Chapitre 11. Mesure de Lebesgue sur $\boldsymbol{R^n}$

I. Mesure extérieure sur $\boldsymbol{R^n}$

I.1. Paves et cubes

Un **pavé fermé** de R^n est un produit cartesien de n intervalles fermés bornés de R.
Un **pavé ouvert** de R^n est un produit cartesien de n intervalles ouverts bornés de R.
Un **pavé mixte** de R^n est un produit cartesien de n intervalles bornés de R.
Le **volume d'un pavé fermé/ouvert/mixte** est le produit des longueurs des intervalles du pavé.
Une **union de pavés quasi-disjointe** est une union de pavés tels que leurs intérieurs sont disjoints 2 à 2.
Un **cube** est un pavé dont tous les côtés sont égaux.
Le **volume d'une union finie quasi disjointe de pavés** est la somme des volumes des pavés.
Le volume d'une union finie de pavés majore le volume de tout pavé inclus dans l'union.
Tout ouvert de R s'écrit de manière unique comme union dénombrable disjointe d'intervalles ouvert (les composantes connexes de l'ouvert).
Tout ouvert de R^n s'écrit comme union dénombrable de cubes quasi disjoints.

I.2. Mesure extérieure sur $\boldsymbol{R^n}$

On appelle **mesure extérieure** sur un ensemble X une fonction définie sur P(X) vers [0,+∞] verifiant : l'ensemble vide est de mesure extérieure nulle **(normalisation)** , la mesure extérieure d'une partie majore celle de ses sous-parties **(monotonie)**, et la mesure extérieure d'une union dénombrable de parties est majorée par la somme des mesures extérieures **(sous-additivité dénombrable).**
Soit une partie de R^n, on peut consider l'ensemble des union dénombrables de cubes fermés qui contiennent la partie, et définir pour chaque union la somme des volumes des cubes la constituant. L'infimum de ces sommes définit **la mesure extérieure de la partie de $\boldsymbol{R^n}$** qui est donc un element de $[0,\infty]$. Dans cette définition on peut remplacer cube par pavé ou boule sans changer la mesure extérieure. La dénombrabilité est importante car la finitude ne suffirait pas à approximer correctement.
La mesure extérieure de l'ensemble vide est nulle. La mesure extérieure d'un pavé quelconque est égale à son volume. La mesure extérieure de R^n est infinie.
La mesure extérieure de R^n est bien une mesure extérieure.
Semi régularité. La mesure extérieure d'une partie de R^n est l'infimum des mesures extérieures des ouverts contenant la partie.
La mesure extérieure de l'union de deux parties à distance > 0 l'une de l'autre, s'ajoute.
Pour une union dénombrable de cube quasi-disjoints, la mesure extérieure = la somme des volumes.

II. Ensembles mesurables et mesure de Lebesgue sur $\boldsymbol{R^n}$

II.1. Ensembles mesurables

Une partie de R^n est une **partie Lebesgue-mesurable/mesurable** si on peut l'inclure dans un ouvert de sorte que, la mesure extérieure de l'ouvert privé de la partie, est aussi petite que l'on veut.
Tout ouvert de R^n est mesurable. Toute partie de mesure extérieure nulle est mesurable, et toutes les sous-parties d'une telle partie sont aussi mesurables et de mesure extérieure nulle.
Tout fermé de R^n est mesurable.
La mesurabilité est une notion stable par complémentaire, stable par intersection dénombrable, stable par union dénombrable.

II.2. Mesure de Lebesgue sur $\boldsymbol{R^n}$

Une partie de R^n mesurable admet pour **mesure de Lebesgue**, la mesure extérieure de R^n sur cette partie. La mesure de Lebesgue n'est définie que sur les parties mesurables de R^n et est a valeurs dans $[0, \infty]$. La mesure extérieure est définie sur toute partie.

II.2.I. Premières propriétés

L'ensemble vide est mesurable et a une mesure de Lebesgue nulle.

La mesure de Lebesgue est sous-additive et monotone.

