Déterminants

Une $\boldsymbol{K}$ **application linéaire**, d'un Kev E vers un Kev F sur un même corps K est une application $u: E \to F$ telle que $\forall x, y \in E \;\; u(x+y) = u(x) + u(y)$ et $\forall \alpha \in K \; \forall x \in E \; u(\alpha x) = \alpha u(x)$, càd telle que $\forall \alpha \in K \; \forall x, y \in E \;\; u(\alpha x + y) = \alpha u(x) + u(y)$

$\boldsymbol{L_K(E,F)}$ est l'espace des K applications linéaires de E vers F

$\boldsymbol{L_{K,c}(E,F)}$ est l'espace des K applications linéaires continues de E vers F.

$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L_{K,c}}} = \sup_{\|x\|_E \le 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$ norme sur $L_{K,c}(E,F)$

$(F, \| \quad \|_F)$ complet $\Rightarrow \left(L_c(E,F), \| \quad \|_{L_c}\right)$ complet

Une $\boldsymbol{K}$ **application $\boldsymbol{n}$-linéaire**, d'un produit de Kevs $E_1 \times \dots \times E_n$ vers un Kev F sur un même corps K est une application $u: E_1 \times \dots \times E_n \to F$, telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\} \;\; \forall x_1 \in E_1 \dots \forall x_{i-1} \in E_{i-1} \; \forall x_{i+1} \in E_{i+1} \dots \forall x_n \in E_n$ l'application $E_i \to F: x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ est dans $L_K(E_i, F)$

$\boldsymbol{L_{K,n}(E_1 \times \dots \times E_n, F)}$ est l'espace des K applications n-linéaires de $E_1 \times \dots \times E_n$ vers F

$\boldsymbol{L_{K,n,c}(E_1 \times \dots \times E_n, F)}$ est l'espace des K applications n-linéaires continues de $E_1 \times \dots \times E_n$ vers F

$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L_{n,c}}} = \sup_{\|x\|_u \le 1} \|f(x)\|_F$

$(F, \| \quad \|_F)$ complet $\Rightarrow \left(L_c(E,F), \| \quad \|_{L_{k,c}}\right)$ complet

$\forall n \ge 2 \; L_{K,n,c}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ est isométriquement isomorphe a $L_c\big(E_1, L_c(E_2, L_c(\dots, L_c(E_n, F)) \dots)\big)$

$L_K(E,F)$ est un Ksev de $F(E,F)$

$L_{K,n}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ est un Ksev de $F(E_1 \times \dots \times E_n, F)$

On note $\boldsymbol{L_{K,n}(E,F)} = L_{K,n}(E^n, F)$

Une application n-linéaire $f \in L_{K,n}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ est dite **symétrique** ssi $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n \;\; \forall 1 \le i < j \le n \;\; f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$, càd ssi échanger deux arguments ne change pas le résultat.

$\boldsymbol{S_{K,n}(E_1 \times \dots \times E_n, F)} = \{f \in L_{K,n}(E_1 \times \dots \times E_n, F) \mid f \text{ symétrique}\}$, $\boldsymbol{S_{K,n}(E,F)} = S_{K,n}(E^n, F)$

$S_{K,n}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ est un Ksev de $L_{K,n}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$

Une application n-linéaire $f \in L_{K,n}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ est dite **antisymétrique** ssi $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n \;\; \forall 1 \le i < j \le n \;\; f(\dots, x_i, \dots, x_j, \dots) = -f(\dots, x_j, \dots, x_i, \dots)$, càd ssi échanger deux arguments change le résultat de signe.

