**Rappels.**

$\boldsymbol{supp(f)} = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}^{\Omega}$ où $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ continue, $\Omega$ ouvert.

$\boldsymbol{supp_{ess}(f)} = \Omega \setminus \{\omega \in \Omega \mid \exists V \in V_\omega\ f_{|V} = 0\ p.p.\}$ où $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ mesurable, $\Omega$ ouvert.

$\boldsymbol{F(U,F)}$ est l'ensemble des fonctions d'un ouvert $U$ d'un Revn $E$, vers un Revn $F$.

$\boldsymbol{B(U,F)}$ est l'ensemble des fonctions bornées d'un ouvert $U$ d'un Revn $E$, vers un Revn $F$.

Pour $k \in [\![0,\infty]\!]$, $\boldsymbol{C^k(U,F)}$ est l'espace des fonctions $C^k$ d'un ouvert $U$ d'un Revn $E$, vers un Revn $F$.

Pour $k \in [\![0,\infty]\!]$, $\boldsymbol{C_K^k} \subset \boldsymbol{C^k}$ est l'espace des fonctions $f \in C^k$ a support un compact (de $R^d$) fixé $K \subseteq U$,

Pour $k \in [\![0,\infty]\!]$, $\boldsymbol{C_c^k} \subset \boldsymbol{C^k}$ est l'espace des fonctions $f \in C^k$ a support un compact (de $R^d$) $\subseteq U$

Pour $k \in [\![0,\infty]\!]$, $\boldsymbol{C_c^k} = \bigcup_{K \text{ compact} \subset \Omega} C_K^k = \bigcup_{n \geq 0} C_{K_n}^k$

Pour $k \in [\![0,\infty]\!]$, $\boldsymbol{C_{\to 0}^k}$ est l'ensemble des $f \in C^k$ telles que $f(u) \to_{|u|\to\infty} 0$

$\mathbf{C_0}(\mathbb{Z})$ est l'ensemble des $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ telles que $u_n \to_{|n|\to\infty} 0$

$\boldsymbol{L^p}(\Omega, F) = \left\{f: \Omega \subseteq E \to F \mid f \text{ mesurable et } \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L^p}} = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}$ où $p \in [1,\infty[$

On note $\mathbf{L^0}$ l'ensemble des fonctions mesurables.

On note $\mathbf{L_c^0}$ l'ensemble des fonctions mesurables à support essentiel compact.

Par exemple $C_c^\infty = C^\infty \cap \mathcal{L}_c^0$

$C_c^k \subseteq L^p$ ($C_c^k \to L^p : f \mapsto [f]$ injective) mais attention $C^k$ n'est pas inclus dans $L^p$ en général.

$\mathbf{L}_{\boldsymbol{loc}}$ est l'espace des fonctions mesurables localement intégrables (sur tout compact $K \subseteq U$)

$\|\boldsymbol{f}\|_\infty = \inf\left\{m \in \overline{R} \,\middle|\, \{f > m\}\ \lambda\text{-negligeable}\right\} = \inf_{N \subseteq R, \lambda(N)=0} \|f\|_{u,R\setminus N}$. On a toujours $\|f\|_\infty \leq \|f\|_u$

$\boldsymbol{L^\infty}$ est l'ensemble des fonctions mesurables essentiellement bornées $\|f\|_\infty < \infty$ (quotienté par le noyau de la semi-norme $\infty$).

Dans le cas de la mesure de comptage sur l'espace discret de tribu P(X), on note $\mathbf{l^p}(\boldsymbol{X})$

Par exemple $\boldsymbol{l}^\infty(\mathbb{Z}) = \{(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \text{ bornée}\}$.

**Normes et distances.**

Lemme. Tout ouvert $\mathrm{U} \subseteq R^d$ admet une suite de compacts $(K_n)_{n\in N}$ telle que $K_n \subset Int(K_{n+1})$ et $\mathrm{U} = \bigcup_{n\geq 0} K_n = \bigcup_{n \geq 1} Int(K_n)$ telle que tout compact $K \subset \mathrm{U}$ est inclus dans un $K_{n_0}$. Pour $k \in N$,

$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C^k,p,K}} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{u,\mathrm{K}}\ (p=1), \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{u,\mathrm{K}}^p\right)^{\frac{1}{p}}\ (p \in [1,\infty)), \max_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{u,\mathrm{K}}\ (p=\infty)$

$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C^k,p}} = \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C^k,p,U}}$ , $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C^k}} = \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C^k,1}}$

Pour $k \in N$, $\|\ \ \|_{C^k,p}$ est une norme sur $C^k$ et même sur $C^l$ pour $l \in [\![k,\infty]\!]$

Pour $k \in N$, $\|\ \ \|_{C^k,p,K}$ est une norme sur $C_K^k$ et même sur $C_K^l$ pour $l \in [\![k,\infty]\!]$

$\boldsymbol{d_{C^\infty,p,K}(f,g)} = \sum_{n\in N} 2^{-n} \frac{\|g-f\|_{C^n,p,K}}{1+\|g-f\|_{C^n,p,K}}$

$\boldsymbol{d_{C^\infty,p}(f,g)} = \sum_{n\in N} 2^{-n} \frac{\|g-f\|_{C^n,p,K_n}}{1+\|g-f\|_{C^n,p,K_n}}$

**Propriétés de densité et complétude.**

Pour $k \in N$, $\left(C^k, \|f\|_{C^k,p}\right)$ est complet. Pour $k \in N$, $\left(C_K^k, \|f\|_{C^k,p,K}\right)$ est complet.

