Une nappe paramétrée de classe $\boldsymbol{C^k}$ d'un $\mathbb{R}$ean $\boldsymbol{E}$, correspond à un couple (U, f) où U est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ et $f: U \to E$ de classe C^k avec $k \in \mathbb{N}$.
Le support d'une nappe paramétrée $\boldsymbol{(U, f)}$ correspond à l'ensemble $f(U) \subseteq E$
Deux nappes paramétrées $\boldsymbol{(U, f), (V, g)}$ d'un $\mathbb{R}$ean sont $\boldsymbol{C^k}$ équivalentes ssi $g = f \circ \theta$ avec $\theta: V \to U$ un C^k difféomorphisme de V sur U.
Deux nappes paramétrées $\boldsymbol{(U, f), (V, g)}$ d'un $\mathbb{R}$ean sont $\boldsymbol{C^k}$ positivement équivalentes ssi $g = f \circ \theta$ avec $\theta: V \to U$ un C^k difféomorphisme de V sur U, <u>de jacobien > 0</u>.
Ce sont des relations d'équivalence sur la classe des nappes paramétrées.
Une nappe paramétrée C^k, équivalente à un autre nappe C^k, est C^k par composition.
Deux nappes paramétrées équivalentes ont même support.
Deux nappes paramétrées ayant même support, peuvent ne pas être équivalentes. Intuitivement deux nappes équivalentes correspondent au même parcours. Plus précisément ?
Une nappe géométrique de classe $\boldsymbol{C^k}$ d'un $\mathbb{R}$ean, correspond à une classe de la relation de C^k-équivalence sur l'ensemble des nappes paramétrées C^k de l'espace.
Un paramétrage (admissible) d'une nappe géométrique, est une nappe paramétrée élément de sa classe d'équivalence.
Les paramétrages d'une même nappe géométrique, ont même support.
Le support d'une nappe géométrique, est le support de n'importe lequel de ses paramétrages.
Le support d'une nappe géométrique, peut être celui de plusieurs nappes géométriques distinctes.
Une nappe géométrique C^k est aussi C^l pour tout $l \in [\![0, k]\!]$
Parmi les paramétrages admissibles d'une nappe géométrique C^k, il y a au plus 2 classes de C^k-équivalence positive. S'il y en a bien 2 on dit que **la nappe géométrique est orientable.**
Orienter une nappe géométrique orientable, c'est désigner une de ces 2 classes de C^k équivalence positive comme **directe**. L'autre classe est qualifiée d'**indirecte**.
Une **surface différentiable $\boldsymbol{C^k}$** de $\mathbb{R}^n$/ d'un $\mathbb{R}$ean / d'une variété différentiable C^k correspond à une sous-variété C^k de dimension 2.
Lien nappes, surfaces ?

Etude des nappes géométriques.
Un point d'une nappe géométrique, est un point de son support $M_{u,v} = f(u, v)$ avec $(u, v) \in U$.
Pour $(U, f), (V, g)$ deux paramétrages d'une même nappe géométrique Σ C^k avec $k \geq 2$, et $M_0 = f(s_0, t_0) = g(u_0, v_0)$ un point de Σ, on a $rg\big(d_{(s_0,t_0)}f\big) = rg\big(d_{(u_0,v_0)}g\big) \leq 2$
Un point $\boldsymbol{M_0}$ d'une nappe $\boldsymbol{C^1}$ est régulier ssi $rg\big(d_{(s_0,t_0)}f\big) = 2$ ssi $\big|d_{(s_0,t_0)}f\big| \neq 0$ ssi $\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(s_0, t_0) \wedge \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}(s_0, t_0) \neq \vec{0}$
Dans ce cas $\overrightarrow{\boldsymbol{\pi_0}} = im\big(d_{(s_0,t_0)}f\big) = im\big(d_{(u_0,v_0)}g\big) = vect\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}(s_0, t_0)\right)$ est un plan vectoriel indépendant du paramétrage, $\overrightarrow{\boldsymbol{\pi_0}}$ **est le plan des vecteurs tangents à $\boldsymbol{\Sigma}$ en $\boldsymbol{M_0}$**
$\boldsymbol{T_{M_0}} = M_0 + \overrightarrow{\pi_0}$ est **le plan tangent à $\boldsymbol{\Sigma}$ en $\boldsymbol{M_0}$.**
Une tangente à $\boldsymbol{\Sigma}$ en $\boldsymbol{M_0}$ est une droite incluse dans T_{M_0}
Un vecteur normal à $\boldsymbol{\Sigma}$ en $\boldsymbol{M_0}$, est un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{\pi_0}$.
$\frac{\partial \vec{f}}{\partial s}(s_0, t_0) \wedge \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}(s_0, t_0)$ est un tel vecteur, et tout vecteur normal lui est colinéaire.
La droite normale à $\boldsymbol{\Sigma}$ en $\boldsymbol{M_0}$ est la droite orthogonale à T_{M_0} passant par M_0 càd

