Limite et continuité dans un espace vectoriel normé.
Soit une fonction f d'une partie A d'un Kevn E vers un Kevn F telle que $a \in E$ est un point d'accumulation de A, et $l \in F$.
On dit que $\boldsymbol{f}$ **admet pour limite** $\boldsymbol{l}$ **en** $\boldsymbol{a}$ et on note $\boldsymbol{f \to_a l} \,/\, \boldsymbol{f(x) \to_{x\to a} l}$ ssi
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A \setminus \{a\}\ \|x-a\|_E \le \delta \Rightarrow \|f(x)-l\|_F \le \varepsilon$
Si la limite existe, elle est unique et on la note $\boldsymbol{\lim_a f} \,/\, \boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x)}$
Une limite d'une fonction appartient à l'adhérence de l'image.
Une fonction f d'une partie A d'un Kevn E vers un Kevn F est **continue en un point** (d'accumulation de) ssi sa limite en ce point est l'image de ce point.
La limite se compose. Si $f \to_a b$ et $g \to_b l$ alors $g \circ f \to_a l$
Une fonction qui admet une limite $l \in F$ en un point a ou elle n'est pas définie, permet de définir le **prolongement par continuité de** $\boldsymbol{f}$ **en** $\boldsymbol{a}$ comme la fonction $\tilde{f}$ telle que $\tilde{f}_{|A} = f$ et $\tilde{f}(a) = \lim_a f$

Limites dans R.
Soit une fonction $f : A \subseteq R \to R$, soit $l \in R$, soit $a \in R$ un point d'accumulation de A.
$f \to_a l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A \setminus \{a\}\ |x-a| \le \delta \Rightarrow |f(x)-l| \le \varepsilon$
$f \to_a +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in R\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A \setminus \{a\}\ |x-a| \le \delta \Rightarrow f(x) \ge \varepsilon$
$f \to_a -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in R\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A \setminus \{a\}\ |x-a| \le \delta \Rightarrow f(x) \le \varepsilon$
$f \to_a l^+ \Leftrightarrow f \to_a l$ et $\exists \delta > 0\ \forall x \in A \setminus \{a\}\ |x-a| \le \delta \Rightarrow f(x) \ge l$
$f \to_a l^- \Leftrightarrow f \to_a l$ et $\exists \delta > 0\ \forall x \in A \setminus \{a\}\ |x-a| \le \delta \Rightarrow f(x) \le l$
$f \to_{+\infty} l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in R\ \forall x \in A\ x \ge \delta \Rightarrow |f(x)-l| \le \varepsilon$
$f \to_{+\infty} +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in R\ \exists \delta \in R\ \forall x \in A\ x \ge \delta \Rightarrow f(x) \ge \varepsilon$
$f \to_{+\infty} -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in R\ \exists \delta \in R\ \forall x \in A\ x \ge \delta \Rightarrow f(x) \le \varepsilon$
$f \to_{+\infty} l^+ \Leftrightarrow f \to_{+\infty} l$ et $\exists \delta \in R\ \forall x \in A\ x \ge \delta \Rightarrow f(x) \ge l$
$f \to_{+\infty} l^- \Leftrightarrow f \to_{+\infty} l$ et $\exists \delta \in R\ \forall x \in A\ x \ge \delta \Rightarrow f(x) \le l$
$f \to_{-\infty} l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in R\ \forall x \in A\ x \le \delta \Rightarrow |f(x)-l| \le \varepsilon$
$f \to_{-\infty} +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in R\ \exists \delta \in R\ \forall x \in A\ x \le \delta \Rightarrow f(x) \ge \varepsilon$
$f \to_{-\infty} -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in R\ \exists \delta \in R\ \forall x \in A\ x \le \delta \Rightarrow f(x) \le \varepsilon$
$f \to_{-\infty} l^+ \Leftrightarrow f \to_{-\infty} l$ et $\exists \delta \in R\ \forall x \in A\ x \le \delta \Rightarrow f(x) \ge l$
$f \to_{-\infty} l^- \Leftrightarrow f \to_{-\infty} l$ et $\exists \delta \in R\ \forall x \in A\ x \le \delta \Rightarrow f(x) \le l$
$f \to_{a^-} l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ x \in]a-\delta, a[\Rightarrow |f(x)-l| \le \varepsilon$
$f \to_{a^-} +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in R\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ x \in]a-\delta, a[\Rightarrow f(x) \ge \varepsilon$
$f \to_{a^-} -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in R\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ x \in]a-\delta, a[\Rightarrow f(x) \le \varepsilon$
$f \to_{a^-} l^+ \Leftrightarrow f \to_{a^-} l$ et $\exists \delta > 0\ \forall x \in A\ x \in]a-\delta, a[\Rightarrow f(x) \ge l$
$f \to_{a^-} l^- \Leftrightarrow f \to_{a^-} l$ et $\exists \delta > 0\ \forall x \in A\ x \in]a-\delta, a[\Rightarrow f(x) \le l$
$f \to_{a^+} l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ x \in]a, a+\delta[\Rightarrow |f(x)-l| \le \varepsilon$
$f \to_{a^+} +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in R\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ x \in]a, a+\delta[\Rightarrow f(x) \ge \varepsilon$
$f \to_{a^+} -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in R\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\ x \in]a, a+\delta[\Rightarrow f(x) \le \varepsilon$
$f \to_{a^+} l^+ \Leftrightarrow f \to_{a^+} l$ et $\exists \delta > 0\ \forall x \in A\ x \in]a, a+\delta[\Rightarrow f(x) \ge l$
$f \to_{a^+} l^- \Leftrightarrow f \to_{a^+} l$ et $\exists \delta > 0\ \forall x \in A\ x \in]a, a+\delta[\Rightarrow f(x) \le l$
Remarques :
$f \to_{a^-} l \Leftrightarrow f(x) \to_{x\to a^-} l \Leftrightarrow f(x) \to_{\substack{x\to a \\ x<a}} l \Leftrightarrow f_{|A\cap]-\infty,a[} \to_a l$

Notations o, O, $\sim$.

