Chapitre 3. Algèbre bilinéaire
On suppose E est un $\mathbb{K}$ ev avec $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$, $\mathbb{K}$ de caractéristique $\neq 2$. Soit E, F, G trois tels $\mathbb{K}$evs
III. Formes sesquilinéaires et hermitiennes
III.1. Généralités
Une **application linéaire** d'un $\mathbb{K}$ ev E, vers un autre F, est une application de $E \to F$ telle que $\forall x, y \in E\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x \in E\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$
Une **application semilinéaire/antilinéaire** d'un $\mathbb{K}$ ev E, vers un autre F, est une application de $E \to F$ telle que $\forall x, y \in E\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall x \in E\ f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$
Dans $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, semilinéaire $\Leftrightarrow$ linéaire.
Une application à 2 variables $\varphi : E \times F \to G$ est **bilinéaire** ssi $\begin{cases} \forall x \in E\ \varphi(x,.) \text{ linéaire} \\ \forall y \in F\ \varphi(.,y) \text{ linéaire} \end{cases}$
Une application à 2 variables $\varphi : E \times F \to G$ est une **forme bilinéaire** ssi φ bilinéaire et $G = \mathbb{K}$
Une application à 2 variables $\varphi : E \times F \to G$ est **symétrique** ssi $\forall x, y \in E\ \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$
Une application à 2 variables $\varphi : E \times F \to G$ est **antisymétrique** ssi $\forall x, y \in E\ \varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$
Une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est antisymétrique ssi $\forall x \in E\ \varphi(x,x) = 0$ ssi $C_\varphi = E$
Une application à 2 variables $\varphi : E \times F \to G$ est **sesquilinéaire à droite** ssi $\begin{cases} \forall x \in E\ \varphi(x,.) \text{ linéaire} \\ \forall y \in F\ \varphi(.,y) \text{ semilinéaire} \end{cases}$
Une application à 2 variables $\varphi : E \times F \to G$ est une **forme sesquilinéaire** ssi φ sesquilinéaire et $G = \mathbb{K}$
L'ensemble des applications sesquilinéaires est noté $\boldsymbol{L_{2,s}(E \times F, G)}$
On note $\boldsymbol{L_{2,s}(E \times F)} = L_{2,s}(E \times F, \mathbb{K})$ et $\boldsymbol{L_{2,s}(E)} = \boldsymbol{L_{2,s}(E \times E}, \mathbb{K})$
Dans $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, sesquilinéaire $\Leftrightarrow$ bilinéaire.
Une application complexe à 2 variables $\varphi : E \times E \to \mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ est **hermitienne** ssi $\forall x, y \in E\ \overline{\varphi(x,y)} = \varphi(y,x)$
Une application complexe à 2 variables $\varphi : E \times E \to \mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ est **antihermitienne** ssi $\forall x, y \in E\ \overline{\varphi(x,y)} = -\varphi(y,x)$
Pour une application hermitienne $\forall x, y \in E\ \phi(x,y) = 0 \Leftrightarrow \phi(y,x) = 0$.
Pour une application hermitienne $\forall x \in E\ \ \phi(x,x) \in \mathbb{R}$
Dans $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, hermitienne $\Leftrightarrow$ symétrique. Dans $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, antihermitienne $\Leftrightarrow$ antisymétrique.
Pour une application complexe à 2 variables $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ on dit que $x \in E$ est un **vecteur $\boldsymbol{\varphi}$-isotrope** si $\varphi(x,x) = 0$.
Pour une application complexe à 2 variables $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ le **cône isotrope de $\boldsymbol{\varphi}$** noté $\boldsymbol{C_\varphi}$ est $\{x \in E \mid \varphi(x,x) = 0\}$. Le terme de cône est justifié par x isotrope $\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \lambda x$ isotrope
Une application complexe à 2 variables $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est **définie** ssi son cône isotrope est nul càd $\forall x \in E\ (\varphi(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0)$
Une application à 2 variables $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est **positive** ssi $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}_+$ ssi $\forall x \in E\ \varphi(x,x) \in \mathbb{R}_+$
Une application à 2 variables $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est définie positive ssi $\forall x \in E | x \neq 0_E\ \ \ \varphi(x,x) > 0$
Une <u>**forme**</u> **hermitienne** est une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ forme sesquilinéaire hermitienne.
Une application complexe $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est une forme hermitienne à droite ssi 2 propriétés sont vérifiées parmi les 3 : φ hermitienne, φ linéaire à gauche, φ semilinéaire à droite.
Si $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ une forme hermitienne n'est autre qu'une forme bilinéaire symétrique.
On note $\boldsymbol{S_{2,s}(E)}$ l'ensemble des formes hermitiennes sur E.
Pour $\varphi \in L_{2,s}(E \times F, G)$, on note $\boldsymbol{d_\varphi} : \begin{matrix} F \to L(E,G) \\ y \mapsto \varphi(.,y) \end{matrix}$ resp. $\boldsymbol{g_\varphi} : \begin{matrix} E \to \overline{L(F,G)} \\ x \mapsto \overline{\varphi(x,.)} \end{matrix}$ **l'application <u>semi</u>linéaire associée a $\boldsymbol{\varphi}$ à droite resp. à gauche.**
Pour $\varphi \in L_{2,s}(E \times F, G)$, on appelle **noyau à gauche (resp. à droite) de $\boldsymbol{\varphi}$** le noyau de son application associée à gauche (resp. à droite).

Pour $\varphi \in L_{2,s}(E \times F, G)$, on dit que φ est **dégénérée à gauche (resp. à droite)** si l'application associée à gauche (resp. à droite) n'est pas injective/càd son noyau n'est pas nul/ càd $\exists y \neq 0_F \in F\ \forall x \in E\ \varphi(x,y) = 0_G$ (resp. $\exists x \neq 0_E \in E\ \ \forall y \in F\ \ \varphi(x,y) = 0_G$)
φ non-dégénérée gauche (resp. droite) ssi $\forall x\ (\varphi(x,.) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ resp. $\forall y\ (\varphi(.,y) = 0 \Leftrightarrow y = 0)$
φ est dégénérée si elle est dégénérée à gauche ou à droite.
φ est non-dégénérée si elle n'est dégénérée ni à gauche ni à droite
Pour une forme hermitienne, le noyau à gauche et à droite de φ coincident, et on peut parler simplement de **noyau de φ** noté $\boldsymbol{Ker(\varphi)} \coloneqq Ker(d_\varphi) = Ker(g_\varphi)$
Pour une forme hermitienne $Ker(\varphi) \subseteq C_\varphi$ donc une forme hermitienne définie est non-dégénérée.

