Chapitre 1. Ensembles

I. Rappels et quelques compléments

$\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{F}$ ssi $\forall x \in E\ \ x \in F$ ssi $\forall x\ (x \in E \Rightarrow x \in F)$

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}$ ssi $\forall x(x \in E \Leftrightarrow x \in F)$ ssi $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$

$\boldsymbol{C_E A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$

$\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B} = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$

$\boldsymbol{A\ \Delta\ B} = \{x \mid x \in A \text{ xou } x \in B\} = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

I.1. Parties

On note $\boldsymbol{P(E)}$ l'ensemble des parties d'un ensemble E. $P(E) = \{A : A \subseteq E\}$

L'ensemble des parties d'un ensemble a n elements, possede 2^n elements.

$\forall A\ \forall B\ P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

$\forall A\ \forall B\ P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

$\forall A\ \forall B\ A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

I.2. Relations

Une **relation binaire** d'un ensemble A vers un ensemble B, correspond à une partie de $A \times B$.

Une **relation binaire sur un ensemble** A correspond a une relation binaire de A vers A.

Le **domaine d'une relation binaire R de A vers B** est l'ensemble $\boldsymbol{D_R} = \{x \in A \mid \exists y \in B\ xRy\}$

L'image d'une relation binaire R de A vers B est l'ensemble $\boldsymbol{Im(R)} = \boldsymbol{R(X)} = \{y \in B \mid \exists x \in A\ xRy\}$

Si $A' \subseteq A, B' \subseteq B$, R relation binaire de A vers B, $\boldsymbol{R_{|A',B'}} = \{(x, y) \in A' \times B' \mid xRy\} = R \cap (A' \times B')$

I.3. Fonctions

Une **fonction partielle** d'un ensemble A vers un ensemble B correspond a une relation R de A vers B telle que $\forall x \in D_R\ \exists!\, y \in B\ xRy$.

Dans ce cas on peut noter $y = R(x)$

Une **fonction (totale) = application** d'un ensemble A vers un ensemble B correspond à une fonction de A vers B de domaine A, càd une relation binaire de A vers B telle que $\forall x \in A\ \exists!\, y \in B\ xRy$

On note $\boldsymbol{R} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$

On note $\boldsymbol{F(A, B)}$ ou $\boldsymbol{B^A}$ l'ensemble des fonctions d'un ensemble A vers un ensemble B.

La composée d'une fonction $f : A \to B$ par une fonction $g : B \to C$ est la fonction $\boldsymbol{g \circ f} : A \to C$ définie par $\forall x \in A\ g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$

La composition de fonctions est associative $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Images directes et réciproques.

Soit $X \subseteq A, X' \subseteq A, Y \subseteq B, Y' \subseteq B,\ I,\ \big(X_i \in P(A)\big)_{i \in I}, \big(Y_i \in P(B)\big)_{i \in I}$

$X \subseteq X' \Rightarrow f(X) \subseteq f(X')$

$f(\bigcap_{i \in I} X_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(X_i)$

$f(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$

$Y \subseteq Y' \Rightarrow f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Y')$

$f^{-1}(\bigcap_{i \in I} Y_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(Y_i)$

$f^{-1}(\bigcup_{i \in I} Y_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(Y_i)$

$f^{-1}(Y \setminus Y') = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(Y')$

$f^{-1}(C_B Y) = C_A f^{-1}(Y)$

$f_{|X}^{-1}(Y) = X \cap f^{-1}(Y)$

$X \subseteq f^{-1}\big(f(X)\big)$

f injective ssi $\forall X \subseteq A\ \ f^{-1}\big(f(X)\big) = X$

$f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y \cap f(A) \subseteq Y$

f surjective ssi $\forall Y \subseteq B\ \ f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y$

