1. Définition d'une série

Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un Kevn

Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, **la suite des sommes partielles de terme général $\boldsymbol{u_n}$ / associée à la suite $(\boldsymbol{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$** correspond à la suite $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. On note souvent $\boldsymbol{U_n} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

L'application $E^{\mathbb{N}} \to E^{\mathbb{N}}: (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est un isomorphisme d'ev de réciproque $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \begin{cases} u_0 = U_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*\ u_n = U_n - U_{n-1} \end{cases}$

Il n'y a donc pas beaucoup de différence entre l'information d'une suite ou celle d'une série puisqu'elles sont en bijection. Cependant pour certaines notions comme la convergence, on doit préciser le point de vue utilisé, car le sens diffère.

Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, **la série de terme général $\boldsymbol{u_n}$ / associée à la suite $(\boldsymbol{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$** notée $\sum_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{u_n}$ correspond au couple de la suite $(u_n)_{n\in N}$ et la suite des sommes partielles associée $(U_n)_{n\in N}$. Pour des notions très basiques comme la convergence d'une série, on n'utilise que $(U_n)_{n\in N}$. Pour certaines notions comme la convergence absolue, on a besoin de faire référence à $(u_n)_{n\in N}$. La façon standard de représenter une série est donc $((U_n)_{n\in N}, (u_n)_{n\in N})$, afin d'avoir immédiatement à disposition le point de vue pertinent. Cependant ce n'est pas important car (U_n) se déduit de (u_n) et réciproquement, donc on aurait pu se contenter de modéliser une série par juste l'un ou l'autre. L'intérêt du concept de série est surtout de définir ou de redéfinir des propriétés ou opérations qui lui sont propres. On note donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \boldsymbol{u_n} = ((U_n)_{n\in N}, (u_n)_{n\in N})$

L'ensemble des séries sur E, l'ensemble des sommes partielles sur E, l'ensemble des suites sur E, sont donc e.v. isomorphes quelle que soit la représentation choisie.

Pour une suite ne commençant pas à l'indice 0, $(u_n)_{n\geq n_0} \in E^{[n_0,\infty[\cap\mathbb{N}}$, on peut énoncer les concepts de ce chapitre de manière analogue en identifiant chaque définition sur $(u_n)_{n\geq n_0}$ à celle sur $\left(v_n = u_{n-n_0}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$. On ne s'intéresse généralement qu'aux comportements asymptotiques donc le premier indice n'a aucune importance.

2. Définitions

Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un Kevn

Une série $\sum_{n\in N} \boldsymbol{u_n}$ sur $\boldsymbol{E}$ est convergente dans $\boldsymbol{E}$ ssi sa suite des sommes partielles $(U_n)_{n\in N}$ l'est.

Dans le cas convergent, **la somme de la série $\sum_{n\in N} \boldsymbol{u_n}$** est définie comme la limite de la suite des sommes partielles : $\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{U} = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$

Dans le cas convergent, **la suite des restes de la série $\sum_{n\in N} \boldsymbol{u_n}$** est définie par $(\boldsymbol{R_n})_{n\in N} \in E^{\mathbb{N}}$:

$\forall n \in \mathbb{N}\ \ \boldsymbol{R_n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \boldsymbol{u_k} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = U - U_n$

Dans le cas convergent, la suite des restes est définie et tend toujours vers 0. $R_n \to_{n\to\infty} 0$.

Une série $\sum_{n\in N} \boldsymbol{u_n}$ sur $\boldsymbol{E}$ est divergente dans $\boldsymbol{E}$ ssi sa suite des sommes partielles $(U_n)_{n\in N}$ l'est.

Une série est donc soit convergente soit divergente.

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ sur E converge ssi la série $\sum_{n\geq 1} u_n - u_{n-1}$ converge sur E.

Le terme général d'une série convergente sur un Kevn, tend toujours vers 0.

Une série sur un Kevn dont le terme général ne tend pas vers 0, **diverge grossièrement**.

Une série dont le terme général tend vers 0, peut ne pas converger : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

Deux séries sur un Kevn $\boldsymbol{E}$, sont de même nature ssi (l'une converge ssi l'autre converge)

Deux séries sur un Kevn dont les suites ne diffèrent que par un nombre fini de termes, sont de même nature, mais pas forcément de même somme.