I.1.1. Homomorphisme métrique et isométrie

Soit deux $\mathbb{K}$evs E, E' munis chacun d'une forme hermitienne φ, φ'.
Un **morphisme métrique** de (E,φ) dans (E',φ') est une application lineaire $u \in L(E,E')$ telle que $\forall x,y \in E\ \varphi'(u(x),u(y)) = \varphi(x,y)$.
Une **isométrie** de (E,φ) dans (E',φ') est un isomorphisme métrique.
Si $\dim(E) = \dim(E') < \infty$ et φ non-dégénérée alors un morphisme métrique est tjrs une isométrie.
Faux en dimension infinie.
L'identité de E est une isométrie sur lui-même par rapport à n'importe quelle forme bilinéaire sur E.
L'inverse d'une isométrie est une isométrie. La composée d'isométries est une isométrie.
L'ensemble des isométries de E un Kev forme donc un groupe noté $\boldsymbol{Is(E,\varphi)}$**.**
Si la forme φ est bilinéaire symétrique on appelle $Is(E)$ le **groupe orthogonal** de E
Si la forme φ est bilinéaire antisymétrique on appelle $Is(E)$ le **groupe symplectique** de E
Si la forme φ est hermitienne on appelle $Is(E)$ le **groupe unitaire** de E

I.1.2. Les applications sesquilinéaires en dimension finie

On suppose dans cette section E, F, G de dimensions finies respectives p, q, r de bases e, f, g.
Pour une application sesquilinéaire de $E \times F \to G$ on a $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} x_i\overline{y_j}\varphi(e_i,f_j) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} x_i\overline{y_j}\varphi_{i,j,k}g_k$ donc φ est entièrement déterminée par les pqr scalaires $(\varphi_{i,j,k})_{i,j,k}$. Donc $L_{s,2}(E \times F, G)$ est de dimension pqr et une base est
$\left(\varphi_{i_0,j_0,k_0} : (x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} x_i\overline{y_j}\delta_{i,i_0}\delta_{j,j_0}\delta_{k,k_0}g_k = x_{i_0}\overline{y_{j_0}}g_{k_0}\right)_{i_0,j_0,k_0}$
La dimension de $L_{s,2}(E \times F)$ est donc $pq = \dim(E) \times \dim(F)$.
On note $\boldsymbol{[\varphi]^{e,f}} \coloneqq \left(\varphi(e_i,f_j)\right)_{1\le i\le p, 1\le j\le q}$ la **matrice représentative de φ dans les bases e, f.**
On a donc $\forall (x,y) \in E \times F)\ \ \varphi(x,y) = [x]^{T\,e}[\varphi]^{e,f}[\overline{y}]^f = X^T A\overline{Y}$
Les bases e, f etant fixees, l'application qui a une forme sesquilinéaire de $E \times F$ associe sa matrice representative dans ces bases, est un isomorphisme d'ev de $L_{s,2}(E \times F)$ sur $M_{p,q}(K)$
Formule de changement de base matrice d'une forme sesquilinéaire: $A' = P^T A\overline{Q}$. Car $\overline{Y} = \overline{QY'} = \overline{Q}\ \overline{Y'}$
$A' = [\varphi]^{e',f'} = P_{e\to e'}^T[\varphi]^{e,f}\overline{P_{f\to f'}}$ ce qui permet d'écrire $\varphi(x,y) = X^T A\overline{Y} = X'^T(P^T A\overline{Q})\overline{Y'} = X'^T A'\overline{Y'}$
On peut calculer $\varphi(x,y)$ dans n'importe quel base, le resultat ne depend pas de la base.
Une forme sesquilinéaire est hermitienne (resp. antihermitienne) ssi sa matrice représentative dans une base quelconque/toute base l'est. $M = \overline{M^T}$ (resp. $M = -\overline{M^T}$)
Orthogonalité, partie orthogonale, famille orthogonale, rang, sommes orthogonales, isotropies sont définies de façon identique au cas bilinéaire. Les propositions et théorèmes sur ces notions en particulier la décomposition d'un espace en somme orthogonale restent vrai dans le cas sesquilinéaire.

I.2. Dualité

Le crochet de dualité sur un Kev est une forme bilinéaire non dégénérée (par Zorn en dim ∞) sur $E^\star \times E$

I.2.5. La dualité en dimension finie

En dimension finie on peut décomposer une forme linéaire f sur une base duale $f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)e_i^*$

Un Kev de dimension finie et son espace dual son isomorphes donc de même dimension.
Cet isomorphisme dépend du choix de la base donc ne peut pas être qualifié de canonique.
En dimension finie, l'application linéaire canonique de $E \to E^{**}$ est un isomorphisme.
L'application qui à toute base de E associe sa base duale est une bijection de l'ensemble de base de E vers l'ensemble des bases duales. En dimension finie on peut écrire $[\varphi]^{e,f} = [d_\varphi]_f^{e^*} = [g_\varphi]_e^{f^*\,T}$

I.3. Orthogonalité (espace quadratique complexe)

Pour φ une forme bilinéaire, la relation « être φ-orthogonal a » est symétrique ssi (φ est symétrique ou antisymétrique).
Autrement dit $(\forall x, y \in E\ \varphi(x,y) = 0 \Rightarrow \varphi(y,x) = 0) \Leftrightarrow \varphi$ est symétrique ou antisymétrique
Cela justifie que l'on s'intéresse surtout aux formes symétriques ou antisymétriques dans le cas bilinéaire.
Dans le cas sesquilinéaire je ne crois pas qu'il y ait un résultat analogue. On s'intéressera surtout aux formes hermitiennes dans la suite.
On appelle aussi **espace quadratique** un (E,φ) $\mathbb{K}$ ev muni d'une forme hermitienne.
Soit (E,φ) un espace quadratique.
$x \in E$ est **$\boldsymbol{\varphi}$-orthogonal / $\perp_{\boldsymbol{\varphi}}$** à $y \in F$ ssi $\varphi(x,y) = 0$ ssi $\varphi(y,x) = 0$
$A \subseteq E$ est **$\boldsymbol{\varphi}$-orthogonale/ $\perp_{\boldsymbol{\varphi}}$** à $B \subseteq F$ si $\forall x \in A\ \forall y \in B\ \ x \perp_\varphi y$
L'orthogonal d'une partie $A \subseteq E$ pour φ est l'ensemble $A^{\perp_\varphi} = \{y \in E \mid \forall x \in A\ \ x \perp_\varphi y\}$
$A \subseteq E \perp_\varphi B \subseteq E$ ssi $A \subseteq B^\perp$ ssi $B \subseteq A^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sev de l'autre espace.
$C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_2^\perp \subseteq C_1^\perp,\ (C_1 \cup C_2)^\perp = C_1^\perp \cap C_2^\perp,\ C^\perp = (Vect\ C)^\perp,\ C \subseteq C^{\perp\perp},\ C^\perp = C^{\perp\perp\perp}$
Une **famille de vecteurs de E est $\boldsymbol{\varphi}$-orthogonale** si les vecteurs de la famille sont $\perp_\varphi$ 2 a 2
Une **famille de vecteurs de E est $\boldsymbol{\varphi}$-orthonormale** si elle est orthogonale et $\forall i\ \varphi(e_i, e_i) = 1$

I.3.1. Rang. Soit (E,φ) un espace quadratique.

