Chapitre 7. Groupes et algèbre linéaire.

I. Le groupe linéaire

I.1. Définitions et caractérisation

On appelle **groupe linéaire sur un Kev E**, l'ensemble des K-automorphismes de E. On note $\boldsymbol{GL(E)}$

Pour $n \in N^*$ on definit **le groupe linéaire d'ordre $\boldsymbol{n}$ sur $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{GL_n(K)}$** $= GL(K^n)$

En fixant une base d'un Kev E de dimension n, on voit que $GL(E)$ est ev-isomorphe a $GL_n(K)$

On note $\boldsymbol{M_n(K)}$ l'ensemble des matrices a coeffs dans K, et $\boldsymbol{GL^n(K)}$ les matrices inversibles dans K.

Le groupe linéaire d'ordre n sur K est canoniquement isomorphe a l'ensemble des matrices inversibles K

En dimension finie, $u \in GL(E) \Leftrightarrow \ker(u) = \{0\} \Leftrightarrow \det(u) \neq 0 \Leftrightarrow im(u) = E$

Faux en dim ∞, ex si $u: P \mapsto XP, \ker(u) = \{0\}, u \notin GL(E)$, si $u: P \mapsto P - P', u \in GL(E)$.

Lorsque $K = F_q$ avec $q = p^k$, p premier, on a $\left|GL_n(F_q)\right| = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1})$

I.2. Le groupe spécial linéaire

Le déterminant $det: GL_n(K) \to K^*$ définit un morphisme de groupes.

Le **groupe spécial linéaire d'ordre n sur K** est le noyau de $det: GL_n(K) \to K^*$, $\boldsymbol{SL_n(K)} = \ker(det)$

$1 \to SL_n(K) \to^i GL_n(K) \to^{det} K^* \to 1$ suite exacte scindée à droite par $s(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $GL_n(K)$ est le produit semi direct de $SL_n(K)$ et de K^*.

En général on a pas nécessairement $SL_n(K) \times K^* \approx GL_n(K)$

Le groupe spécial linéaire est un sous-groupe distingué du groupe linéaire. $GL_n(K)/SL_n(K)$ existe.

Lorsque $K = F_q$ avec $q = p^k$, p premier, on a $\left|SL_n(F_q)\right| = q^{n-1} \prod_{i=0}^{n-2} (q^n - q^i)$

Toute matrice $A \in GL_n(K)$ peut s'exprimer comme un produit fini de transvections et d'une seule matrice de dilatation. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det A \end{pmatrix}$

$SL_n(K)$ est engendré par les matrices de transvections.

I.3. Générateurs

Soit E un Kev de <u>dimension finie</u> n.

Relativement a 2 sous-espaces vectoriels F et G supplementaires dans E, on appelle **affinité vectorielle** sur F (de **base** F), de **direction** G, de **rapport** $\lambda \in K$, l'unique endomorphisme de E, qui se restreint a l'identité sur F et a l'homothétie de rapport λ sur G. Autrement dit $u(x = x_F + x_G) = x_F + \lambda x_G$.

Autrement dit c'est un endomorphisme dont le spectre est inclus dans $\{1, \lambda\}$.

Pour une affinité vectorielle u on a donc toujours $F = \ker(u - Id_E)$, $G = \ker(u - \lambda Id_E)$, donc toujours $E = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u - \lambda Id_E)$

L'identité de E est une affinité vectorielle de direction $G = \{0\}$ donc le rapport n'importe pas.

Une **homothétie de rapport $\boldsymbol{\lambda}$** est une affinité vectorielle de rapport λ avec $F = \{0\}$ cad $u = \lambda Id_E$.

Un **projecteur** est une affinité vectorielle de rapport $\lambda = 0$. Dans ce cas $E = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u)$ mais en fait $u^2 = u, \ker(u - Id_E) = im(u)$ et donc $E = im(u) \oplus \ker(u)$.

Une **symétrie** est une affinité vectorielle de rapport $\lambda = -1$. Dans ce cas $E = \ker(u - Id_E) \oplus \ker(u + Id_E)$, $u^2 = Id_E$

Une **dilatation** est une affinité vectorielle de base un hyperplan càd de direction une droite, et de rapport $\lambda \neq 1$. Dans ce cas $H = \ker(u - Id_E)$ hyperplan et $D = \ker(u - \lambda Id_E)$ droite.
Une dilatation **fixe son hyperplan** : $H = \ker(u - Id_E)$ ssi $\forall x \in H\ u(x) = x$ ssi $u|H = Id_H$
Sous l'hypothèse : $u \in GL(E)$ fixant un hyperplan H, les assertions suivantes sont équivalentes :
u dilatation d'hyperplan H, de rapport $\lambda \Leftrightarrow \det(u) = \lambda \neq 1 \Leftrightarrow u$ admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ et est diagonalisable $\Leftrightarrow im(u - Id) \nsubseteq H \Leftrightarrow \exists B$ base de E tel que $[u]^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \notin \{0,1\}$
On appelle **réflexion** une dilatation de rapport $\lambda = -1$, autrement dit c'est une symétrie sur un hyperplan.
Deux dilatations sont conjuguées dans $GL_n(K)$ ssi elles ont même rapport.
Soient *f* un endomorphisme d'un espace vectoriel *E*, $H = Ker(f - id)$ l'ensemble des vecteurs invariants, et $D = Im(f - id)$ (d'après le théorème du rang, dim(*H*) + dim(*D*) = dim(*E*)).
On dit que *f* est une **transvection** si *f* est l'identité, ou si *H* est un hyperplan (**base** de la transvection) (ce qui revient à dire que *D*, **direction** de la transvection, est une droite) et *D* est inclus dans *H* (c'est-à-dire que pour tout *x* de *E*, *f*(*x*) – *x* appartient à *H*).
Une transvection appartient $SL(E)$, n'est jamais l'identité, fixe toujours un hyperplan.
Sous l'hypothèse : $u \in GL(E)$ fixant un hyperplan H, les assertions suivantes sont équivalentes :
u transvection d'hyperplan H $\Leftrightarrow$ Pour toute forme linéaire f de noyau H, $u = Id_E + a \cdot f$ avec $a \in H$.
$\Leftrightarrow$ u n'est pas diagonalisable $\Leftrightarrow u \in SL(E)$ et $u \neq Id_E \Leftrightarrow \{0\} \neq im(u - Id_E) \subseteq H \Leftrightarrow \exists B$ base de E tel que $[u]^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Une transvection t d'hyperplan H et de droite D conjuguée par $u \in GL(E)$ fournit une transvection $u \circ t \circ u^{-1}$ d'hyperplan $u(H)$ et de droite $u(D)$
Deux transvections quelconques sont conjuguées dans $GL(E)$. Si $n \geq 3$ elles sont de plus conjuguées dans $SL(E)$
$SL(E)$ est engendré par les transvections. Tout élément de $SL(E)$ est produit d'au + n transvections, sauf si homothétie auquel cas il faut $n + 1$ transvections. (Perrin)
$GL(E)$ est engendré par les transvections et les dilatations.

I.4. Centre et commutateurs

Le centre du groupe linéaire, est l'ensemble des homothéties vectorielles.
Le centre du groupe spécial linéaire, est l'ensemble des homothéties de det 1 càd $\{\lambda Id_E : \lambda^n = 1\}$
Le **groupe projectif linéaire d'ordre n sur E** Kev de dim. n est l'ensemble $PGL(E) = \frac{GL(E)}{Z(GL(E))}$
Le **groupe projectif spécial linéaire d'ordre n sur E** Kev de dim. n est l'ensemble $PSL(E) = \frac{SL(E)}{Z(SL(E))}$
Lorsque $K = F_q$ avec $q = p^k$, p premier, on a $|PGL_n(F_q)| = \frac{|GL_n(F_q)|}{q-1}$, $|PSL_n(F_q)| = \frac{|PGL_n(F_q)|}{n \wedge (q-1)}$
Si $n \geq 3$ et $|K| \geq 3$, alors $D(GL_n(K)) = SL_n(K)$
Si $n \geq 3$ et $|K| \geq 4$, alors $D(SL_n(K)) = SL_n(K)$

Si $n \geq 3$ et $K = F_2$ ou F_3 alors $D\big(GL_n(K)\big) = D\big(SL_n(K)\big) = SL_n(K)$
Le groupe $PSL_n(K)$ est simple sauf si $n = 2$ et $K = F_2$ ou F_3
$GL_2(F_2) = SL_2(F_2) = PSL_2(F_2) \approx G_3$ tandis que $D\big(GL_2(F_2)\big) \approx \frac{Z}{3Z}$
$PGL_2(F_3) \approx G_4$ et $PSL_2(F_3) \approx A_4$
$PSL_2(F_4) = PGL_2(F_4) \approx A_5$
$PGL_2(F_5) \approx G_5$ et $PSL_2(F_5) \approx A_5$
$PGL_4(F_2) = PSL_4(F_2) \approx A_8$ mais $PSL_3(F_4)$ n'est pas isomorphe a $PSL_4(F_2)$ bien que $|PSL_3(F_4)| = |PSL_4(F_2)|$. C'est donc un exemple de deux groupes non isomorphes de même cardinal.

I.5. Propriétés de groupes

L'exposant d'un groupe $\boldsymbol{\omega(G)}$ (notation x) est le plus petit entier $n \in N^* \cup \{+\infty\}$ tq $\forall x \in G\ x^n = 1$.
Un groupe fini est toujours d'exposant fini, le ppcm des ordres de ses éléments.
Un groupe cyclique est d'exposant fini l'ordre de n'importe lequel de ses générateurs.
Pour un groupe abélien fini G, son ordre et son exposant $|G|$ et $\omega(G)$ ont mêmes diviseurs premiers donc l'ordre $|G|$ divise une puissance de l'exposant $\omega(G)$.
Un sous-groupe de $GL_n(C)$ est fini ssi son exposant est fini.
Un endomorphisme u d'un Kev de dim finie n est nilpotent ssi $\forall k \in \{1, \dots n\}\ tr\big(u^k\big) = 0$
Le groupe $GL_n(K)$ ne possède pas de sous-groupes arbitrairement petits.