$C_c^k$ est dense dans $\left(C^k, \|\ \ \|_{C^k}\right)$

$C_c^0$ est dense dans $(L^p, \|\ \ \|_{L^p})$, pour $p \in [1,\infty)$

En particulier $C_c^p \supset C_c^0$ est dense dans $(L^p, \|\ \ \|_{L^p})$ pour $p \in [1,\infty)$

La complétion de $(C_c^0, \|\ \ \|_{L^\infty})$ est l'espace $C^0_{\to 0}$
$(C^0_{\to 0}(R), \|\ \ \|_{L^\infty})$ est un sous-espace fermé complet de $(L^\infty(R), \|\ \ \|_{L^\infty})$.
En particulier $(\mathrm{C}_0(\mathbb{Z}), \|\ \ \|_{\mathrm{u}})$ est un sous-espace fermé complet de $(\mathrm{l}^\infty(\mathbb{Z}), \|\ \ \|_{\mathrm{u}})$.
$\left(C^\infty, d_{C^\infty,p}\right)$ est complet. $\left(C_K^\infty, d_{C^\infty,p}\right)$ est complet comme sev ferme de $\left(C^\infty, d_{C^\infty,p}\right)$.
$\left(C_c^\infty, d_{C^\infty,p}\right)$ n'est pas complet.
$C_c^\infty$ est dense dans $(L^p, \|\ \ \|_{L^p})$, pour $p \in [1, \infty)$
$C_c^\infty$ est dense dans $\left(L_c^p, \|\ \ \|_{L^p}\right)$, pour $p \in [1, \infty)$
$C_c^\infty$ est dense dans $\left(C^k, \|\ \ \|_{C^k}\right)$, pour $k \in N$
$C_c^\infty$ est dense dans $\left(C_c^k, \|\ \ \|_{C^k}\right)$, pour $k \in N$
Pour $p \in [1, \infty)$, $(L^p, \|\ \ \|_{L^p})$ est complet. $(L^\infty, \|\ \ \|_{L^\infty})$ est complet.
$L_c^p$ est dense dans $(L^p, \|\ \ \|_{L^p})$

**Analyse de Fourier.**
**Tore.** $\mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$
$\boldsymbol{C^k}(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f\ C^k \text{ et } 2\pi \text{ périodique}\}$ où $k \in [\![0, \infty]\!]$
$\left(C^k(\mathbb{T}), \|\ \ \|_\infty\right)$ est un Banach car sev fermé de $\left(C_b^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\ \ \|_\infty\right)\ \ \forall k \in [\![0, \infty]\!]$
$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L^p}(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \infty$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurable, et $p \in [1, \infty[$
$\boldsymbol{L^p}(\mathbb{T}) = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ mesurable}, 2\pi \text{ périodique, et } \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} < \infty\right\}$ où $p \in [1, \infty[$
$\boldsymbol{L^0}(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ mesurable}, 2\pi \text{ périodique}\}$
$\int_{\mathbb{T}} \boldsymbol{f} = \int_{-\pi}^{\pi} f$ où $f \in L^1(\mathbb{T})$.
$L^p(\mathbb{T}) \subseteq L^p(K, \mathbb{C})\ \ \forall K$ compact $\subseteq \mathbb{R}\ \ \ \forall p \geq 1$
$\int_{\mathbb{T}} f = \int_a^{a+2\pi} f\ \ \ \ \forall f \in L^1(\mathbb{T})\ \forall a \in \mathbb{R}$.
$C^\infty(T) \subset \cdots \subset C^{k+1}(T) \subset C^k(T) \subset \cdots \subset C^0(T) \subset \cdots \subset \cdots \subset L^q(T) \subset \cdots \subset L^p(T) \subset \cdots \subset L^1(T)$
Attention ce n'est pas du tout vrai dans $\mathbb{R}$. $L^1(\mathbb{R}) \nsubseteq L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}) \nsubseteq L^1(\mathbb{R})$, $C^0(\mathbb{R}) \nsubseteq L^1(\mathbb{R})$
**Périodisée.** $\exists !\, \tilde{\boldsymbol{f}} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ \forall k \in \mathbb{Z}\ \forall t \in ]-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]\ \tilde{f}(t) = f(t - 2k\pi)$ où $f : ]-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$
$\boldsymbol{e_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto e^{inx}$ où $n \in \mathbb{Z}$.
$e_n$ est $C^\infty$ et $L^1(\mathbb{T})$
**Un polynôme trigonométrique** est une application $\mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto P\left(e^{ix}\right)$ où $P \in \mathbb{R}[X]$ càd une application de la forme $\mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto \sum_{k=-N}^{N} a_k\, e^{ikx}$.
Pour un polynôme trigonométrique $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto \sum_{k=-N}^{N} a_k\, e^{ikx}$, on a $a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} P(t) e^{-ikt} dt\ \ \forall k$.
**Le $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}$ ième coefficient de Fourier de $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L^1}(\mathbb{T})$** est $\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt$.
$\boldsymbol{S_N}(\boldsymbol{f}) : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx}$ où $N \in \mathbb{N}$ et $f \in L^1(\mathbb{T})$
$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e_n$ est un polynôme trigonométrique $\forall N \in \mathbb{N}\ \forall f \in L^1(\mathbb{T})$
**La série de Fourier de $\boldsymbol{f}$** correspond à la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$ càd à la suite $\left(S_N(f)\right)_{N \in \mathbb{N}}$ où $f \in L^1(\mathbb{T})$
Question centrale : Quand est-ce que $f$ est limite de sa série de Fourier ?
$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L^1}(\mathbb{T})$ **est développable en série de Fourier** ssi sa série de Fourier converge simplement vers elle.
Un coefficient de Fourier d'une fonction $L^1(\mathbb{T})$ est toujours dans $l^\infty(\mathbb{Z})$, et même dans $\mathrm{C}_0(\mathbb{Z}) \subseteq l^\infty(\mathbb{Z})$.
$(C_0(\mathbb{Z}), \|\ \ \|_u)$ est un sous-espace fermé donc complet de $(l^\infty(\mathbb{Z}), \|\ \ \|_u)$