$\boldsymbol{A_{K,n}(E_1 \times \dots \times E_n, F)} = \{f \in L_{K,n}(E_1 \times \dots \times E_n, F) \mid f \text{ antisymétrique}\}$, $\boldsymbol{A_{K,n}(E,F)} = A_{K,n}(E^n, F)$

$A_{K,n}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ est un Ksev de $L_{K,n}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$

Pour f n-linéaire symétrique on a $\forall \sigma \in S_n \; \forall x \in E_1 \times \dots \times E_n \; f\big(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\big) = f(x_1, \dots, x_n)$

Pour f n-linéaire antisymétrique $\forall \sigma \in S_n \; \forall x \in E_1 \times \dots \times E_n \; f\big(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\big) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$

Une application n-linéaire $f \in L_{K,n}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ est dite **alternée** ssi $\forall x \in E_1 \times \dots \times E_n \; \exists i \neq j \; x_i = x_j \Rightarrow f(x) = 0_F$

Une application n-linéaire alternée est antisymétrique. La réciproque est vraie pour K de caractéristique $\neq 2$.

Une forme n-linéaire est une application de $L_{K,n}(E,K)$

Une forme n-linéaire alternée/antisymétrique est une application de $A_{K,n}(E,K)$ pour $car(K) \neq 2$

Soit E un Kev de dimension finie $n \in N$ avec K de caractéristique $\neq 2$

$L_2(E) = S_2(E) \oplus A_2(E)$

Pour $f_1, \dots, f_k \in E^\star \;\; k \le n$

$\boldsymbol{f_1} \times \dots \times \boldsymbol{f_k}: E^k \to K: (x_1, \dots, x_k) \mapsto \big(f_1(x_1), \dots, f_k(x_k)\big)$

$\boldsymbol{f_1} \cdot \dots \cdot \boldsymbol{f_k}: E^k \to K: (x_1, \dots, x_k) \mapsto \sum_{\sigma \in G_k} f_{\sigma(1)} \dots f_{\sigma(k)}$

$\boldsymbol{f_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{f_k}: E^k \to K: (x_1, \dots, x_k) \mapsto \sum_{\sigma \in G_k} \varepsilon(\sigma) f_{\sigma(1)} \dots f_{\sigma(k)}$