La mesure d'une union dénombrable de parties mesurables 2 a 2 disjointes est la somme des mesures des parties. **(σ-additivité)***

Pour une suite croissante de mesurables, leur mesure tend vers la mesure de l'union qui est mesurable.

Pour une suite décroissante de mesurables dont au moins un est de mesure finie, leur mesure tend vers la mesure de l'intersection qui est mesurable de mesure finie.

II.2.2 Propriétés de régularité et d'invariance

Tout mesurable peut être inclus dans un ouvert tel que la mesure de l'ouvert moins le mesurable est arbitrairement faible.

Dans tout mesurable on peut trouver un fermé tel que la mesure du mesurable moins le fermé est arbitrairement faible.

Dans tout mesurable de mesure finie, on peut trouver un compact tel que la mesure du mesurable moins le compact est arbitrairement faible.

Tout mesurable de mesure finie peut être approximé par une union finie de cubes fermés dans le sens ou la mesure de la diff. symétrique entre le mesurable et l'union de cubes est arbitrairement faible.

Une mesure possédant ces 4 dernières propriétés d'approximation est appelée **mesure régulière.**

Un $\boldsymbol{G_\delta}$ est une intersection dénombrable d'ouverts d'un espace topologique

Un $\boldsymbol{F_\sigma}$ est une réunion dénombrable de fermes d'un espace topologique.

Une partie de R^n est mesurable ssi elle s'exprime comme un G_δ la contenant, privé d'un ensemble de mesure nulle ssi elle s'exprime comme l'union d'un F_δ dans la partie avec un ensemble de mesure nulle.

Invariance par translation. Tout partie mesurable translatée d'un point est encore mesurable et de même mesure.

Invariance par symétrie a l'origine. Le symétrique à l'origine d'une partie mesurable est mesurable de même mesure.

Invariance par dilatation. Une partie mesurable dilatée par un facteur α est encore mesurable de mesure α^n fois la mesure de la partie originelle.

Effet d'une application linéaire. Un endomorphisme de R^n applique a une partie mesurable de R^n donne une nouvelle partie encore mesurable, avec une mesure multipliée par la valeur absolue du déterminant de l'endomorphisme. $\lambda_n(u(E)) = |\det(u)|\lambda_n(E)$

II.2.3. Inégalité de Brunn-Minkowski*

Soit $A, B \subseteq R^n$ deux parties mesurables, d'ensemble somme $A + B$ mesurable.

Alors $\lambda_n(A+B)^{\frac{1}{n}} \geq \lambda_n(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda_n(B)^{\frac{1}{n}}$

III. Sous-ensembles remarquables de R et de $\boldsymbol{R^n}$

III.1. Ensembles de mesure de Lebesgue nulle

Une partie de R^n est de **mesure nulle (dans $\boldsymbol{R^n}$)** si elle est mesurable de mesure nulle.

Une partie de R^n est **négligeable** pour la mesure ssi elle est incluse dans un mesurable de mesure nulle.

La mesure de Lebesgue est **complète** : Toutes les sous-parties d'une partie de mesure nulle sont