**Lemme de Lebesgue.** $\forall f \in L^1(\mathbb{T}) \quad \hat{f} \in C_0(\mathbb{Z})$
$L^1(\mathbb{T}) \to C_0(\mathbb{Z}): f \mapsto \hat{f}$ est linéaire continue car $\left\|\hat{f}\right\|_u \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$ mais n'est pas surjective.
**Convolution périodique.** Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{f * g(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)g(x-t)dt \quad$ où $f, g \in L^1(\mathbb{T})$
Le produit de convolution est une application continue, et bilinéaire.
$\left(L^1(\mathbb{T}), \| \quad \|_{L^1(\mathbb{T})}, \star\right)$ forme une algèbre de Banach.
La convolée $f \star g$ peut s'interpréter comme moyenner $f$, avec une pondération donnée par g.
La convolée d'une fonction $L^1$ par une $C^k$ est au moins $C^k$.
La convolée d'une fonction $L^1$ par une fonction $L^p$ est $L^p$.
Les espaces $L^p(\mathbb{T})$ $(p \in [1,\infty])$ et les $C^k(\mathbb{T}), (k \in N)$ sont des sous-algèbres de Banach de $L^1(\mathbb{T})$
$f * g \in L^1(\mathbb{T})$ et $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}\|g\|_{L^1(\mathbb{T})} \quad \forall f, g \in L^1(\mathbb{T})$
$\widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}\, \forall f, g \in L^1(\mathbb{T})$
$\left(L^1(\mathbb{T}), \| \quad \|_{L^1(\mathbb{T})}, \star\right) \to (C_0(\mathbb{Z}), \| \quad \|_u, .): f \mapsto \left(\hat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est un morphisme de $\mathbb{R}$ algèbres.
$e_n * f = \hat{f}(n)e_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}\ \forall f \in L^1(\mathbb{T})$.
$P * f = \sum_{k=-N}^{N} a_k\hat{f}(k)e_k \quad \forall N \in \mathbb{Z}\ \forall f \in L^1(\mathbb{T})$ et $\forall P = \sum_{k=-N}^{N} a_k e_k$ polynôme trigonométrique.
La convolée d'une fonction $L^1(\mathbb{T})$ par un polynome trigonometrique est un polynôme trigonométrique.
**Convolée et équations différentielles.** La convolée est un outil efficace pour résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients constants de la forme $P(D)y = f$, d'inconnue $y$ avec $P \in C[X]$ et $D$ operateur de dérivation, et $f$ périodique raisonnablement régulière. En général il y a une unique solution périodique de la forme $y = K \star f$ avec $K$ fonction périodique calculable par les données. L'existence de la convolution peut être établie par le th de Fubini. Une interprétation physique plus éclairante permet de construire la convolution, d'abord à partir des $C^0$ puis par approximation UC.
**Opérations coefficients de Fourier**
$\widehat{\alpha f + g} = \alpha\hat{f} + \hat{g} \ \forall \alpha \in \mathbb{C}\, \forall f, g \in L^1(\mathbb{T})$
$\widehat{\tau_\beta f}(n) = e^{-in\beta}\hat{f}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}\, \forall \beta \in \mathbb{R}$ où $\tau_\beta f : x \mapsto f(x-\beta)$ et $f \in L^1(\mathbb{T})$.
**Dérivation coefficients de Fourier**
$\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ et donc $\hat{f}(n) =_{|n|\to\infty} o\left(\frac{1}{|n|}\right)$ où $f \in C^1(\mathbb{T})$. (entraine tjs $f, f' \in L^1(\mathbb{T})$)
$\widehat{f^{(k)}}(n) = (in)^k\hat{f}(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}\, \forall k \geq 1$ donc $\hat{f}(n) =_{|n|\to\infty} o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ où $f \in C^{k-1}(\mathbb{T}) \cap C_m^k(\mathbb{T})$.
En particulier $\forall f \in C^k(T) \quad \hat{f}(n) =_{|n|\to\infty} o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$
Intuitivement, plus $f$ est régulière, plus $\hat{f}$ tend vite vers 0 à l'infini.
Cette propriété est centrale et explique l'intérêt et le succès des séries de Fourier, transformer une dérivée en une multiplication simplifie l'étude d'équations différentielles.
**Noyau de Dirichlet.** $\boldsymbol{D_N} = \sum_{k=-N}^{N} e_k \quad$ où $N \in \mathbb{N}$.
$D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq 0\ [2\pi]$.
$S_N(f) = D_N * f \qquad \forall N \in \mathbb{N}\, \forall f \in L^1(\mathbb{T})$
Les $(D_N)_N$ ne constituent pas une approximation de l'unité.
Une suite de fonctions $f_n$ de $L^1(\mathbb{T})$ est une **approximation de l'unité périodique** si
1. La suite des normes $L^1(\mathbb{T})$ des fonctions est bornée. $\sup_{n\in N}\|f_n\|_{L^1(\mathbb{T})} < \infty$

2. Chaque fonction est $L^1(\mathbb{T})$ d'intégrale normalisée 1. $\forall n \in N\ \ f_n \star 1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)dt = 1$

3. $\forall \delta \in ]0,\pi[\ \ \int_{T\setminus\overline{[-\delta,\delta]}} |f_n(t)| d\mu_T(t) \to_{n\to\infty} 0$

$\boldsymbol{\sigma_N(f)} = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f)$ où $N \in \mathbb{N}$ et $f \in L^1(\mathbb{T})$ $\quad \boldsymbol{K_N} = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n$ où $N \in \mathbb{N}$.

