Théorèmes d'interversion.

Limite - limite

Soit une fonction f a deux variables dans 2 espaces métriques X, Y et a valeurs dans un métrique F. On suppose que la fonction n'est définie que sur une partie $A \times B$ du produit des deux espaces de départ. On considère un point fixé $\left(a \in \overline{A}, b \in \overline{B}\right)$. Si

1. L'espace d'arrivée F est complet
2. Quand on fait tendre une variable vers son point, et on fixe l'autre, la fonction converge.
3. Quand on fait tendre l'autre variable, il y a convergence uniforme de la fonction selon l'une.

Alors, on peut faire tendre une variable puis l'autre ou l'inverse indistinctement, toutes les limites existent et on peut intervertir.

Limite - limite discrète

Soit une suite de fonction f_n d'une partie A d'un espace métrique E vers un Kevn F, soit $x \in \overline{A} \subseteq E$. Si

1. F est complet
2. $\forall n,\ f_n(x) \to_{x\to a} l_n \in F$
3. $(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers une fonction $f: A \to F$

Alors $l_n \to_{n\to\infty} l \in F$, $f(x) \to_{x\to a} l$, donc $\lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$

Limite - somme

Soit une suite de fonction f_n d'un espace métrique E vers un Kevn F, soit $x \in \overline{A} \subseteq E$. Si

1. F est complet
2. $\forall n\ \ f_n(x) \to_{x\to a} l_n \in F$
3. $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur A. (On peut utiliser la convergence normale)

Alors $\sum_{n\geq 0} l_n$ converge, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x) \to_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} l_n$ donc $\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$

Limite - somme (version TCD)

Limite – intégrale – sup. Théorème de convergence monotone (TCM). (Beppo-Levi)

Toute suite <u>croissante</u> de fonctions <u>mesurables</u> dans $[0, +\infty]$ <u>converge simplement</u> vers une fonction <u>mesurable</u> dans $[0, +\infty]$ (la fonction supremum de la suite), et definit une suite d'intégrale croissantes qui admet une limite dans [0,+∞], cette limite est égale à l'intégrale de Lebesgue de la fonction et est donc indépendante de la suite choisie. $\forall n, 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \Rightarrow \int_X f_n \to \int_X f = \int_X \sup_n f_n = \sup_n \int_X f_n = \int_X \lim_n f_n = \lim_n \int_X f_n$

Limite – intégrale – sup. TCM version proba

Pour une suite de v.a.r. telles que $\forall n, 0 \leq X_n \leq X_{n+1}$ alors $E(X_n) \to E(\sup_n X_n) = \sup_n E(X_n) = E(\lim_n X_n) = \lim_n E(X_n)$.

Plus brièvement $0 \leq X_n \uparrow X \Rightarrow EX_n \uparrow EX$

Limite - Intégrale. Théorème de convergence dominée (TCD) pour Lebesgue.

Soit une suite de fonctions f_n d'un espace <u>mesuré</u> Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$, Si

1. $\forall n\ f_n$ est mesurable.
2. $\exists f: \Omega \to \mathbb{C}\ \ \forall t \in \Omega$ p.p. $\ f_n(t) \to_{n\to\infty} f(t)$
3. $\exists g: \Omega \to R_+$ intégrable, $\forall n, \forall t \in \Omega\ \text{p.p.}\ \ |f_n(t)| \leq g(t)$.