I.6. Topologie du groupe linéaire

$GL_n(K)$ est un ouvert dense de $M_n(K)$. $GL_c(E)$ est un ouvert dense de $L_c(E)$ si E est de Banach.
$\boldsymbol{GL_n^+(R)} = \{M \in GL_n(R) \mid \det(M) > 0\}$, $\boldsymbol{GL_n^-(R)} = \{M \in GL_n(R) \mid \det(M) < 0\} = GL_n(R) \setminus GL_n^+(R)$
$GL_n^+(R)$ et $GL_n^-(R)$ sont homéomorphes par $M \mapsto MI_0$ avec I_0 matrice identité avec -1 à la place en 1,1.
$GL_n(C)$ est homéomorphe a $C^* \times SL_n(C)$
$GL_n^+(R)$ est homéomorphe a $R_+^* \times SL_n(R)$
Le groupe $GL_n(C)$ est connexe
Le groupe $SL_n(C)$ est connexe
exemple TODO illisible
$GL_n(R)$ a 2 composantes connexes homéomorphes : $GL_n^+(R)$ et $GL_n^-(R)$
$SL_n(R)$ est connexe
Les formes linéaires de $L(R^n)$ sont de la forme $u \mapsto tr(a \circ u)$ avec $a \in L(R^n)$
Tout hyperplan de $L(R^n)$ intersecte $GL_n(R)$

II. Groupe orthogonal

II.1. Groupe orthogonal général

II.1.1. Définitions

Soit E un Kev de dim finie n, $car(K) \neq 2$, et q une forme quadratique non dégénérée associée à sa forme polaire f
Le groupe orthogonal est $\boldsymbol{O(E,q)} = \boldsymbol{O(E,f)}$ $= \big\{u \in GL(E) \mid \forall x \in E\ q\big(u(x)\big) = q(x)\big\} = \big\{u \in GL(E) \mid \forall x, y \in E\ f\big(u(x), u(y)\big) = f(x,y)\big\}$, un élément est une **isométrie=automorphisme orthogonal** relativement a q/f.
Tout automorphisme orthogonal est de déterminant ± 1.
On note $\boldsymbol{O^+(E,q)} = \{u \in O(E,q) \mid \det(u) = 1\}$, $\boldsymbol{O^-(E,q)} = \{u \in O(E,q) \mid \det(u) = -1\}$
Le groupe spécial orthogonal est $\boldsymbol{SO(E,q)}$ $= \{u \in O(E,q) \mid \det(u) = 1\} = O^+(E,q)$

II.1.2. Generateurs

Une **symétrie** est un élément $u \in GL(E)$ tel que $u \neq Id_E$ et $u^2 = Id_E$. Pour une symétrie, il existe E^+ et E^- 2 sev supplémentaires dans E tel que $u|E^+ = Id_{E^+}$ et $u|E^- = -Id_{E^-}$.

Une réflexion correspond à une symétrie qui fixe un hyperplan.

Un **renversement** est une symétrie telle que $\dim E^- = 2$ (à vérifier, E^- ou E^+ ?)

Une **symétrie orthogonale** est une symétrie dans $O(E,q)$ autrement dit, c'est une symétrie dont les sous-espaces associés sont q-orthogonaux.

Une **réflexion orthogonale**, est une réflexion dans $O(E,q)$ autrement dit, c'est une symétrie orthogonale fixant un hyperplan.

Th. Cartan. Le groupe orthogonal est engendré par les réflexions orthogonales.

Rappel : Un **plan hyperbolique** est un plan pour lequel il existe une base telle que la matrice de la forme quadratique q est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $n \geq 3$ et si q admet des éléments isotropes on montre que toute droite non isotrope est intersection de 2 plans hyperboliques (donc non isotropes).

Th. Cartan-Dieudonné. Tout automorphisme orthogonal est produit d'au plus n réflexions orthogonales.

Un **renversement orthogonal** est un renversement dans $O(E,q)$, autrement dit, c'est une symétrie orthogonale telle que $\dim E^- = 2$.

Si $n \geq 3$ tout élément de $SO(E,q)$ est produit d'au plus n renversements.

II.1.3. Centre et commutateurs

Si $n \geq 3$ $Z\big(O(E,q)\big) = \{\pm Id_E\}$

Si $n \geq 3$ $Z\big(SO(E,q)\big) = \{Id_E\}$ si n impair, $= \{Id_E, -Id_E\}$ si n pair.

Si $n = 2$ et $|K| \geq 3$ alors $Z\big(O(E,q)\big) = \{\pm Id_E\}$

Si $n = 2$, $K = F_3$, et E pas un plan hyperbolique, alors $Z\big(O(E,q)\big) = \{\pm Id_E\}$

Si $n = 2$, $K = F_3$, et E plan hyperbolique, alors $O(E,q)$ est un groupe abélien.

Si $n = 2$, $SO(E,q)$ est un groupe abélien de groupe dérivé $D\big(SO(E,q)\big) = \{Id_E\}$.

$D\big(O(E,q)\big)$ est engendré par les produits de 2 réflexions conjuguées.

$D\big(O(E,q)\big)$ est engendré par les commutateurs de 2 réflexions.

$D\big(O(E,q)\big)$ est engendré par les carrés des éléments de $O(E,q)$

Si $n \geq 3$ alors $D\big(O(E,q)\big) = D\big(SO(E,q)\big)$

Tous les éléments de $O(E,q)/D\big(O(E,q)\big)$ sont d'ordre 2.

Un élément $u \in SO(E,q)$ d'un plan E est soit l'identite soit n'admet pas la valeur propre 1.

Pour $n \geq 3$ et $|K| \geq 4$, on a $Z\Big(D\big(O(E,q)\big)\Big) = Z\big(O(E,q)\big) \cap D\big(O(E,q)\big)$

Si $K = F_3, Z\Big(D\big(O(E,q)\big)\Big) = Z\big(O(E,q)\big) \cap D\big(O(E,q)\big)$

On a la suite $\{Id_E\} \lhd Z\big(O(E,q)\big) \cap D(O(E,q)) \lhd D\big(O(E,q)\big) \lhd SO(E,q) \lhd O(E,q)$

On sait $\frac{O(E,q)}{O^+(E,q)} \approx \{\pm 1\}$ et $Z\big(O(E,q)\big) \cap D\big(O(E,q)\big) \supset \{\pm Id\}$, l'etude des autres quotients est complexe.

II.2. L'espace euclidien canonique

II.2.1. Généralités

On suppose E R-ev de dimension n muni du produit scalaire canonique associée à sa forme quadratique.

Si $n \geq 1$, alors $O_n(R) \approx SO_n(R) \rtimes Z/2Z$ et ce produit est direct quand n est impair

La suite $1 \to SO_n(R) \to O_n(R) \to^{det} Z/2Z \to 1$ est exacte scindée à droite par $s(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)$

Un **endomorphisme semi-simple** est un endomorphisme tel que tout sous-espace stable admet un supplémentaire également stable par l'endomorphisme.
Tout élément de $O_n(R)$ est semi-simple

Soit $u \in O_n(R)$ alors $\exists B$ b.o.n. de E telle que $[u]^B = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& R_{\theta_1} && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& R_{\theta_s} \end{pmatrix}$

ou les R_{θ_i} sont des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$
Deux symétries telles que $\dim(\ker(s_1 - Id_E)) = \dim(\ker(s_2 - Id_E))$ sont conjuguées dans $SO_n(R)$
En particulier, deux renversements (resp. reflexions) sont toujours conjuguées dans $SO_n(R)$
Tout élément de $O_n(R)$ est produit d'au + n réflexions n réflexions orthogonales. On peut préciser.
Si $u \in O_n(R)$ alors u s'ecrit comme le produit d'exactement $p_u = n - \dim(\ker(u - Id_E))$ reflexions orthogonales.
Le groupe $SO_3(R)$ est simple.
Pour $n \geq 5$ le groupe $PSO_n(R)$ est simple.

II.2.2. Topologie de $\boldsymbol{O_n(R)}$

Le groupe $O_n(R)$ est compact.
C'est faux en general pour $O(E, q)$ avec q forme quadratique quelconque, même non dégénérée.
Le groupe $SO_n(R)$ est connexe.
Soit H un sous-groupe compacte de $GL_n(R)$, et K un compact convexe de R^n stable par tous les endomorphismes de H. Alors K admet un point fixe par tous les endomorphismes de H. Ce résultat permet de déterminer les sous-groupes compacts de $GL_n(R)$
Tout sous-groupe compact de $GL_n(R)$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(R)$

II.2.3. Petites dimensions

Dimension $\boldsymbol{n = 2}$. On considère le plan euclidien dans lequel on a choisi une orientation.
$SO_2(R) = \left\{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in R\right\}$ correspond à l'ensemble des **rotations** d'angle θ
$O_2(R) \setminus SO_2(R) = \left\{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in R\right\}$ correspond à l'ensemble des **symétries orthogonales**.
$SO_2(R)$ est commutatif.
$\forall S \in O_2(R) \setminus SO_2(R)\ \exists O \in O_2(R)\ OSO^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Une **rotation d'angle $\boldsymbol{\theta}$** de $SO_2(R)$ est donc un élément de $SO_2(R)$ dont la matrice est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dans n'importe quelle b.o.n.d.
Si r rotation d'angle θ et s une symétrie orthogonale, alors $s \circ r \circ s$ est une rotation d'angle $-\theta$
Méthode : Si r rotation d'angle θ et v vecteur unitaire, $\det(v, r(v)) = \cos(\theta)$ et $(v | r(v)) = \cos(\theta)$
Cela permet de déterminer facilement l'angle de rotation.

Les sous-groupes de $SO_2(R)$ sont de la forme $\left\{R_{\frac{2k\pi}{n}} : k = 1 \dots n\right\}$ avec $n \in N^*$, ils sont cycliques.

Les sous-groupes finis de $SO_2(R)$ sont donc les groupes de rotation des polygones réguliers.
Un sous-groupe fini de $O_2(R)$ est soit cyclique, soit isomorphe au groupe diédral.

Dimension $n = 3$.

Produit vectoriel de 2 vecteurs de R^3 : $(x, y, z) \wedge (x', y', z') = (yz' - y'z, z'x - x'z, xy' - x'y)$.
Le produit vectoriel de 2 vecteurs liés est nul. Le produit vectoriel de 2 vecteurs libres est orthogonal au plan engendré par ces 2 vecteurs, de plus la base $(a, b, a \wedge b)$ de R^3 est directe.
Soit $u \in O_3(R)$
Si $\dim(ker(u - Id_E)) = 3$ alors $u = Id_E$
Si $\dim(\ker(u - Id_E)) = 2$ alors u symétrie par rapport à un plan. Dans un b.o.n. $[u]^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Si $\dim(\ker(u - Id_E)) = 1$ dans une b.o.n. $[u]^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est une rotation d'angle θ par rapport au premier vecteur, ou bien $[u]^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ est le produit d'une rotation et d'une symétrie.
Si $\dim(\ker(u - Id_E)) = 0$, alors soit $u = -Id_E$, soit $[u]^B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ est produit d'une symétrie et d'une rotation, soit $[u]^B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ est produit d'un renversement et d'une rotation : càd une rotation.
Synthèse : Le groupe $SO_3(R)$ est composé des rotations tandis que $O_3(R)/SO_3(R)$ contient les symétries et les produits d'une rotation avec une symétrie.
Comme dans le cas $n = 2$, si $u \in SO_3(R) \setminus \{Id_E\}$, alors il existe une b.o.n. de R^3 dans laquelle $[u]^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec θ déterminé par $u| \ker(u - Id_E)^\perp \in L(R^2)$ et ne dépend pas de la b.o.n.d. de $\ker(u - Id_E)^\perp$ choisie.
Méthode : Détermination de l'axe et de l'angle de la rotation.
Soit $u \in SO_3(R) \setminus \{Id_E\}$. L'axe de la rotation u est donne par l'espace propre $\ker(u - Id)$. Le plan de rotation est $\ker(u - Id)^\perp$. La trace de u est egale a $1 + 2\cos(\theta)$. Ce qui permet de trouver l'angle a signe près. Pour déterminer le signe de l'angle de la rotation u, on fixe un vecteur unitaire e_1 de l'axe et on choisit une b.o.n. $\{e_2, e_3\}$ du plan telle que $\{e_1, e_2, e_3\}$ soit directe. Pour tout x $\in$plan, on a alors $u(x) = \cos(\theta)\, x + \sin(\theta)\, e_1 \wedge x$. En effet, on a d'une part $u(e_2) = \cos(\theta)\, e_2 + \sin(\theta)\, e_3$ et $e_3 = e_1 \wedge e_2$, d'autre part $u(e_3) = -\sin(\theta)\, e_2 + \cos(\theta)\, e_3$ avec $e_2 = -e_1 \wedge e_3$. On conclut par linéarité.
Tout sous-groupe fini de $SO_3(R)$ est soit cyclique soit diedral, soit isomorphe au groupe des déplacements d'un polyèdre regulier.* (utilise Burnside).
Décomposition d'une rotation en retournements.