L'orthogonal de E est le noyau de φ $\ E^{\perp_\varphi} = Ker(\varphi) = Ker(d_\varphi) = Ker(g_\varphi)$
Par conséquent φ est non-dégénérée ssi $E^\perp = \{0\}$.
La bilinéarité implique $\forall (x,y) \in E \times E\ \forall (a,b) \in E^\perp \times E^\perp\ \varphi(x+a, y+b) = \varphi(x,y)$ donc on peut passer au quotient et rendre φ non dégénérée : $\overline{\varphi}: \frac{E}{E^\perp} \times \frac{E}{E^\perp} \to \mathbb{K}: (\overline{x}, \overline{y}) = \varphi(x,y)$
On appelle **rang de $\boldsymbol{\varphi}$** la dimension de $\frac{E}{E^\perp}$. $rg(\varphi) = \dim\left(\frac{E}{E^\perp}\right) = \operatorname{codim}(E^\perp) \leq \infty$
En dimension finie, φ non-dégénérée ssi $rg(\varphi) = \dim(E)$ ssi $\operatorname{codim}(E^\perp) = 0$ ssi $E^\perp = \{0\}$ ssi d_φ bijective ssi g_φ bijective.
Le rang de φ est également identique au rang de g_φ (ou de d_φ) en tant qu'applications semilinéaires.
Le rang de φ est égal au rang de n'importe quelle matrice représentative.
Pour φ non-dégénérée, un sev H de E est de dim finie ssi son orthogonal est de codimension finie, et dans ce cas on a $\dim(H) = \operatorname{codim}(H^\perp)$ et $H^{\perp\perp} = H$.
Dans un espace quadratique de dimension finie, en considérant une base φ orthogonale, alors le rang de φ est égal au nombre d'éléments de bases non isotropes, les éléments de base isotropes engendrent le noyau de la forme.
Le nombre d'élément de bases non-isotropes ne dépend pas de la base orthogonale choisie.

I.3.3. Somme de sous-espaces orthogonaux. Soit (E,φ) un espace quadratique.

Une somme directe interne $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ est une **somme directe interne orthogonale** si de plus les sevs sont orthogonaux deux a deux, ce qu'on notera $\boldsymbol{E_1} \perp \cdots \perp \boldsymbol{E_n}$.
La notation est identique à l'orthogonalité car en fait, des espaces orthogonaux deux a deux, sont toujours en somme directe interne orthogonale.
Si E admet une décomposition somme directe orthogonale $E = E_1 \perp \cdots \perp E_n$ alors φ est non-dégénérée ssi ses restrictions à chaque sous-espace de la somme sont toutes également non-dégénérées. Dans ce

cas on peut alors décomposer le noyau de φ en somme directe orthogonale des noyaux des restrictions $\ker(\varphi) = \ker(\varphi_1) \perp \cdots \perp \ker(\varphi_n)$.

I.4. Isotropie. Soit (E, φ) un espace quadratique.

Un **sous-espace H de E est φ-isotrope** ssi il est lui-même orthogonal a un de ses vecteurs non nuls ssi $H \cap H^{\perp} \neq \{0\}$ ssi la restriction de φ a $H \times H$ est dégénérée

Un **sous-espace H de E est φ-totalement isotrope** ssi la restriction de φ à $H \times H$ est nulle, càd ssi tous ses vecteurs sont orthogonaux entre eux càd ssi il est inclus dans son orthogonal $H \subseteq H^{\perp}$

Si E admet un sous-espace H de <u>dimension finie</u>, et <u>non isotrope</u>, alors $E = H \perp H^{\perp}$. Faux si dim(H)= ∞

Si H est un sous-espace de dim finie de E, H est non-isotrope ssi $H^{\perp}$ est non-isotrope ssi $E = H \perp H^{\perp}$

Toute famille orthogonale de vecteurs non-isotropes, est une famille libre.

L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs isotropes et orthogonaux deux à deux, est un espace totalement isotrope.

Ces notions permettent de formaliser des propriétés naturelles de la géométrie euclidienne.

L'orthogonal d'une droite (d) du plan est une autre droite (d'), et $(d) \perp (d')$ forment une decomposition en somme orthogonale du plan euclidien. En règle générale c'est faux à cause des éléments isotropes, si $\varphi: \big((x,y),(x',y')\big) \mapsto xx' - yy'$ l'orthogonal de la droite $R(1,1)$ est elle-même.

I.5. Sous-espaces totalement isotropes maximaux. Soit (E, φ) un espace quadratique.

On appelle **sous-espace totalement isotrope maximal** tout sous-espace de E totalement isotrope, maximal pour l'inclusion.

Tout sous-espace totalement isotrope est inclus dans un sous-espace totalement isotrope maximal. (Vient du lemme de Zorn en dim infinie).

En dim finie on appelle **indice de la forme $\boldsymbol{\varphi}$: $\boldsymbol{\nu(\varphi)}$** le max des dim des sev de E totalement isotropes.

Si φ est non-dégénérée alors l'indice de la forme φ vérifie $\nu(\varphi) \leq \frac{\dim(E)}{2}$

I.6. Adjoint d'un endomorphisme. Soit (E, φ) un espace quadratique <u>non-dégénéré</u>.

Un **endomorphisme $\boldsymbol{\varphi}$-adjoint à un endomorphisme $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L(E)}$** est un endomorphisme $v \in L(E)$ verifiant $\forall x, y \in E \;\; \varphi(u(x), y) = \varphi\big(x, v(y)\big)$

Si l'adjoint existe il est unique, (par non-dégénérescence) et on le note $\boldsymbol{u^*}$.

L'adjoint n'existe pas toujours en dimension infinie. L'existence de l'adjoint est un problème important.

Si u admet un adjoint, alors son adjoint u^* en admet un aussi qui est u. $(u^*)^* = u$

Si u et v admettent des adjoints alors :

La somme admet pour adjoint la somme des adjoints. $(u+v)^* = u^* + v^*$

Pour tout scalaire λ alors λu admet aussi un adjoint et $(\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*$

L'ensemble des endomorphismes admettant un adjoint est un sous-espace de $L(E)$

La composée admet aussi pour adjoint la composée des adjoints dans l'autre sens. $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$

Si u est inversible et si <u>u et u^{-1}</u> admettent des adjoints alors on peut affirmer $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$

Si u endomorphisme de E admet un adjoint alors $Ker(u^*) = (Im\, u)^{\perp}$ et $Im(u^*) \subseteq \big(Ker(u)\big)^{\perp}$

Si H sev stable par u endomorphisme de E admettant un adjoint, alors $H^{\perp}$ est stable par l'adjoint u^*.