Alors :
1. $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ est intégrable
2. $\int_\Omega |f - f_n| \to_{n\to\infty} 0$, cad $f_n \to_{n\to\infty}^{\| \ \|_1} f$
3. $\int_\Omega f_n \to_{n\to\infty} \int_\Omega f$ càd $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n$
Remarque : Le TCD et le TCM s'appliquent souvent pour intervertir une limite quelconque avec une intégrale, en passant d'abord par la caractérisation séquentielle des limites.
Limite - Intégrale. TCD version L^p.
Soient $p \in [1, \infty]$. Soit (Ω, M, μ) espace mesuré. Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions de $\Omega \to \mathbb{C}$. Si :
1. $\forall n\ f_n$ est mesurable.
2. $\exists f : \Omega \to \mathbb{C}$ mesurable telle que $\forall t \in \Omega$ p.p. $f_n(t) \to_{n\to\infty} f(t)$
3. $\exists g \in L^p(\Omega, \mathbb{R}_+)\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ |f_n| \le g\ \ \mu$ p.p.
Alors :
$\forall n \in \mathbb{N}\ \ f_n \in L^p(\Omega, \mathbb{C})$.
$f \in L^p(\Omega, \mathbb{C})$.
$f_n \to_{n\to\infty}^{\| \ \|_{L^p}} f$
Limite – Intégrale (Espérance). TCD version proba.
Soit une suite de v.a.r. $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$.
1. $(X_n)_n$ converge simplement presque partout. $\forall t \in \Omega$ p.p. $X_n(t) \to_{n\to\infty} X(t)$
2. $\forall n\ |X_n| \le Y$ presque partout avec $E(Y) < \infty$
Alors :
1. $X \in L^1$
2. $E(|X - X_n|) \to_{n\to\infty} 0$
3. $E(X_n) \to_{n\to\infty} E(X)$. càd $E(\lim_n X_n) = \lim_n E(X_n)$.
Limite – Intégrale (version uniforme, discrète). (moins lourd que le TCD si Ω borné)
Soit une suite de fonctions f_n d'un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, Si :
1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \ f_n$ intégrable.
2. $(f_n)_n$ converge uniformément sur I
3. I borné
Alors :
1. $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ est intégrable.
2. $\int_I f_n \to_{n\to\infty} \int_I f$ càd $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n$ (Preuve : $\left|\int_I f - \int_I f_n\right| \le l(I) \|f - f_n\|_u$)
(Preuve de 1 : $\exists N \in \mathbb{N}\ \|f_N - f\|_{u,I} \le 1$ donc $\forall x \in I\ \ |f_N(x) - f(x)| \le 1$ donc $\forall x \in I\ |f(x)| \le 1 + |f_N(x)|$ avec $x \mapsto 1$ et f_N intégrables sur I, donc f intégrable sur I)
Limite - Intégrale. TCD continu.
Soit $f : E \times \Omega \to \mathbb{C}$ avec Ω espace mesuré et E un espace métrique et $a \in E$. Si :
1. $\forall x \in E\ \ t \mapsto f(x, t)$ mesurable.
2. $\exists f : \Omega \to \mathbb{C}\ \ \forall t \in \Omega$ p.p. $f(x, t) \to_{x\to a} f(t)$.
3. $\exists g : \Omega \to R_+$ intégrable, $\forall x \in E\ \forall t \in \Omega\ \ |f(x, t)| \le g(t)$
Alors :
1. $\lim_{x\to a} f(x, .)$ est intégrable

2. $\lim\limits_{x\to a} \int_\Omega f(x,t)d\mu(t) = \int_\Omega \lim_{x\to a} f(x,t)\, d\mu(t)$

Limite – Intégrale (version uniforme, continue).

Soit $f: E\times\Omega \to \mathbb{C}$ avec Ω espace mesuré et E un espace métrique et $a\in E$. Si :

1. $\forall x\in E\ \ t\mapsto f(x,t)$ intégrable.
2. $\exists f:\Omega\to\mathbb{C}\ \ \sup_{t\in\Omega}|f(x,t)-f(t)| \to_{x\to a} 0$.
3. $\mu(\Omega)<\infty$

Alors

1. $\lim_{x\to a} f(x,.)$ est intégrable
2. $\lim\limits_{x\to a} \int_\Omega f(x,t)d\mu(t) = \int_\Omega \lim_{x\to a} f(x,t)\, d\mu(t)$

Limite - Intégrale. Cas simple où f est continue et Ω compact.

Soit $f: E\times\Omega \to \mathbb{C}$ avec Ω espace mesuré et E un espace métrique et $a\in E$. Si :

1. f est continue sur $E\times\Omega$.
2. Ω est compact
3. $\exists f:\Omega\to\mathbb{C}\ \ \forall t\in\Omega$ p. p. $f(x,t)\to_{x\to a} f(t)$.

Alors le TCD s'applique avec $g = Max_{(x,t)\in K\times\Omega}|f(x,t)|$ où K compact de E contenant a.