Toute rotation de R^3 est le produit de 2 retournements. TODO clarifier…

III. Groupe unitaire

III.1. Cas général

Soit E un Cev de dim finie n, et q une forme quadratique non dégénérée associée à sa forme hermitienne h

III.1.1. Définitions

Le groupe unitaire est $\boldsymbol{U(E,q)} = \boldsymbol{U(E,h)}$ $= \{u \in GL(E) \mid \forall x \in E\ q(u(x)) = q(x)\} = \{u \in GL(E) \mid \forall x, y \in E\ h(u(x), u(y)) = h(x, y)\}$, un élément est une **isométrie=automorphisme unitaire** relativement a q/h.

Le déterminant d'un automorphisme unitaire est de module 1.

Le groupe spécial unitaire est $\boldsymbol{SU(E,q)}$ $= \{u \in U(E,q) \mid \det(u) = 1\}$

Un endomorphisme est un automorphisme unitaire ssi il est diagonalisable dans une b.o.n. et ses valeurs propres sont toutes complexes de module 1.

III.1.2. Centre et générateurs

Une quasi-symétrie par rapport au sous-espace $\boldsymbol{F}$ et de rapport $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{U}$, est un endomorphisme fixant F et dont la restriction a $F^{\perp_q}$ est $\lambda Id_{F^\perp}$.

Une quasi-symétrie hyperplane est une quasi-symétrie par rapport a un hyperplan.

Une quasi-symétrie d'hyperplan H conjuguee par un automorphisme unitaire, est une quasi-symétrie d'hyperplan $v(H)$ et de même rapport.

Tout automorphisme unitaire est le produit d'au plus n quasi-symétries hyperplanes.

Si $n \geq 2$ une **rotation unitaire plane** est un endomorphisme fixant l'orthogonal d'un plan P et tel que la restriction de cet endomorphisme a P est un élément de $SU(P, h|P)$.

Une rotation unitaire plane est une rotation unitaire.

Si $n \geq 2$ tout élément de $SU(E,h)$ s'ecrit comme le produit d'au plus $n-1$ rotation unitaires planes de E.

Si $n \geq 3$ alors $Z(U(E,h)) = \{\lambda Id_E : |\lambda| = 1\}$

Si $n \geq 3$ alors $Z(SU(E,h)) = \{\lambda Id_E : \lambda^n = 1\}$

Contrairement au cas orthogonal, les générateurs de $U(E,h)$ ou $SU(E,h)$ ne sont pas d'ordre 2.

On ne peut pas déterminer aussi facilement leur groupe dérivé.

III.2. Le groupe unitaire canonique

III.2.1. Généralités

On suppose E C-ev de dimension n muni du produit scalaire canonique associée a sa forme hermitienne.

Si $n \geq 1$, alors $U_n(C) \approx SU_n(C) \rtimes U$ et ce produit n'est pas direct.

La suite $1 \to SU_n(C) \to U_n(C) \to^{det} U \to 1$ est exacte scindée à droite.

Deux quasi-symétries de même rapport et dont le sous-espace des points fixes est de même dimension sont conjuguées dans $SU_n(C)$.

Soit $u \in U_n(C)$ et $p_u = \mathrm{n} - \dim(ker(u - Id_E))$, alors u s'écrit comme produit d'exactement p_u quasi-symétries.

Si $n \geq 3$ alors $PSU_n(C)$ est simple.

III.2.2. Topologie de $\boldsymbol{U_n(C)}$

Le groupe $U_n(C)$ est compact.

IV. Décomposition du groupe linéaire

IV.1. Décomposition de Dunford cf réduction

IV.2. Décomposition polaire

Soit E un Rev de dimension finie n muni d'une forme quadratique non dégénérée q.

Un automorphisme $u \in GL(E)$ est dit **positif** si $\forall x \in E\ (u(x)|x) \geq 0$, on dit qu'il est **défini** si $\forall x \in E, \big((u(x)|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0\big)$

On note $\boldsymbol{SDP(E) = S^{++}(E)}$ l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs.

$SDP(E)$ est un ensemble ferme

Décomposition polaire. Tout automorphisme $u \in GL(E)$ s'ecrit $u = o \circ s$ avec (o, s) unique tel que $o \in O(E)$ et $\in SDP(E)$.

De plus l'application $GL(E) \to O(E) \times SDP(E) : u \mapsto (o, s)$ est un homeomorphisme.

$GL_n(R)$ admet 2 composantes connexes.

Le groupe $O_n(R)$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(R)$

En fait toute matrice de $M_n(R)$ admet une decomposition polaire, mais elle n'est pas unique.

Tout élément de $g \in GL_n(R)$ s'ecrit $g = o \circ d \circ o'$ avec $o \in O_n(R), o' \in O_n(R)$ et d diagonale.

Attention, il n'y a pas unicité de cette précédente décomposition.

L'enveloppe convexe de $O_n(R)$ est la boule unité $B\big(L(R^n)\big)$

Rappel : Un **point extrémal** d'un ensemble F est un point a tel que si $a = \frac{1}{2}(b + c)$ avec $b, c \in F$ alors $b = c = a$.

L'ensemble des points extrémaux de la boule unité de $M_n(R)$ est $O_n(R)$

Pour la norme associée au produit scalaire $tr(A^T B)$ sur $M_n(R)$, la distance de la matrice nulle a $SL_n(R)$ est $d\big(0, SL_n(R)\big) = \inf_{M \in SL_n(R)} \|M\| = \sqrt{n}$. Cette distance est réalisée exactement sur $SO_n(R)$

Soit E un C-ev de dimension finie n muni d'une forme quadratique non dégénérée q.

On note $\boldsymbol{HDP(E) = H^{++}(E)}$ l'ensemble des endomorphismes hermitiens definis positifs.

Décomposition polaire. Tout automorphisme $u \in GL(E)$ s'ecrit $u = o \circ s$ avec (o, s) unique tel que $o \in U(E)$ et $\in HDP(E)$.

De plus l'application $GL(E) \to U(E) \times HDP(E) : u \mapsto (o, s)$ est un homeomorphisme.

La décomposition polaire généralise l'écriture d'un nombre complexe sous sa forme polaire.

IV.3. Décomposition d'Iwasawa

Toute matrice inversible réelle $M \in GL_n(R)$ s'ecrit de manière unique $M = OT$ avec O matrice orthogonale, et T matrice triangulaire superieure a coeffs strictement positifs.

De plus $GL_n(R) \to O_n(R) \times T_n^{+*} : M \mapsto OT$ est un homeomorphisme.

Toute matrice inversible complexe $M \in GL_n(C)$ s'ecrit de manière unique $M = UT$ avec U matrice unitaire, et T matrice triangulaire supérieure a coefficients strictement positifs.

De plus $GL_n(C) \to U_n(C) \times T_n^{+*} : M \mapsto UT$ est un homéomorphisme.

Complément 1. A propos de l'exponentielle.

1.1. Rappels et compléments sur l'exponentielle matricielle

Dans cette section $K = R$ ou C.

L'**application exponentielle matricielle** $\boldsymbol{exp}$: $M_n(K) \to M_n(K)$ est definie pour tout $M \in M_n(K)$ par la serie convergente $\exp(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k\,!}$, cette definition se generalise a une algebre de Banach.

On a $\forall M, N \in M_n(K) \quad MN = NM \Rightarrow \exp(M+N) = \exp(M)\exp(N)$
Plus précisément $\forall M, N \in M_n(K) \quad MN = NM \Leftrightarrow \forall t \in R \ \exp\big(t(M+N)\big) = \exp(tM)\exp(tN)$
L'exponentielle matricielle est a valeurs dans $GL_n(K)$, et $\exp(M)^{-1} = \exp(-M)$
Rappel : Une matrice $M \in M_n(K)$ est **nilpotente** ssi $\exists k \in N^* \ M^k = 0_n$. On note $\boldsymbol{Nil}$ l'ensemble des…
Rappel : Une matrice $M \in M_n(K)$ est **unipotente** ssi $\exists k \in N^* \ (M - I_n)^k = 0_n$. On note $\boldsymbol{Uni}$ l'ensemble
Pour tout $P \in GL_n(K)$ et tout $\Delta \in M_n(K)$ on a $\exp(P\Delta P^{-1}) = Pexp(\Delta)P^{-1}$
Si $\Delta = diag(x_1, \dots, x_n)$ alors $\exp(\Delta) = diag(e^{x_1}, \dots, e^{x_n})$
L'exponentielle d'une matrice triangulaire superieure de diagonale $(x_1, \dots, x_n)$ est une matrice triangulaire superieure de diagonale $(e^{x_1}, \dots, e^{x_n})$
Le déterminant de l'exponentielle est l'exponentielle de la trace $\det(\exp(M)) = \exp\big(tr(M)\big)$
La transposée de l'exponentielle est l'exponentielle de la transposée $\exp(M)^T = \exp(M^T)$
La conjuguée complexe de l'exp, est l'exp de la matrice conjuguée complexe $\overline{\exp(M)} = \exp\big(\overline{M}\big)$
L'exponentielle d'une matrice nilpotente est une matrice unipotente**.**
Soit $M \in M_n(C)$, dont $M = D + N$ est la décomposition de Dunford additive, alors
$\exp(M) = \exp(D)\exp(N)$ est la decomposition de Dunford multiplicative de $\exp(M)$ et $\exp(M) = \exp(D) + \exp(D)\,(\exp(N) - I_n)$ est sa decomposition de Dunford additive.
L'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable.
L'exponentielle d'une matrice trigonalisable est une matrice trigonalisable.
TODO : Etudier les réciproques de ces deux dernières propriétés
Soit E un Kev de dimension finie n. On peut étendre la définition matricielle de l'exponentielle.
$\boldsymbol{exp}: L(E) \to GL(E): u \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}$ et dans toute base B de E, $[\exp(u)]^B = \exp([u]^B)$
Les propriétés de l'exponentielle matricielle se transposent naturellement a ce cadre.
L'exponentielle matricielle est différentiable en 0_n et $d_{0_n}exp = Id_{M_n(R)}$
Rappel : Une suite de fonctions différentiables d'un ouvert U d'un Revn, vers un Revn F, dont les différentielles convergent uniformément sur U, et qui converge simplement sur U vers une fonction f, alors cette fonction f est différentiable sur U et $\forall a \in U \ \ d_a f_j \to_{j\to\infty} d_a f$. Si de plus, toutes les fonctions de la suite sont C^1 sur U alors, f est de classe C^1 sur U.
Rappel : Une série de fonctions différentiables d'un ouvert U d'un Revn, vers un Revn F, qui converge simplement sur U, et dont la série des différentielles converge uniformément sur U, alors la fonction somme $g = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ est différentiable sur U, et $\forall a \in U \ d_a g = \sum_{k=0}^{\infty} d_a f_k$. Si de plus, toutes les fonctions de la série sont C^1 sur U alors g est C^1 sur U.
Pour une matrice $M \in M_n(R)$ fixée, l'application $R \to GL_n(R) : t \mapsto \exp(tM)$ est infiniment derivable sur R, et sa derivee est $Mexp(tM)$, ainsi l'application vérifie l'équa diff : $Y' = MY$.
On définit $\boldsymbol{ad}(\boldsymbol{M}) : M_n(R) \to M_n(R) : N \mapsto [M,N] = MN - NM$ donc $ad(M) \in L_R\big(M_n(R)\big)$
On définit $\boldsymbol{Ad}(\boldsymbol{M}) : M_n(R) \to M_n(R) : N \mapsto MNM^{-1}$, donc $Ad(M) \in Aut_R\big(M_n(R)\big)$
L'application $Ad : GL_n(R) \to GL\big(M_n(R)\big)$ est une representation linéaire du groupe $GL_n(R)$ dans $M_n(R)$ appelée **représentation adjointe** du groupe de Lie $GL_n(R)$. L'application $ad : M_n(R) \to L_R\big(M_n(R)\big)$ obtenue par differentiation est une representation de l'algebre de Lie $M_n(R)$ dans elle-même appelée **représentation adjointe** de l'algèbre de Lie $M_n(R)$.
$\forall M \in M_n(R) \ \exp\big(ad(M)\big) = Ad(\exp(M))$