$f_1 \times \dots \times f_k \in L_k(E)$

$f_1 \cdot \dots \cdot f_k \in S_k(E)$

$f_1 \wedge \ldots \wedge f_k \in A_k(E)$
Pour $B = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E
Pour $1 \leq k \leq n$ alors $\left(e_{i_1}^\star \times \ldots \times e_{i_k}^\star\right)_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n}$ est une base de $L_k(E)$
Pour $1 \leq k \leq n$ <u>si $car(K) > k$ ou $car(K) = 0$</u> alors $\left(e_{i_1}^\star \cdot \ldots \cdot e_{i_k}^\star\right)_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n}$ est une base de $S_k(E)$
Pour $1 \leq k \leq n$ alors $\left(e_{i_1}^\star \wedge \ldots \wedge e_{i_k}^\star\right)_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n}$ est une base de $A_k(E)$
$\dim_K\left(L_k(E)\right) = n^k$
$\dim_K\left(S_k(E)\right) = \binom{n+k-1}{k} = |\{(i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k \mid 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n\}|$
$\dim_K\left(A_k(E)\right) = \binom{n}{k}$
Le **déterminant d'une famille à $\boldsymbol{n}$ éléments dans une base $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{e_i})_{\boldsymbol{1 \leq i \leq n}}$ de $\boldsymbol{E}$** est $\det_B(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n x_{\sigma(j),j} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n x_{j,\sigma(j)}$
$\forall f \in A_{K,n}(E, K) \quad f = f(B) det_B$
Pour B base de E $\det_B(B) = 1_K$
Pour B base de E $\det_B$ est une base de $A_{K,n}(E, K)$ qui est donc de dimension 1.
Pour B base de E $\det_B$ est l'unique $f \in A_{K,n}(E, K)$ tel que $f(B) = 1$
Pour B, B' bases de E $\det_{B'} = \det_{B'}(B) \det_B$
Une famille $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ est libre ssi $\exists/\forall B$ base de E $\det_B(x_1, \ldots, x_n) \neq 0_K$
Pour $u \in L_K(E)$, $\exists!\, \mathbf{det}(\boldsymbol{u}) \in K$ $\forall \phi \in A_{K,n}(E, K)$ $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ $\phi\left(u(x_1), \ldots, u(x_n)\right) = \det(u)\, \phi(x_1, \ldots, x_n)$
Pour $u \in L_K(E)$ $\exists!\, \mathbf{det}(\boldsymbol{u}) \in K$ $\forall B$ base de E, $\det(u) = \det_B\left(u(B)\right) = \det_B\left(u(e_1), \ldots, u(e_n)\right)$
Dans un Kev sur un corps K, le déterminant de la composée d'endomorphismes est le produit des déterminants. $\forall u, v \in L_K(E)$ $\det(v \circ u) = \det(v) \det(u)$
$\forall u \in L_K(E)$ $\forall \alpha \in K \quad \det(\alpha u) = \alpha^n \det(u)$
Un endomorphisme d'un Kev de dim finie est inversible ssi son déterminant est non nul. $u \in GL(E) \Leftrightarrow \det(u) \in K^*$
Dans ce cas le déterminant de l'endomorphisme inverse est l'inverse du déterminant. $\det(u^{-1}) = \det(u)^{-1}$
Le **déterminant d'une matrice carrée de $\boldsymbol{M_n(K)}$** est $\mathbf{det}\, \boldsymbol{A} = \det_B(C_1^A, \ldots, C_n^A)$. C'est aussi le déterminant de l'endomorphisme canonique de K^n associé à la matrice.
Sur un corps K, le déterminant du produit de matrices de $M_n(K)$ est le produit des déterminants.
$\forall A \in M_n(K)$ $\forall \alpha \in K \quad \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$
Une matrice de $M_n(K)$ est inversible ssi son déterminant est non nul. $A \in GL_n(K) \Leftrightarrow \det(A) \in K^*$
Dans ce cas le déterminant de la matrice inverse est l'inverse du déterminant. $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
Une matrice de $M_n(X)$ sur un anneau X est inversible ssi son déterminant est inversible dans l'anneau.
Deux matrices carrées semblables ont même déterminant. $\forall A, B \in M_n(K)$ $A \approx B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$
Le déterminant d'un endomorphisme est égal au déterminant de sa matrice représentative dans n'importe quelle base. $\forall B$ base de E, $\det(u) = \det[u]^B$
Une matrice carrée et sa transposée ont même déterminant. $\forall A \in M_n(K) \det(A) = \det(A^T)$
Ainsi le déterminant d'une matrice carrée est aussi celui de ses lignes. $\det A = \det_B(L_1^A, \ldots, L_n^A)$
Un endomorphisme et sa transposée ont même déterminant. $\forall u \in L_K(E)$ $\det(u) = \det(u^T)$
Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit de ses éléments diagonaux. $\forall A \in T_n^S(K) \cup T_n^I(K) \quad \det A = \prod_{i=1}^n A_{i,i}$
Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs (supérieure ou inférieure) est le produit de ses matrices diagonales.
Operations sur les lignes et les colonnes.
$B = L_i \leftrightarrow L_j(A) \Rightarrow \det B = -\det A$ Permuter deux lignes/colonnes, donne un déterminant opposé.

$B = L_i \leftarrow \lambda L_i(A) \Rightarrow \det B = \lambda \det A$ Dilater une ligne/colonne par λ, multiplie le déterminant par λ.
$B = L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j(A) \Rightarrow \det B = \det A$ Faire une transvection ne change pas le déterminant.
Mêmes résultats pour les lignes et les colonnes.

Développement du déterminant.