$f(X) \subseteq Y \Leftrightarrow X \subseteq f^{-1}(Y)$
$\forall Z \subseteq C\ \ (g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big)$
Fonctions injectives.
Une **fonction $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ est une injection/est injective** ssi tout image admet un unique antécédent
$f: A \to B$ injective ssi $\forall x \in A\ \forall x' \in A\ \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
$f: A \to B$ injective ssi $\forall y \in f(A)\ \exists!\, x \in A\ \ y = f(x)$
$f: A \to B$ injective ssi $\forall X \subseteq A\ \ f^{-1}\big(f(X)\big) = X$
$f: A \to B$ injective ssi f simplifiable à gauche (monomorphisme) dans la catégorie Set.
La composée d'injections est injective.
Pour une composée injective, la fonction intérieure est injective.
Une fonction <u>de domaine non vide</u>, est injective ssi elle admet un inverse gauche (extérieur).
Symboliquement $A \neq \emptyset \Rightarrow (f \text{ injective} \Leftrightarrow \exists h: B \to A\ \ h \circ f = id_A)$
Dans ce cas l'inverse gauche h est toujours surjectif, (puisque id est bijective)
Fonctions surjectives.
Une **fonction $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ est une surjection/est surjective** ssi tout élément d'arrivée est image.
$f: A \to B$ surjective ssi $\forall y \in B\ \ \exists x \in A\ \ y = f(x)$
$f: A \to B$ surjective ssi $f(A) = F$
$f: A \to B$ surjective ssi $\forall Y \subseteq B\ \ f\big(f^{-1}(Y)\big) = Y$
$f: A \to B$ surjective ssi elle est simplifiable à droite (épimorphisme) dans la catégorie Set.
La composée de surjections est surjective.
Pour une composée surjective, la fonction extérieure est surjective.
Une fonction est surjective ssi elle admet un inverse droit (intérieur).
Symboliquement $f \text{ surjective} \Leftrightarrow \exists h: B \to A\ \ f \circ h = id_B$. (<u>attention</u> $\Rightarrow$ requiert axiome du choix)
Dans ce cas l'inverse droit h est toujours injectif, (puisque id est bijective)
Fonctions inversibles.
Un **inverse d'une fonction $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$** est une fonction $g: B \to A$ inverse à droite et à gauche de f, càd telle que $g \circ f = id_A$ et $f \circ g = id_B$.
Une **fonction inversible** est une fonction qui admet un inverse.
L'inverse s'il existe est unique, càd une fonction inversible f n'admet qu'un unique inverse noté $\boldsymbol{f^{-1}}$.
Une fonction f qui admet un inverse gauche et qui admet un inverse droit, est inversible, et alors ces inverses droits et gauches sont égaux et ne sont autres que l'unique inverse f^{-1}.
Une fonction peut donc admettre, soit plusieurs inverses gauches et 0 inverse droit, soit plusieurs inverses droits et 0 inverse gauche, soit un unique inverse gauche et droit, soit 0 inverse gauche et 0 inverse droit.
L'inverse d'une fonction inversible f, est inversible d'inverse f. Autrement dit $(f^{-1})^{-1} = f$.
Fonctions bijectives.
Une **fonction $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ est une bijection/est bijective** ssi f injective et f surjective
$f: A \to B$ bijective ssi $\forall y \in B\ \exists!\, x \in A\ \ y = f(x)$
$f: A \to B$ bijective ssi elle est inversible. (ne requiert pas l'axiome du choix).
$f: A \to B$ bijective ssi elle est simplifiable (isomorphisme) dans la catégorie Set.
L'inverse $\boldsymbol{f^{-1}}$ d'une fonction bijective f est aussi appelé **la bijection réciproque de $\boldsymbol{f}$**.
L'inverse d'une fonction bijective est donc bijective d'inverse $(f^{-1})^{-1} = f$.
La composée de bijections est bijective.
Dans ce cas l'inverse de la composée est composée des inverses dans l'autre sens.
$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
Pour une composée bijective, l'extérieur est surjectif, et l'intérieur injectif.
Pour une fonction bijective, l'image directe de la réciproque d'une partie d'arrivée est l'image

réciproque de cette partie, donc pas de risque de confusion de notation.

I.4. Familles et produits

Une **famille** $(\boldsymbol{x_i} \in \boldsymbol{E})_{\boldsymbol{i\in I}}$ correspond à une application $x: I \to E$

L'union d'une famille $(\boldsymbol{X_i} \in \boldsymbol{E})_{\boldsymbol{i\in I}}$ correspond à $\bigcup_{\boldsymbol{i\in I}} \boldsymbol{X_i} = \{x \mid \exists i \in I\ x \in X_i\}$

L'intersection d'une famille $(\boldsymbol{X_i} \in \boldsymbol{E})_{\boldsymbol{i\in I}}$ correspond à $\bigcap_{\boldsymbol{i\in I}} \boldsymbol{X_i} = \{x \mid \forall i \in I\ x \in X_i\}$

Le produit d'une famille $(\boldsymbol{X_i} \in \boldsymbol{E})_{\boldsymbol{i\in I}}$ correspond à $\prod_{\boldsymbol{i\in I}} \boldsymbol{X_i} = \{(x_i \in \bigcup_{i\in I} X_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I\ x_i \in X_i\}$

I.5. Peut-on tout faire avec des ensembles

Paradoxe de Russel : $\{x \mid x \notin x\}$ ne peut pas être un ensemble.

I.6. Propriétés remarquables des relations binaires

Soit R une relation binaire sur une classe X.

Une relation est **réflexive** si tout élément est en relation avec lui-même : $\forall x \in X, xRx$

Une relation est **irréflexive** si aucun élément n'est en relation avec lui-même: $\forall x \in X, \neg xRx$

Une relation est **transitive** si la relation s'hérite linéairement : $\forall x, y, z \in X, xRy$ et $yRz \Rightarrow xRz$

Une relation est **symétrique** si la relation ne dépend pas de l'ordre: $\forall x, y \in X, xRy \Rightarrow yRx$

Une relation est **antisymétrique** si la relation dans les deux sens implique l'égalité : $\forall x, y \in X, xRy$ et $yRx \Rightarrow x = y$

Une relation est **asymétrique** si la relation n'est possible que dans un sens : $\forall x, y \in X, xRy \Rightarrow \neg yRx$ / ssi la relation est irréflexive et antisymétrique.

Sous irréflexivité, les notions antisymétrie et asymétrie coïncident.

Une **relation d'équivalence** est une relation réflexive, transitive, symétrique.