Continuité - Limite

Soit une suite de fonction f_n d'un espace métrique E vers un Kevn F, et $a\in E$. Si :

1. $\forall n, f_n$ continue en $a\in E$
2. (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur E, (ou seulement sur tout compact de E si E est localement compact).

Alors $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ est continue en a

Continuité - Somme

Soit une suite de fonction f_n d'un espace métrique E vers un Kevn F

1. $\forall n, f_n$ continue en a
2. $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur E, (ou seulement sur tout compact de E si E localement compact), (on peut utiliser la convergence normale si F est complet).

Alors $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue en a

Continuité - Intégrale

Soit une fonction f à valeurs dans C à deux variables : un paramètre x dans un <u>espace métrique</u> E, et une variable d'intégration t dans un <u>espace mesuré</u> Ω. Si :

1. $\forall x\in E\ \ t\mapsto f(x,t)$ <u>mesurable</u>
2. $\forall t\in\Omega$ p.p. $x\mapsto f(x,t)$ continue en a.
3. $\exists g:\Omega\to R_+$ intégrable, $\forall x\in E\ \ \forall t\in\Omega$ p.p $|f(x,t)|\leq g(t)$

ou si E loc. compact 3'. $\forall K$ compact $\subseteq E\ \exists g_K:\Omega\to R_+$ intégrable $\forall x\in K\ \forall t\in\Omega$ p.p $|f(x,t)|\leq g_K(t)$

Alors 1. $F: E\to C, F(x) = \int_\Omega f(x,t)d\mu(t)$ est bien définie sur E, et continue en a.

Se prouve avec TCD.

Hypothèses alternatives via convergence uniforme :

1. $\forall x\in E\ \ t\mapsto f(x,t)$ intégrable.
2. $\forall t\in\Omega\ \ x\mapsto f(x,t)$ est continue en a.

3. $\sup_{t\in\Omega}|f(x,t)-f(a,t)| \to_{x\to a} 0$.
4. $\mu(\Omega)<\infty$ (ne marche donc pas pour $\mu=\lambda$ et $\Omega=\mathbb{R}$).
Hypothèses alternatives simples (il suffit de poser $g_K=\max_{K\times\Omega}|f|$) :
1. f est continue sur $E\times\Omega$.
2. Ω est compact.

Dérivée - Limite
Soit une suite de fonction f_n d'un intervalle I vers un Kevn F. Si
1. $\forall n,\ f_n$ est de classe C^1 sur I
2. $(f_n')_n$ converge uniformément sur I (ou seulement sur tout K compact $\subseteq I$)
3. $\exists x_0\in I\ \left(f_n(x_0)\right)_n$ converge
Alors
1. $f=\lim_n f_n$ est bien définie de classe C^1 sur I
2. $f'=(\lim_n f_n)'=\lim_n f_n{}'$
3. $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout K compact $\subseteq I$ vers f
Attention en général on a pas convergence uniforme sur tout I. Cependant c'est le cas si I est compact, ou si I est un intervalle borné et on avait convergence uniforme sur tout I de $(f_n')_n$ dans hypothèse 2.
Dérivée k-ieme - Limite
Soit une suite de fonction f_n d'un intervalle I vers un Kevn F. Si
1. $\forall n,\ f_n$ est de classe C^p sur I
2. $\forall k\in\{1,\dots,p\}\ \left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge uniformément sur I (ou seulement sur tout K compact $\subseteq I$)
3. $(f_n)_n$ converge simplement sur I
Alors
1. $f=\lim_n f_n$ est bien définie et de classe C^p sur I
2. $\forall k\in\{1,\dots,p\}\ \ f^{(k)}=(\lim_n f_n)^{(k)}=\lim_n f_n^{(k)}$
3. $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout K compact $\subseteq I$ vers f
Attention en général on a pas convergence uniforme sur tout I. Cependant c'est le cas si I est compact, ou si I est un intervalle borné et on avait convergence uniforme sur tout I de $(f_n')_n$ dans hypothèse 2.
Différentielle - Limite, sur un ouvert convexe
Soit une suite de fonctions $(f_n)_n$ d'un ouvert convexe U d'un R-evn E vers un Banach F. Si
1. $\forall n,\ f_n$ est différentiable sur U
2. $(df_n)_n$ converge uniformément sur U (ou seulement sur tout K compact $\subseteq U$)
3. $\exists x_0\in U\ \left(f_n(x_0)\right)_n$ converge
Alors
1. $f=\lim_n f_n$ est bien définie et différentiable sur U
2. $df=d\lim_n f_n=\lim_n df_n$
3. $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout K compact $\subseteq U$ vers f
Attention en général on a pas convergence uniforme sur tout U. Cependant c'est le cas si U est borné et on avait convergence uniforme sur tout U de $(df_n)_n$ dans hypothèse 2.
Différentielle - Limite, sur un ouvert connexe
Soit une suite de fonctions $(f_n)_n$ d'un ouvert connexe U d'un R-evn E vers un Banach F. Si