$M_0 + \mathbb{R}\left(\overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial s}}(s_0,t_0) \wedge \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial t}}(s_0,t_0)\right)$

Equation de la tangente. Un point $M(x,y,z) \in T_{M_0(s_0,t_0)}$ ssi $\overrightarrow{M_0M} \in \overrightarrow{\pi_0}$ ssi $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ ssi $\det\left(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial s}}(s_0,t_0), \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial t}}(s_0,t_0)\right) = 0$ (det = produit mixte)

Pour ce point $M_0 \in \Sigma$ fixé, on définit en tout point $M_{s,t} = f(s,t) \in \Sigma$, la quantité :

$\boldsymbol{d_{M_0}}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (s,t) \mapsto \det\left(\overrightarrow{f(s,t) - f(s_0,t_0)}, \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial s}}(s_0,t_0), \overrightarrow{\frac{\partial f}{\partial t}}(s_0,t_0)\right)$

d est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$

En $M = M_0$, càd $(s,t) = (s_0,t_0)$ d_{M_0} est nul, donc M_0 est un point critique.

En $M = M_0$, la hessienne de d_{M_0} vaut $H_{M_0} = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & c_0 \end{bmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$

Un point $\boldsymbol{M_0} \in \boldsymbol{\Sigma}$ est elliptique ssi sa hessienne H_{M_0} a un déterminant $a_0c_0 - b_0^2 > 0$

Un point $\boldsymbol{M_0} \in \boldsymbol{\Sigma}$ est hyperbolique ssi sa hessienne H_{M_0} a un déterminant $a_0c_0 - b_0^2 < 0$

Equation de surface.

Une équation de surface $\boldsymbol{C^k}$ sur un ouvert $\boldsymbol{U}$ d'un espace affine euclidien $\boldsymbol{E}$ de dimension 3 correspond à une fonction $g \in C^k(U,\mathbb{R})$ et s'écrit $\boldsymbol{g(x,y,z) = 0}$

La surface $\boldsymbol{C^k}$ implicite d'équation $\boldsymbol{g(x,y,z) = 0}$ sur $\boldsymbol{U}$ <u>dans un r.o.n.d.</u> $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ de $\boldsymbol{E}$ est l'ensemble $C = \{M = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \in U \mid g(x,y,z) = 0\}$

Un point $\boldsymbol{M(x_0,y_0,z_0)} \in \boldsymbol{C}$ d'une surface $\boldsymbol{C^1}$ implicite d'équation $\boldsymbol{g(x,y,z) = 0}$ est régulier ssi $\vec{\nabla}_{(x_0,y_0,z_0)}g \neq \vec{0}$

Une surface C^1 implicite d'équation $g(x,y,z) = 0$, définit en tout point régulier, une nappe paramétrique localement grâce au théorème des fonctions implicites.

La tangente à cette nappe en un point régulier $M_0(x_0,y_0,z_0) \in C$ a pour équation cartésienne $\vec{\nabla}_{(x_0,y_0,z_0)}g \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ càd $\overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial x}}(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial y}}(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + \overrightarrow{\frac{\partial g}{\partial z}}(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0$

$\vec{\nabla}_{(x_0,y_0,z_0)}g$ est un vecteur normal à la surface en M_0.

Une droite d'un espace affine euclidien de dimension 3 est tangente à une surface régulière Σ, ssi l'équation de $\Delta \cap \Sigma$ admet une racine double.