Une fonction f : $A \subseteq E \to F$ est négligeable devant une fonction g : $A \to F$ au voisinage d'un point $a \in E$ d'accumulation de A, et on note $\boldsymbol{f(x) =_{x\to a} o\big(g(x)\big)}$ ssi $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A \setminus \{a\}\ \|x - a\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq \varepsilon \|g(x)\|_F$. Dans le cas F K-algèbre normée, $f(x) =_{x\to a} o\big(g(x)\big)$ ssi
il existe une fonction $\varepsilon : A \to F$ qui <u>tend vers 0</u> en a et telle que <u>sur un voisinage de a</u>, on a $f = \varepsilon g$.
Une fonction f : $A \subseteq E \to F$ est dominée par une fonction g : $A \to F$ au voisinage d'un point $a \in E$ d'accumulation de A, et on note $\boldsymbol{f(x) =_{x\to a} O\big(g(x)\big)}$ ssi $\exists M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A \setminus \{a\}\ \|x - a\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq M\|g(x)\|_F$. Dans le cas F K-algèbre normée, $f(x) =_{x\to a} O\big(g(x)\big)$ ssi
il existe une fonction $\varepsilon : A \to F$ <u>bornée</u> telle que <u>sur un voisinage de a</u>, on a $f = \varepsilon g$.
Une fonction f : $A \subseteq E \to F$ est équivalente à une fonction g : $A \to F$ au voisinage d'un point $a \in E$ d'accumulation de A, et on note $\boldsymbol{f(x) \sim_{x\to a} g(x)}$ ssi $f(x) - g(x) =_{x\to a} o\big(g(x)\big)$.
Dans le cas F K-algèbre normée, $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$ ssi
il existe une fonction $\varepsilon : A \to F$ qui <u>tend vers 1</u> en a telle que <u>sur un voisinage de a</u>, on a $f = \varepsilon g$.
$\sim_{x\to a}$ est une relation d'équivalence sur les fonctions $A \to R$.
Dans F K-algèbre normée, lorsqu'on a une expression avec des o ou des O, c'est un abus d'écriture, pour interpréter l'expression, on remplace tous les o, O par une fonction ε. Chaque occurrence doit être remplacée par sa fonction ε <u>particulière</u>, en dépit du même symbole utilisé o. Les o, O à gauche d'une équation sont remplacés par des fonctions ε_k généralement introduites par un quantificateur universel, ceux à droite d'une équation sont remplacés par des fonctions ε_k généralement introduites par un quantificateur existentiel. Par exemple $o\left(\big(x + o(x)\big)^2\right) =_{x\to 0} o(x^2)$ signifie
$\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \to_0 0\ \ \exists \varepsilon_3 \to_0 0\ \forall x\ \varepsilon_1(x)\big(x + x\varepsilon_2(x)\big)^2 = \varepsilon_3(x)x^2$
Dérivation selon une variable réelle.
La **fonction variation par rapport à un point $x_0 \in R$** est la fonction $R \to R : x \mapsto x - x_0$
La **fonction variation par rapport à un point initial $x_0 \in I$ d'une fonction y d'un intervalle I vers un Kevn E,** est la fonction $\boldsymbol{\Delta_{x_0} y} : I \to E : x \mapsto y(x) - y(x_0)$
La **fonction taux de variation** d'une fonction d'un intervalle I de R vers un Kevn E, en un point x_0 de l'intervalle, est la fonction $I \setminus \{x_0\} \to E : x \mapsto \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}$. On la note $\frac{\boldsymbol{\Delta_{x_0} y}}{\boldsymbol{\Delta_{x_0} x}}$ ou pour être plus bref : $\frac{\boldsymbol{\Delta y}}{\boldsymbol{\Delta x}}$
Une fonction y d'un intervalle I vers un Kevn E est dite **dérivable en un point $x_0 \in I$** ssi sa fonction taux de variation en x_0 admet une limite finie en x_0. Cette définition suppose donc implicitement que x_0 est un point d'accumulation de I (c'est une précondition pour parler de limite) donc on a $I \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.
La **dérivée en $x_0 \in I$ d'une fonction y** d'un intervalle I vers un Kevn E, dérivable en x_0, est la limite de sa fonction taux de variation en x_0. On la note $\boldsymbol{f'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
Une fonction y d'un intervalle I vers un Kevn E est dite **dérivable à gauche (resp. droite) en $x_0 \in I$ / en x_0^- (resp. x_0^+)** ssi sa fonction taux de variation en x_0 admet une limite finie en x_0^- (resp en x_0^+). Cette définition suppose donc implicitement $I\ \cap]-\infty, x_0[\neq \emptyset$ (resp. $I\ \cap]x_0, +\infty[\neq \emptyset$)
La **dérivée à gauche (resp. droite) en $x_0 \in I$ / en x_0^- (resp. x_0^+) d'une fonction y** d'un intervalle I vers un Kevn E, dérivable en x_0^- (resp. en x_0^+), est $\boldsymbol{y'_g(x_0) = y'(x_0^-)} = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}$ (resp. est $\boldsymbol{y'_d(x_0) = y'(x_0^+)} = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0}$)

Caractérisations.

Soit une fonction f d'un intervalle I vers un Kevn E, soit $x_0 \in I$

f continue à gauche en x_0 ssi $I \cap]-\infty, x_0[\neq \emptyset$ et $f_{|I\cap]-\infty,x_0[}$ continue en x_0

f continue à gauche en x_0 ssi $f(x) =_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x_0) + o(1)$

f continue à droite en x_0 ssi $I \cap]x_0, +\infty[\neq \emptyset$ et $f_{|I\cap]x_0,+\infty[}$ continue en x_0

f continue à droite en x_0 ssi $f(x) =_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x_0) + o(1)$

f continue en x_0 ssi $f(x) =_{x\to x_0} f(x_0) + o(1)$

En un point x_0 <u>intérieur à</u> I, f continue en x_0 ssi f continue à gauche et à droite en x_0

f dérivable à gauche en x_0 ssi $I \cap]-\infty, x_0[\neq \emptyset$ et $f_{|I\cap]-\infty,x_0[}$ dérivable en x_0.