Un endomorphisme u est **hermitien** s'il admet lui-même pour adjoint $u^* = u$. (**symétrique** si $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$)

Un endomorphisme est **antihermitien** s'il admet pour adjoint $u^* = -\overline{u}$. (**antisymétrique** si $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$)

Un endomorphisme est dit **unitaire** s'il admet un adjoint et $u^*u = uu^* = Id_E$. (**orthogonal** si $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$)

Un endomorphisme est dit **normal** s'il admet un adjoint et $u^*u = uu^*$.

Un endomorphisme hermitien/antihermitien/orthogonal est normal.

Notations usuelles.

On note $\boldsymbol{GL(E)}$ l'ensemble des isomorphismes de E. $\boldsymbol{SL(E)} = \{u \in GL(E) \mid \det u = 1\}$.

On note $\boldsymbol{PGL(E)} = \frac{GL(E)}{Z(GL(E))}$. $\boldsymbol{PSL(E)} = \frac{SL(E)}{Z(SL(E))}$.

On note $\boldsymbol{S(E,q)}$ l'ensemble des endomorphismes hermitiens de (E, q, φ).

On note $\boldsymbol{S^+(E,q)} = \{u \in S(E,q) \mid u \text{ positive}\}$, $\boldsymbol{S^{++}(E,q)} = \{u \in S(E,q) \mid u \text{ définie positive}\}$
On note $\boldsymbol{A(E,q)}$ l'ensemble des endomorphismes antihermitiens de (E,q,φ).
On note $\boldsymbol{U(E,q)} = \boldsymbol{Is(E,q)}$ l'ensemble des endomorphismes unitaires de (E,q,φ). (On note $\boldsymbol{O(E,q)}$ si $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$)
On note $\boldsymbol{SU(E,q)} = \{u \in U(E,q) \mid \det u = 1\}$
On note $\boldsymbol{M_n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices sur $\mathbb{K}$
On note $\boldsymbol{GL_n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles sur $\mathbb{K}$. $\boldsymbol{SL_n}(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) \mid \det A = 1\}$
On note $\boldsymbol{D_n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{K})$
On note $\boldsymbol{S_n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices hermitiennes de $M_n(K)$
On note $\boldsymbol{S_n^+}(\mathbb{K}) = \{A \in S_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ positive}\}$, $\boldsymbol{S_n^{++}}(\mathbb{K}) = \{A \in S_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ définie positive}\}$,
On note $\boldsymbol{A_n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antihermitiennes de $M_n(\mathbb{K})$
On note $\boldsymbol{U_n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices unitaires de $M_n(\mathbb{K})$ (On note $\boldsymbol{O_n}(\mathbb{K})$ si $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$)
On note $\boldsymbol{SU_n}(\mathbb{K}) = \{A \in U_n(\mathbb{K}) \mid \det A = 1\}$
$S(E,q)$, $A(E,q)$ sont des $\mathbb{K}$sevs de $L(E)$
L'espace des endomorphismes admettant un adjoint se decompose en somme directe : $S(E) \oplus A(E)$
I.6.1. Adjoint en dimension finie. Soit (E,φ) un espace quadratique <u>non-dégénéré</u> de dimension finie.
Cela implique automatiquement d_φ, g_φ bijectives. (TODO vérifier)
Tout endomorphisme u de E admet un adjoint donné par la formule : $u^* = d_\varphi^{-1} \circ t_u \circ d_\varphi$
On a $L(E) = S(E) \oplus A(E)$.
Dans un b.o.n. B d'un espace euclidien E on a
$[u^*]^B = \overline{[u]^B}^T = \overline{[u]^B}^T$
$u \in S(E,q) \Leftrightarrow [u]^B \in S_n(\mathbb{K})$
$u \in A(E,q) \Leftrightarrow [u]^B \in A_n(\mathbb{K})$
$u \in U(E,q) \Leftrightarrow [u]^B \in U_n(\mathbb{K})$
$rg(u^*) = rg(u)$
$Ker(u^*) = (Im\, u)^\perp$ et $Im(u^*) = (Ker\, u)^\perp$
$P_{u^*}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow P_u(\overline{\lambda}) = 0$
$Sp(u^*) = \overline{Sp(u)}$
$\det(u^*) = \overline{\det u}$
$tr(u^*) = \overline{tr(u)}$
Pour un sous-espace H, H est stable par u ssi $H^\perp$ est stable par u^*
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, un endomorphisme et son adjoint ont même rang, même déterminant, même trace, même polynôme caractéristique, même valeurs propres.
II.1.3. Formes quadratiques
<u>Dans un $\mathbb{K}$ev E</u> $L_{2,s}(E) = S_{2,s}(E) \oplus A_{2,s}(E)$
En dimension finie n, l'espace des formes hermitiennes $S_{2,s}(E)$ est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ (TODO vérifier)
En dimension finie n, l'espace des formes antihermitiennes $A_{2,s}(E)$ est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$
<u>Dans un $\mathbb{K}$ev E</u>, l'application $Q: L_{2,s}(E) \to F(E,\mathbb{K}): \varphi \mapsto \big(x \mapsto \varphi(x,x)\big)$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire de noyau $A_{2,s}(E)$
On note $\boldsymbol{Q_s(E)}$ son image.
On a $Q_s(E) = Q\left(S_{2,s}(E)\right) \subseteq F(E,\mathbb{R})$, donc $Q_s(E)$ est un <u>$\mathbb{R}$ev</u> même si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Q induit un $\mathbb{R}$-isomorphisme de $\frac{L_{2,s}(E)}{A_{2,s}(E)} \approx S_{2,s}(E)$ sur son image $Q_s(E)$. Donc $S_{2,s}(E) \approx Q_s(E)$.
Fixer $q \in Q_s(E)$ revient à fixer $\varphi \in S_{2,s}(E)$ donc revient à fixer un couple (q,φ) associés.
Si un E est de dim finie n alors l'espace de formes quadratiques $Q_s(E)$ est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$