mesurables et de mesure nulle, c'est-à-dire une partie est de mesure nulle ssi elle est négligeable.
Ayant fixé une autre partie $A \subseteq R^n$. Une partie de R^n est de **mesure nulle dans A**, si cette partie intersectée à A (et donc mesurable), est de mesure nulle.
Une partie de R est de mesure nulle ssi on peut l'inclure dans une union au plus dénombrable d'intervalles ouverts dont la somme des longueurs est arbitrairement petite.
Une partie de R^n est de mesure nulle ssi on peut l'inclure dans une union au plus dénombrable de cubes quasi disjoints, dont la somme des mesures est arbitrairement petite.
Une fonction d'un segment vers un espace de Banach est Riemann intégrable ssi elle est bornée et l'ensemble de ses points de discontinuité est mesurable de mesure nulle.*
Pour une fonction Riemann intégrable d'un segment [a,b] vers un espace de Banach, ayant fixé une amplitude >0, l'ensemble des points de [a,b] d'oscillation au moins cette amplitude est mesurable de mesure nulle.*
Pour une fonction Riemann intégrable sur [a,b], la fonction intégrale [a,x] est dérivable en tout point de dérivée la fonction RI sauf sur une partie de [a,b] mesurable de mesure nulle. Autrement dit la fonction RI admet une primitive sur [a,b] privée d'une partie de mesure nulle.
Si une fonction Riemann intégrable sur un segment est telle que l'intégrale de sa norme est nulle, cad sa semi-norme 1 est nulle, alors la fonction est nulle sauf sur un ensemble de mesure nulle de [a,b].
III.2. Quelques sous-ensembles remarquables.
Tout singleton de R est de mesure nulle. Toute partie dénombrable de R est de mesure nulle. Q, bien que dense, est de mesure nulle. Une partie de mesure nulle est d'intérieur vide. Les irrationnels sont de mesure pleine. Les diophantiens d'exposant > 2 fixé forme un ensemble de mesure pleine, bien que les diophantiens forment une partie maigre. Les liouvilliens sont de mesure nulle bien qu'ils forment une partie résiduelle. Un autre résiduel de mesure nulle est obtenu en énumérant les rationnels en formant l'intervalle ouvert de centre le rationnel, de rayon $1/2^k$ decroissant avec l'indice du rationnel, et en prenant l'union de tous ces intervalles.
L'ensemble triadique de Cantor en plus d'être compact, métrisable, totalement discontinu, sans points isolés, est indénombrable de mesure nulle.*
Il existe des parties non Lebesgue mesurables de R usuellement construites via axiome du choix: ex : ensemble de Vitali. * TODO
Th de Lebesgue Une fonction monotone de R dans R est dérivable en tout point sauf sur un ensemble de mesure nulle.*
Une fonction monotone et continue d'un segment dans R est dérivable en tout point hors d'un ensemble de mesure nulle.*

Chapitre 12. Théorie géométrique de la mesure
I. Espaces mesurables
I.I. Tribus sur un ensemble
Une **tribu/σ-algebre sur un ensemble** est un ensemble de parties qui est stable par complémentaire, stable par union/intersection dénombrable, et qui contient l'ensemble/le vide.
La **tribu discrète** d'un ensemble est l'ensemble des parties de cet ensemble. La **tribu grossière** d'un ensemble est la paire constituée de l'ensemble et du vide.
L'ensemble des parties Lebesgue-mesurables de R^n est une tribu sur R^n appelee **tribu de Lebesgue.**

Un **espace mesurable** est un ensemble muni d'une tribu sur cet ensemble. Une **partie mesurable d'un espace mesurable** est un élément de la tribu de l'espace mesurable.
L'intersection de tribus sur un ensemble est une tribu sur cet ensemble.
On appelle **tribu engendrée par un ensemble de parties P sur un ensemble X,** la plus petite au sens de l'inclusion/l'intersection des tribus qui contiennent P. C'est une tribu sur l'ensemble X. On note $\boldsymbol{\sigma_X(P)}$.
La **tribu borélienne d'un espace topologique** est la tribu sur l'espace engendrée par la topologie.
Un espace topologique peut donc être vu comme un espace mesurable. L'inverse bien que possible est moins élégant. La topologie engendrée par une tribu est très particulière.
En général, une base de topologie qui engendre un espace topologique, n'engendre pas forcement la tribu borélienne de cet espace. Sauf cas dénombrable :
Une base dénombrable de topologie qui engendre un espace topologique, engendre la tribu borélienne de cet espace.