Pour deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergentes sur E, alors $\sum_{n\geq 0} u_n + v_n$ converge sur E et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

Pour une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ convergentes sur E, et $\lambda \in K$, alors $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n$ converge sur E et $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

La **somme de deux séries sur E** est $\sum_{n\geq 0} u_n + \sum_{n\geq 0} v_n = \sum_{n\geq 0} u_n + v_n$

Le **produit par un scalaire $\lambda \in K$ d'une série sur E** est $\lambda \sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} \lambda u_n$

L'ensemble des séries sur un Kevn, muni de la somme de séries et du produit par un scalaire, forme un Kevn.

L'ensemble des séries <u>convergentes</u> sur un Kevn, muni de la somme de séries et du produit par un scalaire, forme aussi un Kevn.

Pour $a \in \mathbb{C}$ de module ≥ 1, $\sum_{n\geq 0} a^n$ diverge grossièrement sur $\mathbb{C}$.

Pour $a \in \mathbb{C}$ de module < 1, $\sum_{n\geq 0} a^n$ converge sur $\mathbb{C}$, et $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$, et $\forall n \in N$ $R_n = \frac{a^{n+1}}{1-a}$

Pour un Kevn E de dimension finie p de base $(e_1, \dots, e_p)$, une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ sur E de **séries composantes $\sum_{n\geq 0} u_{n,i}$ sur K**, (telles que $u_n = \sum_{i=1}^{p} u_{n,i} e_i$),

Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge sur E ssi ses séries composantes convergent toutes dans K, et dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,i}\right) e_i$

Une série $\sum_{n\in N} u_n$ sur E vérifie le critère de Cauchy dans E ssi sa suite des sommes partielles $(U_n)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy dans E, càd $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in N\ \forall n > m \geq N\ \|\sum_{k=m+1}^{n} u_k\| \leq \varepsilon$

Une série convergente sur un Kevn E, est de Cauchy sur E. La réciproque est vraie si E complet.

Dans un Kevn complet, une série est convergente ssi elle est de Cauchy.

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge sur $\mathbb{R}$.

Une série $\sum_{n\in N} u_n$ sur E est absolument convergente ~~dans E~~ ssi $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|$ est convergente <u>dans $\mathbb{R}$</u>

Sur un Kevn <u>complet</u> E, une série $\sum_{n\in N} u_n$ absolument convergente, est convergente dans E, et vérifie l'inégalité triangulaire : $\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$.

Sur un Kevn <u>complet</u> E, pour une application linéaire continue $u \in L_c(E)$ de norme subordonnée $<$ 1, alors $\sum_{n\geq 0} u^n$ converge absolument donc converge dans E.

Une série $\sum_{n\in N} u_n$ sur E est semi-convergente dans E ssi elle converge dans E, mais pas absolument.

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est semi-convergente dans $\mathbb{R}$, et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$

Une série $\sum_{n\in N} u_n$ sur E est commutativement convergente dans E ssi $\forall \sigma \in S_{\mathbb{N}}$ $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ converge sur E.

Sur un Kevn complet E, une série absolument convergente est commutativement convergente sur E, et la somme est indépendante de la permutation : $\forall \sigma \in S_{\mathbb{N}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

En fait sur un Kevn complet E, convergence absolue et commutative sur E sont équivalentes.

3. Séries à termes positifs. On se place sur $E = \mathbb{R}, \mathbb{K} = \mathbb{R}$

La convergence d'une série à termes négatifs est équivalente à la convergence de la série de signe contraire à termes positifs.

L'étude d'une série de signe constant à partir d'un certain rang se ramène à l'étude d'une série positive en ne considérant que les termes après ce rang.

Une série à termes positifs $\sum_{n\in N} u_n$ est convergente sur $\mathbb{R}$ ssi sa suite des sommes partielles $(U_n)_{n\in N}$ est majorée.