1. $\forall n,\ f_n$ est différentiable sur U
2. $\forall a \in U\ \exists r_a > 0\ \ (df_n)_n$ converge uniformément sur $B(a,r)$
3. $\exists x_0 \in U\ \big(f_n(x_0)\big)_n$ converge

Alors

1. $f = \lim_n f_n$ est bien définie et différentiable sur U
2. $df = d\lim_n f_n = \lim_n df_n$
3. $\forall a \in U\ \exists r_a > 0\ \ (f_n)_n$ converge uniformément sur $B(a,r)$ vers f.

Attention en général on a pas convergence uniforme sur tout U. Cependant c'est le cas si U est borné et on avait convergence uniforme sur tout U de $(df_n)_n$ dans hypothèse 2.

Dérivée Complexe - limite (par Morera)

Soit une suite de fonctions $(f_n)_n$ d'un <u>ouvert</u> $U \subseteq C$ vers $\mathbb{C}$

1. $\forall n, f_n$ holomorphe sur U
2. $(f_n)_n$ converge uniformément sur U (ou seulement sur tout compact $K \subseteq U$)

Alors

1. La fonction limite f est bien définie et holomorphe sur l'ouvert U
2. $\left(\frac{df_n}{dz}\right)_n$ converge uniformément sur tout compact de U vers $\frac{df}{dz}$. $\frac{d}{dz}\lim_n f_n = \lim_n \frac{df_n}{dz}$
3. $\forall k \in N^* \left(\frac{d^k f_n}{dz^k}\right)_n$ converge uniformément sur tout compact de U vers $\frac{d^k f}{dz^k}$. Et $\frac{d^k}{dz^k}\lim_n f_n = \lim_n \frac{d^k f_n}{dz^k}$

De plus :

Si l'ouvert U est connexe, et si tous les f_n sont sans zéros, alors la fonction limite est soit identiquement nulle, soit sans zéros.

Si l'ouvert U est connexe, et si tous les f_n sont injectives, alors la fonction limite est soit constante, soit injective.

Dérivée - Somme

Soit une suite de fonction f_n d'un intervalle I vers un Kevn F. Si

1. $\forall n,\ f_n$ est de classe C^1 sur I
2. $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur I (ou sur tout K compact $\subseteq I$)
3. $\exists x_0 \in I\ \ \sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge

Alors

1. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I
2. $(\sum_{n=0}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$
3. $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément <u>sur tout K compact $\subseteq I$</u>

Dérivée k-ième - Somme

Soit une suite de fonction f_n d'un intervalle I vers un Kevn F. Si

1. $\forall n,\ f_n$ est de classe C^p sur I
2. $\forall k \in \{1, \dots, p\}\ \ \sum_{n\geq 0} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I (ou sur tout K compact $\subseteq I$)
3. $\sum_{n\geq 0} f_n$ <u>converge simplement</u> sur I

Alors

1. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ de classe C^p sur I
2. $\forall k \in \{1, \dots, p\}\ \ (\sum_{n=0}^{\infty} f_n)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}$

3. $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément <u>sur tout K compact $\subseteq I$</u>

Différentielle - Somme, version convexe

Soit une série de fonctions $\sum_n f_n$ d'un ouvert <u>convexe</u> U d'un Revn E vers un <u>Banach</u> F. Si

1. $\forall n,\ f_n$ est différentiable sur U
2. $\sum_n df_n$ converge uniformément sur U (ou seulement sur tout K compact $\subseteq U$)
3. $\exists x_0 \in U\ \sum_n f_n\,(x_0)$ converge.