I.2. Algèbres et classes monotones

Un **algèbre de parties sur un ensemble** est un ensemble de parties qui est stable par complémentaire, stable par union/intersection finie, et qui contient l'ensemble/le vide.
L'intersection d'algèbres de parties sur un ensemble est une algèbre de parties sur cet ensemble.
On appelle **algèbre de parties engendrée par un ensemble de parties P sur un ensemble X,** la plus petite au sens de l'inclusion/l'intersection des algèbres qui contiennent P. C'est une algèbre de parties sur l'ensemble X.
Une **classe monotone d'algèbre** sur un ensemble est un ensemble de parties qui est stable par union croissantes dénombrables et stable par intersection décroissantes dénombrables.
Toute tribu sur un ensemble est une classe monotone d'algèbre sur cet ensemble.
Une intersection de classes monotones d'algèbre de même ensemble est une classe monotone d'algèbre de cet ensemble.
Pour toute partie P on peut définir la **classe monotone d'algèbre engendrée CMA(P)** comme la plus petite classe monotone d'algèbre contenant la partie.
Lemme de classe monotone d'algèbre. Sur un ensemble, la classe monotone d'algèbre engendrée par une algèbre de parties n'est autre que la tribu engendrée par l'algèbre de parties.
Pour montrer qu'une propriété est vraie sur une tribu engendrée par une algèbre, il suffit donc de montrer qu'elle est vraie sur n'importe quelle classe monotone d'algèbre contenant l'algèbre.

I.3. Applications mesurables

Une fonction entre deux espaces mesurables est une **fonction mesurable** si l'image réciproque de tout mesurable est mesurable.
Une partie d'un espace mesurable, est mesurable ssi la fonction caractéristique de cette partie à valeur dans R muni de la tribu borélienne est une fonction mesurable.
Rappel : **L'image réciproque par une fonction d'une partie** d'un domaine d'arrivée est l'ensemble des points de l'ensemble de départ dont l'image est dans la partie.
L'image réciproque par une fonction d'un ensemble de parties, d'un domaine d'arrivée se définit comme l'ensemble des images réciproques de toutes les parties de l'ensemble de parties. (Ens. image)
L'image réciproque par une fonction d'un ensemble de parties est donc un ensemble de parties du domaine de départ de la fonction.
L'image réciproque par une fonction d'une tribu définit une tribu sur l'ensemble de départ : la **tribu**

image réciproque de la tribu par la fonction.
L'image réciproque par une fonction, de la tribu engendrée par un ensemble de parties, est la tribu engendrée par l'image réciproque de l'ensemble de partie par la fonction. $f^{-1}\big(\sigma(P)\big) = \sigma\big(f^{-1}(P)\big)$
La **tribu induite/tribu trace** sur une partie fixée d'un espace mesurable par une tribu, est la tribu (c'en est bien une) obtenu en intersectant tous les éléments de la tribu initiale avec la partie fixée.
Une fonction entre deux espaces mesurables est mesurable ssi l'image réciproque de tout mesurable d'un ensemble de parties qui engendre la tribu d'arrivée, est mesurable.
Une fonction continue entre deux espaces topologiques est mesurable vis-à-vis de ces espaces munis des tribus boréliennes correspondantes.
La composée d'applications mesurables est mesurable.

I.4. Tribus produit

On commence par les produits finis.
Un **rectangle élémentaire mesurable** sur une famille/produit fini ou dénombrables d'espaces mesurables est un produit cartésien (avec même indexation que la famille) de parties mesurables de ces espaces.
La **tribu produit d'une famille finie/dénombrable d'espaces mesurables $\otimes_{i=1}^{n} T_i$** est la tribu engendrée par les rectangles élémentaires mesurables sur cette famille d'espace mesurables.
La tribu produit d'une famille finie d'espaces mesurables est la plus petite tribu sur le produit des espaces qui rende chaque projection mesurable.
Une fonction d'un espace mesurable vers un produit fini/dénombrable d'espaces mesurable muni de la tribu produit, est mesurable ssi chacune de ses composante l'est vis-à-vis de son propre espace.
La tribu produit fini des tribus boréliennes d'espaces topologiques est inclus dans la tribu borélienne de la topologie produit fini. Il y a égalité si les espaces topologiques sont engendres par des bases dénombrables.
Dans R^{n+m} On a $B(R^n)\otimes B(R^m) = B(R^{n+m})$