Comparaison des séries à termes positifs. Pour deux suites $(u_n \in \mathbb{R}_+)_{n\geq 0}, (v_n \in \mathbb{R}_+)_{n\geq 0}$, telles que $u_n =_{n\to\infty} O(v_n)$ on a

$\sum_{n\geq 0} v_n$ converge dans $\mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge dans $\mathbb{R}$

Donc la contraposée aussi: $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge dans $\mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} v_n$ diverge dans $\mathbb{R}$

Encore vrai si on remplace $u_n =_{n\to\infty} O(v_n)$ par $u_n =_{n\to\infty} o(v_n)$, ou par $\forall n \in N \;\; u_n \leq v_n$

$u_n \sim_{n\to\infty} v_n \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature. (car $u_n \sim v_n \Rightarrow \begin{cases} u_n =_{n\to\infty} O(v_n) \\ v_n =_{n\to\infty} O(u_n) \end{cases}$)

$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ converge dans $\mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge dans $\mathbb{R}$

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ diverge dans $\mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge dans $\mathbb{R}$, mais $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \sim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Séries de Riemann. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge dans $\mathbb{R}$ ssi $\alpha > 1$

Dans ce cas $R_n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$

Règle $\boldsymbol{n^\alpha u_n}$. Pour une série <u>réelle</u> $\sum_{n\in N} u_n$, $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Si $n^\alpha u_n \to l$ avec $\alpha > 1$ et $l \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{n\in N} u_n$ converge absolument, donc converge sur $\mathbb{R}$.

Si $n^\alpha u_n \to l$ avec $\alpha \leq 1$ et $l \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$, alors $\sum_{n\in N} u_n$ diverge grossièrement.

Comparaison logarithmique. Pour deux séries à termes positifs <u>strictement</u> vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ (au moins à partir d'un certain rang), alors $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge dans $\mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge dans $\mathbb{R}$.

Règle de d'Alembert. Pour une série à termes positifs <u>strictement</u> vérifiant $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to_{n\to\infty} \lambda \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors $\begin{cases} \lambda < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge dans } \mathbb{R} \\ \lambda > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge grossièrement} \\ \lambda = 1 \Rightarrow \text{on ne peut pas conclure} \end{cases}$

Règle de d'Alembert plus précise. Pour une série à termes positifs <u>strictement,</u>

$$\begin{cases} \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge dans } \mathbb{R} \\ \liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge grossièrement} \end{cases}$$

Règle de Cauchy. Pour une série à termes positifs, on pose $p = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

$$\begin{cases} p < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge dans } \mathbb{R} \\ p > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge grossièrement} \end{cases}$$

Remarque : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to_{n\to\infty} \lambda \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \to \lambda$ donc Règle Cauchy $\geq$ d'Alembert.

Pour $u_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} \text{ si } n \text{ pair} \\ \frac{4}{3^n} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$ alors $\sqrt[n]{u_n} \to \frac{1}{3}$ mais $\begin{cases} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{4}{3} \\ \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{1}{12} \end{cases}$, donc Règle Cauchy $>$ d'Alembert.

Règle de Raabe-Duhamel. Pour une série à termes positifs <u>strictement</u>,

$\exists \alpha > 1 \; \frac{u_{n+1}}{u_n} =_{n\to\infty} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge dans $\mathbb{R}$

$\exists \alpha < 1 \; \frac{u_{n+1}}{u_n} =_{n\to\infty} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ diverge dans $\mathbb{R}$

Si $\alpha = 1$ on ne sait rien $\begin{cases} u_n = \frac{1}{n \ln n} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} =_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ diverge dans } \mathbb{R} \\ u_n = \frac{1}{n(\ln n)^2} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} =_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ et } \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge dans } \mathbb{R} \end{cases}$

$\exists \alpha \in \mathbb{R} \; \exists k > 1 \;\; \frac{u_{n+1}}{u_n} =_{n\to\infty} 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^k}\right) \Rightarrow \exists K > 0 \; u_n \sim_{n\to\infty} \frac{K}{n^\alpha}$

Lien série intégrale.

Pour une fonction $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ intégrable décroissante $\forall n \in \mathbb{N} \int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t)dt$

Pour une fonction $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ intégrable croissante $\forall n \in \mathbb{N} \int_{n-1}^n f(t)dt \leq f(n) \leq \int_n^{n+1} f(t)dt$

Ces inégalités tiennent toujours si on remplace intégrable par mesurable positive.

Lemme. Pour f mesurable positive décroissante, $\sum_{n\geq 0} \left(\int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)\right)$ converge toujours.