Une **nappe $\boldsymbol{\Sigma}$ est cartésienne <u>dans un r.o.n.d.</u> $(\boldsymbol{O}, \vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$ de $\boldsymbol{E}$** ssi elle admet un paramétrage (U,f) avec $\forall (x,y) \in U$ $f(x,y) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + h(x,y)\vec{k}$ avec $h: U \to \mathbb{R}$

La tangente à une nappe cartésienne en un point régulier $M_0(x_0,y_0,z_0) \in C$ a pour équation cartésienne $\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial h}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) = z - z_0$

Arc tracé sur une nappe. TODO

Pour deux surfaces <u>régulières</u> C^k implicites $S_1: g_1(x,y,z) = 0$ sur U_1 et $S_2: g_2(x,y,z) = 0$ sur U_2, **$\boldsymbol{S_1}$ et $\boldsymbol{S_2}$ sont tangentes en un point de leur intersection $\boldsymbol{M_0} \in \boldsymbol{S_1} \cap \boldsymbol{S_2}$** ssi leur plan tangents respectifs y coïncident $T^1_{M_0} = T^2_{M_0}$.

Si S_1 et S_2 ne sont pas tangentes en un point de leur intersection $M_0 \in S_1 \cap S_2$, alors l'intersection des deux plans tangents $T^1_{M_0} \cap T^2_{M_0}$ forme une droite Δ passant par M_0. De plus d'après le théorème des fonctions implicites, au voisinage du point d'intersection $M_0 \in S_1 \cap S_2$, l'intersection $S_1 \cap S_2$ des

deux surfaces régulières est le support d'un arc régulier dont Δ est tangente en M_0.
Une nappe est réglée ssi elle admet un paramétrage de la forme $U = I \times \mathbb{R}$, I intervalle ouvert,
$F: U \to E: (u,v) \mapsto f(u) + v\overrightarrow{g(u)}$ avec $f \in C^1(I,E)$ et $\vec{g} \in C^1\left(I, \vec{E} \setminus \{\vec{0}\}\right)$.
Dans ce cas $F(U) = \bigcup_{u_0 \in I} f(u_0) + \mathbb{R}\overrightarrow{g(u_0)}$. On dit que le support d'une nappe réglée est engendré par les droites $f(u_0) + \mathbb{R}\overrightarrow{g(u_0)}$ génératrices de la surface.
Une nappe est cylindrique ssi elle est réglée avec $\vec{g}$ constante (les directrices ont même direction).
En prenant deux formes affines $a, b: E \to \mathbb{R}$ indépendantes (plans associés non parallèles), et
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?
La surface $\{M \in E \mid f(a(M), b(M)) = 0\}$ est cylindrique.
Une nappe est conique ssi elle est réglée avec f constante (les directrices passent par un unique point).
En prenant 3 formes affines $a, b, c: E \to \mathbb{R}$ indépendantes et $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
La surface $\{M \in E \mid f(a(M), b(M), c(M)) = 0\}$ est conique.
Une surface S de révolution autour d'une droite Δ est une surface invariante par rotation d'axe Δ càd $S = \bigcup_{M_0 \in C} C_{M_0}$ avec C_{M_0} cercle de centre M_0.
Un plan méridien d'une surface de révolution autour d'une droite Δ, est un plan qui contient Δ.
Une méridienne d'une surface de révolution autour d'une droite Δ, est l'intersection de la surface avec un de ses plan méridiens.
Pour $\Omega \in E$, a forme affine non constante $E \to \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, l'ensemble
$\left\{M \in E \mid f\left(\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|^2, a(M)\right) = 0\right\}$ est une surface de révolution d'axe la droite Δ orthogonale au plan d'équation $a(M) = 0$ passant par Ω.