Deux éléments $x, y \in X$ sont **comparables** pour la relation, s'il y a au moins une relation entre les deux : xRy ou yRx

Une relation est **totale** si tout couple est comparable : $\forall x, y \in X, xRy$ ou yRx

Une relation est **trichotomique large** si tout couple est comparable ou égal : $\forall x, y \in X, xRy$ ou $x = y$ ou yRx

Une relation est **trichotomique stricte** si tout couple vérifie exactement une des 3 propositions xRy, $x = y$, ou yRx.

Alternativement, une relation est **trichotomique stricte** ssi elle est trichotomique large et asymétrique.

Pour une relation binaire notée $\leq$ on peut appelle une **relation stricte induite** notée $<$ définie par $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ et $x \neq y$

Pour une relation binaire notée $<$ on peut appelle une **relation large induite** notée $\leq$ définie par $x \leq y \Leftrightarrow x < y$ ou $x = y$

Une relation stricte induite est toujours irréflexive.

Une relation large induite est toujours réflexive.

Une relation binaire est réflexive ssi elle coïncide avec la relation large induite de sa relation stricte induite.

Une relation binaire est irréflexive ssi elle coïncide avec la relation stricte induite de sa relation large induite.

Ces propriétés montrent qu'il y a une dualité entre relation binaire réflexive et irréflexive. Une telle relation peut être vue dans son sens large (version réflexive) ou dans son sens strict (version irréflexive). Fixer l'une revient à fixer l'autre.

Soit $\leq / <$ une relation binaire dans sa version réflexive et irréflexive sur une classe X.

$<$ asymétrique $\Leftrightarrow$ $<$ antisymétrique

$\leq$ totale $\Leftrightarrow$ $<$ trichotomique faible

$<$ trichotomique $\Leftrightarrow$ $<$ a(nti)symétrique et trichotomique faible

$\leq$ **préordre = quasi-ordre /** $<$ **préordre strict**: $\leq$ transitive / $<$ transitive.

$\leq$ **ordre (partiel) /** $(\boldsymbol{X}, \leq)$ **ordonné (partiellement) /** $<$ **ordre strict /** $(\boldsymbol{X}, <)$ **ordonné strictement** ssi :

$$\begin{cases}\begin{cases}(\leq \text{ réflexive})\\ \leq \text{ transitive}\end{cases} / \leq \text{ préordre} \\ \qquad \leq \text{ antisymétrique}\end{cases} / \begin{cases}\begin{cases}(< \text{ irréflexive})\\ < \text{ transitive}\end{cases} / < \text{ préordre strict} \\ \qquad < \text{ a(nti)symétrique}\end{cases}$$

$\leq$ **ordre total /** $(\boldsymbol{X}, \leq)$ **ordonné totalement /** $<$ **ordre total strict /** $(\boldsymbol{X}, <)$ **ordonné strict totalement** :

$$\begin{cases}\leq \text{ ordre}\\ \leq \text{ total}\end{cases} / \begin{cases}\begin{cases}(\leq \text{ réflexive})\\ \leq \text{ transitive}\end{cases} / \leq \text{ préordre} \\ \qquad \leq \text{ antisymétrique} \\ \qquad\quad \leq \text{ total}\end{cases} / \begin{cases}\qquad \begin{cases}(< \text{ irréflexive})\\ < \text{ transitive}\end{cases} / < \text{ préordre strict} \\ \begin{cases} < \text{ a(nti)symétrique} \\ < \text{ trichotomique faible}\end{cases} / < \text{ trichotomique}\end{cases}$$

La relation d'équivalence $\approx$ **induite par un préordre** $\leq$ est definie par $x \approx y \Leftrightarrow x \leq y$ ou $y \leq x$
Un préordre sur un ensemble, devient un ordre si on quotiente par la relation d'équivalence qu'il induit.
Une relation d'équivalence sur un ensemble, est un préordre dont la relation d'équivalence induite est justement la relation en question.
Une **chaine sur un ensemble ordonné** $(E, \leq)$ correspond à une sous-partie totalement ordonnée.
Une chaine <u>dénombrable</u> sur un ensemble ordonné correspond à une suite finie ou infinie $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots$
Pour une relation qui n'est pas tout à fait un ordre partiel, une chaine est supposée dénombrable par défaut, la définition est plus restrictive.
Une **chaine pour une relation binaire** $(E, \rightarrow)$ correspond à une suite finie ou infinie $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \cdots$
Une **chaine stricte pour une relation réflexive/un préordre** $(E, \leq)$ correspond à une suite finie ou infinie $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$, pour la relation stricte associée.
Une relation $(\boldsymbol{E}, \rightarrow)$ **est noethérienne** ssi elle n'admet pas de chaine <u>infinie</u> $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \cdots$.
Un préordre $(\boldsymbol{E}, \leq)$ **est bien-fondé** ssi il n'admet pas de chaine <u>stricte</u> <u>infinie</u>, ssi sa relation stricte induite sur le quotient $\left(\frac{E}{\approx}, <\right)$ est noethérienne.
Un **ordre** $(\boldsymbol{E}, \leq)$ **est bien-fondé** ssi il n'admet pas de chaine <u>stricte</u> <u>infinie</u> ssi $(E, <)$ noethérien ssi toute partie non vide de $(E, \leq)$ admet un élément <u>minimal</u>.
$\leq$ **bon-ordre /** $(\boldsymbol{E}, \leq)$ **bien-ordonné /** $<$ **bon-ordre strict /** $(\boldsymbol{E}, <)$ **bien-ordonné strictement** ssi $\leq$ est un ordre total bien-fondé ssi $<$ est un ordre total strict noethérien.
Toute partie non vide d'un ensemble bien-ordonné admet un (unique) élément <u>minimum</u>.
Une **antichaine sur un ensemble préordonné** correspond à un ensemble d'éléments incomparables deux à deux.
Un **idéal d'ordre sur un ensemble préordonné** correspond à une partie dont tout élément n'admet pas de supérieur en dehors de la partie.
Une **base d'un idéal d'ordre sur un ensemble préordonné** correspond à une sous-partie de l'idéal tel que tout élément de l'idéal admet au moins un inférieur ou égal dans cette sous-partie.
On dit que **l'idéal est engendré par** une partie, ssi c'est une base de cet idéal.
Higman (cf Carton). Etant donné un préordre $\leq$ sur un ensemble E, on a les <u>équivalences</u> :