Test intégral. Pour une fonction f mesurable positive décroissante, on peut donc affirmer :

$\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\int_{n_0}^{n} f(t)dt\right)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow f$ est intégrable sur $[n_0, \infty[$

$\sum_{n\geq n_0} f(n)$ diverge dans $\mathbb{R} \Rightarrow \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \sim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)dt$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim_{n\to\infty} 2\sqrt{n}$

$\sum_{k=2}^{n} n\ln n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{2}n^2 \ln n$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} =_{n\to\infty} \ln n + \gamma + o(1)$

Séries de Bertrand. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

Sommation des relations de comparaison. Pour deux suites $(u_n \in \mathbb{R}_+)_{n\geq 0}, (v_n \in \mathbb{R}_+)_{n\geq 0}$, telles que $u_n =_{n\to\infty} o(v_n)$ (resp. O) on a

$\sum_{n\geq 0} v_n$ converge dans $\mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ converge dans $\mathbb{R}$ et $R_n(u) =_{n\to\infty} o\big(R_n(v)\big)$ (resp. O)

$\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge dans $\mathbb{R} \Rightarrow U_n =_{n\to\infty} o(V_n)$ (resp. O). (en particulier vrai si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge)

Ce théorème est encore vrai si $u_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, par contre il faut toujours $(v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$

Cas d'équivalence : Deux séries a termes positifs équivalents, sont de même nature, en cas de convergence il y a équivalence de leur reste, en cas de divergence il y a équivalence de leur somme partielle.

Cesàro. Pour une suite complexe convergente, la moyenne courante converge aussi vers la limite de la suite. $u_n \to l \in \mathbb{C} \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \to_{n\to\infty} l$

Réciproque fausse : $(u_n) = (-1)^n$ diverge et $\frac{(-1)^n}{n} \to 0$

Pour une suite réelle $u_n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \to_{n\to\infty} \infty$

Test de la loupe de Cauchy. Une série a termes positifs <u>décroissants</u> $\sum_{n\in N} u_n$, est de même nature que $\sum_{p\geq 0} 2^p u_{2^p}$

L'hypothèse de décroissance est nécessaire : $\sum_{n\in N} u_n$ avec $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} \text{ si } n = 2^p \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Pour une série a termes positifs décroissants $\sum_{n\in N} u_n$, la série $\sum_{n\in N} \min\left(\frac{1}{n}, u_n\right)$ est de même nature.

Séries alternées.

Une série <u>réelle</u> $\sum_{n\in N} u_n$ est alternée ssi ses termes changent de signe à chaque rang consécutif, autrement dit ssi $(-1)^n u_n$ est de signe constant.

Critère de convergence des SA. Pour une série alternée supposée wlog de la forme $\sum_{n\in N}(-1)^n u_n$ avec $(u_n)_n \geq 0$, si u_n tend vers 0 en décroissant, alors la série alternée converge, de plus on peut encadrer les sommes partielles $\forall n \geq 0\ \ S_{2n+1} \leq S = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n \leq S_{2n}$, de plus on peut majorer les restes $\forall n \geq 0\ \ |R_n| \leq |u_{n+1}|$ par le module de leur premier terme, et R_n est du signe de u_{n+1}.

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est (semi-)convergente sur $\mathbb{R}$, et $\sum_{n\geq 1} R_n$ converge sur $\mathbb{R}$.

$\forall a > 0\ \ \sum_{n\geq 2}(-1)^n \frac{\ln^a n}{n}$ converge sur $\mathbb{R}$.

$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge sur $\mathbb{R}$.

Pour des SA compliquées sans décroissance de $|u_n|$, une méthode est de faire un DA de u_n de sorte à l'écrire comme somme de termes qui seront des termes généraux de SA plus simples.

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$ converge sur $\mathbb{R}$. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}$ diverge sur $\mathbb{R}$.

Transformation d'Abel. L'idée est que pour une série de la forme $\sum_n \varepsilon_n u_n$ sur un Kevn complet, avec des scalaires ε_n, on cherche à utiliser le critère de Cauchy en réécrivant le terme