I.5. Fonctions numériques mesurables

I.5.1. Les tribus boréliennes des espaces d'arrivée usuels

Sur R, la tribu borélienne est strictement incluse dans la tribu de Lebesgue. $B(R) \subset M_L(R)$ car tout ouvert est Lebesgue mesurable, mais la tribu borélienne a le cardinal de R, alors que la tribu de Lebesgue a le cardinal de P(R). La tribu borélienne est très grosse cependant, contient tous les ouvert de R, tous les fermés de R, tous les F_σ et tous les G_δ et tous les sous-ensembles usuels. R est à base dénombrable donc une telle base engendre la tribu borélienne. Mais il y a des exemples plus simples.
La tribu borélienne de R est engendrée par les $[q, +\infty), q \in Q$ / par les $(q, +\infty), q \in Q$ / par les $(-\infty, q], q \in Q$ / par les $(-\infty, q), q \in Q$. Ou Q est une partie dense dénombrable.
Dans la tribu borélienne de $[0, +\infty]$ un borélien est soit borélien de $[0, +\infty)$, soit borélien de $[0, +\infty)$ union $\{\infty\}$. $F([0, +\infty], E)$ n'a en general pas de structure d'espace vectoriel car pas d'inverse additif.
La tribu borélienne de $[0, +\infty]$ est engendrée par les $[q, +\infty], q \in Q_+$ / par les $(q, +\infty], q \in Q_+$ / par les $[0, q), q \in Q_-$ / par les $[0, q], q \in Q_-$. Ou Q est une partie dense dénombrable.
Dans la tribu borélienne de $\overline{R}$ un borélien est soit borélien de R, soit la réunion de $\{+\infty\}$ ou $\{-\infty\}$ ou $\{-\infty, +\infty\}$ avec un borélien de R.
La tribu borélienne de $\overline{R}$ est engendrée par les $[q, +\infty], q \in Q_+$ / par les $(q, +\infty], q \in Q_+$ / par les

$[-\infty, q), q \in Q_-$ / par les $[-\infty, q], q \in Q_-$. Ou Q est une partie dense dénombrable.
La topologie usuelle de C est la topologie produit après identification de C a R^2, des topologies usuelles.
La topologie usuelle de C est donc a base dénombrable et la tribu borélienne de C est le produit des tribus boréliennes de R. On peut ramener l'étude de la mesurabilité au cas réel.
Une fonction d'un espace mesurable vers C est mesurable ssi ses parties réelle et imaginaire le sont.
Le graphe $\{(x, f(x)), x \in R\}$ d'une fonction mesurable d'un espace mesurable (X, M) vers $(R, B(R))$, est une partie mesurable de l'espace produit $(X \times R, M \otimes B(R))$.

I.5.2 Propriétés de stabilité de la mesurabilité

Soit une ou plusieurs fonctions mesurables sur un même espace mesurable a valeurs dans R/C/$[0, +\infty]$/$\overline{R}$, alors la somme est mesurable, le produit est mesurable, l'inverse d'une fonction ne s'annulant pas est mesurable, le module est mesurable, la composée est mesurable.
Soit une suite de fonctions mesurables sur même espace mesurable a valeur dans $[0, +\infty]$/$[-\infty, +\infty]$
Alors la fonction des sup/inf est bien définie a valeur dans le même ensemble, et mesurable.
Donc la fonction des lim sup/lim inf est bien définie a valeur dans le même ensemble et mesurable.
A valeurs dans R, il faut rajouter la condition que les sup/inf/limsup/liminf soient toujours dans R pour avoir la mesurabilité vis-à-vis de R.
On en déduit le résultat : Toute suite de fonctions mesurables vers $[0, +\infty]$/$\overline{R}$/R/C qui converge simplement dans ce meme ensemble est de limite simple mesurable.

I.5.3. Les trois principes de Littlewood.*

1. Tout ensemble mesurable de R^n de mesure finie est « presque » une union finie de cubes. (provient d'une propriété de régularité de la mesure de Lebesgue.)
2. Toute suite convergente de fonctions mesurables est « presque » uniformément convergente.

Théorème d'Egorov.* On considère les Lebesgue-mesurables de mesure finie de R^n. On a vu dans tout mesurable on peut trouver un fermé tel que la mesure du mesurable moins le fermé est arbitrairement faible. Cela traduit le « presque ». Si on considère une suite de fonction mesurables sur une partie Lebesgue-mesurable de R^n de mesure finie vers R, qui converge simplement, alors on peut trouver un fermé dans le mesurable dont la mesure du mesurable moins le fermé est arbitrairement faible ET la suite de fonction converge uniformément sur ce fermé.