1. Tout idéal d'ordre admet une base finie
2. Toute chaine croissante (pour $\subseteq$) d'idéaux $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots$ est stationnaire.
3. Toute suite infinie d'éléments de E contient une sous-suite infinie croissante.
4. Toute suite infinie d'éléments de E contient une sous-suite croissante de longueur 2.
5. Toute chaine stricte est finie, et toute antichaine est finie.
6. Tout préordre $\leq'$ qui prolonge le préordre considéré $\leq$ est bien fondé

Un **bon-préordre** est un préordre satisfaisant les conditions précédentes.
Une relation d'équivalence est un bon préordre ssi elle a un nombre fini de classes.

I.7. Relations d'équivalence

Une **relation d'équivalence sur** $\boldsymbol{E}$ est une relation binaire réflexive, transitive, symétrique sur E. Soit R une relation d'équivalence sur E.

Deux éléments $x, y \in E$ sont en relation (pour R) ssi xRy
La classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ est la classe des éléments qui lui sont en relation.
$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{R}} = \{y \in E \mid xRy\}$
Pour $x, y \in E$, on a $xRy \Leftrightarrow yRx \Leftrightarrow x \in [y] \Leftrightarrow y \in [x] \Leftrightarrow [x] = [y]$
Le quotient de E par une relation d'équivalence R sur E correspond à l'ensemble des classes d'équivalences. $\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{R}} = \{[x] : x \in E\}$
Une partition d'une classe E, est un ensemble de parties $A \subseteq P(E)$ disjointes, non vides, de réunion E.
Le quotient de E par une relation d'équivalence est une partition de E.
Une relation d'équivalence R sur E est compatible avec une l.c.i. $\times$ sur E ssi $\forall x, y, x', y' \in E \;\; xRx'$ et $yRy' \Rightarrow (x \times y)R(x' \times y')$
La loi quotient d'une l.c.i. $*$ sur E <u>compatible</u> avec une relation d'équivalence R sur E, est la loi $\otimes : \frac{E}{R} \times \frac{E}{R} \to \frac{E}{R} : ([x],[y]) \mapsto [x] \otimes [y] = [x \times y]$. Elle est bien définie grâce à la compatibilité.

II. Ensembles ordonnés

II.1. Relations d'ordre

Une **relation d'ordre** sur E est une relation binaire sur E, réflexive, antisymétrique, transitive.
Une **relation d'ordre total** sur E est une relation d'ordre sur E telle que tout élément de E peut être comparé à tout autre élément de E.
L'ordre naturel sur les nombres réels est une relation d'ordre total.
Si $(E, \leq)$ est un ensemble ordonne, on définit $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ et $x \neq y$

II.2. Ordres sur $N \times N$

Si $(E, \leq)$ est un ensemble ordonne, alors $E \times E$ est ordonné par **l'ordre produit $\leq_{\boldsymbol{p}}$** defini par $(x, y) \leq_p (x', y')$ ssi $x \leq x'$ et $y \leq y'$.
Si $(E, \leq)$ est un ensemble ordonne, alors $E \times E$ est ordonné par **l'ordre lexicographique $\leq_{\boldsymbol{l}}$** défini par $(x, y) \leq_l (x', y')$ ssi $x < x'$ ou $x = x'$ et $y \leq y'$
L'ordre produit est une relation d'ordre non totale, sauf si E contient 1 ou 0 éléments
L'ordre lexicographique dérivant d'une relation d'ordre total, est une relation d'ordre total.
La relation induite par une relation d'ordre, est une relation d'ordre.

II.3. Bornes et éléments maximaux.