Dans ce cas $f'(x_0^-) = f'_{|I\cap]-\infty,x_0[}(x_0)$

f dérivable à gauche en x_0 ssi $\exists l \in R$ $f(x) =_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x_0) + (x - x_0)l + o(x - x_0)$

Dans ce cas $f'(x_0^-) = l$

f dérivable à droite en x_0 ssi $I \cap]x_0, +\infty[\neq \emptyset$ et $f_{|I\cap]x_0,+\infty[}$ dérivable en x_0.

Dans ce cas $f'(x_0^+) = f'_{|I\cap]x_0,+\infty[}(x_0)$

f dérivable à droite en x_0 ssi $\exists l \in R$ $f(x) =_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x_0) + (x - x_0)l + o(x - x_0)$

Dans ce cas $f'(x_0^+) = l$

f dérivable en x_0 ssi $\exists l \in R$ $f(x) =_{x\to x_0} f(x_0) + (x - x_0)l + o(x - x_0)$

Dans ce cas $f'(x_0) = l$

En un point x_0 <u>intérieur à</u> I, on a f dérivable en x_0 ssi f dérivable en x_0^- et en x_0^+ <u>et</u> $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$

Dans ce cas $f'(x_0) = f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$

Propriétés de composition.

Une fonction dérivable à gauche (resp. droite) en un point y est continue à gauche (resp. droite).

Une fonction dérivable en un point y est continue.

Composition. Si $f: I \to R, g: J \to E, f(I) \subseteq J, x_0 \in I, f$ dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)$

Pour $u \in L_c(E, F)$ et $f: I \to E$, f dérivable en $x_0 \Rightarrow u \circ f$ dérivable en x_0 et $(u \circ f)'(x_0) = u\big(f'(x_0)\big)$

Une fonction f d'un intervalle I vers un Kevn E de dimension finie est dérivable en $x_0 \in I$ ssi ses composantes suivant n'importe quelle base de E, sont aussi dérivables en x_0 et dans ce cas $f'(x_0) = \sum_i f_i'(x_0)e_i$

Soit $E_1, \dots, E_n, F$ K evns et $B: E_1 \times \dots \times E_n \to F$ et $f_i: E_i \to F$ pour $i = 1 \dots n$

Si B est n-lineaire continue et $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ f_i dérivable en x_0 alors $h: I \to F: x \mapsto B\big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big)$ est derivable en x_0 et $h'(x_0) = \sum_{k=1}^n B\big(f_1(x_0), \dots, f_k'(x_0), \dots, f_n(x_0)\big)$

Pour E Kevn de dimension finie n et $(c_i: I \to E \text{ derivable en } x_0 \in I)_{1\le i\le n}$ alors $h: I \to E: x \mapsto \det_B\big(c_1(x), \dots, c_n(x)\big)$ est derivable en x_0 et $h'(x_0) = \sum_{k=1}^n \det_B\big(c_1(x), \dots, c_k'(x), \dots, c_n(x)\big)$

Classes de régularité

Soit f fonction d'un intervalle I vers un Kevn E, soit $x_0 \in I$

Pour une propriété locale P telle que soit défini : « f est P en x_0 » on peut définir la version globale : f est P (**sur *I***) ssi $\forall x \in I$ f est P en x

f est P **sur $\boldsymbol{J} \subseteq \boldsymbol{I}$** ssi $f_{|J}$ est P ssi $\forall x \in J\ f_{|J}$ est P en x

Attention, f est P sur $J \subseteq I$ n'est pas forcement équivalent a $\forall x \in J\ f$ est P en x.

$\boldsymbol{f}$ est de classe $\boldsymbol{C^0}$ ssi f continue (sur I)

$\boldsymbol{f}$ est de classe $\boldsymbol{C^0}$ en $\boldsymbol{x_0}$ ssi f continue en x_0

Cette définition locale est compatible avec la version globale car f est C^0 ssi $\forall x_0 \in I\ f\ C^0$ en x_0

$\boldsymbol{f}$ est de classe $\boldsymbol{C^1}$ ssi f dérivable sur I et f' continue sur I

$\boldsymbol{f}$ est de classe $\boldsymbol{C^1}$ en $\boldsymbol{x_0}$ ssi $\exists J$ intervalle tel que $x_0 \in int(J)$, $f_{|I\cap J}$ est dérivable, $f'_{|I\cap J}$ est continue en x_0

Cette définition locale est compatible avec la version globale car f est C^1 ssi $\forall x_0 \in I\ f\ C^1$ en x_0

f est **$\boldsymbol{k}$-fois dérivable en $\boldsymbol{x_0}$** ssi $\exists J$ intervalle tel que $x_0 \in int(J)$, $f_{|I\cap J}$ est $k-1$ dérivable en x_0 et $f_{|I\cap J}^{(k-1)}$ est dérivable en x_0. Dans ce cas on note $f^{(k)}(x_0) = \left(f_{|I\cap J}^{(k-1)}\right)'(x_0)$

Remarque : Si f est **$\boldsymbol{k}$-fois dérivable (sur $\boldsymbol{I}$)**, alors $\forall J$ intervalle tel que $x_0 \in int(J)$, $f_{|I\cap J}$ est k-fois dérivable et $f_{|I\cap J}^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$

$\boldsymbol{f}$ est de classe $\boldsymbol{C^k}$ ssi f k-fois dérivable sur I et $f^{(k)}$ continue sur I

$\boldsymbol{f}$ est de classe $\boldsymbol{C^k}$ en $\boldsymbol{x_0}$ ssi $\exists J$ intervalle tel que $x_0 \in int(J)$, $f_{|I\cap J}$ k-fois dérivable, $f_{|I\cap J}^{(k)}$ continue en x_0

Cette définition locale est compatible avec la version globale car f est C^k ssi $\forall x_0 \in I\ f\ C^k$ en x_0

$\boldsymbol{f}$ est de classe $\boldsymbol{C^\infty}$ ssi $\forall k \in N\ f$ k-fois dérivable sur I ssi $\forall k \in N\ f \in C^k(I,E)$

$\boldsymbol{f}$ est de classe $\boldsymbol{C^\infty}$ en $\boldsymbol{x_0}$ ssi $\forall k \in N\ f$ k-fois dérivable en x_0 ssi $\forall k \in N\ f$ est C^k en x_0

On note $\boldsymbol{C^k(I,E)} = \{f : I \to E \mid f \text{ de classe } C^k\}$

On note $\boldsymbol{D^k(I,E)} = \{f : I \to E \mid f\ k \text{ fois derivable}\}$

$\boldsymbol{C^\infty(I,E)} = \boldsymbol{D^\infty(I,E)} = \{f : I \to E \mid f\ \infty \text{ fois derivable}\} = \{f : I \to E \mid f\ C^\infty\}$

Rappel sur les subdivisions.