Pour $A \in M_n(K)$, on note $\boldsymbol{\Delta^A_{i_0,j_0}} = \det\left[A_{i,j}\right]_{\substack{1\le i,j\le n \\ i\ne i_0, j\ne j_0}}$ le déterminant de la matrice extraite de A en enlevant la ligne i_0 et la colonne j_0.
Pour $A \in M_n(K)$, **le cofacteur (i,j) de A** est $(-1)^{i+j}\Delta^A_{i,j}$

Développement du déterminant selon la j-eme colonne. $\forall j \in \{1,\dots,n\}$ $\det A = \sum_{i=1}^n A_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta^A_{i,j}$

Développement du déterminant selon la i-eme ligne. $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ $\det A = \sum_{j=1}^n A_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta^A_{i,j}$

La **comatrice** d'une matrice $A \in M_n(K)$ est la matrice de ses cofacteurs : $\boldsymbol{com(A)} = \left[(-1)^{i+j}\Delta^A_{i,j}\right]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$

Formule de la comatrice. $\forall A \in M_n(K)$ $\left(com(A)\right)^T A = A\left(com(A)\right)^T = (\det A)I_n$

Pour $A \in GL_n(K)$, $A^{-1} = (\det A)^{-1}A\left(com(A)\right)^T = (\det A)^{-1}\left(com(A)\right)^T A$

Déterminants usuels.

$\forall \alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$ $\forall \beta_1,\dots,\beta_n \in K$

$$\det\left[\delta_{i,j}1_K + \alpha_i\beta_j\right]_{1\le i,j\le n} = \begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 \cdots & \alpha_1\beta_n \\ \alpha_2\beta_1 & \ddots & \alpha_2\beta_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n\beta_1 & \cdots & 1+\alpha_n\beta_n \end{vmatrix} = 1_K + \sum_{k=1}^n \alpha_k\beta_k$$

$\forall x_1,\dots,x_n \in K$ $\forall a,b \in K \mid a \ne b$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & b & \cdots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \cdots & a & x_n \end{vmatrix}$$ est solution du système $\begin{cases} \prod_{i=1}^n (x_i - a) = \Delta - au \\ \prod_{i=1}^n (x_i - b) = \Delta - bu \end{cases}$

Vandermonde. $\forall a_1,\dots,a_n \in K$ $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}\left(a_j - a_i\right)$

Matrice circulante. $\forall a_0,\dots,a_{n-1} \in C$ $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{\omega\in U_n} F(\omega) = \prod_{k=1}^n F\left(e^{\frac{i2\pi k}{n}}\right)$ avec $F = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$

Pour que le déterminant d'une matrice par blocs 2×2 se calcule comme le déterminant d'une matrice 2×2,

- il suffit qu'au moins un bloc soit inversible et commute avec un autre bloc adjacent
- il suffit que deux blocs adjacents commutent et que le corps K soit infini.

$\forall A,B,C,D \in M_n(K)$ $CD = DC$ et $D \in GL_n(K) \Rightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det AD - BC$

$\forall A,B,C,D \in M_n(K)$ $CD = DC$ et K infini $\Rightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det AD - BC$

Déterminants extraits.

Le rang d'une matrice A est la taille maximale d'une matrice carrée extraite de A dont le déterminant est non nul.
Plus précisément : Dans une matrice A, pour une sous-matrice carrée S de déterminant non nul et de taille $p <$ au rang r de A, on peut trouver une matrice carrée de taille $p+1$ contenant S et dont le déterminant est encore non nul.

Donc si en énumérant tous les sous-matrices $p+1$ contenant S, le déterminant fait 0 on sait que $r=p$.
Une sous-matrice d'une matrice A est **principale** ssi son déterminant est non nul et elle est de taille (maximale) $r\times r$ avec $r=rg(A)$
La fonction $rg: M_{n,p}(K)\to\mathbb{N}$ est semi-continue inférieurement donc $\forall A\in M_{n,p}(K)\ \exists U\in V_A\ \forall M\in U\ rg(M)\geq rg(A)$. Le rang ne peut localement qu'augmenter
$\overline{\{M\in M_{n,p}(K)|\ rg(M)=r\}}=\{M\in M_{n,p}\ |\ rg(M)\leq r\}$
$GL_n(K)$ est ouvert dense dans $M_n(K)$
Rang de la comatrice.
$\forall A\in M_n(K)\ \ rg(A)=n\Rightarrow rg\big(com(A)\big)=n$
$\forall A\in M_n(K)\ \ rg(A)\leq n-2\Rightarrow com(A)=0$
$\forall A\in M_n(K)\ \ rg(A)=n-1\Rightarrow rg\big(com(A)\big)=1$
Orientation d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension $n\geq 1$.
Deux bases B,C sont équivalentes ssi $\det_B(C)>0$. Autrement dit, l'unique $u\in L(E)$ telle que $f(B)=C$ vérifie $\det(u)>0$. Cela définit une relation d'équivalence sur les bases de E.
Il y a exactement deux classes d'équivalences. Choisir une telle classe c'est **orienter E**. On désigne la classe choisie comme **la classe directe**. Remarque : Les deux classes d'équivalences sont exactement les 2 orbites pour l'action de $GL(E)^+=\{u\in GL(E)|\ \det(u)>0\}$ sur l'ensemble des bases de E
Déterminant défini comme volume. Soit E un $\mathbb{R}$ev euclidien de dim n, muni d'une b.o.n.d. B