Soit $\leq$ un ordre partiel sur une classe E, et A une partie de E.
Pour $M \in E$, M **majorant** de A dans $(E, \leq)$ ssi $\forall a \in A, a \leq M$
Un **majorant** est un élément supérieur ou égal à toute la partie.
Un **minorant** est un élément inférieur ou égal à toute la partie.
Un **élément maximal**, est un élément de la partie qui n'admet pas d'élément strictement supérieur.
Un **élément minimal**, est un élément de la partie qui n'admet pas d'élément strictement inférieur.
Un **élément maximum**, est un majorant de la partie qui appartient à la partie.
Un **élément minimum**, est un minorant de la partie qui appartient à la partie.
Un **supremum** est un minimum de l'ensemble des majorants de la partie.
Un **infimum** est un maximum de l'ensemble des minorants de la partie.
maximum $\Rightarrow$ maximal
minimum $\Rightarrow$ minimal
Pour un ordre total, maximum $\Leftrightarrow$ maximal, minimum $\Leftrightarrow$ minimal.

Le maximum/minimum/supremum/infimum s'il existe est unique.
S'il existe, le maximum est unique et est aussi l'unique maximal, et l'unique supremum de la partie.
S'il existe, le minimum est unique et est aussi l'unique minimal, et l'unique infimum de la partie.
A priori, quand l'ordre n'est pas total, il peut y avoir plusieurs maximaux / resp. minimaux. Si c'est le cas il n'y pas de maximum/ resp. minimum.
Si le maximum /resp. minimum/resp. supremum/resp. infimum existe on le note
$\underset{(E,\leq)}{Max}(A)$ resp. $\underset{(E,\leq)}{Min}(A)$ resp. $\underset{(E,\leq)}{Sup}(A)$ resp. $\underset{(E,\leq)}{Inf}(A)$

II.4. Segments

Un **segment d'une classe ordonnée** $(\boldsymbol{E},\leq)$ est une partie de E dont aucun élément n'admet un inferieur hors de la partie.
S segment de $(E,\leq)$ ssi $S \subseteq E$ et $\forall x,y \in E\ (x \in S$ et $y \leq x) \Rightarrow y \in S$
S segment de $(E,\leq)$ ssi $S \subseteq E$ et $\forall x \in S\ \ \overline{seg}(x) = \{y \in E \mid y \leq x\} \subseteq S$
S segment de $(E,\leq)$ ssi $\bigcup_{x\in S} \overline{seg}(x) \subseteq S \subseteq E$
Un **segment propre d'une classe ordonnée** $(\boldsymbol{E},\leq)$ est un segment de $(E,\leq)$ distinct de E.
Le segment ouvert d'un élément $\boldsymbol{a}$ d'une classe ordonnée $(\boldsymbol{E},\leq)$ est $\boldsymbol{seg}_{(\boldsymbol{E},\leq)}(\boldsymbol{a}) = \{x \in E \mid x < a\}$
Le segment fermé d'un élément $\boldsymbol{a}$ d'une classe ordonnée $(\boldsymbol{E},\leq)$ est $\overline{\boldsymbol{seg}}_{(\boldsymbol{E},\leq)}(\boldsymbol{a}) = \{x \in E \mid x \leq a\}$
Dans une classe ordonnée $(E,\leq)$, pour tout $a \in E$, $seg(a)$, et $\overline{seg}(a)$ sont des segments.
Dans une classe ordonnée $(E,\leq)$, E est toujours un segment, mais n'est jamais le segment ouvert ni ferme d'un de ses elements.
On note $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{E})$ l'ensemble des segments de E
On note $\boldsymbol{seg}(\boldsymbol{E}) = \{seg(a) : a \in E\}$. Attention $seg(E) \subset S(E)$ car $E \in S(E)$, $E \notin seg(E)$
On note $\overline{\boldsymbol{seg}}(\boldsymbol{E}) = \{\overline{seg}(a) : a \in E\}$

II.5. Homomorphisme d'ensembles ordonnées

Un **morphisme d'ordre** est une application entre deux classes ordonnées $(A,\leq),(B,\leq')$ telle que
$a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq' f(b)$
Un **isomorphisme d'ordre** est un morphisme d'ordre bijectif.
Un **endomorphisme d'ordre** est un morphisme d'ordre d'une classe ordonnée dans elle-même.
Un **automorphisme d'ordre** est un isomorphisme d'ordre qui est aussi un endomorphisme d'ordre.
Un morphisme d'ordre est toujours injectif.
Dans une classe ordonnée $(E,\leq)$, l'application $seg: (E,\leq) \to (S(E),\subseteq): a \mapsto seg(a)$ est un morphisme d'ordre, donc injectif, mais pas surjectif dans $S(E)$.

II.6. Bon ordre

Un **bon-ordre** sur un ensemble E est un ordre $\leq$ tel que toute partie non vide de E admet un minimum.
Un bon-ordre est toujours un ordre total.
L'ordre induit par un bon-ordre, est un bon-ordre.
$N \times N$ est bien ordonné par l'ordre lexicographique.
L'ordre produit n'est pas un bon ordre sur $N \times N$.
Pour un ensemble bien-ordonné $(E,\leq)$ l'ensemble des segments est $S(E) = \{seg(a) : a \in E\} \cup \{E\}$
Un endomorphisme d'ordre pour un bon-ordre, vérifie $\forall a \in E\ \ a \leq f(a)$
Un automorphisme d'ordre pour un bon-ordre, est nécessairement l'identité.
Entre deux ensembles biens-ordonnés, il n'existe qu'au plus 1 isomorphisme d'ordre.