Alors

1. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ différentiable sur U
2. $d\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} df_n$
3. $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément <u>sur tout K compact $\subseteq U$</u>

Dérivée complexe - Somme

Soit une suite de fonctions d'un <u>ouvert</u> de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$

1. $\forall n, f_n$ holomorphe sur U
2. $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur U (ou seulement sur tout compact $K \subseteq U$)

Alors

1. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est holomorphe sur U
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{df_n}{dz}$ converge uniformément sur tout compact de U. $\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{df_n}{dz}$
3. $\forall k \in N^*\ \sum_{n\geq 0} \frac{d^k f_n}{dz^k}$ converge uniformément sur tout compact de U. $\frac{d^k}{dz^k}\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k f_n}{dz^k}$

De plus,

Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge <u>normalement</u> sur tout compact de U, alors $\sum_{n\geq 0} \frac{d^k f_n}{dz^k}$ aussi.

Remarque : $\forall n, f_n$ holomorphe et $\sum_{n\geq 0} |f_n|$ CU sur tout $K \subseteq U$ implique $\sum_{n\geq 0} f_n$ CN sur tout $K \subseteq U$

Dérivée - Intégrale

Soit une fonction f à valeurs dans $\mathbb{C}$ à deux variables : un paramètre x dans un <u>intervalle ouvert</u> I de R, et une variable d'intégration t dans un espace <u>mesuré</u> Ω. Si :

1. $\forall x \in I\quad t \mapsto f(x,t)$ <u>intégrable</u> (Dominer si nécessaire)
2. $\forall t \in \Omega$ p.p. $x \mapsto f(x,t)$ dérivable sur I. (<u>Pas de version locale</u>).
3. $\exists g: \Omega \to R_+$ intégrable, $\forall x \in I\quad \forall t \in \Omega$ p.p. $\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right| \leq g(t)$.

3(alt). $\forall K$ compact $\subseteq I,\ \exists g_K: \Omega \to R_+$ intégrable, $\forall x \in K\ \ \forall t \in \Omega$ p.p. $\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right| \leq g_K(t)$.

Alors

1. $x \mapsto \int_\Omega f(x,t)d\mu(t)$ est dérivable sur I
2. $\forall x \in I\ \frac{d}{dx}\int_\Omega f(x,t)d\mu(t) = \int_\Omega \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}d\mu(t)$

Aux bornes d'un intervalle, le théorème ne s'applique pas, on applique plutôt le TCD, ou le TCM, avec la caractérisation séquentielle des limites. En prépa il fallait supposer de plus $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ continue, càd $x \mapsto f(x,t)\ C^1$ pour que son intégrale ait un sens.

Dérivée partielle - Intégrale

Soit une fonction f a valeurs dans C a deux variables : un paramètre x dans un <u>ouvert convexe</u> U de R^n et une variable d'intégration t dans un espace <u>mesuré</u> Ω. Si :

1. $\forall x \in I\quad t \mapsto f(x,t)$ <u>intégrable</u>. (1. est un cas particulier de 3. Avec $|\alpha| = 0$)

2. $\forall t \in \Omega$ p.p. $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur U. (Pas de version locale).
3. $\forall \alpha \in N^n |\ 1 \leq |\alpha| \leq k$, $\exists g_\alpha : \Omega \to R_+$ intégrable, $\forall x \in U\ \forall t \in \Omega$ p.p. $\left|\frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial x^\alpha}\right| \leq g_\alpha(t)$
3(alt). $\forall \alpha \in N^n |\ 1 \leq |\alpha| \leq k, \forall K$ compact $\subseteq U$, $\exists g_{\alpha,K} : \Omega \to R_+$ intégrable, $\forall x \in K, \forall t \in \Omega$ p.p. $\left|\frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial x^\alpha}\right| \leq g_{\alpha,K}(t)$
Alors
1. $x \mapsto \int_\Omega f(x,t)d\mu(t)$ est de classe C^k sur U.
2. $\forall \alpha \in N^n |\ 1 \leq |\alpha| \leq k\ \forall x \in U\ \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\int_\Omega f(x,t)d\mu(t) = \int_\Omega \frac{\partial^\alpha f(x,t)}{\partial x^\alpha} d\mu(t)$
Hypothèses alternatives simples si Ω compact (il suffit de poser $g_{\alpha,K} = \max_{K\times\Omega}\left|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\right|$) :
1. f est C^k sur $U \times \Omega$. (plus exigeant).
2. Ω est compact.