$\sigma_N(f) = K_N * f \quad \forall N \in \mathbb{N}\ \ \forall f \in L^1(\mathbb{T})$

$K_N = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$ et $\sigma_N(f) = \sum_{n=-N}^{N}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right)\hat{f}(n) e_n \quad \forall N \in \mathbb{N}\ \ \forall f \in L^1(\mathbb{T})$.

**Théorème de Fejér.** $(K_N)_{N\geq 0}$ est une approximation de l'unité périodique.

$(K_N)_{N\geq 0}$ est à valeurs réelles positives.

**Corollaires de Fejér.** (désigné parfois comme le théorème de Fejér).

$\sigma_N(f) = K_N * f \to_{N\to\infty}^{\|\ \|_u} f \quad \forall f \in C^0(\mathbb{T})$

$\sigma_N(f) = K_N * f \to_{N\to\infty}^{\|\ \|_{L^p(\mathbb{T})}} f \quad \forall f \in L^p(\mathbb{T})$

$\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p \quad \forall N \in \mathbb{N}\ \forall f \in L^p(\mathbb{T})\ \forall p \in [1,\infty]$.

**Conséquences.**

$\widehat{\ }$ est injective car $\forall f \in L^1(\mathbb{T})\ \ \hat{f} = 0 \Rightarrow \forall N\ \sigma_N(f) = 0 \Rightarrow\ \ f = 0$ presque partout.

**Weierstrass trigonométrique.** L'ensemble $Vect_{n\in\mathbb{Z}}(e_n)$ des polynômes trigo est dense dans $(C^0(\mathbb{T}), \|\ \ \|_\infty)$ et dans $\left(L^p(\mathbb{T}), \|\ \ \|_{L^p(\mathbb{T})}\right)$ où $p \geq 1$. (car $\sigma_N(f)$ est un polynôme trigo $\forall N$).

**Cesàro.** $\forall (u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad u_n \to l \in \mathbb{C} \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \to_{n\to\infty} l$

$\forall f \in C^0(\mathbb{T})$, Si $\left(S_N(f)\right)_{N\geq 0}$ converge dans $C^0(\mathbb{T})$, elle a même limite que $\sigma_N(f)$ càd $S_N(f) \to_{N\to\infty}^{\|\ \|_\infty} f$

$\forall f \in L^p(\mathbb{T})$, Si $\left(S_N(f)\right)_{N\geq 0}$ converge dans $L^p(\mathbb{T})$ , elle a même limite que $\sigma_N(f)$ càd $S_N(f) \to_{N\to\infty}^{\|\ \|_{L^p}} f$

**Convergence ponctuelle.**

$\sigma_N(f)(x_0) \to_{N\to\infty} \frac{1}{2}\left(f(x_0^+) + f(x_0^-)\right) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}\ \ \forall f \in C_m^0(\mathbb{T})$

**Test de Dini.** $\forall f \in C_m^0(\mathbb{T})\ \forall x_0 \in \mathbb{R}\ \forall s \in \mathbb{C}\ \ t \mapsto \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2s}{t}$ intégrable sur $]0,\pi]$ alors $S_N(f)(x_0) \to_{N\to\infty} s$.

Si $f: \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ est lipschitzienne, alors $f$ est d.s.f. (à vérifier)

**Dirichlet.** $\forall f \in C_m^1(\mathbb{T})\ \ S_N(f)(x_0) \to_{N\to\infty} \frac{1}{2}\left(f(x_0^+) + f(x_0^-)\right) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$\forall f \in C_m^1(\mathbb{T})\ \ S_N(f)(x_0) \to_{N\to\infty} f(x_0) \quad \forall x_0$ tel que $f$ est continue en $x_0$.

$\forall f \in C^0(\mathbb{T}) \cap C_m^1(\mathbb{T})\ \ f$ est d.s.f.

On peut généraliser Dirichlet en supposant seulement $f \in L_{loc}^1(\mathbb{T})$ et $x_0$ tel que $f(x_0^+)$ existe, $f(x_0^-)$ existe et $\exists \alpha > 0\ \ \int_0^\alpha \frac{|f(x_0+t) - f(x_0^+)|}{t} dt < \infty$ et $\int_0^\alpha \frac{|f(x_0-t) - f(x_0^+)|}{t} dt < \infty$.

**Carleson 1966, Hunt 1968 (difficile).** P.p.t. $x \in \mathbb{R}\ \ S_N(f)(x) \to_{N\to\infty} f(x) \quad \forall f \in L^p(\mathbb{T}), p \in ]1,\infty[$

**Kolmogorov 1926.** $\exists f \in L^1(\mathbb{T})\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ S_N(f)(x)$ diverge quand $N \to \infty$.

**Convergence normale.** (CVN entraine toujours CVU qui entraine toujours CS (d.s.f.))

$\hat{f} \in l^1(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\hat{f}(n) e_n\|_u < \infty \Leftrightarrow$ La s.d.f. de $f\ \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e_n$ CVN sur $\mathbb{T}$

Si $f \in C^2(\mathbb{T})$ alors $\hat{f} \in l^1(\mathbb{Z})$. Car $\hat{f}(n) =_{|n|\to\infty} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Si $f \in C^0(\mathbb{T}) \cap C_m^1(\mathbb{T})$ alors $\hat{f} \in l^1(\mathbb{Z})$. Car $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| \leq |\hat{f}(0)| + \sqrt{\sum_{|n|\geq 1} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{|n|\geq 1} |\widehat{f'}(n)|}$ (ICS car

$\widehat{f'} \in l^2$ car $f' \in L^2$ (voir cadre $L^2$) )
$\forall f \in C^0(\mathbb{T})$ telle que $\hat{f} \in l^1(\mathbb{Z})$ la s.d.f. de $f$ CVN donc CVU vers $f$. $S_N(f) \to_{N\to\infty}^{\|\ \|_u} f$.
**Version prépa.** $\forall f \in C^0(\mathbb{T}) \cap C_m^1(\mathbb{T})$ la s.d.f. de $f$ CVN donc CVU vers $f$. $S_N(f) \to_{N\to\infty}^{\|\ \|_u} f$.