Principe de Zermelo. Tout ensemble admet un bon-ordre.

II.7. Récurrence transfinie.

Soit F une partie d'un ensemble bien-ordonné $(E, \leq)$,

Si pour tout segment ouvert inclus dans la partie, son générateur provient de la partie, alors c'est E.

Si $\forall t \in E \;\; seg(t) \subseteq F \Rightarrow t \in F,$ alors $F = E.$

Soit $P(x \in E)$ un propriété s'appliquant aux éléments d'un ensemble bien-ordonné $(E, \leq)$,

Si $\forall t \in E \left(\forall x \in seg(t)\; P(X)\right) \Rightarrow P(t)$ alors $F = E.$

Chapitre 2. Axiomes, Cardinaux.

I. Théorie axiomatique – Zermelo-Fraenkel

I.1. Les axiomes (presque) simples

Axiome d'extensionalité. Deux ensembles contenant les mêmes éléments sont égaux.

$\forall A\, \forall B \;\; (\forall x\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B)$

Axiome de l'ensemble vide. Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément.

$\exists \emptyset\; \forall x\; x \notin \emptyset$

Dans ce cas $\emptyset$ est unique

Axiome de la paire. Pour tous ensembles a, b il existe un ensemble $\{a, b\}$ contenant a, b et rien d'autre

$\forall a\, \forall b\;\; \exists E\; \forall x\, (x \in E \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = b)$

Dans ce cas E est unique et on le note $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$

Axiome de la réunion. Pour tout ensemble I, il existe un ensemble dont les éléments, sont les éléments des éléments de I.

$\forall I\; \exists U\; \forall x\, (x \in U \Leftrightarrow \exists e \in I\; x \in e)$

Dans ce cas U est unique et on note $\bigcup \boldsymbol{I}$

Axiome de l'ensemble des parties. Pour tout ensemble A, il existe un ensemble P dont les elements dont les ensembles contenus dans A

$\forall A\; \exists P\;\; \forall x\, (x \in P \Leftrightarrow x \subseteq A)$

Dans ce cas P est unique et on note $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$

Axiome de l'infini. Il existe un ensemble infini.

$\exists N\; (\emptyset \in N \text{ et } \forall n \in N\; n \cup \{n\} \in N)$

I.2. Axiomes techniques

Axiome de séparation. Si $p(x, x_1, \dots, x_k)$ est un prédicat utilisant les symboles $=, \in, \Rightarrow, \wedge, \vee, \neg$, on a :

$\forall x_1 \dots \forall x_k \;\; \forall X \;\; \exists E\; \forall x \left(x \in E \Leftrightarrow p(x, x_1, \dots, x_k)\right)$

Dans ce cas E est unique et on le note $\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_k})\}$

Axiome de substitution. Soit $X, x_1, \dots, x_k$ des ensembles, Soit $p(x, y, x_1, \dots, x_k)$ un prédicat fonctionnel de $x \in X \to y$ cad tel que $\forall x \in X\; \exists!\, y\; p(x, y, x_1, \dots, x_k)$. Alors on a

$\exists Y\; \forall y \left(y \in Y \Leftrightarrow \exists x \in X\; p(x, y, x_1, \dots, x_k)\right)$

Dans ce cas Y est unique et on le note $\{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, ., \boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_k}) : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}\}$

On peut pas écrire cette forme avec l'axiome de séparation a priori, car Y n'est pas défini. A posteriori c'est possible. On a $Y = \{y \in Y : \exists x \in X\; p(x, y, x_1, \dots, x_k)\}$ avec $Y = \{p(x, ., x_1, \dots, x_k) : x \in X\}$

Axiome de fondation. Tout ensemble non vide A admet un élément $a \in A$ tel que $a \cap A = \emptyset$

I.3. Conséquences

Il n'y a qu'un seul ensemble vide

Le singleton $\{a\}$ existe et est unique. Pour $a_1, \dots, a_n,\;\; \{a_1, \dots, a_n\}$ existe et est unique.

I.4. Entiers naturels

On utilise l'axiome de l'infini en posant $0 = \emptyset, 1 = 0 \cup \{0\}, 2 = 1 \cup \{1\}, \dots$

I.5. Classes ou ensembles

Il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles. (On peut cependant définir une classe de tous les ensembles)

I.6. Axiomes facultatifs

Axiome de choix. Formulations équivalentes :

$\forall A\ \exists\gamma: P(A) \to A\ \ \forall \emptyset \neq B \subseteq A\ \ \gamma(B) \in B$

$\forall (X_i \in E)_{i\in I}\ \ (\forall i \in I\ X_i \neq \emptyset \Rightarrow \prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset)$

I.7. Hypothèses équivalentes à l'axiome du choix.

Lemme de Zorn. Un ensemble non vide ordonné, dans lequel toute partie totalement ordonnée admet un majorant, contient un élément maximal.

Principe de Zermelo. Tout ensemble admet un bon ordre.

Lemme de Zorn ⇔ Principe de Zermelo ⇔ axiome du choix, sous les autres axiomes de ZF.

Relations $\in$ et $\subseteq$

Soit V la classe de tous les ensembles (existe dans la théorie NBG extension conservative de ZFC).