Une **subdivision** de $[a,b]$ est une famille finie strictement croissante de réels dont le premier est a, le dernier est b. Le **pas d'une subdivision** est l'écart maximal entre deux termes consécutifs de la subdivision.

Une **subdivision de $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ adaptée à une propriété $\boldsymbol{P}(.)$** paramétrée par une partie $A \subseteq R$ est une subdivision telle que la propriété se vérifie en tous les intervalles ouverts de R dont les bornes sont des termes consécutifs de la subdivision càd si la propriété se vérifie sur la partie strictement « entre » chaque terme. $\forall i\ \ P(]a_i,a_{i+1}[)$

Soit $P(f,J)$ une propriété dépendant d'une fonction f et de $J \subseteq R$. $P(f,J)$ se dit **« $\boldsymbol{f}$ est $\boldsymbol{P}$ sur $\boldsymbol{J}$ »**

Une **subdivision de $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ adaptée à $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{P})$ par morceaux** est une subdivision adaptée à la propriété $Q(J)$: « $f_{|J}$ est P (sur J) et admet un prolongement sur $\bar{J}$ qui est P (sur $\bar{J}$) » qui est paramétrée par $J \subseteq R$.

Autrement dit, c'est une subdiv. telle que $\forall i\ \ f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est P et admet un prolongement P sur $[a_i,a_{i+1}]$

Attention ce n'est pas une subdivision adaptée à la propriété « $f_{|J}$ est P ».

Si I est un segment $[a,b]$, **$\boldsymbol{f}$ est $\boldsymbol{P}$ par morceaux** ssi f admet une subdivision adaptée à P par morceaux.

Si I intervalle quelconque, **$\boldsymbol{f}$ est $\boldsymbol{P}$ par morceaux** ssi elle l'est sur tout segment $[a,b]$ inclus dans I.

On note $\boldsymbol{C_m^k(I,E)} = \{f : I \to E \mid f \text{ de classe } C^k \text{ par morceaux}\}$

De façon générale, On note $\boldsymbol{P(\cdot)_m(I,E)} = \{f : I \to E \mid f \text{ est } P(\cdot) \text{ par morceaux}\}$

Une fonction P est toujours P par morceaux. Par exemple $C^k(I,E) \subseteq C_m^k(I,E)$

Propriétés de composition.

Pour $u \in L_c(E,F)$ et $f: I \to E$, f C^k sur $I \Rightarrow u \circ f$ C^k sur I
Soit E_1, E_2, F K evns et $B: E_1 \times E_2 \to F$ et $f: E_1 \to F, g: E_2 \to F$
Si B est bilinéaire continue, f et g C^k sur I en x_0 alors $h: I \to F: x \mapsto B(f(x), g(x))$ est C^k en x_0 et $h^{(m)}(x_0) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} B\left(f^{(i)}(x), g^{(m-i)}(x)\right)$
Soit $E_1, \dots, E_n, F$ K evns et $B: E_1 \times \dots \times E_n \to F$ et $f_i: E_i \to F$ pour $i = 1 \dots n$
Si B est n-linéaire continue et $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ f_i est C^k sur I en x_0 alors $h: I \to F: x \mapsto B\big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big)$ est C^k en x_0 et $h^{(m)}(x_0) = \sum_{\substack{1 \le i_1, \dots, i_n \le m \\ i_1 + \cdots + i_n = m}} \frac{m!}{i_1! \dots i_n!} B\left(f_1^{(i_1)}(x_0), \dots, f_k^{(i_k)}(x_0), \dots, f_n^{(i_n)}(x_0)\right)$
Composition. Si $f: I \to R, g: J \to E, f(I) \subseteq J, x_0 \in I, f$ C^n en x_0 et g C^n en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ C^n en x_0
On pourrait donner la formule de la dérivée nième avec la formule de Faà di Bruno.
Si $f: I \to R, g: J \to E, f(I) \subseteq J$, f C^n sur I et g C^n sur J alors $g \circ f$ est C^n sur I.
Pour un intervalle I et un corps K, $\forall n \in N \cup \{\infty\}$ $C^n(I,K)$ est une K algebre.
Une fonction d'un intervalle I vers un corps K, C^n sur I et ne s'annulant pas sur I, admet un inverse bien défini et C^n sur I.

Théorèmes
Dans R, intervalle, connexe/arcs, convexe sont des notions identiques.
T.V.I.
Pour $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, alors pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $\exists c \in [a,b]$ $f(c) = y$.
L'image d'un intervalle par une fonction de $R \to R$ continue est un intervalle.
L'image d'un espace topologique connexe par une application continue, est une partie connexe de l'espace topologique d'arrivée.
Darboux. Pour une fonction dérivable d'un intervalle de R vers R, pour un réel x compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$ alors $\exists c \in [a,b]$ $f'(x) = c$
L'image d'un intervalle par la dérivée d'une fonction de R dans R dérivable, est un intervalle.
T.V.E. Une fonction continue (par morceaux) sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
Th. Rolle. Une fonction d'un segment de R vers R continue sur le segment dérivable sur son intérieur, d'images égales aux extrémités du segment, alors la dérivée s'annule en un point intérieur au segment.
T.A.F. Une fonction d'un segment de R vers R continue, dérivable sur l'intérieur, alors il existe un point intérieur ou la dérivée égale la pente entre les extrémités de la courbe. $\exists c \in]a,b[$ $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Faux si l'espace d'arrivée n'est pas R, par exemple $(cos(x), sin(x))$
T.M. (Cauchy). Pour deux fonctions f, g d'un segment $[a,b] \subseteq R$ vers R continues sur le segment dérivables sur son intérieur, alors $\exists c \in]a,b[$ $\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c)$
Règle de l'Hôpital. Pour un intervalle I de R, et x_0 point d'accumulation de I, et $f, g: I \to R$ dérivables,
si $\begin{cases} \lim_{x \to x_0} f = \lim_{x \to x_0} g = l \in \{0, +\infty, -\infty\} \\ \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in [0, \infty] \end{cases}$ alors $\begin{cases} \frac{f'}{g'} \text{ est bien défini: g' ne s'annule pas près de } x_0 \\ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{cases}$
1^er T.M.I. : Pour $f \in C_m([a,b], R)$ et $g: [a,b] \to R^+$ intégrable, alors $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$ avec $c \in]a,b[$, en particulier pour $f \in C_m([a,b], R)$ alors $\frac{1}{b-a} \int_a^b f = f(c)$ avec $c \in]a,b[$.
2^er T.M.I. : Pour $f \in C_m([a,b], R)$ et $g: [a,b] \to R^+$ intégrable monotone, alors $\int_a^b fg = g(a) \int_a^c f +$