**Séries de Fourier, cadre $L^2(\mathbb{T})$**
On peut munir $L^2(\mathbb{T})$ d'un produit scalaire complexe $(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{g})_{\boldsymbol{L^2}(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f\overline{g}$ dont $\|\ \|_{L^2(\mathbb{T})}$ dérive.
$\left(L^2(\mathbb{T}), (.|.)_{L^2(\mathbb{T})}\right)$ est un espace de Hilbert. $\forall n \in \mathbb{Z}$ $(f|e_n) = \hat{f}(n)$
$(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée dans $L^2(\mathbb{T}), (.|.)_{L^2(\mathbb{T})}$ donc libre, donc base algébrique de $Vect(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.
Pour $f \in L^2(\mathbb{T})$ $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N}(f|e_n)e_n$ est le projecteur orthogonal de $f$ sur $\boldsymbol{P_N} = Vect(e_n)_{|n|\le N}$
$S_N(f)$ est le polynôme trigonométrique de degré $N$ le plus proche de $f$ pour $\|\ \|_{L^2(\mathbb{T})}$ càd :
$\forall N\ \forall Q \in P_N$ $\|f - S_N(f)\|_{L^2(\mathbb{T})} \le \|f - Q\|_{L^2(\mathbb{T})}$ (car $\|f-Q\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f) - Q\|^2$)
**Parseval. Convergence $\boldsymbol{L^2}(\mathbb{T})$.** $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ $S_N(f) \to_{N\to\infty}^{\|\ \|_{L^2(\mathbb{T})}} f$ (en particulier pour $f \in C^0(\mathbb{T})$ (prépa))
$\widehat{\ }: L^2(\mathbb{T}) \to l^2(\mathbb{Z}): f \mapsto \hat{f}$ est une isométrie surjective (donc bijective car il y a toujours injectivité).
$f \in L^2(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \hat{f} \in l^2(\mathbb{Z})$ $\forall f \in L^1(\mathbb{T})$
donc $f \in L^2(\mathbb{T}) \Leftrightarrow f \in L^1(\mathbb{T})$ et $\hat{f} \in l^2(\mathbb{Z})$ puisque $L^2(\mathbb{T}) \subseteq L^1(\mathbb{T})$.
**Egalité de Parseval.** $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ $\|\hat{f}\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$ càd $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f|^2$
**Inégalité de Bessel.** $\forall f \in L^2(\mathbb{T})$ $\|S_N(f)\|_{l^2(\mathbb{Z})} \le \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$
$\forall (c_n)_n \in l^2(\mathbb{Z})$ $\exists! f \in L^2(\mathbb{T})$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $c_n = \hat{f}(n)$.
Remarque : le th de Parseval marche aussi pour $f \in C_m^0(\mathbb{T})$ où $(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f\overline{g}$ est un semi p.s.
Parseval permet de montrer $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\left|\hat{f}(n)\right|^2 + \left|\hat{f}(-n)\right|^2 = \frac{1}{2}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$ et $\left|\hat{f}(0)\right|^2 = \frac{1}{4}|a_0(f)|^2$ $\forall f \in L^1(\mathbb{T})$
Donc $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(n)\right|^2 = \frac{1}{4}|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$ $\forall f \in L^1(\mathbb{T})$
On peut munir $l^2(\mathbb{Z})$ d'un produit scalaire complexe $(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{l^2}(\mathbb{Z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n\overline{v_n}$ dont $\|\ \|_{l^2(\mathbb{Z})}$ dérive.
$\left(l^2(\mathbb{Z}), (.|.)_{l^2(\mathbb{Z})}\right)$ est un espace de Hilbert.
**Parseval produit scalaire.** $\forall f, g \in L^2(\mathbb{T})$ $(f|g)_{L^2(\mathbb{T})} = \left(\hat{f}|\hat{g}\right)_{l^2(\mathbb{Z})}$

**Séries de Fourier et équations différentielles [Marco]**
On étudie les équations différentielles de variable sur le tore $\mathbb{T}$ de la forme
$(E):\ y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = f(\overline{x})$ avec $n \ge 1, f \in L^1(\mathbb{T})$, $a_k \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$ de classe $\overline{x} \in \mathbb{T}$.
$(H):\ y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny = 0$
Une **solution généralisée** de $(E)$ est une fonction $y \in C^{n-1}(\mathbb{T})$ dont la dérivée nième $D^{n-1}Y$ est absolument continue (condition la plus faible connue dans notre contexte pour donner un sens a $y^{(n)}$), et vérifiant l'équation presque partout sur le tore. Elle est donc $n$ fois dérivable p.p.
La solution de $(E)$ est bien connue dans le cas homogène $f = 0$, ou si $f \in C^0(T)$ par variation des constantes. On se pose la question pour les fonctions un peu moins régulières, si $f \in L^1(T)$.
L'ensemble des solutions généralisées de l'équation homogène (H) est exactement le sous-espace $S_0 = Vect\{e_m \mid m \in Z,\ P(im) = 0\}$ avec $P = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n$ donc de dim $\le n$ et $\subseteq \mathcal{P}(T)$