L'appartenance $\in$ est une relation binaire sur $V \times V$.

$\in$ est irréflexive et asymétrique (par axiome de fondation).

$\in$ est noethérienne (axiome de fondation).

Sur une classe X, $(X, \in_X)$ est un ordre strict ssi $\in_X$ est une relation transitive sur X.

L'inclusion $\subseteq$ est une relation binaire sur $V \times V$.

L'inclusion $\subseteq$ est un ordre partiel sur $V \times V$.

Pour une classe X, l'inclusion $\subseteq_X = \subseteq_{V|X\times X}$ est un ordre partiel sur $X \times X$.

$\forall A \subseteq P(X)\ \ \bigcap A$ est le minimum de A dans $\left(P(X), \subseteq_{P(X)}\right)$

$\forall A \subseteq P(X)\ \ \bigcap A$ est le maximum de A dans $\left(P(X), \subseteq_{P(X)}\right)$

$\forall A\ \ \bigcap A$ est le minimum de A dans $(V, \subseteq)$

$\forall A\ \ \bigcup A$ est le maximum de A dans $(V, \subseteq)$

II. Cardinaux

Un ensemble Y domine un ensemble X ssi il existe une injection de X vers Y.

La relation de dominance est réflexive et transitive.

II.1. Théorème de comparabilité.

Lemme. Soit deux ensembles bien ordonnes A, B, soient $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$, soit f_1 isomorphisme d'ordre de $(seg(a_1), \leq)$ sur $(seg(b_1), \leq)$, soit f_2 isomorphisme d'ordre de $(seg(a_2), \leq)$ sur $(seg(b_2), \leq)$, alors f_1 et f_2 coincident sur $seg(a_1) \cap seg(a_2)$.

Pour un ensemble bien-ordonné $(E, \leq)$, un segment propre est toujours de la forme $seg(a), a \in E$.

Deux ensembles bien-ordonnés tels que tout segment propre du premier est isomorphe à un segment propre du deuxième, alors le premier ensemble est isomorphe à un segment du deuxième ensemble.

Pour deux ensembles bien-ordonnés, alors l'un des deux est isomorphe à un segment de l'autre.

Théorème de comparabilité. Pour deux ensembles quelconques, l'un domine l'autre. Autrement dit la relation de dominance est totale.

Th de Schröder-Bernstein. Si un ensemble domine, et est dominé par un autre ensemble, alors **ils sont équipotents** (il existe une bijection entre les deux).

La relation d'équipotente est une relation d'équivalence sur les ensembles.

Le **cardinal** d'un ensemble, correspond à sa classe d'équipotente.

La relation de dominance, correspond à une relation d'ordre sur les cardinaux. Le théorème de Schröder-Bernstein en exprime sa propriété de symétrie.

Donc on peut écrire que B domine A ssi $card(A) \leq card(B)$.

$card(A) \leq card(A)$

$card(A) \leq card(B)$ et $card(B) \leq card(A) \Rightarrow card(A) = card(B)$

$card(A) \leq card(B)$ et $card(B) \leq card(C) \Rightarrow card(A) \leq card(C)$

II.3. Ensembles dénombrables

Un ensemble **fini** est un ensemble équipotent a $\{1, \dots, n\}$ pour un certain $n \in N$.

Dans ce cas son cardinal correspond à n.
Un ensemble **infini dénombrable** est un ensemble équipotent à N.
Un ensemble **dénombrable** est un ensemble fini ou infini dénombrable.
L'ensemble N^k est infini dénombrable.
Le produit fini d'ensembles infinis dénombrables est infini dénombrable.
Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
Il existe une surjection d'un ensemble infini dénombrable, vers un autre ensemble, ssi l'autre ensemble est également infini dénombrable.
Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

II.4. Ensembles non dénombrables

Pour tout ensemble X, $P(X)$ domine strictement X, cad $card(X) < card\big(P(X)\big)$
Par exemple $P(N)$ n'est pas dénombrable.
Axiome de l'hypothèse du continu. Il n'y a pas de cardinal compris strictement entre N et $P(N)$
L'hypothèse du continu est un axiome indépendant de ZFC.

II.5. Arithmétique cardinale.

La **somme de 2 cardinaux** est le cardinal de leur union.
Le **produit de 2 cardinaux** est le cardinal de leur produit cartésien.
L'addition de cardinaux est commutative et associative.
Le produit de cardinaux est commutatif, associatif, et distributif par rapport à l'addition.
Dans le cas des cardinaux finis, la somme et le produit correspondent à la somme et au produit sur N.
Soient a, b, c, d 4 cardinaux, si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$
Pour deux cardinaux a, b on note b^a le **cardinal puissance** qui est le cardinal de l'ensemble des applications de $A \to B$ avec $card(A) = a, card(B) = b$.
Si $card(A) = a$, alors $card\big(P(A)\big) = 2^a$, càd $card\big(P(A)\big) = 2^{card(A)}$
R est equipotent a $P(N)$ donc $card(R) = card\big(P(N)\big) = 2^{card(N)}$
Pour deux cardinaux a, b tel que a fini, $b^a = b \times \ldots \times b$ a fois.
On a les identités suivantes pour les cardinaux $a^{b+c} = a^b \times a^c$, $(ab)^c = a^c \times b^c$

Complément Ordinaux.