Classification des quadriques dans un espace affine euclidien orienté de dimension 3.
Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$ de degré 2 identifié à sa fonction polynomiale $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.
$P = aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2a'XY + 2b'XZ + 2c'YZ + 2\alpha X + 2\beta Y + 2\gamma Z + \delta$
$$P = [X\ Y\ Z]\begin{bmatrix} a & a' & b' \\ a' & b & c' \\ b' & c' & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + 2[\alpha\ \ \beta\ \ \gamma]\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} + \delta$$
Soit q la forme quadratique $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de matrice $M = \begin{bmatrix} a & a' & b' \\ a' & b & c' \\ b' & c' & c \end{bmatrix}$ dans la base canonique.
$M \in S_3(\mathbb{R})$ donc $\exists P \in O_3(\mathbb{R})$ $P^T M P = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix}$, $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$
On cherche la nature de la surface implicitée par $P(X,Y,Z) = 0$ dans un r.o.n.d. $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de E.
On pose $B = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ b.o.n.d. et $B' = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ la b.o.n.d. telle que $P = P_{B' \to B} = P_{B \to B'}^T = [B']^{B^T}$
- Si $rg(M) = 3$, le SLE $M\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ admet une unique solution $\Omega(x_0, y_0, z_0)$
Dans le r.o.n.d $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ $\quad P(X,Y) = 0 \Leftrightarrow [x\ \ y\ \ z]M\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + P(x_0, y_0, z_0) = 0$
Dans le r.o.n.d $(\Omega, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ $\quad P(X,Y) = 0 \Leftrightarrow [u\ \ v\ \ w]\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + P(x_0, y_0, z_0) = 0$
On a une équation simple de la forme $\lambda u^2 + \mu v^2 + \nu w^2 + \delta = 0$ qu'on peut réécrire avec

$a, b, c > 0$
La méthode pour se ramener à une équation simple est similaire mais plus simple pour $rg(M) < 3$
On discute les différents types de surfaces qui apparaissent.
- Si $rg(M) = 3$
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ correspond à $S = \emptyset$.
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ correspond à $S = \{\Omega\}$
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ correspond à un **ellipsoïde** de centre Ω**.**

Axes de symétries : $(\Omega, \vec{\imath}), (\Omega, \vec{\jmath}), (\Omega, \vec{k})$
Plans de symétries : $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath}), (\Omega, \vec{\imath}, \vec{k}), (\Omega, \vec{\jmath}, \vec{k})$
S surface de révolution d'axe $(\Omega, \vec{k})$ ssi $a^2 = b^2$
S **sphère** ssi $a = b = c$ ssi M est une matrice scalaire.
Paramétrage : $x = a\cos(u)\cos(v)\,, y = b\cos(u)\sin(v)\,, z = c\sin(u)\,,\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$ correspond à un **cône** de sommet Ω, d'axe $(\Omega, \vec{\mathrm{k}})$

Paramétrage : $x = av\cos(u)\,, y = bv\sin(u)\,, z = v,\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ correspond à un **hyperboloïde à une nappe** de centre Ω, d'axe $(\Omega, \vec{\mathrm{k}})$

Paramétrage : $x = a\cosh(u)\cos(v)\,, y = b\cosh(u)\sin(v)\,, z = c\sinh(u)\,,\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ correspond à un **hyperboloïde à deux nappes** de centre Ω, d'axe $(\Omega, \vec{\mathrm{k}})$

Paramétrage : $x = a\cos(u)\sinh(v)\,, y = b\sin(u)\sinh(v)\,, z = \pm c\cosh(v)\,,\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$
- Si $rg(M) = 2$
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ correspond à $S = \emptyset$
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ correspond à la droite $S = (\Omega, \vec{k})$

Paramétrage : $x = 0, y = 0, z = u,\ \ u \in \mathbb{R}$
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ correspond à un **cylindre elliptique** d'axe $(\Omega, \vec{k})$

Paramétrage : $x = a\cos(u)\,, y = b\sin(u)\,, z = v,\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ correspond à l'union de deux plans $\pi_1 : \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,\ \pi_2 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

Paramétrage : $x =, y =, z =,\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ correspond à un **cylindre hyperbolique** d'axe $(\Omega, \vec{k})$

Paramétrage : $x = a\cosh(u)\,, y = b\sinh(u)\,, z = v,\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ correspond à un **paraboloïde elliptique** d'axe $(\Omega, \vec{k})$

Paramétrage : $x = av\cos(u)\,, y = av\sin(u)\,, z = v^2,\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ correspond à un **paraboloïde hyperbolique** d'axe $(\Omega, \vec{k})$

Paramétrage : $x =, y =, z =,\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$
- Si $rg(M) = 1$
- $x^2 = mz$ correspond à un **cylindre parabolique** d'axe $(\Omega, \vec{k})$

Autres cas évidents à traiter.
- Si $rg(M) = 0$