Soit $F : L_R\big(M_n(R)\big) \to L_R\big(M_n(R)\big) : \phi \mapsto F(\phi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1+k)\,!} \phi^k$ TODO verifier car illisible

L'application exponentielle est de classe C^1 sur $M_n(R)$ et pour tout $M \in M_n(R)$

$d_M exp = \exp(M)\, F\big(ad(M)\big) = H \mapsto \sum_{i,j \in N} \frac{M^i H M^j}{(i+j+1)\,!}$

Si $MH = HM$, alors $d_M \exp(H) = Hexp(M)$

Non-injectivite globale, injectivite locale, et diffeomorphie locale au voisinage de 0 de l'exp.

L'exponentielle matricielle n'est pas injective sur $M_n(K)$ lorsque $n \geq 2$, meme lorsque $K = R$.

L'ensemble des solutions $M \in M_n(C)$ de l'equation $\exp(M) = I_n$ est precisement forme des matrices diagonalisables dont le spectre est inclus dans $2i\pi Z$. En particulier, toute matrice réelle dont le spectre est inclus dans $2i\pi Z$ verifie $\exp(M) = I_n$.

L'exponentielle matricielle est localement injective au voisinage de 0_n, c'est un difféomorphisme local.

$\exists U \in V_{0_n} \exists V \in V_{I_n}\ \ exp: U \to V$ est un diffeomorphisme, en particulier exp $|U$ est injective.

Si $\varepsilon > 0$ est assez faible, $GL_n(R)$ n'admet qu'un seul sous-groupe contenu dans la boule unité de centre I_n, de rayon ε, c'est le sous-groupe trivial $\{I_n\}$.

On appelle **semi-groupe a un paramètre** de $GL_n(R)$, une application continue $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to G$ telle que $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)\ \ \forall s, t \in (-\varepsilon, \varepsilon) | s + t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Un **sous-groupe a un paramètre** de $GL_n(R)$ est un semi-groupe a un paramètre tel que $\varepsilon = \infty$.

Autrement dit, c'est un morphisme de groupes de $(R, +)$ vers $(GL_n(R), \times)$.

Les semi-groupes a un paramètre de $GL_n(R)$ sont exactement les applications $t \mapsto \exp(tM)$ avec $M \in M_n(R)$.

Soit E un R-ev de dimension finie. Les sous-groupes a un paramètres de $GL(E)$ sont exactement les applications de la forme $t \mapsto \exp(t\phi)$ avec $\phi \in L_R(E)$.

On retrouve la formule $\exp\big(ad(M)\big) = Ad(\exp(M))$

Logarithme matriciel et applications.

L'application **logarithme matriciel** notée **log** de la boule unité $B_R(I_n, 1) = \{M \in M_n(R) |\ \|M - I_n\| < 1\}$ vers $M_n(R)$ est definie par $\log(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (M - I_n)^k$. On a clairement $\log(I_n) = 0_n$.

$$\forall M \in B_R(I_n, 1)\ \ \exp(\log(M)) = M$$

Pour $M \in M_n(R)$ $\left(I_n + \frac{M}{k}\right)^k \to_{k \to \infty} \exp(M)$

Pour $M, N \in M_n(R)$ $\quad \left(\exp\left(\frac{M}{k}\right) \exp\left(\frac{N}{k}\right)\right)^k = \exp(M + N)$

Pour $M, N \in M_n(R)$ $\quad \left(\exp\left(\frac{M}{k}\right) \exp\left(\frac{N}{k}\right) \exp\left(-\frac{M}{k}\right) \exp\left(-\frac{N}{k}\right)\right)^{k^2} = \exp(MN - NM)$

L'application exp envoie Nil dans Uni.

L'application $\boldsymbol{log}: Uni \to Nil$ est definie par $\log(M) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (M - I_n)^k$.

L'application $exp: Nil \to Uni$ est un C^∞-diffeomorphisme d'inverse log.

L'application $exp: M_n(C) \to GL_n(C)$ est surjective. Plus précisément $\forall M \in GL_n(C)\ \exists P \in C[X]\ M = \exp\big(P(M)\big)$.

$GL_n(C)$ est connexe/arcs dans $M_n(C)$

Les matrices complexes d'exponentielle $= I_n$ sont les matrices diagonalisables de v.p.s dans $2i\pi Z$.

$\forall M \in GL_n(C)\ \exists B \in M_n(C) \exists k \in N\ \ B^k = M$

Sur $M_n(R)$, l'exponentielle matricielle est a valeurs dans $GL_n^+(R)$ qui est aussi la composante connexe de $GL_n(R)$ contenant I_n.
L'application $exp: M_n(R) \to GL_n^+(R)$ est surjective si $n = 1$, c'est faux si $n > 1$, plus precisement, $\exp\big(M_n(R)\big) = \{M^2 : M \in GL_n(R)\}$, et de plus $\forall M \in GL_n(R)\ \exists P \in R[X]\ M^2 = \exp\big(P(M)\big)$
Soit $M \in M_n(R), t_0 \in R, Y_0 \in M_{n,1}(R)$. L'unique solution $Y: R \to M_{n,1}(R)$ de $Y' = MY, Y(t_0) = Y_0$ est $Y(t) = \exp\big((t - t_0)M\big)\, Y_0$. Plus généralement si I intervalle ouvert, $t_0 \in I$, et $B: I \to M_{n,1}(R)$ est une application continue, alors l'unique solution de $Y' = MY + B, Y(t_0) = Y_0$ est $Y(t) = \exp\big((t - t_0)M\big)\, Y_0 + \int_{t_0}^{t} \exp\big((t - s)M\big)\, B(s)ds$
Soit $\Omega \in R^n$ et $f: R \times \Omega \to R^n$ une fonction C^1 telle que $\forall x \in R\ f(x, 0) = 0$.
La solution nulle de $Y'(t) = f\big(t, Y(t)\big)$ est dite **stable** si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $Y_0 \in R^n$ tel que $\|Y_0\| \leq \eta$, la solution $Y'(t) = f(t, Y(t))$ passant par Y_0 en $t = 0$ est globale et telle que pour tout $t \geq 0$, $\|Y(t)\| \leq \varepsilon$.
Elle est dite **attractive** si il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $Y_0 \in R^n$ tel que $\|Y_0\| \leq \eta$, la solution $Y'(t) = f(t, Y(t))$ passant par Y_0 en $t = 0$ est globale et telle que $Y(t) \to_{t \to \infty} 0$.
Elle est dite **asymptotiquement stable** si elle est stable et attractive.
Soit $M \in M_n(R)$. La solution nulle du système différentiel $Y' = MY$ est stable ssi toutes les valeurs propres de M sont de partie réelle ≤ 0 et les valeurs propres de multiplicite > 1 dans le polynome minimal de M sont de partie réelle < 0.
Elle est asymptotiquement stable ssi toutes les valeurs propres de M sont de partie réelle < 0.
Soit $f: \Omega \to R^n$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$. Si les valeurs propres complexes de $d_0 f$ sont de partie reelle < 0, alors la solution nulle du système $Y'(t) = f\big(t, Y(t)\big)$ est asymptotiquement stable.

1.2. Groupes topologiques

Un groupe topologique est un triplet $(G, \cdot, T)$ tel que $(G, \cdot)$ groupe, T topologie sur G, et tel que l'application produit de 2 élément est continue, et l'application inverse d'un élément est continue.
Un **sous-groupe topologique** d'un groupe topologique est un sous-groupe fermé dans le groupe topologique.
Un sous-groupe d'un groupe topologique est un groupe topologique pour la topologie induite, mais pas forcément un sous-groupe topologique.
L'adhérence de tout sous-groupe d'un groupe topologique, est aussi un sous-groupe topologique.
Le groupe linéaire réel d'ordre n, $GL_n(R)$, muni de sa topologie usuelle est un groupe topologique.
$GL_n(R)^2 \to GL_n(R): (M, N) \mapsto MN$ est continue puisque ses coordonnées sont polynomiales.
$GL_n(R) \to GL_n(R): M \mapsto M^{-1} = \frac{1}{\det M} co(M)^T$ est continue puisque ses coordonnées sont des fractions rationnelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur $GL_n(R)$.
$SL_n(R) = \{M \in GL_n(R) \mid \det(M) = 1\}, O_n(R) = \{M \in GL_n(R) \mid M^T M = I_n\}, SO_n(R) = O_n(R) \cap SL_n(R)$ sont des sous-groupes topologiques de $GL_n(R)$.
Chacun de ces sous-groupes peut être vu comme lieu d'annulation d'un nombre fini de polynômes : ils sont donc fermes dans $GL_n(R)$.
Un sous-groupe d'un groupe topologique est ouvert dans le groupe ssi le neutre est un point intérieur du sous-groupe.
Tout sous-groupe d'un groupe topologique qui est ouvert dans le groupe est un sous-groupe

topologique du groupe.
La composante connexe du neutre d'un groupe topologique est un sous-groupe normal du groupe.
Les composantes connexes d'un groupe topologique sont isomorphes entre elles.
Le quotient (à gauche resp. à droite) d'un groupe topologique G par un sous-groupe H peut etre muni de la topologie quotient, la plus fine telle que $\pi: G \to G/H$ continue. En général G/H pas un groupe.
Le quotient d'un groupe topologique par un sous-groupe topologique est séparé.
Le quotient d'un groupe topologique compact par un sous-groupe topologique est compact.
Dans un groupe topologique G, si un sous-groupe H est connexe, et le quotient G/H est connexe, alors G est aussi connexe.
Une action d'un groupe topologique G sur un espace topologique E est dite **continue** si $G \times E \to E: (g, x) \mapsto gx$ est continue sur $G \times E$ muni de la topologie produit.
Rappel : L'application naturelle $f_x: \frac{G}{G_x} \to Gx$ est une bijection. Avec $G_x = Stab(x)$.
Le groupe topologique $SO_n(R)$ est connexe. Agit continument sur la sphère S^{n-1} de $(R^n, \| \quad \|_2)$
$O_n(R)$ a 2 composante connexes.
TODO, finir la section (algèbre de lies)