Une classe X est transitive ssi $\forall x \in X\ x \subseteq X$
Une classe X est transitive ssi $\forall x\ \forall y\ (y \in x \text{ et } x \in X) \Rightarrow y \in X$
Une classe X est transitive ssi $\bigcup X \subseteq X$
Une classe X est transitive ssi $X \subseteq P(X)$
V est transitif, $\emptyset$ est transitif.
X transitive $\Rightarrow \bigcup X$ transitive
X transitive $\Rightarrow P(X)$ transitive
X transitive $\Rightarrow X \cup \{X\}$ transitive
X transitive, Y transitive $\Rightarrow X \cup Y \cup \{X, Y\}$ transitive
$\forall C\ (\forall x \in C\ \ x \text{ transitive} \Rightarrow C \cup \bigcup C \text{ transitive})$
$\in$ est irréflexive, asymétrique, noethérienne (par axiome de fondation).
Sur une classe, l'appartenance est un ordre strict ssi l'appartenance est transitive.
Sur une classe transitive, l'appartenance est transitive ssi tous les éléments sont transitifs.
***X* est un ordinal** ssi X est transitif et $\in$ est ordre strict total (noethérien) (donc un bon-ordre strict) sur X
Un ordinal est donc toujours transitif.
Un ordinal vérifie la trichotomie pour $\in$, donc pour $x, y \in X$, soit $x \in y$, soit $y \in x$, soit $x = y$.
Pour un ordinal X, l'inclusion $\subseteq_X$ est totale : $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ \ x \subseteq y$ ou $y \subseteq x$
Pour un ordinal X, $\forall x, y \in X\ \ \ x \in y \Leftrightarrow x \subsetneq y$
Pour un ordinal X, $\leq_{\in_X} = \subseteq_X$ donc $\forall x, y \in X\ \ \ x \subseteq y \Leftrightarrow x \leq_\in y$

$\emptyset$ et $\{\emptyset\}$ sont des ordinaux.
L'ensemble vide est élément de tout ordinal non vide.
Tout élément d'un ordinal est un ordinal. $\alpha < \beta \in Ord \Rightarrow \alpha \in Ord$
On note $\boldsymbol{Ord} = \{X \mid X \text{ ordinal}\}$ la classe de tous les ensembles ordinaux.
Ord est un ordinal.
Burali-Forti. Ord est une classe propre car sinon on aurait $Ord \in Ord$.
Donc les propriétés vraies à l'intérieur des ordinaux, sont vraies pour les ordinaux eux-mêmes.
On note $<$ l'appartenance dans Ord, et $\leq$ l'inclusion. $< = \in_{Ord}$ et $\leq = \leq_{\in_{Ord}} = \subseteq_{Ord}$
Pour α, β ordinaux, soit $\alpha < \beta$, soit $\beta < \alpha$, soit $\alpha = \beta$.
Pour α, β ordinaux, $\alpha \leq \beta$ ou $\beta \leq \alpha$
$\alpha < \beta \in Ord \Rightarrow \alpha \in Ord$
Pour α ordinal, alors $\alpha \cup \{\alpha\}$ est un ordinal. $\alpha \cup \{\alpha\}$ est **le successeur de l'ordinal $\boldsymbol{\alpha}$**
On définit **la fonction successeur** est $\boldsymbol{s}: Ord \to Ord: \alpha \mapsto \alpha \cup \{\alpha\}$
On note $\mathbf{0} = \emptyset, \mathbf{1} = s(0), \mathbf{2} = s(1), \ldots$
L'ensemble des segments d'un ordinal se trouve être $S(\alpha) = s(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$
Le successeur d'un ordinal α est le plus petit ordinal (pour $\leq = \subseteq$) qui contient α.
L'union quelconque d'ordinaux est un ordinal.
Une intersection finie d'ordinaux est un ordinal. $\alpha, \beta \in Ord \Rightarrow \alpha \cap \beta \in Ord$
Un ensemble bien-ordonné est ordre-isomorphe a un unique ordinal α. De plus cet ordre-isomorphisme est unique.
Le lemme de Zorn admet une preuve plus courte via les ordinaux.
Récurrence transfinie pour les ordinaux.
Un **ordinal est limite** ssi ce n'est ni $0 = \emptyset$, ni le successeur d'aucun ordinal, càd $\alpha \notin \{0\} \cup s(Ord)$.
Un ordinal est donc soit 0, soit un ordinal successeur, soit un ordinal limite.
Soit $P(\alpha)$ une propriété paramétrée par un ordinal α.
Si $\begin{cases} P(0) \\ \forall \alpha \in Ord \;\; P(\alpha) \Rightarrow P(s(\alpha)) \\ \forall \lambda \text{ ordinal limite } (\forall \beta <_{Ord} \lambda,\; P(\beta)) \Rightarrow P(\lambda) \end{cases}$ / $\begin{cases} P(0) \\ \forall \lambda \in Ord \;\; (\forall \beta <_{Ord} \lambda,\; P(\beta)) \Rightarrow P(\lambda) \end{cases}$
Alors $P(\alpha)$ est vrai pour tout ordinal.