$\sum_{n=M+1}^{N} \varepsilon_n u_n = \varepsilon_N U_N - \varepsilon_{M+1} U_M - \sum_{n=M+1}^{N-1} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) U_n$.
Dans le cas intégral on écrit $\int_x^y fg = [fG]_x^y - \int_x^y f'G$, cela revient à faire une intégration par partie.
Théorème d'Abel. Pour une série de la forme $\sum_n \varepsilon_n u_n$ sur un Kevn complet, de scalaires $(\varepsilon_n)_n \geq 0$, tendant vers 0, telle que $(U_n)_n$ bornée sur E, et $\sum_n \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$ converge absolument, alors $\sum_n \varepsilon_n u_n$ converge.
Théorème d'Abel faible. Pour une série de la forme $\sum_n \varepsilon_n u_n$ sur un Kevn complet, de scalaires $(\varepsilon_n)_n \geq 0$, tendant vers 0 en décroissant, et telle que $(U_n)_n$ bornée sur E, alors $\sum_n \varepsilon_n u_n$ converge.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}\ \forall \alpha \in \mathbb{R} \begin{cases} \alpha \leq 0 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \text{ diverge grossièrement} \\ \alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \text{converge absolument donc converge dans } \mathbb{R} \\ 0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \theta \equiv 0[2\pi] \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \text{ diverge} \\ \theta \neq 0[2\pi] \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \text{converge dans } \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$$

$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\cos n}{n}$ converge dans $\mathbb{R}$
Test intégral (rappel). Pour une fonction réelle $f: [n_0, \infty[\to \mathbb{R}$ mesurable positive décroissante:
$\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\int_{n_0}^{n} f(t)dt\right)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow f$ est intégrable sur $[n_0, \infty[$
$\sum_{n\geq n_0} f(n)$ diverge dans $\mathbb{R} \Rightarrow \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \sim_{n\to\infty} \int_{n_0}^{n} f(t)dt$
Test intégral complexe. Pour une fonction $f: [n_0, \infty[\to \mathbb{C}$ C^1 de dérivée f' intégrable sur $[n_0, \infty[$, alors $\sum_{n\geq n_0} f(n)$ converge dans $\mathbb{C} \Leftrightarrow$ l'intégrale impropre $\int_{n_0}^{\infty} f(t)dt$ converge dans $\mathbb{C}$
$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{t\sqrt{n}}}{n}$ converge dans $\mathbb{C}$ $\quad \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\ln n)}{n}$ diverge dans $\mathbb{C}$
Sommation par paquets.
Soit une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ sur un Kevn E, et des groupements de termes définis par une suite
$v_0 = \sum_{k=0}^{\phi(0)} u_k$, $\forall n \geq 1\ v_n = \sum_{k=\phi(n-1)+1}^{\phi(n)} u_k$ avec $\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors la série des groupements $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge aussi et a même somme : $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$
La réciproque est vraie dans l'un des cas suivants :
- Les termes u_n sont des réels positifs ou nuls
- Les termes u_n sont des réels, et leur signe est constant dans chaque groupement de terme.
- La suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ tend vers 0, et la taille des groupements est majorée. $\phi(n+1) - \phi(n) \leq M$

Dans un de ces cas, une série et sa série de groupements sont de même nature, et de même somme si convergence.
$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^{\frac{1}{4}}}$ diverge dans $\mathbb{R}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n^{\frac{3}{4}}}$ converge dans $\mathbb{R}$
$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ converge dans $\mathbb{R}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \ln 3$
Produit de Cauchy.
Soit $(u_{1,n})_{n\geq 0}, (u_{2,n})_{n\geq 0}, \dots, (u_{p,n})_{n\geq 0}$ p suites dans une algèbre de Banach.
Si $\forall k \in \{1, \dots, p\}\ \sum_{n\geq 0} \|u_{k,n}\| < \infty$ alors avec $w_n = \sum_{\substack{0\leq i_1,\dots,i_p \leq n \\ i_1+\dots+i_p=n}} \prod_{k=1}^{p} u_{k,i_k}$

1. $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge absolument donc converge
2. $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \prod_{k=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{k,n}\right)$

$\forall a, b \in \mathbb{C} |\ |a| < 1, |b| < 1,\ \frac{1}{1-a} \frac{1}{1-b} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right)$

$\forall z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$

Interversion somme, somme.

Soit une suite double $(u_{m,n})_{m,n} \in \mathbb{C}^{N\times N}$, si

1. $\forall m\ \ \sum_{n=0}^{\infty}|u_{m,n}| < \infty$
2. $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|u_{m,n}| < \infty$

Alors toutes les sommes existent et s'intervertissent

1. $\forall m\ \ \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$ converge, $\ \forall n\ \ \sum_{m=0}^{\infty} u_{m,n}$ converge
2. $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n}$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{m,n}$ converge
3. $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} u_{m,n} \in \mathbb{C}$

$\forall a, z \in \mathbb{C} \mid |a| < 1, |z| < 1,\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{a^n}{1+z^2a^{2n}} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m z^{2m} e^{a^{2m+1}}$

Algèbre de Banach.