3. Toute fonction mesurable est « presque » continue.

Théorème de Lusin.* Si on considère une fonction mesurable sur une partie Lebesgue-mesurable de R^n de mesure finie vers R, alors on peut trouver un fermé dans le mesurable dont la mesure du mesurable moins le fermé est arbitrairement faible ET la restriction de la fonction a ce fermé est continue.

II. Espaces mesurés

II.1. Mesures

Une **mesure** sur un espace mesurable est une fonction de la tribu vers $[0, +\infty]$, tel que l'image du vide est 0 **(normalisation)** et telle que **(σ-additivité)** la mesure d'une union dénombrable de mesurables 2 à 2 disjoints est égale à la somme des mesures de chaque dénombrable.
Un **espace mesuré** est un espace mesurable muni d'une mesure sur cet espace.
Une **mesure finie** est une mesure qui à tout mesurable associe un réel fini. Elle est donc dans $[0, +\infty)$
L'**espace mesuré induit** sur une partie mesurable d'un espace mesuré est l'espace mesuré forme par la partie, la tribu trace induite sur cette partie, et la restriction de la mesure a cette tribu induite.

Tout fonction mesurable f d'un espace mesuré de mesure μ vers un espace mesurable, donne une mesure dite **mesure image** $\boldsymbol{\nu(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right)}$ sur l'espace mesurable d'arrivée. $\boldsymbol{\nu = f * \mu}$

Un espace mesuré/une mesure σ-finie est un espace mesuré ou l'espace admet un recouvrement dénombrable de mesurables, tous de mesure finie. Une mesure finie est σ-finie.

La **mesure de comptage** d'un espace mesurable discret (tribu=P(X)), est la mesure sur cet espace à valeurs dans $N \cup \{+\infty\}$ qui à toute sous-partie de l'espace associe son cardinal s'il est fini, ou $+\infty$ sinon.

Un ensemble est fini ou dénombrable ssi, muni de la tribu discrète, et de la mesure de comptage il est σ-fini.

La **mesure de Dirac en un point** d'un espace mesurable discret est la mesure sur cet espace a valeur dans {0,1} qui a toute sous-partie de l'espace associe 1 si le point est dedans, 0 sinon.

La mesure d'une partie majore celle de ses sous-parties (**monotonie)**.

La mesure d'une dénombrable de parties est majorée par la somme des mesures **(sous-additivité dénombrable).**

Pour une suite croissante de mesurables, leur mesure tend vers la mesure de l'union.

Pour une suite décroissante de mesurables dont au moins un est de mesure finie, leur mesure tend vers la mesure de l'intersection qui est de mesure finie.

II.2. Ensembles négligeables. Espaces mesurés complets

Une partie d'un espace mesuré est de **mesure nulle** ssi elle est mesurable de mesure nulle.

Une partie d'un espace mesuré est **négligeable** ssi elle est incluse dans un mesurable de mesure nulle.

Un espace mesuré/une mesure est dite **complète** si toutes les sous-parties d'une partie de mesure nulle sont mesurables et de mesure nulle, c'est-à-dire une partie est de mesure nulle ssi elle est négligeable.

La mesure de Lebesgue est complète.

Une propriété $P(x \in X)$ définie sur un espace mesuré est **vrai presque partout pour la mesure μ (μ pp)** si elle est fausse sur un ensemble négligeable.

On définit le **complété d'un espace mesurable** en remplaçant la tribu M par la tribu engendrée par la tribu M + toutes les parties négligeables de l'espace. $\boldsymbol{\widehat{M} = \sigma(M \cup \{N \subseteq X | N\ \mu\ negligeable\})}$**.** $M \subseteq \widehat{M}$

Une partie d'un espace mesuré est mesurable pour la tribu complétée, ssi elle s'écrit comme l'union d'un mesurable de la tribu et d'un négligeable, ssi elle est comprise (inclusion) entre deux mesurables dont la mesure de la différence du plus grand moins le plus petit, donne 0.