Dérivée complexe - Intégrale

Soit une fonction f a valeurs dans C a deux variables : un paramètre z dans U un ouvert de C, et une variable d'intégration t dans un espace mesuré Ω. Si :
1. $\forall z \in U\quad t \mapsto f(z,t)$ mesurable
2. $\forall t \in \Omega$ p.p. $z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe sur U. (Pas de version locale).
3. $\exists g : \Omega \to R_+$ intégrable, $\forall x \in U\ \ \forall t \in \Omega$ p.p. $|f(z,t)| \leq g(t)$
3(alt). $\forall K$ compact $\subseteq U\ \exists g_K : \Omega \to R_+$ intégrable, $\forall x \in K\ \ \forall t \in \Omega$ p.p. $|f(z,t)| \leq g_K(t)$
Alors
1. $z \mapsto \int_\Omega f(z,t)d\mu(t)$ est bien définie et holomorphe sur U
2. $\forall z \in U\ \frac{d}{dz}\int_\Omega f(z,t)d\mu(t) = \int_\Omega \frac{\partial f(z,t)}{\partial z} d\mu(t)$

Intégrale - Intégrale. Théorème de Fubini-Tonelli.

Soit $(X,M,\mu), (Y,N,\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis.

Tonelli. Pour une fonction $f : X \times Y \to [0,+\infty]$ $M \otimes N$ mesurable, les fonctions partielles sont mesurables, $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ est M-mesurable, $y \mapsto \int_X f(x,y)d\nu(x)$ est N-mesurable, et on a $\int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y) = \int_{X\times Y} f\ d(\mu\otimes\nu)$ (peut valoir $+\infty$)

Fubini. = Tonelli pour les fonctions a valeurs dans C et intégrables au lieu de simplement mesurable. Une fonction $f : X \times Y \to C$ est $\mu\otimes\nu$-intégrable càd $\int_{X\times Y}|f(x,y)|d(\mu\otimes\nu)(x,y) < \infty$ ssi $\int_X\left(\int_Y |f(x,y)|d\nu(y)\right)d\mu(x) < \infty$ ssi $\int_Y\left(\int_X |f(x,y)|d\mu(x)\right)d\nu(y) < \infty$
Dans ce cas, les fonctions partielles sont intégrables, $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ est μ-intégrable, $y \mapsto \int_X f(x,y)d\nu(x)$ est ν-intégrable, et on a $\int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y) = \int_{X\times Y} f\ d(\mu\otimes\nu)$ (toujours fini dans C)
Les hypothèses sont bien toutes nécessaires (même la σ-finitude).

Théorème de Fubini-Tonelli pour le complété d'un espace produit.

Soit $(X,M,\mu), (Y,N,\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. Soit $\left(X \times Y, \widehat{M\otimes N}, \widehat{\mu\otimes\nu}\right)$ l'espace mesuré complété de $(X \times Y, M\otimes N, \mu\otimes\nu)$

Tonelli. Pour une fonction $f : X \times Y \to [0,+\infty]$ $\widehat{M \otimes N}$ mesurable, les fonctions partielles sont mesurables, $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ est M-mesurable, $y \mapsto \int_X f(x,y)d\nu(x)$ est N-mesurable, et on a

$\int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y) = \int_{X\times Y} f\ d\widehat{\mu\otimes\nu}$ (peut valoir $+\infty$)
Fubini. Pour une fonction $f : X\times Y \to C$ $\widehat{\mu\otimes\nu}$-intégrable,
Une fonction $f : X\times Y \to C$ est $\widehat{\mu\otimes\nu}$-intégrable càd $\int_{X\times Y}|f(x,y)|d\left(\widehat{\mu\otimes\nu}\right)(x,y) < \infty$ ssi $\int_X\left(\int_Y|f(x,y)|d\nu(y)\right)d\mu(x) < \infty$ ssi $\int_Y\left(\int_X|f(x,y)|d\mu(x)\right)d\nu(y) < \infty$
Dans ce cas les fonctions partielles sont intégrables, $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ est μ-intégrable, $y \mapsto \int_X f(x,y)d\nu(x)$ est ν-intégrable, et on a $\int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y) = \int_{X\times Y} f\ d\widehat{\mu\otimes\nu}$ (toujours fini dans C).
Cas particulier Fubini. Si f est continue sur un produit de segments, les hypothèses de Fubini sont vérifiées, donc les conclusions s'appliquent.