Un **espace quadratique** est un espace muni de $\varphi \in S_{2,s}(E)$/ de $q \in Q_s(E)$. On note (E, q, φ)
Une **forme quadratique** sur un $\mathbb{K}$ev E, est un élément de $Q_s\ (E)$ càd un $q: x \mapsto \varphi(x, x)$
A chaque forme hermitienne correspond donc une unique forme quadratique.
Le noyau, la dégénérescence, l'orthogonalité, l'isotropie, le rang d'une forme quadratique se définissent comme celles de sa forme hermitienne associée. Attention le noyau d'une forme quadratique n'est pas l'ensemble des éléments pour lesquels elle s'annule, c'est le cône isotrope.
Soit (E, q, φ) un espace quadratique.
Dans une base fixée e d'un $\mathbb{K}$ev E de dimension finie, la **matrice représentative d'une forme quadratique** q est celle de sa forme hermitienne associée. $[q]^e = [\varphi]^e = A \in S_n(\mathbb{K})$
On a $q(x) = \varphi(x, x) = [x]^{T\,e}[q]^e[\overline{x}]^e = X^T A \overline{X} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \overline{x_j} \varphi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i \overline{x_j}$.
En dimension finie n, il y a isomorphisme entre l'espace des formes quadratiques, et l'espace des polynômes 2-homogenes a n indéterminées. L'isomorphisme dépend de la base choisie.
Souvent on aime regrouper sous la forme : $q(x) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}|x_i|^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2Re\left(a_{ij} x_i \overline{x_j}\right)$
q s'écrit sous la forme $q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2$ ssi sa matrice est diagonale $A = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on peut alors réécrire $q = \sum_{i=1}^n \lambda_i |e_i^*|^2$, et q est combinaison linéaire de module-carrés de formes linéaires indépendantes.
La **méthode de Gauss** est un algorithme pour décomposer n'importe quelle forme quadratique q en combinaison linéaires de module-carrés de formes linéaires indépendantes. L'idée est que si un $a_{ii} \neq 0$, par ex $a_{11} \neq 0$, on factorise tous les termes dépendant de x_1 sous forme canonique, ce qui reste ne dépend que de $(x_2, \dots x_n)$, ensuite, lorsque tous les $a_{ii} = 0$, s'il reste $a_{ij} \neq 0$ par ex $a_{12} \neq 0$, on factorise les termes en x_1, x_2 en produit $(x_1 + \cdots)(\overline{x_2} + \cdots)$ puis on utilise $\alpha\overline{\beta} = \frac{1}{4}(|\alpha + \beta|^2 - |\alpha - \beta|^2)$
Quelle que soit la décomposition (même obtenu sans la méthode de Gauss) en combinaison linéaire de module-carrés de formes linéaires indépendantes, le nombre de coefficients non nuls de cette somme est constant et vaut le rang de la forme quadratique q.
Théorème d'inertie de Sylvester. Toute forme quadratique q de rang r sur un $\mathbb{K}$ev E de dim finie n, admet un unique couple $(s, t) \in \{0, \dots, r\}, s + t = r$ tel que pour toute base q-orthogonale de E, la matrice de q dans cette base a exactement s coeffs > 0 et exactement t coeffs < 0.
Ce couple est appelle **signature de la forme quadratique** q.
La signature peut également s'interpréter comme les dimensions maximales des sous-espaces de E sur lesquels la restriction de q est définie positive (pour s) ou définie négative (pour t).
Dans un espace hermitien ou euclidien, la signature peut s'interpréter comme le nombre s de valeurs propres positives, muni du nombre t de valeurs propres négatives de l'endomorphisme auto-adjoint associé à la forme quadratique.

II. Formes hermitiennes

II.1. Identités dans un espace quadratique. Soit (E, q, φ) un $\mathbb{K}$ espace quadratique.
Attention à la convention choisie pour le côté semilinéaire de φ on a les identités suivantes :
Polarisation complexe droite 1. $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\Big(q(x + y) - q(x) - q(y) + i\big(q(x + iy) - q(x) - q(y)\big)\Big)$
Polarisation complexe droite 2. $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\Big(q(x) + q(y) - q(x - y) + i\big(q(x) + q(y) - q(x - iy)\big)\Big)$
Polarisation complexe droite 3. $\varphi(x, y) = \frac{q(x+y)-q(x-y)}{4} + i\,\frac{q(x+iy)-q(x-iy)}{4} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^3 i^k q\left(x + i^k y\right)$
Polarisation réelle ($\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$) 1. $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\big(q(x + y) - q(x) - q(y)\big)$
Polarisation réelle ($\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$) 2. $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\big(q(x) + q(y) - q(x - y)\big)$
Polarisation réelle ($\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$) 3. $\varphi(x, y) = \frac{q(x+y)-q(x-y)}{4}$
La partie réelle d'une identité de polarisation complexe, donne la polarisation réelle correspondante.

Pour la convention droite $Im\big(\varphi(x,y)\big) = Re\big(\varphi(x,iy)\big)$, pour la gauche $Im\big(\varphi(x,y)\big) = Re\big(\varphi(ix,y)\big)$.
Homogénéité. $\forall x \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{K}\ \ q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x)$, en particulier $\forall x \in E\ \ q(ix) = q(x)$
Ces 3 derniers faits montrent comment retrouver la forme polaire complexe à partir de la forme réelle.
L'homogénéité montre que $\varphi(x,x)$ ne change pas de signe lorsque l'on multiplie x par une constante.
Cela motive la définition sesquilinéaire, en ce qu'elle permet de définir un produit scalaire sur un $\mathbb{C}$ev E.
Pythagore. $\varphi(x,y) = 0 \Rightarrow q(x+y) = q(x) + q(y)$. La réciproque est vraie si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
La réciproque est fausse en général si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
Identité du parallélogramme : $\forall x,y \in E\ \ q(x+y) + q(x-y) = 2\big(q(x) + q(y)\big)$
En géométrie euclidienne, cela traduit que pour un parallélogramme, la somme des carrés des cotés = somme des carrés des diagonales. Cette formule est vraie dans le cas complexe. (Re (pol1 – pol2)=0)
Identité de la médiane simple: $q(x) + q(y) = \frac{1}{2} q(x-y) + 2q\left(\frac{x+y}{2}\right)$
Identité de la médiane positionnelle: $q(x-y) + q(x-z) = \frac{1}{2} q(z-y) + 2q\left(x - \frac{y+z}{2}\right)$
Une application $q: E \to \mathbb{R}$ sur un $\mathbb{R}$ev E est une forme quadratique réelle sur E ssi
1. $\varphi: E \times E \to K: (x,y) \mapsto \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big)$ sa forme polaire est bilinéaire symétrique
2. $\forall x \in E\ \ q(2x) = 4q(x)$
L'application $f \mapsto \int_0^1 f'(x)^2 dx$ est une forme quadratique sur $C^1([0,1],\mathbb{R})$
II.2. Produit scalaire complexe.
Un $\mathbb{K}$ espace quadratique (E,q,φ) de dimension finie, admet une base φ-ortho<u>gonale</u>.
φ n'induit pas forcement de norme, on ne peut pas tjrs normaliser la base si $\mathbb{K}$ non algébriquement clos.
Un **produit scalaire complexe** sur un $\mathbb{K}$ev E, est une forme hermitienne définie positive sur E.
Un **semi produit scalaire complexe** sur un $\mathbb{K}$ev E, est une forme hermitienne positive sur E.
Si $\varphi = (.|.)$ est un produit scalaire complexe sur un $\mathbb{K}$ev E, φ induit la norme $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ sur E
Si φ est un semi-produit scalaire complexe sur un $\mathbb{K}$ev E, φ induit la semi-norme $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ sur E
Une **norme sur un $\mathbb{K}$ev E dérive d'un produit scalaire** ssi c'est la norme induite par lui.
Pour $\varphi = (x|y)$ un semi-produit scalaire, la forme quadratique associée est donc $q(x) = \|x\|^2 = (x|x)$
Fréchet-Von Neumann-Jordan réel. Une norme $\|\ \ \|$ sur un $\mathbb{R}$ev dérive d'un produit scalaire ssi $\|\ \ \|^2$ vérifie l'identité du parallélogramme.
Fréchet-Von Neumann-Jordan complexe. Une norme $\|\ \ \|$ sur un $\mathbb{C}$ev dérive d'un produit scalaire hermitien ssi $\|\ \ \|^2$ vérifie l'identité du parallélogramme.
Une norme $\|\ \ \|$ sur un $\mathbb{K}$ev vérifie l'identité du parallélogramme ssi elle vérifie l'identité de la médiane.
Un $\mathbb{K}$ev E muni d'un produit scalaire, ou d'un semi-produit scalaire est en particulier un espace quadratique.
Un **espace préhilbertien**, est un $\mathbb{K}$ev E, muni d'un produit scalaire. (**réel** si $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$)
Un **espace hermitien**, est un espace préhilbertien <u>de dimension finie</u>. (**Euclidien** si $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$)
Un **espace de Hilbert**, est un $\mathbb{K}$ev E, muni d'un produit scalaire, complet pour la norme induite par le produit scalaire. (**réel** si $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$).
On a donc $\mathbb{K}$ev ⊃ espace quadratique ⊃ préhilbertien ⊃ Hilbert ⊃ hermitien/euclidien.
Inégalité de Cauchy Schwartz. Pour un semi-produit scalaire (forme hermitienne positive) sur un $\mathbb{K}$ev E, alors on a $|(x|y)|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$ ou encore $|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$
Il y a égalité ssi $\exists \alpha,\beta \in \mathbb{K}$ non tous deux nuls tels que $\|\alpha x + \beta y\|^2 = 0$
Dans le cas <u>définie</u> positive, càd $(.|.)$ est un produit scalaire, il y a égalité dans l'ICS ssi (x,y) est une famille liée de E càd ssi $\exists \alpha,\beta \in \mathbb{K}, (\alpha,\beta) \neq (0,0), \alpha x = \beta y$. Dans le cas non définie, (x,y) liée suffisant mais pas nécessaire.
Gram-Schmidt. Tout espace hermitien admet des bases ortho<u>normales</u>
Plus généralement, pour une famille libre $(e_1,\dots,e_n)$ d'un préhilbertien, il existe une unique famille