Si $\forall m \in Z\ \ P(im) \neq 0$, cad si $S_0 = \{0\}$ alors l'équation $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f$ admet une unique solution de la forme $E \star f$ avec $E$ une fonction $L^1(T)$ indépendante de $f$. (Marche pour tout f).
De plus cette fonction E est caractérisée par $\forall m \in Z\ \hat{E}(m) = \frac{1}{P(im)}$
Pour resoudre $P(D)y = f$ on écrit $\forall m \in Z\ P(im)\hat{y}(m) = \hat{f}(m)$, on vérifie $\forall m \in Z\ P(im) \neq 0$
alors $S_N(E \star f) = \sum_{|m| \leq N} \frac{\hat{f}(m)}{P(im)} e_m$ converge uniformement et la solution généralisée est $y = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(m)}{P(im)} e_m = E \star f$ et appartient a $C^0(T)$ car les sommes partielles aussi car finies et CV uniforme.

**Transformation de Fourier dans le cadre $\boldsymbol{L^1}(\mathbb{R}) = \boldsymbol{L^1}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.**
**La transformée de Fourier de $\boldsymbol{f}$ est $\boldsymbol{\hat{f}}$**$: \mathbb{R} \to \mathbb{C}: \omega \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$ où $f \in L^1(\mathbb{R})$.
$\hat{f} \in C^0_{\to 0}(\mathbb{R})$, càd $f$ est continue et tend vers 0 en $\pm\infty$.
$C^0_{\to 0}(\mathbb{R})$ est un sous-espace fermé donc complet de $\left(C^0_b(\mathbb{R}), \| \quad \|_u\right)$.
Donc bien remarquer que $f \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f} \in C^0(\mathbb{R})$
$\boldsymbol{F}: (L^1(\mathbb{R}), \| \quad \|_1) \to (C^0_{\to 0}(\mathbb{R}), \| \quad \|_u): f \mapsto \hat{f}$ est bien définie linéaire continue car $\|\hat{f}\|_u \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1$
Remarque : Deux représentant d'une même classe $f \in L_1(\mathbb{R})$ ont bien même image $\hat{f} \in C^0_{\to 0}(\mathbb{R})$.
**Inversion.** Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\forall x \in \mathbb{R}\ \hat{\hat{f}}(x) = FF(f)(x) = f(-x)$.
**Transformée inverse $\boldsymbol{F^{-1}}$**$: L^1(\mathbb{R}) \to C^0_{\to 0}(\mathbb{R}): g \mapsto F^{-1}(g) = \left(t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{i\omega t} dt\right)$.
$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \quad F(f) \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow F^{-1}F(f) = f$
$\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \quad F^{-1}(f) \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow FF^{-1}(f) = f$
$F$ est un opérateur injectif mais pas bijectif vers $C^0_{\to 0}(\mathbb{R})$. Attention à la notation $F^{-1}$.
$Im(F)$ n'est pas un espace simple, $L^1(\mathbb{R})$ n'est pas stable par $F$.
La gaussienne $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ a pour transformée de Fourier elle-même.
**Opérations.**
En notant $\boldsymbol{\tau_\alpha f}: x \mapsto f(x - \alpha)$ $\quad \boldsymbol{e_\alpha}: x \mapsto e^{i\alpha x}$ et $\boldsymbol{\mu_\lambda f}: x \mapsto f(\lambda x)$.
$\widehat{\tau_\alpha f} = e_{-\alpha} \cdot \hat{f} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \ \forall f \in L^1(\mathbb{R})$. Autrement dit $F \circ \tau_\alpha = E_{-\alpha} \circ F$
$\widehat{e_\alpha \cdot f} = \tau_\alpha \hat{f} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R})$. Autrement dit $\tau_\alpha \circ F = F \circ E_\alpha$
$\widehat{\mu_\lambda f} = \frac{1}{\lambda} \mu_{\frac{1}{\lambda}} \hat{f} \quad \forall \lambda \in ]0, \infty[\ \forall f \in L^1(\mathbb{R})$. Autrement dit $F \circ \mu_\lambda = \frac{1}{\lambda} \mu_{\frac{1}{\lambda}} \circ F$
$\mu_\lambda \hat{f} = \frac{1}{\lambda} \widehat{\mu_{\frac{1}{\lambda}} f} \quad \forall \lambda \in ]0, \infty[\ \forall f \in L^1(\mathbb{R})$. Autrement dit $\mu_\lambda \circ F = \frac{1}{\lambda} F \circ \mu_{\frac{1}{\lambda}}$
$\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}) \quad f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\, \hat{f} \hat{g}$. La T.F. transforme les convolutions en produits.
$f$ paire $\Rightarrow \hat{f}$ paire $\quad \forall f \in L^1(\mathbb{R})$.
$f$ réelle et paire $\Rightarrow \hat{f}$ réelle et paire $\quad \forall f \in L^1(\mathbb{R})$
**Dérivation.**
$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$ et donc $\hat{f}(\omega) =_{|\omega| \to \infty} o\left(\frac{1}{|\omega|}\right)$ pour $f \in C^1(\mathbb{R})$ <u>telle que $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$</u>.
$\widehat{f'} = i \cdot id \cdot \hat{f}$ pour $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$.
$\hat{f}' = -i \cdot \widehat{id \cdot f}$ pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $id \cdot f \in L^1(\mathbb{R})$. (entraine que $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$)