$$\forall x=(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_n})\in E^n\quad \det_B(x)=\begin{cases} vol(\{\sum_{k=1}^n\lambda_k\overrightarrow{x_k}:\forall k\ \ \lambda_k\in[0,1]\})\text{ si }x\text{ b. o. n. d.}\\ -vol(\{\sum_{k=1}^n\lambda_k\overrightarrow{x_k}:\forall k\ \ \lambda_k\in[0,1]\})\text{ si }x\text{ b. o. n. i.}\\ 0\text{ si }x\text{ pas une base de }E\end{cases}$$

Le parallélotope engendré par la famille x est $\{\sum_{k=1}^n\lambda_k\overrightarrow{x_k}:\forall k\ \ \lambda_k\in[0,1]\}$
Si L extension (finie) d'un corps K infini et $A,B\in M_n(K)$, si $A\approx B$ dans L alors $A\approx B$ dans K.
Système d'équations linéaires
Une **équation matricielle linéaire $m\times n$, $AX=B$** correspond au couple (A,B) avec $A\in M_n(K), B\in M_{m,1}(K)$
Une **solution de $AX=B$** est un $X\in M_{n,1}(K)$ tel que $AX=B$
Une **équation linéaire $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b$ de taille n** correspond à un $n+1$ uplet $(a_1,\dots,a_n,b)\in K^n\times K$ càd correspond à un couple (ϕ,b) avec $\phi\in(K^n)^\star, b\in K$
Une **solution de $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b$** est un $(x_1,\dots,x_n)\in K^n$ satisfaisant $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b$
Un **système d'équations linéaires $m\times n$** correspond à un ensemble ordonné fini de m équations linéaires de taille n. Càd $\begin{cases}\boldsymbol{a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,n}x_n=b_1}\\ \dots\\ \boldsymbol{a_{n,1}x_1+\cdots+a_{n,n}x_n=b_n}\end{cases}$.
Une **solution d'un système d'équations linéaires** est un $(x_1,\dots,x_n)\in K^n$ satisfaisant toutes les équations linéaires du système.
Un système d'équations linéaires $m\times n$ correspond à une équation matricielle linéaire $m\times n$, en posant $A_{i,j}=a_{i,j}$ et $B_i=b_i$.
On identifie les deux concepts sous le nom de **système d'équations linéaires (SLE) $m\times n$**, en adoptant le point de vue que l'on préfère selon les situations.
Le **système homogène associé à un SLE** est le même SLE avec $B=0$.
Une **solution homogène d'un SLE** est une solution du système homogène associé.
Deux SLE sont équivalents ssi ils ont les mêmes solutions.
Un **SLE est compatible** ssi il admet au moins une solution.
Pour un SLE sur un corps infini, on a 3 cas possibles : 1) pas de solution, 2) une unique solution, 3) une infinité de solution.
Pour un SLE homogène on a toujours au moins la solution nulle.