$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ orthonormale telle que $\forall k \; vect(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = vect(e_1, \dots, e_k)$ et $(e_k|\varepsilon_k) > 0$.
Représentation de Riesz hermitien. Toute forme linéaire $f \in E^\star$ sur un espace hermitien, correspond à un unique vecteur $a_f \in E$ et $\forall x \in E \;\; f(x) = (x|a)$.
En d'autre termes l'application $E \to E^\star: a \mapsto (.|a)$ semilinéaire injective, isométrique, est même bijective.
Riesz est encore vrai dans un Hilbert de dimension quelconque, respectivement au dual topologique E'.
L'isomorphisme ainsi construit ne dépend pas de la base, mais dépend du produit scalaire choisi.
Dans un espace hermitien l'adjoint existe $\forall u \in L(E) \exists! \, u^* \in L(E) \; \forall x, y \in E \;\; (u(x)|y) = \big(x\big|u^*(y)\big)$
Les propriétés de l'adjoint sont valables dans un espace hermitien.
L'application $L(E) \to L(E): u \mapsto u^*$ est une involution semilinéaire.
Pour un sous-espace H d'un espace hermitien, H est stable par $u \in L(E)$ ssi $H^\perp$ est stable par u^*
Pour un espace E hermitien $L(E) = S(E) \oplus A(E)$
On peut munir $L(E)$ du produit scalaire $(u|v) = tr(u^* v)$ donc $L(E)$ est aussi euclidien, de plus pour ce produit scalaire, on a $L(E) = S(E) \perp A(E)$

II.3. Endomorphismes particuliers

II.3.1. Endomorphismes auto-adjoints

Dans un espace hermitien, un endomorphisme u est hermitien ssi $\forall x \in E \; (u(x)|x) \in \mathbb{R}$
Dans un espace hermitien, les valeurs propres d'un endomorphisme hermitien sont réelles. $Sp(u) \subseteq \mathbb{R}$
Dans un espace hermitien, les sous-espaces propres d'un endomorphisme hermitien sont deux à deux orthogonaux. $\forall \lambda, \mu \in Sp(u), \lambda \neq \mu \Rightarrow E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$
Tout endomorphisme d'un espace hermitien possède au moins un vecteur propre non nul. (par D'Alembert Gauss)
Dans un espace hermitien, un $\mathbb{K}$sev stable par un endomorphisme hermitien u, a son orthogonal aussi stable par u.
Théorème spectral réel. Tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres, càd est diagonalisable dans une base orthonormale de E.
Toute matrice symétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.
$\forall A \in S_n(\mathbb{R}) \; \exists P \in O_n(\mathbb{R}) \; \exists D \in D_n(\mathbb{R}) \; A = PDP^{-1} = PDP^T$
Le polynôme caractéristique d'une matrice symétrique réelle est scindé sur R.
Théorème spectral complexe. Tout endomorphisme hermitien d'un espace hermitien admet une base orthonormale de vecteurs propres, càd est diagonalisable dans une base orthonormale.
Toute matrice hermitienne est unitairement semblable à une matrice diagonale.
$\forall A \in S_n(\mathbb{C}) \; \exists P \in U_n(\mathbb{C}) \; \exists D \in D_n(\mathbb{C}) \; A = PDP^{-1} = PD\overline{P}^T$
Toute matrice antisymétrique réelle est diagonalisable dans $M_n(C)$ et ses valeurs propres sont toutes imaginaires pures.
Orthogonalisation simultanée de deux formes quadratiques.
Soit q' une autre forme quadratique sur un $\mathbb{K}$ev déjà euclidien pour une première forme quadratique q.
Alors il existe une base de E à la fois q-orthonormale et q'-orthogonale.
$\begin{cases} A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ B \in S_n(\mathbb{R}) \end{cases} \Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) \; \exists D \in D_n(\mathbb{R}) \; \begin{cases} A = P^T P \\ B = P^T D P \end{cases}$
Soit q' une autre forme quadratique sur un $\mathbb{K}$ev déjà hermitien pour une première forme quadratique q.
Alors il existe une base de E à la fois q-orthonormale et q'-orthogonale.
$\begin{cases} A \in S_n^{++}(\mathbb{C}) \\ B \in S_n(\mathbb{C}) \end{cases} \Rightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{C}) \; \exists D \in D_n(\mathbb{C}) \; \begin{cases} A = P^T P \\ B = P^T D P \end{cases}$ (TODO vérifier la forme matricielle)
Endomorphisme auto-adjoint associé dans un espace hermitien. Dans un espace hermitien $(E, (|))$
L'application $f: L(E) \to F(E, K): u \mapsto \big(\boldsymbol{q_u}: x \mapsto (u(x)|x)\big)$ est linéaire de noyau $A(E)$ d'image $Q(E)$, donc induit un isomorphisme de $S(E) \to Q(E)$