$\widehat{f^{(k)}} = (i \cdot id)^k \cdot \hat{f}$ pour $f \in C^p(\mathbb{R})$ telle que $f, f', \dots, f^{(p)} \in L^1(\mathbb{R})$. (attention $id^k(\omega) = \omega^k$)
$\hat{f}^{(k)} = (-i)^k \cdot \widehat{id^k \cdot f}$ pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $id^p \cdot f \in L^1(\mathbb{R})$. (entraine $\forall k \;\; id^k \cdot f \in L^1,\; f \in C^k$)
En notant $\boldsymbol{D}: f \mapsto f'$ et $\boldsymbol{M}: f \mapsto id \cdot f$. Les propriétés de dérivations se réécrivent symboliquement :
$F \circ D = iM \circ F$ et $D \circ F = -iF \circ M$ moyennant leur hypothèses.
Intuitivement, plus $f$ est régulière, plus $\hat{f}$ tend vite vers 0 à l'infini.
Intuitivement, plus $\hat{f}$ est régulière, plus $f$ tend vite vers 0 à l'infini. (par inversion)
Par exemple $\hat{f}(\omega) =_{|\omega| \to \infty} o\left(\frac{1}{|\omega|^2}\right) \Rightarrow \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in C^0(\mathbb{R})$.
Par exemple $\hat{f}(\omega) =_{|\omega| \to \infty} o\left(\frac{1}{|\omega|^{k+2}}\right) \Rightarrow f \in C^k(\mathbb{R})$.
Par exemple $f \in L^1_c(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{f}$ est analytique sur $\mathbb{R}$.

**Utilisations Transformation de Fourier**
On part d'un problème $(P)$ (disons une équation fonctionnelle) dont l'inconnue est une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, que l'on cherche dans un espace fonctionnel qu'on note $X$. On fait opérer la tranformation de Fourier sur le problème $(P)$, et on obtient un autre problème $(\hat{P})$ dont l'inconnue est $\hat{f} \in \hat{X} = \{\hat{g} : g \in X\}$.
On utilise à cette étape les opérations de la transformation de Fourier $F$ pour voir le comportement de $F$ vis-à-vis des opérations qui interviennent dans (P). On espère bien sûr que ce nouveau problème est plus simple à résoudre que le précédent, et on le résout quand cela est possible.
$\hat{X}$ difficile à identifier en général mais n'empêche pas de résoudre $(\hat{P})$, mais il faut alors vérifier si les solutions obtenues correspondent à des solutions de $(P)$.
En général on peut résoudre $\left(\hat{P}\right)$ dans un espace plus gros que $\hat{X}$ donc il se peut que la solution trouvée de $\left(\hat{P}\right)$ ne soit pas dans $\hat{X}$. De ce fait on utilise rarement les équivalences.
Exemple : il n'existe pas d'élément neutre pour la convolution.

**Généralisation de la transformation de Fourier à $\mathbb{R}^d$.**
**La transformée de Fourier de $f$ est $\hat{f}$**$: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} : \vec{\omega} \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\vec{t}) e^{-i(\vec{\omega}|\vec{t})} d\vec{t}$ où $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
Les opérations sur $F$ se généralisent à ce cadre…

**Transformation de Fourier dans le cadre $L^2(\mathbb{R})$.**
**Lemme.** Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f, \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$
Si on suppose juste $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $f \in L^2(\mathbb{R})$ n'est ni garanti ni équivalent à $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Exemple ?
**Plancherel.** $\exists!\, \tilde{\boldsymbol{F}}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ tel que 1)2)3)4).
1) $\tilde{F}$ est linéaire.
2) $\tilde{F}$ est un prolongement de la restriction de $F$ à $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ càd $\tilde{F}_{|L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})} = F_{|L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})}$
3) $\tilde{F}$ est une isométrie càd $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}) \quad (f|g) = \int_{\mathbb{R}} f\overline{g} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{F}(f) \cdot \overline{\tilde{F}(g)} = \left(\tilde{F}(f) \middle| \tilde{F}(g)\right)$.
4) $\tilde{F}$ est surjective. (donc bijective)
$\|\tilde{F}(f)\|_2 = \|f\|_2 \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$
$\tilde{F} \circ \tilde{F}(f)(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall f \in L^2(\mathbb{R})$.
$\exists \tilde{F}^{-1}: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ linéaire isométrique égal à $F^{-1}$ sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et $\tilde{F}^{-1} \circ \tilde{F} = \tilde{F} \circ \tilde{F}^{-1} = id$

En pratique comme souvent pour des prolongements on écrit souvent juste $F$ au lieu de $\tilde{F}$.
Et on note encore $\hat{f} = \tilde{F}(f)$ quand $f$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.
Pour $\tilde{F}$, $\quad f \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ sans avoir besoins des conditions du lemme.
Attention si $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ $\quad \hat{f}$ est défini mais <u>on ne peut pas écrire</u> $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$
Si on veut faire des calculs sur $\hat{f}$ on doit dans ce cas raisonner par densité pour $(f_n)_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ qui converge vers $f$ en norme $L^2(\mathbb{R})$ puis voir si les formules passent à la limite. On prend svt $f_n = f 1_{[-n,n]}$, alors $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\| \; \|_{L^2(\mathbb{R})}} f$. $\exists \phi$ extraction telle que $\left(f_{\phi(n)}\right)$ CS vers $f$, donc par TCD on peut écrire que $\hat{f}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\phi(n)}^{\phi(n)} f(t) e^{-i\omega t} dt$ pour presque tout $\omega \in \mathbb{R}$.
Condition suffisante pour inverser. Si $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.
Certaines propriétés du cadre $L^1(\mathbb{R})$ sont valables dans le cadre $L^2(\mathbb{R})$
Certaines propriétés du cadre $L^1(\mathbb{R})$ ne sont plus valables dans le cadre $L^2(\mathbb{R})$ : par exemple on a pas toujours $\hat{f} \in C^0_{\to 0}(\mathbb{R})$ car $F: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est bijective et $L^2(\mathbb{R}) \neq C^0_{\to 0}(\mathbb{R})$.