Somme, Somme, (version Tonelli)
Soit une suite double $\left(u_{m,n}\right)_{m,n}$ à valeurs dans $[0,\infty]$. Alors $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{m,n} \le \infty$
Somme - Somme. (version Fubini)
Soit une suite double $\left(u_{m,n}\right)_{m,n}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, si
1. $\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left|u_{m,n}\right|\right) < \infty$
Alors toutes les sommes existent et s'intervertissent
1. $\forall m$ $\sum_{n\geq 0} u_{m,n}$ converge, $\forall n$ $\sum_{m\geq 0} u_{m,n}$ converge
2. $\sum_{m\geq 0}\sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$ converge et $\sum_{n\geq 0}\sum_{m=0}^{\infty} u_{m,n}$ converge
3. $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{m,n} \in C$

Somme - Intégrale, (version Tonelli) (à privilégier si tout est >= 0)
Pour une série de fonctions sur un espace mesuré Ω, à valeurs dans [0,+∞], si :
1. $\forall n$, f_n est <u>mesurable</u>
Alors :
$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est mesurable sur Ω
$\int_\Omega \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_\Omega f_n \le \infty$
Somme – Intégrale, (version Fubini) (à privilégier si Ω pas borné)
Pour une série de fonctions sur un espace mesuré Ω, à valeurs dans $\mathbb{C}$, si :
1. $\forall n$, f_n est <u>mesurable</u> (alors on sait $\sum_{n=0}^{+\infty}|f_n|$ mesurable et $\int_\Omega\sum_{n=0}^{+\infty}|f_n| = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_\Omega|f_n| \le \infty$)
2. $\int_\Omega\sum_{n=0}^{+\infty}|f_n| < \infty$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_\Omega|f_n| < \infty$. (l'une ou l'autre suffit puisqu'il y a égalité)
Alors
1. $\sum_n f_n$ est bien définie μ pp sur E et intégrable sur E.
2. $\int_\Omega\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_\Omega f_n \in \mathbb{C}$
(On peut voir cette f_n comme une seule fonction a 2 variables $f\colon \mathbb{N}\times\Omega\colon (n,t)\mapsto f_n(t)$ définie sur le produit des espaces mesurés. Alors f est mesurable pour la tribu produit ssi $\forall n$ f_n est mesurable.)
Somme - Intégrale. (version uniforme) (à privilégier si Ω borné)
Soit une suite de fonctions f_n d'un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, Si :
1. I borné
2. $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I
3. $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n intégrable sur I.

Alors :
1. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est intégrable sur I
2. Alors $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt \in \mathbb{C}$ (Preuve : TCD ou $\left|\int_I S - \int_I S_n\right| \leq l(I)\|S - S_n\|_u$)
(Preuve de 1 : $\exists N \in \mathbb{N}\ \|S_N - S\|_{u,I} \leq 1$ donc $\forall x \in I\ \ |S_N(x) - S(x)| \leq 1$ donc $\forall x \in I\ |S(x)| \leq 1 + |S_N(x)|$ avec $x \mapsto 1$ et S_N intégrables sur I)

Somme - Intégrale, (version TCD)

Pour une série de fonctions sur un espace mesuré Ω, à valeurs dans $\mathbb{C}$, si :
1. $\forall n$, f_n est mesurable
2. $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement presque partout sur Ω, cad, $\forall t \in \Omega$ p.p. $\sum_{k=0}^{n} f_k(t) \to_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)$
3. $\exists g: \Omega \to R_+$ intégrable, $\forall t \in \Omega$ p.p. $\forall n$, $\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(t)\right| \leq g(t)$

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur Ω, $\sum_{n\geq 0} \int_\Omega f_n$ converge,
$\int_\Omega \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\Omega f_n \in \mathbb{C}$

Somme - Intégrale, (version prépa sans Lebesgue (inutile)).