La tribu complétée de la tribu borélienne de R^n n'est autre que la tribu de Lebesgue sur R^n.

Mesure complétée. Sur un espace mesuré, il existe une unique mesure sur la tribu complétée qui coïncide avec la mesure de l'espace mesuré sur la tribu de l'espace mesuré. C'est la **mesure complétée.**

Pour toute partie de la tribu complétée s'écrivant donc comme un mesurable union un négligeable, la mesure complétée de la partie coïncide avec la mesure du mesurable. $\hat{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$.

On définit le **complété d'un espace mesuré,** comme l'espace muni de sa tribu complétée, et de sa mesure complétée, c'est un espace mesuré de mesure complète.

Si une fonction d'un espace mesuré vers R/C/$[0, +\infty]$/$\overline{R}$ est mesurable vis-à-vis de l'espace mesuré complété, alors il existe une autre fonction mesurable vis-à-vis de l'espace mesuré quelconque, qui coïncide avec la première fonction sauf sur un ensemble de mesure nulle.

III. Construction de mesures

III.1. Mesures extérieures = factorisation du chap 11

On appelle **mesure extérieure** sur un ensemble X une fonction définie sur P(X) vers [0,+∞] verifiant : l'ensemble vide est de mesure extérieure nulle **(normalisation)**, la mesure extérieure d'une partie majore celle de ses sous-parties (**monotonie)**, et la mesure extérieure d'une union dénombrable de parties est majorée par la somme des mesures extérieures **(sous-additivité dénombrable).**
Une mesure sur un espace mesurable est une mesure extérieure ssi l'espace mesurable est discret.
$\mu^* = I(A = \emptyset)$ est une mesure extérieure mais pas une mesure. La mesure extérieure de Lebesgue est une mesure extérieure.
Soit un **ensemble dit générateur** de **parties dites génératrices**, et une fonction quelconque de cet ensemble générateur vers $[0, \infty]$ appelée **fonction génératrice**. Elle est lacunaire et donc <u>n'est pas une mesure</u>.
Soit une partie de l'espace, on peut considérer l'ensemble des unions dénombrables de parties génératrices qui contiennent la partie, et considérer pour chaque union la somme des mesures génératrices des parties génératrices la constituant. L'infimum de ces sommes définit **la mesure extérieure de la partie, générée par une fonction génératrice et ensemble générateur.** Dans le cas de la mesure de Lebesgue les parties génératrices sont des cubes/pavés/boules et la fonction génératrice leur volume.
Une mesure extérieure ainsi définie est bien une mesure extérieure sur l'espace. (Pas de tribu ici).
Une partie A d'un espace est dite **(Carathéodory-)mesurable pour une mesure extérieure $\boldsymbol{\mu}^*$** si elle verifie $\forall E \in P(X)\ \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap C_E A)$
Une partie de R^n est Lebesgue-mesurable ssi elle est mesurable pour la mesure extérieure de Lebesgue.
Théorème de Carathéodory*. L'ensemble des parties Carathéodory-mesurables d'une mesure extérieure forme une tribu. La restriction de la mesure extérieure à cette tribu fournit une mesure complète.

III.2. Prémesures. Théorèmes de prolongement

Une **prémesure** est une fonction d'une algèbre de partie d'un ensemble vers $[0, +\infty]$ vérifiant, l'image du vide est nulle **(normalisation)**, la prémesure de toute union dénombrable de parties 2 à 2 disjointes égale la somme des prémesures des parties **($\boldsymbol{\sigma}$-additivité)**.
En considérant dans un espace, une algèbre de parties vue comme ensemble générateur, et une prémesure sur cet algèbre vue comme une mesure génératrice, on voit que la prémesure définit naturellement une **mesure extérieure induite par la prémesure**.
La mesure extérieure induite par la prémesure coïncide avec la prémesure sur l'algèbre de partie.
Les éléments d'une algèbre de parties sont tous Carathéodory-mesurables pour la mesure extérieure associée à une prémesure sur cette algèbre.
Prolongement des prémesures. La restriction de la mesure extérieure induite par une prémesure, a la tribu engendrée par l'algèbre de partie de la prémesure, est une mesure sur cette tribu, qui prolonge la prémesure. C'est la **mesure induite par la prémesure**. Si la prémesure est sigma-finie, alors sa mesure induite, est l'unique mesure la prolongeant sur la tribu engendrée par l'algèbre.