$g(b)\int_c^b f$ avec $c \in [a,b]$, (et $c \in]a,b[$?)

Lemme de Riemann-Lebesgue. Pour $f \in C_m([a,b],R)$, $\int_a^b f(x)\sin(nx) \to_{n\to\infty} 0$,
$\int_a^b f(x)\cos(nx) \to_{n\to\infty} 0$, $\int_a^b f(x)\exp(inx) \to_{n\to\infty} 0$, $\int_a^b f(x)|\sin(nx)| \to_{n\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx$

I.A.F. Une fonction f d'un segment de R vers un Kevn F, continue sur le segment, dérivable sur l'intérieur, et une autre fonction g continue sur le même segment, dérivable sur l'intérieur mais a valeurs dans R, Si $\forall x \in]a,b[$ $\|f'(x)\| \le g'(x)$ alors $\|f(b)-f(a)\|_F \le g(b)-g(a)$

I.A.F. simple. Une fonction f d'un segment de R vers un Kevn F, continue sur le segment, dérivable sur l'intérieur, de dérivée bornée sur l'intérieur alors $\|f(b)-f(a)\|_F \le \sup_{x\in]a,b[}\|f'(x)\|_F\,(b-a)$
Affaiblissement de l'hypothèse dérivable sur $]a,b[$ possible et utile pour certaines théories de primitives.

Conséquences I.A.F.

Une fonction f dérivable d'un intervalle vers un Kevn, est constante ssi sa dérivée est identiquement nulle.
Une fonction f dérivable d'un intervalle vers un Kevn, est lipschitzienne ssi sa dérivée est bornée.

Premier théorème fondamental du calcul intégral.

Si f est intégrable sur un segment $[a,b]$, alors $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est primitive de f sur $[a,b]$ presque partout (et même partout si f continue).

Précisions. Si f continue en x alors F dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.
Si f est continue, F est C^1 sur $[a,b]$
Si f est continue par morceaux, F est C^1/m sur $[a,b]$, et <u>continue sur tout $[a,b]$</u>
Si f est continue, toutes ses primitives diffèrent d'une constante.
Si f est continue, $F: x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive s'annulant en a.

Second théorème fondamental du calcul intégral. Une fonction F dérivable <u>en tout point</u> d'un segment [a,b] <u>et de dérivée intégrable</u> (C^1 pour Riemann) sur $[a,b]$ vérifie $\int_a^b F'(t)d\lambda(t) = F(b) - F(a)$
Le théorème est faux si la fonction est seulement dérivable presque partout (Escalier de Cantor).
La deuxième condition n'est pas requise pour l'intégrale de Henstock Kurzweil.
Pour l'intégrale de Riemann, la fonction F doit être C^1 sur $[a,b]$

IPP. Pour $f,g: [a,b] \to R$, dérivables <u>sur tout</u> $[a,b]$ de dérivée intégrable (C^1 pour Riemann), alors $\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$. Si il n'y a pas dérivabilité partout, il peut y avoir des sauts.

Changement de variables <u>unidimensionnel</u>. Soit I un intervalle réel, soit un changement de variable $\phi: [a,b] \to I$ dérivable sur tout $[a,b]$ de dérivée intégrable (C^1 pour Riemann), et une fonction $f: I \to R$ <u>continue</u> alors $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx$
Ce théorème est distinct de celui qui se généralise au cas multidimensionnel, qui nécessite ϕ C^1 difféomorphisme, mais qui ne suppose que l'intégrabilité de f. Marche encore si f est seulement continue/morceaux, à condition de supposer en plus que ϕ soit strictement monotone. A vérifier.

Changement de variables difféomorphique multidimensionnel.

Soit U,V ouverts de R^n, $\varphi: U \to V$ un C^1 diffeomorphisme, $f_Y: V \to C$, $f_X: U \to C$, $f_X = f_Y \circ \varphi$
D'un point de vue physicien, on a $y = y(x) = \varphi(x)$, $x = x(y) = \varphi^{-1}(y)$, on peut assimiler f_X à f_Y, on peut voir f comme fonction de y partant de V, ou on peut voir f comme partant de U en la composant

avec φ. On suppose x et y reliés par $y = \varphi(x)$, alors $f_X(x) = f_Y(y)$. On note $\left|\frac{dy}{dx}\right| = \left|\det\frac{dy}{dx}\right|_x$

D'une part $\int_V f_Y(y)dy = \int_U f_Y(y)\left|\frac{dy}{dx}\right|dx$, et d'autre part $\int_U f_X(x)dx = \int_V f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|dy$

Pour que l'égalité soit vérifiée, l'hypothèse supplémentaire est que (f_Y est Lebesgue-intégrable par rapport λ_V) ou ce qui est équivalent que l'intérieur de l'autre intégrale le soit. Dans le cas à valeurs dans $[0,+\infty]$, seule la Lebesgue mesurabilité est requise, l'intégrale pouvant être infinie.

Changement de variables pour les densités de probabilité.