Complément 2. Empilement optimal de disques dans le plan
2.1. Lien entre réseaux et formes quadratiques
2.2. Empilement et admissibilité
Complément 3. Action de $PSL_2(Z)$ sur le demi-plan de Poincare.
3.1. Definition de l'action de $SL_2(Z)$
3.2. Toute orbite rencontre D
3.3. Lorsque deux points appartiennent a cette intersection
3.4. Generateurs du groupe $SL_2(Z)$
Complement 4. Le groupe symplectique
4.1. Définitions
4.2. Centre et générateurs

Chapitre 8. Groupes et géométrie
I. Le groupe affine
Soit E un espace affine de direction $\vec{E}$ sur un corps K.
I.1. Généralités et rappels
Une application $f: E_1 \to E_2$ entre deux espaces affines est une **application affine** si il existe une application linéaire $\vec{f}: \overrightarrow{E_1} \to \overrightarrow{E_2}$ telle que $\forall M, N \in E_1 \ \overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{f}(\overrightarrow{MN})$
Autrement dit ssi $\exists \vec{f}: \overrightarrow{E_1} \to \overrightarrow{E_2}$ linéaire telle que $\exists/\forall A \in E_1 \ \forall \vec{u} \in \overrightarrow{E_1} \ f(A + \vec{u}) = f(A) + \vec{f}(\vec{u})$
L'application $\vec{f}$ est alors unique et appelée **partie linéaire** de l'application affine f.
Une application affine est entièrement déterminée par sa partie linéaire et l'image d'un point $(A, f(A))$.
Ajouter une constante à une application affine la laisse affine, et ne change pas sa partie linéaire.
L'image d'un barycentre par une application affine est le barycentre des images en gardant mêmes coefficients de pondération.
L'image directe d'un sous-espace affine $A + \vec{V}$ par une application affine f est le sous-espace affine

$f(A) + \vec{f}(\vec{V})$
L'image réciproque par une application affine f d'un sous-espace affine de direction $\vec{W}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $f^{-1}(\vec{W})$.
En particulier une application affine **conserve l'alignement** = 3 points alignés donne 3 points alignés.
Une application entre deux R-espaces affines de même dimension $n \geq 2$, est une application affine ssi elle conserve l'alignement.
La composée de deux applications affines est une application affine de partie linéaire la composée des parties linéaires.
Un **isomorphisme affine**, est une application affine bijective. Càd si sa partie linéaire est isomorphisme.
Un isomorphisme affine est de partie linéaire, un isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme affine est une application également affine dont la partie linéaire est la réciproque de la partie linéaire.
On note $\boldsymbol{GA(E)}$ l'ensemble des automorphismes affines d'un espace affine E muni de la composition affine notée $\circ$.
Si E est de dimension finie et $K = R$ ou C alors tout automorphisme affine est un homéomorphisme.
Les translations d'un espace affine sont des isomorphismes affines.
Un endomorphisme affine est une translation ssi sa partie linéaire est l'identité $\vec{f} = Id_{\vec{E}}$
Un endomorphisme affine est une **homothétie de rapport $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{K}^*$** ssi sa partie linéaire est $\vec{f} = k \cdot Id_{\vec{E}}$
L'application $\phi: GA(E) \to GL(\vec{E}): f \mapsto \vec{f}$ est un morphisme de groupes surjectif.
Le noyau de ϕ est l'ensemble $\boldsymbol{T(E)}$ des translations sur E.
$T(E)$ est un sous-groupe distingué de $GA(E)$.
Un point O étant fixé, l'ensemble $\boldsymbol{GA_O(E)}$ des automorphismes affines admettant O comme point fixe, est un sous-groupe de $GA(E)$. La restriction $\phi: GA_O(E) \to GL(\vec{E})$ est un isomorphisme.
Si $f \in GA(E)$, on peut écrire de façon unique $f = t_{\vec{u}} \circ f_O$ avec $t_{\vec{u}} \in T(E)$ et $f_O \in GA_O(E)$, et dans ce cas $\vec{u} = \overrightarrow{Of(O)}$, et f_O est l'unique automorphisme affine de même partie linéaire $\vec{f}$ que f et fixant O.
Le groupe affine est produit semi-direct $T(E) \rtimes GA_O(E)$
Le groupe des translations $T(E)$ est un groupe commutatif isomorphe à $(\vec{E}, +)$
I.2. Le groupe des homothéties-translations
Si V et W sont 2 sous-espaces affines supplémentaires, **l'affinité affine sur $\boldsymbol{V}$ de direction $\boldsymbol{\vec{W}}$ de rapport $\boldsymbol{\lambda}$** est l'application qui à tout M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{HM'} = \lambda\overrightarrow{HM}$ avec $H_M = V \cap (M + \vec{W})$ singleton car V et $M + \vec{W}$ sont aussi supplémentaires. $f(M) = H_M + \lambda\overrightarrow{HM}$. Avec $H_M = p_{V,\vec{W}}(M)$. Dans ce cas H_M est un point fixe et $\overrightarrow{f(H_M)f(M)} = \lambda\overrightarrow{H_M M}$.
Une **homothétie affine de rapport $\boldsymbol{\lambda}$** est une affinité affine de rapport λ avec V un point, on parle de **centre** de l'homothétie. Dans ce cas $f(M) = V + \lambda\overrightarrow{VM}$ cad $\overrightarrow{f(V)f(M)} = \lambda\overrightarrow{VM}$.
L'homothétie affine de centre Ω, de rapport λ est notée $\boldsymbol{h_{\Omega,\lambda}}$
Un **projecteur affine** est une affinité affine de rapport $\lambda = 0$. Dans ce cas $f(M) = H_M = V \cap (M + \vec{W})$
Une **symétrie affine** est une affinité affine de rapport $\lambda = -1$.
Une **symétrie centrale**, est une symétrie affine de base un point appelé centre de la symétrie, autrement dit c'est une homothétie de rapport -1.
L'ensemble des **homothéties-translations de $\boldsymbol{E}$ est note $\boldsymbol{HT(E)}$,** c'est aussi l'ensemble des applications

affines dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle.
L'ensemble des homothéties-translations d'un espace affine E est un sous-groupe distingué de $GA(E)$.
La composée d'une homothétie de rapport $\lambda \neq 1$ et d'une translation est une homothétie de rapport λ
La composee de 2 homothéties de rapports respectifs λ_1, λ_2 est une homothétie de rapport $\lambda_1\lambda_2$ si $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, et une translation si $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Centres ?
Soit $f \in GA(E)$, le conjugué $f \circ t_{\vec{u}} \circ f^{-1}$ d'une translation de vecteur $\vec{u}$ par f est la translation de vecteur $\vec{f}(\vec{u})$.
Si $\lambda \neq 1$, le conjugué d'une homothétie de centre Ω et de rapport λ par f est une homothétie de centre $f(\Omega)$ et de même rapport λ.
Donc on peut préciser $T(E) \rtimes_\alpha GA_O(E)$ avec $\alpha_{f_O}(t_{\vec{v}}) = t_{\vec{f}(\vec{v})}$.
$Z\big(HT(E)\big) = \{Id\}$ et $Z\big(GA(E)\big) = \{Id\}$

II. Le groupe des isométries On suppose E espace affine euclidien de dimension n.

II.1. Généralités II.1.1. Définition et caractère affine

Une isométrie affine de E dans E est une application de E dans E qui conserve les distances càd $f: E \to E$ et $\forall M, N \in E\ d\big(f(M), f(N)\big) = d(M, N)$
Si f est une application affine de E dans E, f est une isométrie ssi $\forall M, N \in E\ \left\|\vec{f}\big(\overrightarrow{MN}\big)\right\| = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$ ssi $\vec{f} \in O(E)$. En fait les isométries affines sont toujours des applications affines.
Une isométrie affine correspond à une application affine de partie linéaire un automorphisme orthogonal.
Les homothéties-translations qui sont des isométries sont les translations et les symétries centrales.
On note $\boldsymbol{Is(E)}$ l'ensemble des isométries affines de E.
$Is(E)$ est un sous-groupe du groupe affine $GA(E)$
L'application $\phi': (Is(E),\circ) \to (R^*,\times): f \mapsto \det\big(\vec{f}\big)$ est un morphisme de groupes.
Les symétries affines orthogonales sont des isométries affines.

II.1.2. Déplacements et antidéplacements

Un déplacement de E est une isométrie affine dont la partie linéaire est de déterminant 1, càd $\vec{f} \in SO(E)$ càd $\vec{f}$ est une rotation vectorielle. On note $\boldsymbol{Is^+(E)}$ l'ensemble des déplacements de E
Un antidéplacement de E est une isométrie affine dont la partie linéaire est de déterminant -1, càd $\vec{f} \in O^-(E)$. On note $\boldsymbol{Is^-(E)}$ l'ensemble des déplacements de E
$Is^+(E)$ est un sous-groupe distingué de $Is(E)$.
La composée de 2 antidéplacements est un déplacement.
Une **rotation affine de E** est un déplacement ayant au moins un point fixe.
Une symétrie centrale est un déplacement ssi la dimension de l'espace affine est paire.
Une symétrie orthogonale est un déplacement ssi sa direction est de dimension paire.

II.1.3. Similitudes

Une similitude affine de E dans E de rapport $\lambda \in R_+^*$ est une application de E vers E qui multiplie les distances par λ cad $\forall M, N \in E\ d\big(f(M), f(N)\big) = \lambda d(M, N)$
Les similitudes ne conserve que les rapports de distances.
Une homothétie de rapport λ est une similitude de rapport $|\lambda|$
Une isométrie est exactement une similitude de rapport 1.

Une similitude affine de rapport λ correspond à une application affine de partie linéaire λu avec $u \in O(\vec{E})$
L'ensemble des similitudes est un sous-groupe de $GA(E)$
Toute similitude de rapport $\lambda \neq 1$ admet un point fixe unique.
Toute similitude de rapport $\lambda \neq 1$ se décompose de façon unique sous la forme $f = h \circ i = i \circ h$ avec i isometrie et h homothetie de rapport strictement positif, et dans ce cas f, h, i ont un point fixe commun.
Deux parties d'un espace affine sont **semblables** si elles sont image l'une de l'autre par une similitude.
C'est une relation d'équivalence.
La composée de 2 similitudes de rapports respectifs λ_1, λ_2 est une similitude de rapport $\lambda_1\lambda_2$
L'inverse d'une similitude est une similitude de rapport inverse.
L'ensemble des similitudes directes de E est un sous-groupe distingue de l'ensemble des similitudes de E
Une **réflexion affine** est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan/ de direction une droite.
Une application affine est une réflexion affine ssi elle admet un point fixe (Ω) et sa partie linéaire est une réflexion vectorielle (d'hyperplan $\vec{H}$). Dans ce cas l'hyperplan affine de cette réflexion est $\Omega + \vec{H}$.
Une réflexion affine est un antidéplacement.
Ex : Spirale logarithmique TODO.