Autrement dit $S(E), Q(E), S_2(E)$ sont isomorphes, fixer un élément revient à fixer un triplet (φ, q, u) d'associés. On peut choisir l'un des 3 points de vue, et définir les notions abusivement sur les 3 points de vue, par exemple la signature de φ ou u est celle de q associé.
Dans une b.o.n. B de E, $[\varphi]^B = [q]^B = [u]^B$. Si B diagonalise u, alors $\lambda_i = q(e_i) = (u(e_i)|e_i) = \varphi(e_i, e_i)$
Dans un espace euclidien, la signature peut s'interpréter comme le nombre s de valeurs propres positives, muni du nombre t de valeurs propres négatives de l'endomorphisme auto-adjoint associé.
$q/\varphi/u$ non dégénérée $\Leftrightarrow$ $s + t = n$
$q/\varphi/u$ positive $\Leftrightarrow t = 0$
$q/\varphi/u$ négative $\Leftrightarrow s = 0$
$q/\varphi/u$ définie positive $\Leftrightarrow t = 0$ et $s = n$
$q/\varphi/u$ définie négative $\Leftrightarrow s = 0$ et $t = n$
Toute matrice symétrique réelle (étant la matrice d'une forme quadratique) est congruente à une matrice diagonale n'ayant que des 0, 1 ou -1 sur la diagonale.

II.3.2. Automorphismes unitaires

Soit (E, q, φ) un espace quadratique.
Un automorphisme $u \in GL(E)$ est unitaire ssi c'est une isométrie ssi il conserve la forme quadratique $\forall x \in E\ q\big(u(x)\big) = q(x)$, ssi il conserve la forme bilinéaire $\forall x, y \in E\ \varphi\big(u(x), u(y)\big) = \varphi(x, y)$ ssi il admet son inverse comme adjoint ssi il admet un adjoint et $uu^* = u^*u = id_E$
L'ensemble des automorphismes unitaires $(U(E, q),\circ)$ est un sous-groupe de $(GL(E),\circ)$
det: $(U(E, q),\circ) \to (U_{\mathbb{K}},\times)$ est un morphisme de groupes. $SU(E, q) = \ker det$
det: $(O(E, q),\circ) \to (\{-1,1\},\times)$ est un morphisme de groupes. $SO(E, q) = \ker det$
Le spectre d'un automorphisme unitaire est dans U. $Sp_{\mathbb{K}}(u) \subseteq U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
Dans un espace quadratique de dimension finie n, un automorphisme $u \in GL(E)$ est unitaire ssi dans une/toute base de E, $A = M^T A \overline{M}$ avec $A = [q]^e$ et $M = [u]^e$
Dans un espace hermitien E dimension finie n, un automorphisme $u \in GL(E)$ est unitaire ssi dans une/toute base orthonormale de E $M^T \overline{M} = I_n$ càd ssi $M \in U_n(\mathbb{K})$ (avec $M = [u]^e$)
Un automorphisme est unitaire ssi l'image de toute base orthonormale de E est une base orthonormale de E.
Soit e une base orthonormale, et e' une base de E. Alors e' orthonormale ssi $P^T P = I_n$ $(P = P_{e \to e'})$
Une base de départ étant fixée orthonormale, une base d'arrivée est orthonormale ssi la matrice de passage est une matrice unitaire.
Une matrice de passage entre bases orthonormales est donc unitaire et réciproquement.
Une matrice est unitaire ssi ses vecteurs colonnes forment une famille libre et pour chacun d'eux, la somme des carrés des modules des coefficients vaut 1.
Dans $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$, une matrice est orthogonale ssi ses vecteurs colonnes forment une famille libre et pour chacun d'eux, la somme des carrés des coefficients vaut 1.
Les sous-espaces propres d'un automorphisme unitaire sont 2 à 2 orthogonaux. $\lambda \neq \mu \Rightarrow E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$
Dans un espace hermitien, un $\mathbb{K}$sev stable par un automorphisme unitaire u, a son orthogonal aussi stable par u, il y a même invariance $u(F) = F, u(F^\perp) = F^\perp$, et les endomorphismes induits dessus sont aussi unitaires $u_F \in U(F, q), u_{F^\perp} \in U(F^\perp, q)$
Théorème spectral unitaire. Tout automorphisme unitaire d'un espace hermitien est diagonalisable dans une base orthonormale.
Toute matrice unitaire est unitairement semblable à une matrice diagonale.
$\forall A \in U_n(\mathbb{C})\ \exists P \in U_n(\mathbb{C})\ \exists D \in D_n(\mathbb{C})\ A = PDP^{-1} = PD\overline{P}^T$

$\forall A \in O_n(\mathbb{C})\ \exists P \in U_n(\mathbb{C})\ \exists(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n\ A = P\begin{bmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{bmatrix}\overline{P}^T$

Dans $M_n(\mathbb{C})$, $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ est unitairement semblable à $\begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$

II.3.3. Endomorphismes normaux [Gourdon]

Dans un espace quadratique, un sous-espace stable par un endomorphisme u admettant un adjoint, a son orthogonal stable par l'adjoint u^*.

Un endomorphisme d'un espace quadratique est dit **normal** ssi il admet un adjoint et commute avec.

Un endomorphisme normal induit sur un sous-espace stable est encore normal.

Pour un sous-espace propre d'un endomorphisme normal u, alors l'orthogonal est encore stable par u.

Un endomorphisme normal d'un espace euclidien de dimension 2, sans valeur propre réelle, s'écrit dans une base orthonormale $[u]^B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ avec $b \neq 0$

Théorème spectral normal. Pour un endomorphisme normal dans un espace <u>euclidien</u>, il existe une base orthogonale B telle que $[u]^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{bmatrix}$ avec $\begin{cases} \forall i\ \lambda_i \in \mathbb{R} \\ \forall j\ \tau_j = \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \end{cases}$

La fonction $exp: A_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective. $A_n(\mathbb{R})$ est l'algèbre de Lie associée a $SO_n(\mathbb{R})$

II.4. Classification des formes quadratiques

Deux formes quadratiques sur un Kev E sont **équivalentes** si $\exists u \in GL(E)\ \ q = q' \circ u$.

Autrement dit, elles sont équivalentes ssi $\exists u \in GL(E)\ \forall x, y \in E\ \varphi(x, y) = \varphi'\big(u(x), u(y)\big)$

Cette def induit une relation d'equivalence sur l'ensemble des formes quadratiques $Q(E)$. (et sur $S_2(E)$)

En dimension finie, deux formes quadratiques sont équivalentes ssi leurs matrices sont congruentes.