Soit une suite de fonctions f_n d'un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, Si :
1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \ f_n$ c/m et intégrable sur I
2. $\sum_{n\geq 0} f_n$ CVS sur I et $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ c/m sur I
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n| < \infty$

Alors
1. $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ intégrable sur I
2. $\sum_{n\geq 0} \int_I f_n$ converge
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_I \sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathbb{C}$

Divers.

Somme - Produit fini. (Produits de Cauchy.)

Soit $(u_{1,n})_{n\geq 0}, (u_{2,n})_{n\geq 0}, \dots, (u_{p,n})_{n\geq 0}$ p suites dans une algèbre de Banach.
Si $\forall k \in \{1, \dots, p\} \sum_{n\geq 0}\|u_{k,n}\| < \infty$ alors avec $w_n = \sum_{\substack{0\leq i_1,\dots,i_p\leq n \\ i_1+\cdots+i_p=n}} \prod_{k=1}^{p} u_{k,i_k}$

1. $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge absolument donc converge
2. $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \prod_{k=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{k,b}\right)$

Produits infinis.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes d'un ouvert U vers C, alors $\boldsymbol{\prod_{n\geq 0} 1 + f_n}$ **converge normalement sur tout compact de U** signifie : $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur tout compact de U ou ce qui est équivalent : $(f_n)_n$ converge uniformement vers 0 sur tout compact de U et $\sum_{n\geq 0} Log(1 + f_n)$ converge normalement sur tout compact de U.

Théorème. Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions holomorphes d'un ouvert U vers C, telle que $\prod_{n\geq 0} 1 + f_n$ converge normalement sur tout compact de U, alors $\prod_{n\geq 0} 1 + f_n$ converge absolument vers une fonction $f = \prod_{n=0}^{\infty} 1 + f_n$ holomorphe sur U, de plus l'ensemble des zéros de f est la réunion des zéros des $1 + f_n$ et la multiplicité d'un zéro de f est la somme des multiplicités de ce zéro pour chaque $1 + f_n$.
De plus la série de fonctions méromorphes $\sum_{n\geq 0} \frac{(1+f_n)'}{1+f_n}$ CN sur tout K et $\frac{f'}{f} = \frac{(\prod_{n=0}^{\infty} 1+f_n)'}{(\prod_{n=0}^{\infty} 1+f_n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+f_n)'}{1+f_n}$.

Séries de fonctions méromorphes.

Les séries de fonctions méromorphes nécessitent des définitions particulières, car pas définies partout.

Soit une suite de fonctions méromorphes sur un ouvert U.

La série associée est dite uniformément convergente sur tout compact de U si pour tout compact K de U :

1. il existe un entier N_K tel que $\forall n \geq N_K$ la fonction f_n n'a pas de pôles dans K.
2. La série de fonctions tronquée $\sum_{n \geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K.

Dans ce cas on a $(f_n)_{n \geq N_K}$ holomorphes, et donc $\sum_{n \geq N_K} f_n$ série de somme holomorphe sur l'ouvert.

et $\forall z \in K$ $f(z) = \sum_{n=0}^{N_K - 1} f_n(z) + \sum_{n=N_K}^{\infty} f_n(z)$ ou la 1^{ere} somme est méromorphe, la 2^{e} holomorphe.

Théorème : Soit une suite de fonctions méromorphes sur un ouvert uniformément convergente sur tout compact de l'ouvert U. Alors on a les conséquences suivantes:

1. La réunion des pôles $P = \cup_n P_n$ est un ensemble ferme et discret, tel que pour tout pole $p \in P$, on a $ord_p(f) \leq \max_{n \in N} ord_p(f_n)$
2. La série de terme général $f_n(z)$ converge absolument pour tout $z \in U \setminus P$
3. La somme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ est definie sur $U \setminus P$ et meromorphe sur U.
4. La derivee de la somme definie sur $U \setminus P$ est la somme de la série des dérivées.

Le lemme de Fatou.

Pour toute suite de fonctions $(f_n)_n$ mesurables d'un espace mesuré vers [0,+∞], on a l'inegalite

$\int_X \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu$

Pour une suite de v.a.r. positives dans $[0, +\infty]$, $E(\liminf_n X_n) \leq \liminf_n E(X_n)$