, k \in \mathbb{Z}, k \leq -1$	kx^{k-1}	$\mathbb{R}^*$	idem
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$	idem
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	idem
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	idem
$a^x, a \in \mathbb{R}_+^*$	$(\ln(a))a^x$	$\mathbb{R}$	idem
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	idem
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$\mathbb{R}_+^*$	idem
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	idem
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	idem
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	idem
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$[-1,1]$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$	$[-1,1]$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	idem
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\mathbb{R}$	idem
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\mathbb{R}$	idem
$\tanh(x)$	$1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\mathbb{R}$	idem
$\text{arccosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1, \infty[$	$[1, \infty[$
$\text{arcsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$	idem
$\text{arctanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$]-1,1[$	idem

Formulaire composées. (utile pour reconnaitre formes composées lorsqu'on intègre).

Opération	**Dérivée**

αu	$\alpha u'$
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v+uv'}{v^2}$
$v\circ u$	$(v'\circ u)\times u'$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
u^{-1}	$\dfrac{1}{u'\circ u^{-1}}$
$u^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha u^{\alpha-1}u'$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\exp(u)$	$\exp(u)\,u'$
$\ln(u)$	$\dfrac{u'}{u}$
$\cos(u)$	$-\sin(u)\,u'$
$\sin(u)$	$\cos(u)\,u'$

Formulaire primitives.

Fonction	Primitive	Intervalle d'intégration
1	x	$\mathbb{R}$
$(x-a)^k, k\in\mathbb{N}, k\geq 0$	$\dfrac{1}{k+1}(x-a)^{k+1}$	$\mathbb{R}$
$(x-a)^k, k\in\mathbb{Z}, k\leq -2$	$\dfrac{1}{k+1}(x-a)^{k+1}$	$]-\infty,a[$ ou $]a,\infty[$
$\dfrac{1}{(x-a)^k}, k\in\mathbb{Z}, k\geq 2$	$-\dfrac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}}$	$]-\infty,a[$ ou $]a,\infty[$
$\dfrac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$]-\infty,a[$ ou $]a,\infty[$
$(x-a)^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{1}{\alpha+1}(x-a)^{\alpha+1}$	$]a,\infty[$
$\sqrt{x-a}$	$\dfrac{2}{3}(x-a)^{\frac{3}{2}}$	$]a,\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x-a}}$	$2\sqrt{x-a}$	$]a,\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+1}\right\rvert = \operatorname{arcsinh} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert = \operatorname{arccosh} x$	$]-\infty,-1[$ ou $]1,\infty[$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\dfrac{1}{2}(\ln\lvert x-1\rvert-\ln\lvert x+1\rvert)$	$]-\infty,-1[$ ou $]-1,1[$ ou $]1,\infty[$
$e^{ax}, a\in\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{a}e^{ax}$	$\mathbb{R}$
$a^x, a\in\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{\ln(a)}a^x$	$\mathbb{R}$

$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos(ax+\varphi)\,, a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a}\sin(ax+\varphi)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+\varphi)\,, a \in \mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+\varphi)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert cos(x)\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\text{cotan}(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \text{cotan}^2(x)$	$\text{cotan}(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert$	
$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	
$\frac{1}{\cosh(x)}$	$\arctan(sinh(x)) + C$ $= \arctan(tanh(x)) + C$ $= 2\arctan(e^x) + C$	
$\frac{1}{\sinh(x)}$	$\ln\left\lvert\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right\rvert$	
$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh(x)$	
$\frac{1}{\sinh^2(x)}$	$-\frac{1}{\tanh(x)}$	