L'ensemble des solutions homogènes Σ_0 d'un SLE $m \times n$ est un Ksev de K^n de dimension $n - rg(A)$
S'il est non vide, l'ensemble des solutions Σ d'un SLE $m \times n$ est un Ksev affine de K^n de direction Σ_0, ainsi pour un $X_0 \in \Sigma$, on peut écrire $\Sigma = X_0 + \Sigma_0$. Dans ce cas SLE a une solution unique ssi $n = rg(A)$
Théorème de Rouché-Fontené. Un SLE admet une solution ssi $rg(A) = rg([A|B])$, dans ce cas le résultat précèdent s'applique $\Sigma = X_0 + \Sigma_0$ et $\dim(\Sigma_0) = n - rg(A)$
Un **SLE est de Cramer** ssi il est carré $(m = n)$ et admet exactement une solution, càd ssi $A \in GL_n(K)$
Formule de Cramer. Pour un SLE de Cramer, on a $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ $x_j = \frac{\det_{B_0}\left(C_1^A, \dots, C_{j-1}^A, B, C_{j+1}^A, \dots, C_n^A\right)}{\det A}$
Pivot de Gauss. L'élimination de Gauss-Jordan peut résoudre un système d'équations $AX = B$, où A est une matrice $n \times m$ de rang r, B est un vecteur fixé, et X le vecteur inconnu. On crée un tableau à n lignes et $m + 1$ colonnes en bordant la matrice A par le vecteur B. On applique des opérations sur les lignes (on multiplie à gauche par les matrices élémentaires) pour obtenir la matrice A sous forme **échelonnée réduite** : le nombre de 0 précédant le pivot (la première valeur non nulle) d'une ligne augmente ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste en fin de compte plus que des zéros, et les pivots valent tous 1.
Si les pivots de la matrice échelonnée réduite associée à $(A|B)$ sont situés uniquement dans les m premières colonnes (ce qui est toujours le cas si $= n$) et ont pour indice de colonnes $k_1, \dots, k_r$, alors la dernière colonne fournit une solution particulière, obtenue en prenant tous ses termes nuls sauf ceux situés à la ligne d'indice k_i et à qui on donne la valeur du terme situé à la ligne i de la dernière colonne, i variant de 1 à r.
On obtient la solution générale du système en ajoutant à cette solution particulière un élément quelconque du noyau de A. Celle-ci s'obtient en donnant des valeurs quelconques aux coefficients de X situés à un indice de ligne autre que les k_i, et en déterminant les coefficients situés aux lignes d'indice k_i de façon à satisfaire le système (ce qui est facile compte tenu de la forme échelonnée de la matrice).
Si le dernier pivot de la matrice échelonnée réduite associée à $(A|B)$ se situe dans la dernière colonne, alors il n'y a pas de solution.
Si la matrice A est carrée inversible (autrement dit, le système est de Cramer), alors on obtient dans la dernière colonne l'unique solution X du système.
Variante : dans l'algorithme précédent, si on se borne à obtenir une matrice échelonnée (non réduite), on obtient une matrice triangulaire supérieure. Il ne reste plus qu'à « remonter » pour retrouver les valeurs des coefficients de X.
Calcul de l'inverse d'une matrice. L'élimination de Gauss-Jordan peut être utilisée pour inverser une matrice carrée si celle-ci est inversible. Pour cela, on crée une matrice à n lignes et $2n$ colonnes en bordant la matrice A par la matrice identité I_n, ce qui génère une matrice augmentée (en) notée $[A|I]$. Si la matrice d'entrée est inversible, on applique l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice augmentée. La matrice finale est de la forme $[I|A^{-1}]$ et contient l'inverse de la matrice initiale dans sa section de droite.
Calcul du déterminant d'une matrice carrée. La façon dont change le déterminant par une opération élémentaire est connue, donc on peut appliquer le pivot de Gauss en observant comment le déterminant change à chaque opération, jusqu'à ce que la matrice soit triangulaire, où le déterminant est simplement le produit de la diagonale. En fait on peut faire ça qu'avec des transvections donc le det ne change jamais, on le calcul simplement à la fin en multipliant les coefficients diagonaux.