Pour A une K algèbre de Banach, $\forall x \in A\ \ \|x\| < 1 \Rightarrow 1_A - x$ inversible et $(1_A - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Pour A une K algèbre de Banach, le groupe des inversibles G_A est un ouvert de A.

Pour A une K algèbre de Banach, $G_A \to G_A : x \mapsto x^{-1}$ est un homéomorphisme.

Exponentielle. Pour A une K algèbre de Banach, $\forall x \in A\ \ \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n$ converge dans A.

L'exponentielle dans une algèbre de Banach est définie par $\forall x \in A\ \boldsymbol{e^x} = \mathbf{exp}\,\boldsymbol{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$

$\forall x, y \in A\ \ xy = yx \Rightarrow \exp(x)\exp(y) = \exp(x+y) = \exp(y)\exp(x)$

$\forall x \in A\ \ \exp x \in G_A$ et $(\exp x)^{-1} = \exp(-x)$

$\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall x \in A \exp(nx) = (\exp(x))^n$

$\forall M \in M_n(K)\ \forall P \in GL_n(K)\ \ P^{-1}\exp(M)\,P = \exp(P^{-1}MP)$

$$\forall D = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{bmatrix} \in D_n(K)\ \ \exp(D) = \begin{bmatrix}e^{\lambda_1} & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_n}\end{bmatrix} \in D_n(K)$$

$$\forall T = \begin{bmatrix}\lambda_1 & * & *\\ 0 & \ddots & *\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{bmatrix} \in T_n^S(K)\ \ \exp(T) = \begin{bmatrix}e^{\lambda_1} & * & *\\ 0 & \ddots & *\\ 0 & 0 & e^{\lambda_n}\end{bmatrix} \in T_n^S(K)$$ (ne permet pas de calculer les *)

$\forall M \in M_n(K)\ \ \det(\exp(M)) = \exp(tr(M))$

Pour calculer $\exp T$ complètement, on peut utiliser la décomposition de Dunford, voire de Jordan.

Suites de fonctions.

L'espace des applications de $E \to F$ note $\boldsymbol{F^E} = \boldsymbol{F(E,F)}$ peut être vu comme l'ensemble produit $\prod_{x\in E} F$ et peut être muni d'une topologie produit si F possède une topologie. On appelle **topologie de la convergence simple** cette topologie produit sur $\prod_{x\in E} F$.

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un ensemble E vers un espace topologique (F, T_F) **converge simplement (CS)** vers une fonction $f : E \to F$ ssi $\forall x \in E\ f_n(x) \to_{n\to\infty} f(x)$. Autrement dit ssi la suite $(f_n)_{n\in N}$ converge vers f dans l'espace topologique produit F^E.

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un ensemble E vers un espace métrique (F, d_F) **converge uniformément (CU)** vers une fonction $f : E \to F$ ssi

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in E\ d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$

La convergence uniforme implique la convergence simple. Càd une suite de fonctions CU est CS.

La réciproque est fausse. $[0,1] \to R : x \mapsto x^n$ CS sur $[0,1]$ mais pas CU sur $[0,1]$

La limite uniforme d'une suite d'applications continues en un point d'un espace topologique vers un espace métrique, est une application continue en ce point.