II.1.4. Décomposition d'une isométrie en composée de réflexions

Soit f une isométrie de E différente de l'identité et A un point non fixe de f, alors tout point fixe de f est situé sur l'hyperplan médiateur de $[Af(A)]$
Si f est une isometrie de E différente de l'identité alors il existe une réflexion s telle que l'ensemble des points fixes de $s \circ f$ contienne strictement l'ensemble des points fixes de f.
Toute isométrie d'un espace affine euclidien de dimension n est la composée d'au plus $n + 1$ reflexions.

II.1.5. Décomposition canonique d'une isométrie

Si $u \in O(\vec{E})$ alors $E = \ker(u - id) \perp im(u - id)$ et $\ker(u - id)$ et $im(u - id)$ sont stables par u.
Toute isométrie affine de E se décompose de façon unique sous la forme $f = t_{\vec{u}} \circ f_O = f_O \circ t_{\vec{u}}$ avec $t_{\vec{u}} \in T(E)$ et f_O une application affine admettant un point fixe O.
Dans ce cas $\vec{u} \in \ker(\vec{f} - id_{\vec{E}})$
L'application f admet donc un point fixe ssi son $\vec{u}_f = \vec{0}$
Si $\ker(\vec{f} - id_{\vec{E}}) = \{0\}$ alors on est sur que f admet un point fixe.

II.2. Les isométries planes

II.2.1. Classification TODO clarifier.

f	$\vec{f}$	Points fixes	$Is^-(E)$ ou $Is^+(E)$
Translation $t_{\vec{u}}$	$id_{\vec{E}}$	E si $\vec{u} = \vec{0}$, aucun si $\vec{u} \neq \vec{0}$	$Is^+(E)$
Rotation affine non triviale	Rotation vectorielle avec $\theta \neq 0\ (mod\ 2\pi)$	Un point	$Is^+(E)$
Réflexion affine	Réflexion vectorielle	Une droite	$Is^-(E)$
Symétrie glissée de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$	Réflexion vectorielle	aucun	$Is^-(E)$

II.2.2. Application à la détermination de composée d'isométries planes

La composée de 2 rotations affines d'angles respectifs θ_1 et θ_2 est une translation si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0\ (mod\ 2\pi)$ et une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$ sinon.

La composée d'une translation et d'une rotation distincte de l'identité est une rotation de même angle.

II.2.3. Composée de réflexions

Soient D_1 et D_2 deux droites affines du plan affine oriente E. Si $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont des vecteurs directeurs de D_1, D_2 et $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont des vecteurs directeurs de D_1, D_2, on a $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \equiv (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})\ (mod\ \pi)$ et on definit l'angle oriente des droites D_1 et D_2 par l'égalité $(\boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}) = \widehat{\boldsymbol{D_1 D_2}} \equiv (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})\ (mod\ \pi)$.

Soient D_1 et D_2 deux droites affines de réflexions associées s_1 et s_2

Si D_1 et D_2 sont parallèles alors $s_2 \circ s_1$ est une translation. Si H_1 est un point de D_1 de projeté orthogonal H_2 sur D_2 alors le vecteur de cette translation est $2\overrightarrow{H_1 H_2}$.

Si D_1 et D_2 sont sécantes, alors $s_2 \circ s_1$ est une rotation. Le centre de cette rotation est le point d'intersection des droites, et l'angle de la rotation est $2\widehat{D_1 D_2}$

Une translation $t_{\vec{u}}$ fixée, il existe une infinité de décompositions de $t_{\vec{u}}$ sous la forme $s_2 \circ s_1$: une droite quelconque D_1 telle que $\vec{u}$ est orthogonal a $\overrightarrow{D_1}$ étant fixée, il existe une unique droite D_2 vérifiant $t_{\vec{u}} = s_2 \circ s_1$; c'est l'image de la droite D_1 par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$

Une rotation r de centre Ω et d'angle θ étant fixée, il existe une infinité de decompositions de r sous la forme $s_2 \circ s_1$: une droite quelconque D_1 contenant Ω étant fixée, il existe une unique droite D_2 contenant Ω verifiant $(D_1, D_2) = \frac{\theta}{2}\ (mod\ \pi)$, c'est-à-dire $2(D_1, D_2) = \theta\ (mod\ 2\pi)$ et donc $r = s_2 \circ s_1$.

Le choix d'une décomposition adaptée peut être décisif dans la résolution d'un problème. La composée de 2 réflexions d'axes orthogonaux en O est la symétrie centrale de centre O.

II.2.4. Détermination de composées d'isométries par décomposition en réflexion

Pour simplifier une composée d'isométries on décompose les isométries en réflexions, si possible de manière à faire apparaitre 2 réflexions identiques et côte à côte dans la composition pour les simplifier.

II.3. Les isométries de l'espace Soit E espace affine euclidien oriente de dimension 3.

II.3.1. Déplacements de l'espace

Si f est une rotation affine différente de l'identité, alors l'ensemble des points fixes de f est une droite affine, appelée axe de la rotation, dont la direction est l'axe de $\vec{f}$. Cet axe étant orienté, la restriction a tout plan affine orthogonal a l'axe est une rotation plan dont le centre appartient a l'axe, et d'angle egal a celui de la rotation vectorielle (avec même orientation d'axe).

Un **retournement affine** correspond à une rotation affine d'angle π. La restriction a tout plan orthogonal a l'axe d'un retournement est une symétrie centrale plane.

On appelle **vissage**, une composée commutative $t_{\vec{u}} \circ r = r \circ t_{\vec{u}}$ avec r rotation affine et $t_{\vec{u}}$ translation. Le vecteur $\vec{u}$ dirige et oriente l'axe de la rotation r qu'on appelle axe du vissage, l'angle de r est appelé **angle du vissage** et le vecteur $\vec{u}$, **vecteur du vissage.**

Un vissage est une rotation ssi son vecteur $\vec{u} = \vec{0}$

Un vissage est une translation ssi l'angle du vissage est multiple de 2π.

Un **vrai vissage** est un vissage qui n'est ni une rotation, ni une translation.

L'axe d'un vrai vissage est l'ensemble des M tels que $\overrightarrow{Mf(M)}$ est colinéaire a $\vec{u}$.

Théorème. Les déplacements de l'espace sont les vissages. (par décomposition canonique déplacement)

L'ensemble des vissages d'axe donne est un sous-groupe de $Is^{+}(E)$ isomorphe a $R \times \frac{R}{2\pi Z}$

II.3.2. Antidéplacements de l'espace

Soit f un antidéplacement de l'espace.

Si $\vec{f}$ est une réflexion vectorielle de plan $\vec{P}$ alors f admet une décomposition $f = t_{\vec{u}} \circ s = s \circ t_{\vec{u}}$ avec s isométrie ayant un point fixe et de même partie linéaire que f, donc reflexion affine dont le plan P a pour direction $\vec{P}$. De plus $\vec{u} \in \ker(\vec{f} - id_{\vec{E}}) = \vec{P}$. Le vecteur $\vec{u}$ est nul ssi f admet un point fixe. Dans ce cas f est une reflexion. Sinon on dit que f est une **symétrie glissée** de plan P et de vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Si $\vec{f}$ est composée commutative d'une réflexion vectorielle $\vec{s}$ de plan $\vec{P}$ et d'une rotation $\vec{r}$ d'axe $\vec{P}^{\perp}$ distincte de l'identité, alors 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$: les sous-espaces $\vec{P}$ et $\vec{P}^{\perp}$ sont des supplémentaires stables par $\vec{f}$ et la restriction de $\vec{f}$ a chacun d'eux n'admet pas 1 comme valeur propre (car $\vec{r} \neq id_{\vec{E}}$). L'application affine f admet donc un point fixe Ω.

Soient s la reflexion affine de plan $\Omega + \vec{P}$ et r la rotation affine d'axe $\Omega + \vec{P}^{\perp}$ et de même angle que $\vec{r}$. Les 3 applications affine $f, s \circ r$ et $r \circ s$ ont meme partie linéaire et admettent Ω comme point fixe donc elles sont égales. On dit que f est une **antirotation.**

II.3.3. Classification des isométries de l'espace

f	$\vec{f}$	{points fixes}	$Is^{\pm}(E)$?
Translation : $t_{\vec{u}}$	$id_{\vec{E}}$	E si $\vec{u} = \vec{0}$ $\emptyset$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$	$Is^{+}(E)$
Rotation non triviale $r(D,\theta), \theta \neq 0\ (mod\ 2\pi)$	Rotation vectorielle $\vec{r}(\vec{D},\theta)$	La droite D	$Is^{+}(E)$
Vrai vissage $t_{\vec{u}} \circ r(D,\theta) = r(D,\theta) \circ t_{\vec{u}}$ $\theta \neq 0\ (mod\ 2\pi)$ $\vec{u} \in D, \vec{u} \neq 0$	Rotation vectorielle $\vec{r}(\vec{D},\theta)$	$\emptyset$	$Is^{-}(E)$
Réflexion : s_P	Réflexion vectorielle $\vec{s}_{\vec{P}}$	Le plan P	$Is^{-}(E)$
Symétrie glissée $t_{\vec{u}} \circ s_P = s_P \circ t_{\vec{u}}$ $\vec{u} \in \vec{P}, \vec{u} \neq \vec{0}$	Réflexion vectorielle $\vec{s}_{\vec{P}}$	$\emptyset$	$Is^{-}(E)$
Antirotation $s_P \circ r(D,\theta) = r(D,\theta) \circ s_P$ $\theta \neq 0\ (mod\ 2\pi), P \perp D$	$\vec{f} = \vec{s}_{\vec{P}} \circ \vec{r}(\vec{D},\theta) = \vec{r}(\vec{D},\theta) \circ \vec{s}_{\vec{P}}$	Le singleton $\{P \cap D\}$	$Is^{-}(E)$

II.3.4. Composition de réflexions

Deux **plans de l'espace sont perpendiculaires** ssi un vecteur orthogonal a la direction de l'un est contenu dans la direction de l'autre. (On ne dit pas : plans orthogonaux).

Si P_1 et P_2 sont deux plans secants, soit D leur droite d'intersection, si on oriente la droite D, on definit **l'angle oriente entre 2 plans (P_1, P_2)** par l'egalite $(P_1, P_2) \equiv (D_1, D_2)\ (mod\ \pi)$ avec D_1 droite de P_1 orthogonale a D et D_2 droite de P_2 orthogonale a D.

Soit deux réflexions planes s_1, s_2 de plans respectifs P_1, P_2.

Si P_1 et P_2 paralleles alors $s_2 \circ s_1$ est une translation. Si $H_1 \in P_1$ de projete orthogonal H_2 sur P_2, le vecteur de cette translation est $2\overrightarrow{H_1H_2}$.

Si P_1 et P_2 secants alors $s_2 \circ s_1$ est une rotation d'axe la droite d'intersection des plans, d'angle $2(P_1, P_2)$

Si P_1 et P_2 perpendiculaires alors $s_2 \circ s_1$ est un retournement dont l'axe est la droite d'intersection.

II.3.5. Détermination de composées de retournements par décomposition en réflexions.

Soient r_1, r_2 deux retournement d'axes respectifs D_1, D_2. Exemples composée de 2 retournements d'axes sécants/parallèles /non coplanaires.