Soit U, V ouverts de R^n, $\varphi: U \to V$ un C^1 diffeomorphisme, X, Y deux vecteurs aléatoires réels tels que $Y = \varphi(X)$ / $X = \varphi^{-1}(Y)$, on écrit $y = y(x) = \varphi(x)$, $x = x(y) = \varphi^{-1}(y)$. Alors X est absolument continue ssi Y l'est et dans ce cas : soit $f_Y: R^n \to R$ densité de Y, $f_X: R^n \to R$ densité de X. On note $\left|\frac{dy}{dx}\right| = \left|\det J_\varphi\right|_x$

$\int_V f_Y(y)dy = \int_U f_X(x)\,dx = \int_V f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|dy$

$\forall y \in R^n \;\; f_Y(y) = f_X\left(\varphi^{-1}(y)\right)\left|\frac{dx}{dy}\right|_{x=\varphi^{-1}(y)} 1_V(y)$

Attention f_X et f_Y sont des densités et ne jouent pas le même rôle dans ce théorème que dans le théorème de changement de variables multidimensionnel pour les intégrales. Ici on a pas $f_X(x) = f_Y(y)$

Théorèmes de prolongement.

Version light. Une fonction f d'un intervalle $]a,b]$ vers un Banach E, dérivable de dérivée bornée sur $]a,b]$, admet une limite finie en a^+, càd f peut être prolongée en a en une application $\tilde{f}$ continue sur $[a,b]$.

Une fonction f d'un intervalle $]a,b]$ vers un Banach E, C^1 sur $]a,b]$ telle que f' admet une limite finie en a^+, alors f admet une limite finie en a^+ et peut ainsi être prolongée en a en une application $\tilde{f}$ continue sur $[a,b]$ qui s'avère en fait être C^1 sur $[a,b]$ et de plus $\tilde{f}'(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$

Version utile. Une fonction f d'un intervalle I vers un Banach E, supposée C^n sur $I \setminus \{x_0\}$, telle que $\forall k \in \{1,\dots,n\}$ $f^{(k)}$ admet une limite finie en x_0, et telle que f est continue sur I (on la suppose déjà prolongée par continuité), alors f est de classe C^n sur I et $\forall k \in \{1,\dots,n\}$ $f^{(k)}(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f^{(k)}(x)$

Exemple : $R \to R : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est de classe C^∞ sur R

Exemple : $[0,1] \to R : x \mapsto \begin{cases} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$ est de classe C^1 sur $[0,1]$

Extrema. Soit f d'une partie $E \subseteq R$ vers R, et $x_0 \in E$

x_0 est un **point de minimum (resp. maximum) de f** ssi $\forall x \in E\; f(x) \geq f(x_0)$ (resp. $f(x) \leq f(x_0)$)

x_0 est un **point de minimum (resp. maximum) strict de f** ssi c'est un point de minimum de f, qui est l'unique antécédent de son image, ssi $\forall x \in E \setminus \{x_0\}\; f(x) > f(x_0)$

x_0 est un **point de minimum (resp. maximum, resp. strict) local de f** ssi c'est un point de minimum de f restreinte a un certain voisinage de x_0 ssi $\exists V \in V_{x_0}\; \forall x \in V\; f(x) \geq f(x_0)$

Un **minimum (resp. maximum (strict ou non) (local ou non))** est l'image d'un point de minimum (resp…)

Un **extremum** est un minimum ou un maximum. Pluriel : minima, maxima, extrema

x_0 est un point de minimum de f ssi x_0 est un point de maximum de $-f$.

Un **point critique** d'une application d'un intervalle vers R, est un point de l'intervalle en lequel, l'application est dérivable de dérivée nulle $f'(x_0) = 0$
Un **point selle = point col** d'une application d'un intervalle vers R, est un point critique x_0 pour lequel $\forall V \in V_{x_0}\ \exists y, z \in V\ f(y) < f(x_0) < f(z)$. Autrement dit, c'est un point critique qui n'est pas un extremum local.
Conditions nécessaires à l'existence d'un extremum
1er ordre. Une fonction d'un intervalle I vers R, qui admet un extremum local en un point x_0 <u>intérieur a I</u> où elle est supposée dérivable, alors ce point est un point critique pour cette fonction. $f'(x_0) = 0$
2nd ordre. Une fonction d'un intervalle I vers R, qui admet un minimum (resp. max) local en un point x_0 <u>intérieur a I</u> où elle est supposée 2-fois dérivable, alors $f''(x_0) \geq 0$ (resp. $f''(x_0) \leq 0$).
Attention les réciproques de ces 2 conditions nécessaires sont fausses. Ex : $x \mapsto x^3$ en 0.
Ces deux conditions nécessaires ne permettent pas de trouver directement les extrema mais sont quand même très utiles car permettent de restreindre très fortement l'ensemble des candidats possibles.
Condition suffisante. Soit une fonction f d'un intervalle I vers R, et x_0 point <u>intérieur a I</u> où f est 2-fois dérivable. Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors f admet un minimum local strict en ce point critique.
Pour une fonction f d'un intervalle I vers R, convexe et dérivable sur I, un point critique $f'(x_0) = 0$ est un point de minimum global de f.
La stricte convexité permet de montrer l'unicité dans un problème d'optimisation.
Une fonction strictement convexe d'un convexe C vers $\mathbb{R}$ alors il existe <u>au plus un</u> $x_0 \in C$ tel que $(x_0) = \inf_{x \in C} f(x)$.
La convexité n'assure pas en général l'existence d'un problème d'optimisation.
Inversion. Une fonction f d'un intervalle I vers un intervalle J est un **C^n difféomorphisme** ssi f est bijective de classe C^n et de réciproque f^{-1} également de classe C^n.
Caractérisation C^n difféomorphisme. Une fonction f d'un intervalle I vers R, est un C^n difféomorphisme de I sur $f(I)$ ssi f C^n et f' ne s'annule pas sur I.
Dérivée réciproque. Dans ce cas $\forall y \in f(I)\quad {f^{-1}}'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. En physicien : $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$
Plus généralement la formule s'applique encore dans les cas suivants :
Si $f: I \to J$ est dérivable en $x_0 \in I$ avec $f'(x_0) \neq 0$, et f bijective avec f^{-1} continue en $y_0 = f(x_0)$
Si $f: I \to J$ est dérivable en $x_0 \in I$ avec $f'(x_0) \neq 0$, et f bijective avec f continue. (th. bijection $\Rightarrow f^{-1}$ continue)
Monotonie et signe de la dérivée.
Une fonction f dérivable d'un intervalle I vers R verifie : $\begin{cases} f' \geq 0 \Leftrightarrow f \text{ croissant} \\ f' \leq 0 \Leftrightarrow f \text{ décroissant} \\ f' > 0 \Rightarrow f \text{ strictement croissant} \\ f' < 0 \Rightarrow f \text{ strictement décroissant} \end{cases}$
$f: I \to R$ dérivable, est strictement croissante ssi $f' > 0$ et $int(\{x \in I \mid f'(x) = 0\}) = \emptyset$
Formule de Taylor R.I. Pour $f \in C_m^{n+1} \cap C^n([x, x+h], F)$ avec F <u>Banach</u>.
Soit $\boldsymbol{R_n(a,b)} = \frac{1}{n!}\int_a^b (b-u)^n f^{(n+1)}(u)du \in F$
$R_n(x, x+h) = \frac{1}{n!}\int_x^{x+h} (x+h-u)^n f^{(n+1)}(u)du = \frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x+th)dt$
T.R.I. Alors $f(x+h) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + R_n(x, x+h)$