La limite uniforme d'une suite d'applications continues sur un espace topologique, vers un espace métrique, est une application continue.
Pour une suite $(f_n)_{n\in N}$ d'un ensemble E vers un espace métrique (F, d_F) CU vers $f : E \to F$, et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ alors $d\big(f_n(x_n), f(x_n)\big) \to_{n\to\infty} 0_F$
Pour un ensemble E et un espace métrique F, on note $\boldsymbol{B(E,F)}$ l'ensemble des fonctions bornées de F^E.
$B(E,F)$ est aussi un espace métrique pour la **distance uniforme** : $\boldsymbol{d_u(f,g)} = \sup_{x\in E} d\big(f(x), g(x)\big)$
Si F est un Kevn, alors $B(E,F)$ est un Kevn pour la **norme uniforme** : $\boldsymbol{\|f\|_u} = \sup_{x\in E}\|f(x)\|$
De plus F complet $\Rightarrow (B(E,F), \|\ \|_u)$ complet.
Converger dans $B(E,F)$ pour la distance/norme uniforme, c'est converger uniformément. Donc la topologie associée a d_u est appelée **la topologie de la convergence uniforme**.
$[0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$, mais CU sur tout compact de $[0,1[$
$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}: x \mapsto xe^{-nx}$ converge uniformément (donc simplement) sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.
$[0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} n^2x(1-nx) \text{ si } x \in [0,\frac{1}{n}] \\ \quad 0 \text{ sinon} \end{cases}$ CS vers 0 sur $[0,1]$, CU sur tout compact de $]0,1]$, mais pas CU sur $[0,1]$
Pour un espace topologique E et un espace métrique F, on note $\boldsymbol{C_b(E,F)}$ l'ensemble des fonctions continues bornées de F^E. Autrement dit $C_b(E,F) = C(E,F) \cap B(E,F)$
Si F est un Kevn, alors $C_b(E,F)$ est un Kevn pour la norme uniforme comme Ksev de $B(E,F)$
De plus F complet $\Rightarrow (C_b(E,F), \|\ \|_u)$ complet.
$C^2([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $f \mapsto \|f\|_u + \|f'\|_u + \|f''\|_u$ est un $\mathbb{R}$ evn complet.
Une suite d'applications $(f_n)_{n\in N}$ d'un ensemble E vers un <u>espace métrique</u> (F, d_F) **vérifie le critère de Cauchy uniforme (CCU)** ssi $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in N\ \forall n > m \geq N\ \forall x \in E\ d\big(f_n(x), f_m(x)\big) < \varepsilon$
Une suite de fonctions CU vérifie le CCU.
La réciproque est vraie si l'espace métrique d'arrivée est complet, auquel cas CU $\Leftrightarrow$ CCU.
La limite uniforme d'une suite de polynômes sur un corps (TODO sur $\mathbb{R}$ seulement?), vers un espace métrique, est un polynôme sur ce même corps.
Interversions suites de fonctions.
Interversion continuité, limite. (cf interversions)
$[0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ CS sur $[0,1]$ vers une limite pas continue sur $[0,1]$
$\left(\mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CS sur $\mathbb{R}$ mais vers une limite pas continue sur $\mathbb{R}$
Interversion limite, limite. (cf interversions)
Interversion limite, limite discrète. (cf interversions)
$(\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}: x \mapsto e^{-nx})_{n\in\mathbb{N}}$ CS vers 0 sur $\mathbb{R}_+^*$ $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 1 \neq \lim_{x\to 0^+}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
Interversion limite, intégrale TCM, TCD. (cf interversions)
$([0,1] \to \mathbb{R}: x \mapsto 2nx(1-x^2)^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ CS vers 0 sur $[0,1]$ mais $\int_0^1 0dx = 0 \neq \int_0^1 f_n(x)dx = 1$
Interversion dérivée, limite(cf interversions)
Interversion dérivée $\boldsymbol{k}$-ieme, limite (cf interversions)
Interversion différentielle, limite, sur un ouvert convexe (cf interversions)
Interversion différentielle, limite, sur un ouvert connexe (cf interversions)
Interversion dérivée complexe, limite (par Morera) (cf interversions)
Séries de fonctions. On se place dans un $\mathbb{K}$evn F, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E un espace topologique.
Pour une suite de fonctions $(f_n: E \to F)_{n\in\mathbb{N}}$, **la suite des somme partielles de terme général $\boldsymbol{f_n}$ /**