Deux matrices $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sont congruentes ssi $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})\ \ A = P^T B \overline{P}$

Comme dans le cas réel pour la classification des formes quadratiques, deux formes quadratiques hermitiennes sur un même Cev E, sont équivalentes ssi elles partagent la même signature.

Dans un Kev de dim finie n avec K algébriquement clos (ex :C) alors il existe $n + 1$ classes d'équivalence décrites par les $n + 1$ matrices carrées $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ avec $r \in \{0, \dots, n\}$

Dans un Kev de dim finie n ou K est algébriquement clos, une forme quadratique admet une base orthonormale ssi elle est non-dégénérée et dans ce cas l'indice de la forme vaut $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

Dans un <u>Rev</u> de dim finie n, il existe $\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \binom{n+2}{2}$ classes d'équivalence décrites par les matrices $A_{s,t} = \begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & I_{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ avec $s + t = r \in \{0, \dots, n\}$. Dans ce cas la signature de la classe $A_{s,t}$ est (s, t).

Dans un Rev de dim finie n, il y a $n + 1$ classes d'équivalence pour les formes <u>non-dégénérées</u>. $(r = n)$

Dans un Rev de dim finie n, une forme quadratique admet une base orthonormale ssi elle est définie positive.

Dans un Rev de dim finie n, une forme quadratique <u>non-dégénérée</u> de signature (s, t) a pour indice $\min(s, t)$

On se place dans un corps fini F_q de caractéristique $\neq 2$

Dans un corps fini F_q le produit de non-carrés est un carré.

Dans un corps fini F_q si $\alpha, \beta \in F_q, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$, l'equation $\alpha x^2 + \beta y^2 = 1$ admet au - 1 sol. $(x, y) \in F_q$

Dans un F_q-ev de dim finie n avec F_q corps fini, il existe $2n+1$ classes d'équivalences pour les formes quadratiques décrites par les matrices $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$ et $B_r = \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha \in F_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix}$
avec α un non-carré de F_q.
Dans un F_q ev de dim finie n avec F_q corps fini, il existe 2 classes d'équivalences pour les formes quadratiques <u>non-dégénérées</u>.
Normes matricielles.
Dans un espace Hilbert $\forall x \in H\ \|x\| = \max_{\|y\|=1}|\langle x,y\rangle|$
Dans un espace Hilbert $\forall u \in L(H)\ \forall x \in H\ \|u(x)\| = \max_{\|y\|=1}|\langle u(x),y\rangle|$
Dans un espace Hilbert $\forall u \in L(H)\ \ \|u\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1}|\langle u(x),y\rangle| \in [0,\infty]$
Dans un espace hermitien $\forall u \in L(H)\ \ \|u\| = \max_{\|x\|=\|y\|=1}|\langle u(x),y\rangle|$
Dans un espace Hilbert $\forall u \in L_c(H)\ \ \|u\| = \|u^*\|$
Dans un espace Hilbert $\forall u \in L_c(H)\ \ \|u^* \circ u\| = \|u\|^2$
Dans un espace Hilbert $\forall u \in S(H)\ \ \|u\| = \sup_{\|x\|=1}|\langle u(x),x\rangle| = \sup_{\lambda \in Sp(u)}|\lambda| = \rho(u) \in \mathbb{R}$
Dans un espace hermitien $\forall u \in S(H)\ \ \|u\| = \max_{\|x\|=1}|\langle u(x),x\rangle| = \max_{\lambda \in Sp(u)}|\lambda|$
Dans un espace hermitien $\forall u \in L(H)\ \ \|u\| = \max_{\lambda \in Sp_K(u^* \circ u)} \sqrt{\lambda}$ car $u^* \circ u \in S^+(H)$
Compléments.
Un opérateur borné u d'un Hilbert est dit **positif $\boldsymbol{T \geq 0}$** ssi $u^* = u$ et $\forall x \in H\ \langle u(x),x\rangle \in R_+$
On note $\boldsymbol{S \geq T}$ pour dire $S - T \geq 0$
Une puissance naturelle d'un opérateur borné positif est un opérateur borné positif $T \geq 0 \Rightarrow T^n \geq 0$
Pour un opérateur borné auto adjoint d'un Hilbert, on a. $\|T\| \leq M \Leftrightarrow -MId \leq T \leq MId$
Attention si $K = \mathbb{C}$, $\forall x \in H\ \langle u(x),x\rangle \in R_+$ entraine $u^* = u$, mais pas vrai si $K = \mathbb{R}$.
Pour tout opérateur borné T, alors T^*T est un opérateur borné auto-adjoint positif.
Racine carrée d'un opérateur positif*. Pour tout operateur borné T positif $T \geq 0$, il existe un unique operateur borné positif $S \geq 0$ tel que $S^2 = T$. On note $S = \boldsymbol{\sqrt{T} = T^{\frac{1}{2}}}$. De plus l'operateur racine carrée commute avec tout operateur borné qui commute avec T.
En dimension finie se montre facilement en codiagonalisant S et T.
La composée de deux operateurs bornés positifs qui commutent est un opérateur positif.
On appelle **module d'un opérateur borné**, l'opérateur positif $\boldsymbol{|T|} = \sqrt{T^*T}$
Le module d'un opérateur borné est homogène $|\alpha T| = |\alpha||T| \quad \forall \alpha \in C$
En général les propriétés $|TS| = |T||S|$ et $|T^*| = |T|$ sont fausses. L'inégalité triangulaire est fausse.
$L_c(H) \to L_c(H)$: $T \mapsto |T|$ est continue pour la topologie uniforme des opérateurs.
$\forall T \in L_c(H)\ \ \forall u \in H\ \ \|Tu\| = \||T|u\|$
La norme d'opérateur d'un opérateur borné et de son module sont égales $\|T\| = \||T|\|$
Le noyau d'un opérateur borné = celui de son module. $KerT = Ker\ |T|$
Un opérateur borné sur un Hilbert est une **isométrie** ssi il conserve les normes.
Décomposition polaire. Pour tout operateur borné f sur un Hilbert, il existe $u \in U(H)$ telle que $f = u|f|$. U est unique si on rajoute la condition $Ker(u) = Ker(f)$. De plus on a $Im(u) = Im(f)$
Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $O_n(K) \times S_n^+(K) \to M_n(K)$: $(O,S) \mapsto OS$ est surjective mais pas injective.
Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $O_n(K) \times S_n^{++}(K) \to GL_n(K)$: $(O,S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme et même difféo.
Résultats identique en changeant l'ordre OS en SO.
$S_n^{++}(K)$ est convexe.
Décomposition de Schur.

Complément 1. Théorème de Witt.
Complément 2. Formes antisymétriques – Matrices symplectiques