III.3. Mesures boréliennes

Une **mesure borélienne** sur un espace topologique de tribu borélienne, est une mesure définie sur la tribu borélienne, et prenant des valeurs finies pour tout compact de l'espace topologique.
La restriction de la mesure de Lebesgue a la tribu borélienne de R^n est une mesure borélienne.
Sur un espace topologique discret, la mesure de comptage est borélienne car $B(X) = P(X)$

Sur un espace mesuré topologique, de tribu contenant la tribu borélienne, un mesurable est dit **extérieurement régulier** si sa mesure = infimum des mesures d'ouverts contenant le mesurable.
Un mesurable est dit **intérieurement régulier** si sa mesure = supremum des mesures de compacts inclus dans le mesurable. Un mesurable est dit **régulier**, s'il l'est intérieurement et extérieurement. La mesure d'un tel espace est dite **régulière** si tout mesurable est régulier par cette mesure.
Une partie de mesure infinie est toujours extérieurement régulière, une partie de mesure nulle est toujours intérieurement régulière. La mesure de comptage sur un espace topologique est régulière.
Sur un espace muni d'une mesure borélienne, l'union dénombrable de boréliens réguliers est un borélien régulier.
Toute mesure borélienne d'un espace métrisable, localement compact et séparable, est une mesure régulière.
Une mesure borélienne sur R^n invariante par translation, est a un scalaire positif pres, la mesure de Lebesgue sur R^n.
Effet linéaire sur la mesure.* Un endomorphisme de R^n appliqué à une partie Lebesgue mesurable de R^n donne une nouvelle partie encore mesurable, avec une mesure de Lebesgue multipliée par la valeur absolue du déterminant de l'endomorphisme. $\lambda_n\big(u(E)\big) = |\det(u)|\lambda_n(E)$

III.4. Un théorème général d'unicité

On appelle **système fondamental/$\boldsymbol{\lambda}$-système/classe monotone** sur un ensemble, une famille quelconque de parties de l'ensemble, qui contient l'ensemble, est stable par différence de deux parties emboitées et stable par union dénombrable croissante.
On appelle **$\boldsymbol{\pi}$-système** sur un ensemble, une famille quelconque de parties de l'ensemble stable par intersection finies.
Tout système à la fois π et λ est une tribu et réciproquement.
On peut définir le **$\boldsymbol{\lambda}$-système engendré** par une famille de parties P, comme le plus petit/intersection la contenant, on le note $CM(P)$. Il est contenu dans la tribu engendrée par cette même famille $\sigma(P)$.
Lemme de classe monotone. Si la famille est un π système, $CM(P) = \sigma(P)$. La classe monotone engendrée par un π-système (famille stable par inter finie) coïncide avec la tribu engendrée par ce système.
Théorème d'unicité des mesures. Soit un π-système engendrant la tribu d'un espace mesurable et contenant une suite particulière croissante de réunion l'espace entier. Si deux mesures coïncident sur tout le π-système et si chaque mesurable de la suite particulière est de mesure finie, alors ces deux mesures coïncident sur toute la tribu, c'est la même mesure.
Dans R^n toute mesure sur la tribu borélienne qui coïncide avec la mesure de Lebesgue sur la famille des pavés fermés bornés, coïncide aussi sur toute la tribu borélienne.
Théorème des classes monotones fonctionnelles [Barbe, Ledoux]. Soit un ensemble C de fonctions réelles bornées sur Ω stable par multiplication et contenant les constantes. Tout espace vectoriel stable par convergence monotone bornée qui contient C, contient les fonctions bornées mesurables par rapport a $\sigma(C)$.