Tout vissage est la composée de 2 retournements. Le groupe des déplacements de l'espace est engendre par les retournements.

II.4. Image d'une partie par une isométrie

L'image d'une boule par une isométrie est une boule de même rayon et de centre l'image du centre.

L'image d'une partie bornée par une isométrie est une partie bornée de même diamètre.

II.4.1. Familles de points isométriques

Deux triangles sont des **triangles isométriques** ssi les longueurs des cotes de ces triangles sont égales deux a deux.

L'orbite d'un triplet (A, B, C) de points du plan sous l'action du groupe des isométries de ce plan est l'ensemble des triplets (M, N, P) verifiant $MN = AB, NP = BC, PN = CA$, cad l'ensemble des triangles qui sont isométrie a (A, B, C).

Soient $(A_i)_{i\in I}, (B_i)_{i\in I}$ deux familles de points de E. Si pour tout $i, j,\ A_iA_j = B_iB_j$ alors il existe une isometrie de E transformant pour tout $i \in I, A_i$ en B_i.

Si 2 points sont équidistants des $n + 1$ points d'un repère affine de E, alors ils sont égaux.

Si 2 points sont équidistants de n points affinement independants de E, alors ils sont egaux ou symétriques par rapport a l'espace engendre par ces n points.

Soit $(A_0, A_1, \dots, A_k)$ une famille de points affinement indépendants de E engendrant un sous-espace affine F ; soient A et A' deux points n'appartenant pas a F. Si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $AA_i = A'A_i$ alors il existe une isometrie admettant $A_0, \dots, A_k$ comme points fixes et transformant A en A'.

II.5. Isométries conservant une partie

On dit qu'une **isométrie $\boldsymbol{f}$ de E conserve $\boldsymbol{A}$** $\subseteq E$ si $f(A) = A$.

On note $\boldsymbol{Is_A(E)}$ l'ensemble des isometries conservant A. C'est un sous-groupe de $Is(E)$ car c'est le stabilisateur de A pour l'action $(f, A) \mapsto f(A)$ du groupe $Is(E)$ sur $P(E)$.

On note $\boldsymbol{Is_A^+(E)} = Is^+(E) \cap Is_A(E)$, c'est un sous-groupe de $Is_A(E)$.

Si $A' \subseteq A \subseteq E$, on note $Is_{A,A'}(E) = Is_A(E) \cap Is_{A'}(E)$, c'est un sous-groupe de $Is_A(E)$ car c'est le stabilisateur de A' pour l'action $(f, A') \mapsto f(A')$ du groupe $Is_A(E)$ sur $P(A)$.

Si $M \in A \subseteq E$, $Is_{A,\{M\}}(E)$ est l'ensemble des isometries qui conservent A et admettent M comme point fixe. On note aussi $\boldsymbol{b_A(M)} = Is_{A,\{M\}}(E)$, c'est le groupe d'isométries conservant A et fixant $M \in A$.

II.5.1. Similitudes conservant une partie bornée

Toute similitude conservant une partie bornée est une isométrie

II.5.2. Points fixes des isométries conservant une partie

L'isobarycentre d'un ensemble fini A de points est un point fixe commun à toutes les isométries conservant A.

Les isométries conservant une même partie compacte, admettent un point fixe commun. (Par th Jung)

II.5.3. Groupes d'isométries conservant des parties semblables

Si une isométrie f conservant A transforme $M \in A \mapsto M' \in A$, alors $stab_A(M)$ et $stab_A(M')$ sont des groupes conjugués (par f) dans $Is_A(E)$.

Si A et A' sont deux parties semblables de E, $Is_A(E)$, et $Is_{A'}(E)$ sont conjugues dans le groupe des similitudes de E.
Si A et A' sont deux parties homothetiques de E par rapport au centre un point fixe commun aux isométries conservant A, alors $Is_A(E) = Is_{A'}(E)$
Deux groupes d'isométries peuvent être conjugues dans le groupe des similitudes de E sans l'être dans le groupe des isométries de E.
Si A et A' sont deux parties semblables de E et si les isométries conservant A ont un point fixe commun, alors $Is_A(E)$, et $Is_{A'}(E)$ sont conjugues dans le groupe des isometries $Is(E)$.
Si A et A' sont deux parties semblables de E, $Is_A^+(E)$, et $Is_{A'}^+(E)$ sont conjugues dans le groupe des similitudes de E.
Si A et A' sont deux parties semblables de E, et si les rotations conservant A ont un point fixe commun, alors $Is_A^+(E)$, et $Is_{A'}^+(E)$ sont conjugues dans $Is(E)$.
Si A et A' sont deux parties semblables de E, si les rotations conservant A ont un point fixe commun, et si un antidéplacement conserve A, alors $Is_A^+(E)$, et $Is_{A'}^+(E)$ sont conjugues dans $Is^+(E)$.

II.6. Sous-groupes finis de $\boldsymbol{Is(E)}$

Si G est un sous-groupe de $Is(E)$ on note $\boldsymbol{G^+} = G \cap Is^+(E)$ le sous-groupe de G des deplacements, et on note $\boldsymbol{G^-} = G \cap Is^-(E)$ l'ensemble des antidéplacements de G.
Les isométries d'un sous-groupe fini donné d'isométries, admettent un point fixe commun.
Les isométries d'un sous-groupe fini donné du groupe affine $GA(E)$, admettent un point fixe commun.
Si un sous-groupe G fini donné d'isométries contient au moins un antidéplacement, alors $|G|$ est pair, G^+ est d'indice 2 dans G et $|G^+| = |G^-|$.

II.6.1. Groupes finis d'isométries planes

Dans le plan euclidien, soient deux points A, B et O le milieu de $[AB]$, soit s_O la symétrie centrale de centre O, s_1 la reflexion d'axe (AB), s_2 la reflexion d'axe la médiatrice de (AB) donc passant par O.
$\{id_P, s_O, s_1, s_2\}$ est le **groupe des 3 symétries**, il est isomorphe au **groupe de Klein** $\frac{Z}{2Z} \times \frac{Z}{2Z}$.
Soit G est un groupe fini d'isometries planes
Cas 1 :Si G est un groupe de deplacements, alors G est un groupe cyclique de rotations de meme centre.
Cas 2 :Si G est un antideplacement σ, le sous-groupe G^+ est cyclique engendre par une rotation R, σ est une reflexion dont l'axe contient le centre de R et $G = gp(\{R, \sigma\})$
Si (cas 1) G est un groupe fini de rotations de cardinal $n \geq 2$ engendre par $R(O, \alpha)$ avec $G' = \alpha Z$ et $\alpha > 0$ alors $R(O, \alpha)^n = Id$ donc $n\alpha = 2k\pi$. Les reels qui representent les angles des rotations peuvent etre choisis dans l'intervalle $(0,2\pi]$ et on a alors $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.
Si (cas 1) $Z \to G: k \mapsto R(O, k\alpha)$ est un morphisme surjectif de groupes de noyau nZ. Donc $G \approx \frac{Z}{nZ}$
Si (cas 2) G^+ est de cardinal $n \geq 2$, $G = G^+ \rtimes_\varphi \{id_E, \sigma\}$ avec $\varphi_\sigma\big(R(O, k\alpha)\big) = R(O, -k\alpha)$, donc $G \approx D_{2n} = \frac{Z}{nZ} \rtimes \frac{Z}{2Z}$. Si $n = 2$, le produit devient direct et isomorphe au groupe de Klein.
Pour $n \neq p$, $\frac{Z}{nZ}$ n'est pas isomorphe a $\frac{Z}{pZ}$, de meme D_{2n} n'est pas isomorphe a D_{2p}
Rappel : Un polygone convexe est l'enveloppe convexe de ses sommets.
Si $n \geq 3$, Un **polygone régulier d'ordre $\boldsymbol{n}$** $A_0 \dots A_{n-1}$ est un polygone convexe inscrit dans un cercle de centre O tel que $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ $\left(\overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OA_{i+1}}\right) = \frac{2\pi}{n}$ $(mod\ 2\pi)$ avec la convention $A_n = A_0$.

L'isobarycentre des sommets d'un polygone régulier est le centre du cercle sur lequel il est inscrit. On l'appelle **centre du polygone régulier.**
On note $P_n = A_0 \dots A_{n-1}$ un polygone regulier d'ordre n, et $Is_{P_n}(E)$ l'ensemble des isométries le conservant.
$Is_{P_n}(E)$ est forme des n rotations de centre O et d'angle $\frac{k2\pi}{n}, k = 0 \dots n-1$ et des n reflexions par rapport aux droites Δ_k definies par $O \in \Delta_k, \left((OA_0), \Delta_k\right) = \frac{k\pi}{n} \ (mod\ \pi), k = 0 \dots n-1$.
$Is_{P_n}(E)$ est donc isomorphe au groupe diedral D_{2n}
Le **groupe diédral d'ordre $2n$** correspond au groupe produit semi direct $\boldsymbol{D_{2n}} = \frac{Z}{nZ} \rtimes \frac{Z}{2Z}$ et vérifie la suite exacte scindée à droite $1 \to \frac{Z}{nZ} \to D_{2n} \to \frac{Z}{2Z} \to 1$, comme on vient de voir, il est isomorphe au **groupe diédral géométrique** : le groupe des isométries $Is_{P_n}(E)$ fixant un polygone régulier d'ordre n.
Le groupe diedral geometrique est engendre par $R\left(O, \frac{2\pi}{n}\right)$ et l'une quelconque de ses reflexions.
Deux polygones réguliers de même centre et homothétiques ont le même groupe d'isométries.
Deux polygones réguliers de même centre et dont l'un est obtenu par rotation de l'autre d'angle $\frac{k\pi}{n}$ ont le meme groupe d'isometries.
Soit P_n un polygone regulier d'ordre n, et $P_n' = R\left(O, \frac{\pi}{n}\right)(P_n)$
Si n est pair, P_n est symétrique par rapport a O, et toute droite Δ_k joint 2 sommets de P_n ou bien 2 sommets de P_n'.
Si n est impair, $P_n{}'$ est le symetrique de P_n par rapport a O, Toute droite Δ_k joint un sommet de P_n a un sommet de $P_n{}'$.
$\{Id_E\}$ est l'unique sous-groupe d'isométries planes de cardinal 1. Si G est un sous-groupe d'isometries planes dont le groupe des rotations est $\{Id_E\}$, alors $G = \{Id_E\}$ ou $G = \{Id_E, \sigma\}$ avec σ reflexion.
Le groupe des 3 symétries est le groupe d'isometries conservant un segment non réduit a un point, c'est-à-dire conservant un polygone régulier d'ordre 2.
Les sous-groupes finis d'isométries planes dont le sous-groupe des rotations n'est pas restreint a $\{Id_E\}$ sont des groupes de rotations et des groupes d'isométries conservant un polygone régulier.
Th. Deux sous-groupes d'isométries planes sont conjugues dans $Is(E)$ ssi ils sont isomorphes.
II.6.2. Exemples simples de groupes finis de rotations de l'espace
Si r_1, r_2, r_3 sont des retournements d'axes orthogonaux et concourants, alors l'ensemble $\{Id_E, r_1, r_2, r_3\}$ est un groupe commutatif isomorphe au groupe de Klein $\frac{Z}{2Z} \times \frac{Z}{2Z}$. Tout groupe fini de rotations d'ordre $n \geq 3$, dont les rotations non triviales sont des retournements, est de cette forme.
Une rotation de l'espace qui conserve un plan affine est une rotation d'axe orthogonal au plan, ou un retournement d'axe contenu dans le plan.
Si f est une rotation d'axe D orthogonal a H en O, alors $f|H$ est la rotation plane de centre O.
Si f est un retournement d'axe D contenu dans H, alors $f|H$ est la reflexion plane d'axe D.
Deux rotations distinctes qui conservent H ont des restrictions distinctes.
Soit H un plan affine euclidien oriente dans l'espace E affine euclidien de dimension 3.
Une rotation conservant un polygone régulier P_n transforme 3 points non alignés de H en 3 points non alignés de H, elle conserve donc le plan H.