associée à la suite $(\boldsymbol{f_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$ correspond à la suite $(\sum_{k=0}^{n} f_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Pour une suite de fonctions $(f_n: E \to F)_{n\in\mathbb{N}}$, **la série de fonctions de terme général $\boldsymbol{f_n}$ / associée à la suite $(\boldsymbol{f_n})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$** notée $\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}} \boldsymbol{f_n}$ correspond au couple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite des sommes partielles associée $(\sum_{k=0}^{n} f_k)_{k\in\mathbb{N}}$
Une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ d'un ensemble E vers un $\mathbb{K}$evn F **converge simplement (CS)** vers une fonction $f : E \to F$ ssi $\forall x \in E$ $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge dans F, et $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x)$, càd ssi la suite des sommes partielles de fonctions converge simplement vers f, càd ssi la suite des restes converge simplement vers 0.
Une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ d'un ensemble E vers un $\mathbb{K}$evn F **converge uniformément (CU)** vers une fonction $f : E \to F$ ssi $\sum_{k=0}^{n} f_k \to_{n\to\infty}^{\|\ \|_u} f$, càd ssi la suite des sommes partielles de fonctions converge uniformément vers f, càd ssi la suite des restes converge uniformément vers 0.
Une série de fonction CU est CS.
Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un ensemble E vers un $\mathbb{K}$evn F converge simplement sur E ssi la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}(f_n - f_{n-1})$ converge simplement sur E.
Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un ensemble E vers un $\mathbb{K}$evn F converge uniformément sur E ssi la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}(f_n - f_{n-1})$ converge uniformément sur E.
Si une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur F, alors son terme général f_n converge uniformément sur F vers 0.
$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{x+n+1}$ CS sur $\mathbb{R}_+$ et CU sur $\mathbb{R}_+$
$\sum_{n\geq 0}(-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)$ CS sur $\mathbb{R}_+$, mais pas CU sur $\mathbb{R}_+$ mais CU sur tout compact de $\mathbb{R}_+$
Une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ d'un ensemble E vers un $\mathbb{K}$evn F **vérifie le critère de Cauchy pour uniforme pour les séries (CCUS)** ssi la suite de sommes partielles est CCU, càd ssi $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > m \geq N\ \forall x \in E\ \|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\|_F < \varepsilon$.
Une série de fonctions CU, vérifie le CCUS.
La réciproque est vraie si le Kevn d'arrivée est complet, auquel cas CU $\Leftrightarrow$ CCUS.
$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$ CS sur $\mathbb{R}$, non CU sur $[0, \pi]$ mais $\forall \delta \in]0, \pi[$ CU sur $[\delta, 2\pi - \delta]$
Une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ d'un ensemble E vers un $\mathbb{K}$evn F **converge normalement (CN) sur $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{F}$** ssi $\sum_{n\geq 0}\|f_n\|_{u,E}$ converge dans F.
Une série de fonctions CN, est AC en tout point.
Une série de fonction CU est CS.
Dans un Kevn F complet, une série de fonction AC en tout point, est CS.
Dans un Kevn F complet, une série de fonction CN est CU, et donc CS.
$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{x+n+1}$ CS sur $\mathbb{R}_+$ et CU sur $\mathbb{R}_+$ mais pas CN sur $\mathbb{R}_+$
$\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(x^n)e^{in\ln(1+x^{2n})}}{1+n^{\frac{5}{4}}}$ est CS, CU, et CN sur $\mathbb{R}$
Série alternées. Une suite de fonctions a valeurs réelles $f_n: E \to \mathbb{R}$ CU vers la fonction nulle, et telle que $\forall x \in E$ $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, alors la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n f_n$ CU sur E.
Interversion continuité, somme (cf interversions)
$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{x+n+1}$ continue sur $\mathbb{R}_+$ $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)$ continue sur $\mathbb{R}_+$
Pour A $\mathbb{K}$ algèbre de Banach, $B(0,1) \to A: x \mapsto (1_A - x)^{-1}$ est continue, exp est continue sur A.
Interversion limite, somme (cf interversions)
$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1 + \frac{x^2}{(1+x^2)(1+n)}\right) \to_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{1+n}\right)$

$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}E\left(\frac{n}{k}\right) \to_{n\to\infty} \ln 2$

Interversion somme positive, intégrale (cf interversions)

Interversion somme, intégrale v1 (cf interversions)

Interversion somme, intégrale v2 (version sigma finie) (cf interversions)

Interversion somme, intégrale v3 (cas particulier de Fubini). (cf interversions)

$\forall a \in \mathbb{C} \begin{cases} |a| < 1 \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{a-e^{i\theta}} d\theta = -1 \\ |a| > 1 \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{a-e^{i\theta}} d\theta = 0 \end{cases}$

Interversion dérivée, somme (cf interversions)

Interversion dérivée k-ième, somme (cf interversions)

Interversion différentielle, somme, version convexe (cf interversions)

Interversion dérivée complexe, somme (cf interversions)

$\forall x \in]-1,1[\ \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ $\quad \forall x \in]-1,1[\ \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

Pour A $\mathbb{K}$ algèbre de Banach, $f: \mathbb{R} \to A: t \mapsto \exp(ta)$ est C^1 et $f'(t) = aexp(ta) = \exp(ta)\,a$