I.T.L. $|R_n(x,x+h)| \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left\|f^{(n+1)}\right\|_{u,[x,x+h]}$
Ainsi $R_n(x,x+h) =_{h\to 0} O(h^{n+1})$ et donc $R_n(x,x+h) =_{h\to 0} o(h^n)$
F.T.L. Pour $f \in C^{n+1}([x,x+h],F)$ avec F Banach,
alors $\exists c \in [x,x+h]\ \ f(x+h) = \sum_{0\leq k\leq n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$
$\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}[\ \ \tan x \geq x + \frac{x^3}{3}$
$\forall x \in R_+\ \ x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$
$\forall x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\ \ \ |\ln(1+x) - x| \leq \frac{1}{2}x^2$
Relèvement complexe. Pour tout $n \geq 0$, une fonction f d'un intervalle I vers $\mathbb{C}$, de classe C^n et ne s'annulant pas sur I admet un relèvement exponentiel càd $\exists g: I \to \mathbb{C}\ \ C^n$ sur I tel que $f = e^g$
Relèvement sur le cercle unité. Pour tout $n \geq 0$, une fonction f d'un intervalle I vers $\mathbb{U}$, de classe C^n et admet un relèvement imaginaire pur : $\exists \theta: I \to \mathbb{R}\ \ C^n$ sur I tel que $f = e^{i\theta}$
La démonstration est différente dans le cas $n = 0$.
Une fonction f : $A \subseteq R \to E$ admet un DL d'ordre $n \in N$ en un point $a \in R$ d'accumulation de A, ssi $\exists (\alpha_i)_{0\leq i\leq n} \in E^{n+1}\ f(x) =_{x\to a} \sum_{k=0}^{n}(x-a)^k\alpha_k + o((x-a)^n)$ ssi $\exists P \in K_n[X]\ f(x) =_{x\to a} P(x-a) + o((x-a)^n)$
Une fonction f : $A \subseteq R \to K$ admet un DL d'ordre $n \in N$ en ∞ point d'accumulation de A, ssi $\exists (\alpha_i)_{0\leq i\leq n} \in K^{n+1}\ f(x) =_{x\to\infty} \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\frac{1}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ ssi $\exists P \in K_n[X]\ f(x) =_{x\to\infty} P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$
Même définition en $-\infty$
Si f : $A \subseteq R \to K$ admet un DL d'ordre $n \in N$ en a alors ce DL est unique (les α_i / P sont uniques).
Formule de Taylor Young. Pour $n \in \mathrm{N}, f \in C^n(I,K), x \in I$, I intervalle de R, $K = R$ ou C,
$f(x+h) =_{h\to 0} \sum_{0\leq k\leq n}\frac{f^{(k)}(x)}{k\,!}h^k + o(h^n)$
La condition C^n est plus faible que dans ITL donc une démonstration spécifique est bien requise ici.
Pour $n \in \mathrm{N}, f \in C^n(I,K)$ on peut donc dire que f admet toujours un DL d'ordre n en tout $x \in I$.
Exemple : $\ln\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right) =_{x\to 0^+} x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1})$
Une **échelle asymptotique d'une partie A d'un Kevn E vers une K algèbre normée F en un point a** d'accumulation de A correspond à un ensemble de fonctions $f: A \to F$, tel que pour deux fonctions distinctes de l'échelle asymptotique, alors l'une est négligeable devant l'autre au voisinage de a.
$f =_a o(g)$ ou $g =_a o(f)$.
Une échelle asymptotique H peut etre muni de la relation d'ordre définie pour $f, g \in H$ par $f \leq g \Leftrightarrow f = g$ ou $f(x) =_{x\to a} o\big(g(x)\big)$. Cette relation d'ordre est totale.
Une fonction $f: A \to F$ admet un **développement asymptotique (DA) en a dans l'échelle asymptotique H à la précision $\phi \in H$** ssi $\exists \left(a_\psi\right)_{\psi\in H} \in K^{(H)}$ (presque tous nuls) $f(x) =_{x\to a} \sum_{\psi\in H} a_\psi\psi(x) + o\big(\phi(x)\big)$
$\{R_+^* \to R: x \mapsto x^\alpha : \alpha \in R_+^*\}$ est une échelle asymptotique en ∞, et $x \mapsto x^\alpha \leq x \mapsto x^{\alpha'}$ ssi $\alpha \leq \alpha'$
$\left\{R_+^* \to R: x \mapsto x^\alpha \ln^\beta x :\ \alpha,\beta \in R_+^*\right\}$ EA en ∞, et
$x \mapsto x^\alpha \ln^\beta x \leq x \mapsto x^{\alpha'}\ln^{\beta'} x$ ssi ($\alpha < \alpha'$ ou ($\alpha = \alpha'$ et $\beta \leq \beta'$))
Dans cette EA, $\sqrt{\ln(1+x)} =_{x\to\infty} \sqrt{\ln x} + \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\right)$ est un DA à la précision $\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$

$\int_x^\infty e^{-t^2}dt =_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2} + \frac{e^{-x^2}}{2x^3} + o\left(\frac{e^{-x^2}}{x^3}\right)$

Stirling. $n! =_{n\to\infty} \sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{12n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ donc $n! \sim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}$

Etude des variations.