**Espaces de Sobolev.**

$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{H}^s(\mathbb{R})} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (1 + |\omega|^2) \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega} \leq \infty$ où $s \in \mathbb{R}_+$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$.
**L'espace de Sobolev d'ordre $\boldsymbol{s}$ est $\boldsymbol{H}^s(\mathbb{R})$** $= \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \|f\|_{H^s(\mathbb{R})} < \infty \right\}$ où $s \in \mathbb{R}_+$
$(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{g})_{\boldsymbol{H}^s(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\omega|^2) \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega$ pour $f, g \in H^s(\mathbb{R})$
$\left(H^s(\mathbb{R}), (\;\;|\;\;)_{H^s(\mathbb{R})}\right)$ est un espace de Hilbert et $\|\;\;\|_{H^s(\mathbb{R})}$ dérive de $(\;\;|\;\;)_{H^s(\mathbb{R})}$.
Les $\left(H^s(\mathbb{R})\right)_{s\in\mathbb{R}^+}$ sont une famille décroissante d'espaces.
$\forall 0 \leq s \leq s' \quad C_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq H^{s'}(\mathbb{R}) \subseteq H^s(\mathbb{R}) \subseteq H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$
$\forall s > \frac{1}{2} \; \exists C_s > 0 \;\; \forall f \in H^s(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}), f \in C^0_{\to 0}(\mathbb{R})$ et $\|f\|_\infty \leq C_s \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}$
On peut montrer au sens des distributions que $H^k(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \middle| \; f' \in L^2(\mathbb{R}), \dots, f^{(k)} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$ où $k \in \mathbb{N}$.

**Transformation de Fourier dans le cadre espace de Schwarz $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$.**

La transformée de Fourier d'une fonction même $C^\infty$ n'est pas nécessairement partout dérivable.
**Une fonction $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est à décroissance rapide**
ssi $f \in C^\infty$ et $\forall k, n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{C}: x \mapsto x^k f^{(n)}(x)$ est bornée.
ssi $f \in C^\infty$ et $\forall k, n \in \mathbb{N} \;\; \exists M_{k,n} > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \; |x|^k \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M_{k,n}$
ssi $f \in C^\infty$ et $\forall k, n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(x) =_{|x|\to\infty} O\left(\frac{1}{x^k}\right)$
On posera $\boldsymbol{N_{k,n}(f)} \coloneqq \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k \left|f^{(n)}(x)\right| \leq \infty$ pour $k, n \in \mathbb{N}$
On note $\boldsymbol{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions à décroissance rapide.
$S(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall k, n \in \mathbb{N} \quad N_{k,n}(f) < \infty \right\}$
L'étude de $S(\mathbb{R})$ permet de mieux comprendre le lien entre série de Fourier et transformée de Fourier.
$N_{k,n}(f)$ est une semi norme sur $S(\mathbb{R}) \quad \forall k, n \in \mathbb{N}$
$\forall f_1, f_2 \in S(\mathbb{R}) \quad d(f_1, f_2) = \sum_{k,p\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{2^{k+p}} \min\left(1, N_{k,p}(f_1 - f_2)\right)$ définit une distance sur $S(\mathbb{R})$.
$\forall f \in S(\mathbb{R}) \; \forall (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(\mathbb{R})^{\mathbb{N}} \quad f_n \xrightarrow{d}_{n\to\infty} f$ ssi $\forall k, p \in \mathbb{N} \;\; N_{k,p}(f_n - f) \to_{n\to\infty} 0$

$(S(\mathbb{R}), d)$ est complet.
$C_c^\infty(\mathbb{R}) \subseteq S(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R}) \quad \forall p \in [1, \infty[$. Donc $S(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$.
$S(\mathbb{R})$ est stable par dérivation et par multiplication par un polynôme complexe.
$x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} \in S(\mathbb{R}) \setminus C_c^\infty(\mathbb{R})$.
$S(\mathbb{R})$ est stable par la transformation de Fourier $F$.
$F: S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ est bijective d'inverse $F^{-1}$. $F$ est un isomorphisme
$F: (S(\mathbb{R}), d) \to (S(\mathbb{R}), d)$ est continue, et son inverse aussi.

**Transformation de Fourier dans le cadre mesures finies (dont les mesures de proba).**
Soit $\mu$ une mesure réelle borélienne (définie sur $B(\mathbb{R})$) finie (càd $\mu(\mathbb{R}) < \infty$)
On note $\boldsymbol{M_f^+}(\mathbb{R})$ l'ensemble des mesures réelles boréliennes positives finies.
**La transformée de Fourier de la mesure borélienne finie** $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{M_f^+}(\mathbb{R})$ est $\boldsymbol{\widehat{\mu}}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}: t \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mu(x)$
$\hat{\mu} \in C_b^0(\mathbb{R})$ et $\|\hat{\mu}\|_\infty \leq \mu(\mathbb{R})$
**La transformation de Fourier** est $\boldsymbol{F}: M_f^+(\mathbb{R}) \to C_b^0(\mathbb{R}): \mu \mapsto \hat{\mu}$
Elle n'est pas à proprement parler linéaire car les mesures sont supposées positives.
Attention car on a changé la convention, il n'y a plus le facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ devant, et le signe dans l'exponentielle est positif.
Si $\mu$ admet une densité $f$ par rapport à Lebesgue càd $\mu = f d\lambda$, alors $\hat{\mu}(t) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(-t)$
La fonction caractéristique d'une v.a.r. $X$ sur un espace probabilisé n'est autre que la transformée de Fourier de sa loi $P_X$. $E\left(e^{itx}\right) = \varphi_X(t) = \widehat{P_X}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP_X(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. (Par le th de transfert)
cf poly analyse