Le groupe des rotations conservant un polygone regulier P_n est forme des n rotations d'axe orthogonal en O a H et d'angle $\frac{2k\pi}{n}$, $k = 0 \dots n-1$ et des n retournements par rapport aux droites Δ_k.
L'application qui a une rotation f conservant P_n associe $f|H$ est un isomorphisme du groupe $Is^+_{P_n}(E)$ sur le groupe $Is_{P_n}(H)$.
Le groupe des rotations de l'espace qui conservent le polygone régulier P_n est isomorphe au groupe diedral D_{2n}.

III. Les polytopes réguliers de l'espace et leur groupes de rotation

Soit E espace affine euclidien de dimension 3.

III.1. Généralités sur les polytopes réguliers III.1.1. Isométrie conservant un polytope

Un **polytope** est un polyèdre convexe compact d'intérieur non vide de E.
Une isométrie de E conserve un polytope P ssi elle induit une permutation des sommets de ce polytope.
Soit S l'ensemble des sommets de P, et $G(S)$ le groupe symetrique sur S. L'application $\phi: Is_P(E) \to G(S): \sigma \mapsto \sigma|S$ est un morphisme injectif de groupes.
Le groupe des isométries conservant un polytope est donc fini et peut être identifié a un sous-groupe des permutations des sommets du polytope.

III.1.2. Définition des polytopes réguliers

On appelle **drapeau d'un polytope *P*** un triplet (F, A, S) ou F est une face de P, A est une arete de P et S un sommet de l'arete A. On a alors $\{S\} \subset A \subset F$.
Une arete est contenue dans exactement 2 faces et contient exactement 2 sommets. Toute arête est presente dans 4 drapeaux exactement. Il y a 4 fois plus de drapeaux que d'arêtes.
Un polytope est **régulier** ssi le groupe des isométries conservant le polytope agit transitivement sur les drapeaux du polytope.
Dans un polytope régulier P, $Is_P(E)$ agit transitivement sur les faces, les aretes et les sommets. Les faces sont donc isometriques, le nombre d'arete par face est constant, les aretes sont isometriques, les faces sont des polygones reguliers. Une isometrie conservant P transforme un sommet S en un sommet S', l'ensemble des aretes issues de S est envoye sur l'ensemble des aretes issues de S', le nombre d'aretes issues d'un sommet est une constante.
Si P polytope regulier de sommets $S_1, \dots, S_k$, alors $Is_P(E) = Is_{S_1,\dots,S_k}(E)$. L'isobarycentre O des sommets est un point fixe commun aux isometries conservant P appele **centre du polytope.** 2 sommets quelconques sont images l'un de l'autre par une isométrie fixant O. Tous les sommets sont equidistant du centre O. Le polytope est donc inscrit dans une sphère de centre O.
Un polytope régulier est une généralisation a la dimension 3 d'un polygone régulier.
Le **symbole d'un polytope régulier** est le couple (a_s, a_f), ou a_s est le nombre d'aretes par sommet, et a_f est le nombre d'arêtes par face. Avec la formule d'Euler il n'y a que 5 cas possibles

III.1.3. Classification à l'aide de la formule d'Euler

Formule d'Euler. Si un polytope d'un espace affine réel de dimension 3 admet f faces, a aretes et s sommets, alors $a = s + f - 2$.
Solides de Platon. Dans un espace affine euclidien de dimension 3, soit un polytope tel que le nombre d'arêtes par face est une constante $a_f \geq 3$, le nombre d'arete par sommet est une constante $a_s \geq 3$. Alors $2a = s \times a_s = f \times a_f$, et la valeur du couple (a_s, a_f) determine la valeur du triplet (s, a, f). De plus les seules valeurs sont :

(a_s, a_f)	(s, a, f)	Solide
$(3,3)$	$(4,6,4)$	**Tétraèdre**
$(3,4)$	$(8,12,6)$	**Cube**
$(3,5)$	$(20,30,12)$	**Dodécaèdre**
$(4,3)$	$(6,12,8)$	**Octaèdre**
$(4,5)$	$(12,30,20)$	**Icosaèdre**

III.1.4. Nombres d'isométries conservant un polytope régulier

Le centre d'un polytope régulier est intérieur a ce polytope.

La seule isométrie fixant le centre d'un polytope régulier et un de ses drapeaux, est l'identité.

Etant donnes 2 drapeaux d'un polytope régulier, il existe au plus une isométrie fixant le centre du polytope et envoyant l'un des drapeaux sur l'autre. Si a est le nombre d'aretes d'un polytope quelconque P, $|Is_P(E)| \leq 4a$ et le polytope est regulier ssi $|Is_P(E)| = 4a$.

Dans un polytope regulier, $Is_P(E)$ agit fidèlement et transitivement sur l'ensemble des drapeaux.

III.1.5. Isométries conservant une arête

Il existe 4 isométries fixant un segment et un point du plan médiateur distinct du milieu.

Dans un polytope régulier, les 4 isométries fixant une arête quelconque, et fixant le centre du polytope, fixent aussi le polytope P.

III.1.6. Rotations fixant un sommet

Caractérisation polytopes réguliers. Un polytope P est regulier ssi $Is_P^-(E) \neq \emptyset, Is_P^+(E)$ agit transitivement sur les sommets et il existe un sommet $S \in P$ tel que le groupe des rotations conservant P et fixant S agit transitivement sur l'ensemble des sommes adjacents a S.

Si le groupe des rotations conservant P et fixant S agit transitivement sur l'ensemble des sommets adjacents a S, la famille formée de S et des sommets qui lui sont adjacents definit une pyramide a base reguliere.

L'image de cette pyramide par une rotation conservant P et transformant S en un autre sommet T est une pyramide isometrique definie par T et les sommets adjacents a T.

Si a_s est le nombre d'aretes issues d'un sommet S d'un polytope régulier P. Le groupe des rotations conservant P et fixant S est d'ordre a_s.

III.2. Classification des polytopes réguliers a similitude près

III.2.1. Angle géométrique entre un bipoint et son image par une rotation

III.2.2. Valeurs possibles du symbole d'un polytope régulier

Les polytopes régulier de même symbole sont semblables.

III.3. Le tétraèdre régulier et son groupe d'isométries

Un **tétraèdre régulier** est l'enveloppe convexe de 4 points A, B, C, D non coplanaires a egale distance les uns des autres.

Un tétraèdre régulier est un simplexe. Les faces d'un tétraèdre régulier sont des triangles

Une **bimédiane d'un tétraèdre régulier**, est une droite joignant les milieux de 2 cotes opposes.

Les cotes opposes d'un tétraèdre régulier sont orthogonaux

Les bimédianes sont les perpendiculaires communes des cotes opposes

Le tétraèdre régulier est inscrit dans une sphère de centre, l'isobarycentre des sommets.

Les hauteurs sont concourantes au centre du tétraèdre et coupent les faces en leur centre de gravite.

Il y a 24 isométries conservant un tétraèdre régulier qui sont

- l'identité
- les 8 rotations d'axe les hauteurs et d'angle $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, ces rotations correspondent aux 3-cycles de G_4
- Les 3 retournements d'axe les bimedianes qui correspondent aux produits de 2 transpositions de supports disjoints de G_4
- Les 6 reflexions par rapport aux plans mediateurs des couples de points du tétraèdre qui correspondent aux transpositions de G_4
- Les 6 composees $r \circ s = s \circ r$ ou r est un quart de tour d'axe une bimédiane, et s est une reflexion de plan le plan mediateur du couple des milieux de cotes opposes definissant la bimédiane qui correspond aux 4-cycles de G_4

Un tétraèdre régulier est un polytope régulier et $Is_T(E) \approx G_4$ et $Is_T^+(E) \approx A_4$

III.4. Le cube et son groupe d'isométries

Un cube quelconque est un polytope semblable au polytope défini comme intersection des demi espaces $-1 \leq x, y, z \leq 1$ (soit 6 inéquations).

Les sommets d'un tel cube sont les $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

Un cube a 8 sommets, 6 faces, 12 aretes.

Une isométrie qui conserve le cube transforme une diagonale de face en une diagonale de face, une grande diagonale en une grande diagonale.

Les rotations qui conservent le cube sont les 24 rotations suivantes :

- l'identité
- les quarts de tour et les retournement d'axe joignant les centres des faces opposées $(3 \times 3 = 9)$
- les rotations d'ordre 3 d'axe les grandes diagonales $(2 \times 4 = 8)$
- les retournements d'axe joignant les milieux de 2 arêtes symétriques par rapport à O (6)

Le cube est un polytope régulier.

Toute isométrie conservant le cube induit une permutation des grandes diagonales du cube

Le groupe des déplacements conservant le cube est isomorphe au groupe symétrique G_4

III.5. L'octaèdre régulier et son groupe de rotations

On part d'un cube $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ et on definit le centre des 6 faces $(\pm 1,0,0), (0, \pm 1,0), (0,0, \pm 1)$, l'enveloppe convexe de ces 6 points est **un octaèdre régulier**.

Un octaèdre régulier est un polytope régulier a 6 sommets, 12 arêtes, 8 faces.

TODO :

III.6. L'icosaèdre régulier et son groupe de rotations

III.6.1. Construction des sommets de l'icosaèdre

III.6.2. Premières propriétés de l'icosaèdre

III.6.3. Rotations d'ordre 5 conservant l'icosaèdre

III.6.4. Rotations conservant l'icosaèdre régulier

III.6.5. Isomorphisme du groupe des rotations de I avec le groupe alterne A_3

III.7. Le dodecaedre regulier et son groupe de rotations

III.8. Les sous-groupes finis de SO_3

III.8.1. Determination du cardinal d'un sous-groupe de rotations

III.8.2. Classification - a isomorphisme près - Des groupes finis de rotation de l'espace.

III.8.3. Conjugaison dans I

Théorème :

Tout sous-groupe fini de rotations de l'espace est isomorphe a un des groupes $\frac{Z}{nZ}, D_{2n}, A_4, G_4, A_5$

Les sous-groupes finis de SO_3 sont isomorphes a un des groupes $\frac{Z}{nZ}, D_{2n}, A_4, G_4, A_5$

Complément 1. Dual d'un convexe. D'un polyèdre

1.1. Ensemble polaire

1.2. Dual d'un polytope

I.3. Dual d'un polytope régulier de l'espace

Complément 2. Groupe de frise

2.1. Généralités

2.2. Groupes de frises formes uniquement de déplacements

2.3. Groupes de frises contenant un antidéplacement

2.4. Classification des groupes de frises