Soit une fonction f d'un intervalle I vers R

Si f est croissante, alors en tout point $x_0 \in I$ approchable à gauche càd tel que $I \cap]-\infty, x_0[\neq \emptyset$, f admet une limite finie ou $+\infty$ en x_0^-

Si f est croissante, alors en tout point $x_0 \in I$ approchable à droite càd tel que $I \cap]x_0, \infty[\neq \emptyset$, f admet une limite finie ou $-\infty$ en x_0^+

Si f est croissante, alors en tout point x_0 intérieur a I, f admet une limite finie en x_0^- et finie en x_0^+, et on a $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$

On a 3 théorèmes analogues dans le cas f décroissante.

L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone d'un intervalle I vers R est fini ou dénombrable.

Une fonction monotone d'un intervalle I vers R, est continue ssi son image $f(I)$ est un intervalle.

Théorème de la bijection. Pour une fonction f d'un intervalle vers R,

f continue et injective $\Leftrightarrow f$ continue et strictement monotone $\Leftrightarrow f$ homéomorphisme de I sur $f(I)$

Dans ce cas : La réciproque f^{-1} est strictement monotone de même sens que f et $f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I.

Pour $f: R_+^* \to R: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} e^{-xn^2}$ on a $f(x) \to_{x\to 0^+} +\infty$ et $f(x) \sim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$

Pour $f: R_+^* \to R: x \mapsto \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{x+t}dt$ on a $f(x) \to_{x\to 0^+} +\infty$ et $f(x) \sim_{x\to 0^+} -\ln x$

Convexité.

Soit f fonction d'un intervalle I vers R

Le **graphe de f** est $\boldsymbol{\Gamma(f)} = \{(x, f(x)) : x \in I\}$

Le **graphe+ de f** est $\boldsymbol{\Gamma_+(f)} = \{(x, y) : x \in I, y \geq f(x)\}$

Le **graphe- de f** est $\boldsymbol{\Gamma_-(f)} = \{(x, y) : x \in I, y \leq f(x)\}$

f est **convexe** ssi $\forall x, y \in I\ \forall t \in [0,1]\ \ f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y)$

f est **concave** ssi $\forall x, y \in I\ \forall t \in [0,1]\ \ f((1-t)x+ty) \geq (1-t)f(x)+tf(y)$ ssi $-f$ est convexe

f est **strictement convexe** ssi $\forall x, y \in I | x \neq y\ \forall t \in [0,1]\ \ f((1-t)x+ty) < (1-t)f(x)+tf(y)$

f est convexe ssi $\Gamma_+(f)$ est convexe

f est concave ssi $\Gamma_-(f)$ est convexe

f est convexe ssi $\forall(x_1, \dots, x_n) \in I^n\ \forall(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [0,1]^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,\ f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$

f est concave ssi $\forall(x_1, \dots, x_n) \in I^n\ \forall(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [0,1]^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,\ f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$

Les résultats pour les fonction concaves sont analogues aux résultats pour les fonctions convexes puisqu'il suffit de s'y ramener quitte à prendre l'opposée.

Lemme des 3 cordes. Si f est convexe, alors $\forall a, b, c \in I | a < b < c\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$

f est convexe ssi pour tout $x_0 \in I$ la fonction taux d'accroissement de f relativement a x_0 est croissante.

Si f est convexe, alors en tout point x_0 intérieur a I, f est dérivable en x_0^- et finie en x_0^+, et on a

$f'(x_0^-) \leq f'(x_0^+)$
f convexe $\Rightarrow f$ continue sur l'intérieur de I
f convexe $\Rightarrow f_g'$ et f_d' sont croissantes sur l'intérieur de I
L'ensemble des points de non dérivabilité d'une fonction convexe d'un intervalle I vers R est fini ou dénombrable.
Caractérisation. Pour f dérivable sur I on a
f convexe $\Leftrightarrow f'$ croissante $\Leftrightarrow C_f$ au-dessus de ses tangentes càd $\forall x_0, x \in I\ f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) \geq 0$
Pour f 2-fois dérivable sur I on a f convexe ssi $f'' \geq 0$
$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\ \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$
$\forall x \in]-\infty, 1[\ \ln 1 - x \leq -x$
Inégalités. Soit $n \in N^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in R_+^n$, $(y_1, \dots, y_n) \in R_+^n$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in [0,1]^n$
Inégalité de convexité. $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \Rightarrow \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$
Inégalité arithmético-géométrique. $(\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$
Hölder et Minkowski. (Voir espaces L^p).

Compléments
Une fonction d'un intervalle I vers C est **affine** ssi $\forall x, y \in I\ \forall t \in [0,1]\ f\big((1-t)x + ty\big) = (1-t)f(x) + tf(y)$
Une fonction d'un segment $[a, b]$ vers C est affine ssi $\forall t \in [0,1]\ f\big((1-t)a + tb\big) = (1-t)f(a) + tf(b)$
L'ensemble des fonctions continues et affines par morceaux de $[a, b]$ vers C est dense dans $(C([a, b], C), \| \ \|_u)$
Théorème de Weierstrass.
L'ensemble des fonctions polynômes complexes définis sur $[a, b]$ est dense dans $(C([a, b], C), \| \ \|_u)$
L'ensemble des fonctions polynômes réels définis sur $[a, b]$ est dense dans $(C([a, b], R), \| \ \|_u)$
$\forall f \in C([0,1], R)\ \left(\forall n \in N\ \int_0^1 f(t)\, t^n dt = 0\right) \Rightarrow f = 0$