Caractères d'un groupe abélien fini (Serre Cours d'arithmétique)
Un caractère d'un groupe abélien fini $\boldsymbol{G}$, correspond à un morphisme $(G,\cdot) \to (\mathbb{C}^*,\times)$ du groupe vers le groupe multiplicatif des complexes.
Le dual d'un groupe abélien fini, est l'ensemble $\widehat{G} = Hom(G,\mathbb{C}^*)$ des caractères de ce groupe.
Pour faire l'analogie avec les formes linéaires, on pourrait noter $\langle \chi, g\rangle = \chi(g)$
L'image d'un élément $g \in G$ d'un groupe abélien fini, par un caractère du groupe, est une racine n-ième de l'unité $\chi(g)^n = 1$ avec $n = \#G$
Dans un groupe <u>cyclique</u> d'ordre n engendré par g, pour une racine n-ième de l'unité fixée $\omega \in \mu_n$, alors il existe un unique caractère χ de ce groupe tel que $\chi(g) = \omega$.
Ainsi, pour un groupe <u>cyclique</u> d'ordre n, $(\widehat{G},\circ) \to (\mu_n,\times)\colon \chi \mapsto \chi(g)$ est un isomorphisme de groupes, et on sait dans ce cas que $\#\widehat{G} = \#G = n$. Donc G étant aussi $\approx \mu_n$, on a $G \approx \widehat{G}$
Lemme prolongement. Tout caractère d'un sous-groupe H d'un groupe abélien fini G, peut être prolongé en caractère du groupe G.
L'opération de restriction $\rho\colon \widehat{G} \to \widehat{H}$ est un morphisme de groupes surjectif, de noyau les caractères de G triviaux sur H, $\ker(\rho)$ est donc isomorphe à $\widehat{\left(\frac{G}{H}\right)}$
On a donc une suite exacte $1 \to \widehat{\left(\frac{G}{H}\right)} \to \widehat{G} \to^{\rho} \widehat{H} \to 1$
Le dual d'un groupe abélien fini, est aussi un groupe abélien fini de même cardinal. $\#\widehat{G} = \#G$
Relations d'orthogonalité.
Pour un caractère $\chi \in \widehat{G}$ d'un groupe abélien fini G, $\sum_{g\in G} \chi(g) = \begin{cases} \#G \text{ si } \chi = 1 \\ 0 \text{ si } \chi \neq 1 \end{cases}$
Pour un élément $g \in G$ d'un groupe abélien fini G, $\sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi(g) = \begin{cases} \#G \text{ si } g = 1 \\ 0 \text{ si } g \neq 1 \end{cases}$
Pour un groupe abélien fini, on a donc $\#G = \#\widehat{G} = \#\widehat{\widehat{G}}$
Pour un élément $g \in G$ d'un groupe abélien fini, $\widehat{g} = \langle ., g\rangle\colon \chi \mapsto \chi(g)$ est un caractère du dual $\widehat{G}$.
L'application $\varepsilon\colon G \to \widehat{\widehat{G}}\colon g \mapsto \widehat{g} = \big(\chi \mapsto \chi(g)\big)$ est un isomorphisme de groupes.
Exemples de caractères : Pour $a \in \mathbb{Z}$, $\chi_a\colon \mu_n \to \mathbb{C}^*\colon e^{\frac{2i\pi k}{n}} \mapsto e^{\frac{2i\pi k a}{n}} \in \widehat{\mu_n}$
$\widehat{G} \subseteq F(G,\mathbb{C})$ et $F(G,\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$ ev isomorphe à $\mathbb{C}^{\#G}$ donc de dimension $\#G$.
Lemme d'indépendance de Dedekind. Une famille finie de caractères distincts sur un groupe fini, forment une famille libre du $\mathbb{C}$ev $F(G,\mathbb{C})$.
Ainsi $\dim\left(Vect(\widehat{G})\right) = \#\widehat{G}$
Pour un groupe fini, $\#\widehat{G} = \#G \Rightarrow G$ abélien.
En général $\#\widehat{G} = \#\widehat{\left(\frac{G}{D(G)}\right)} = \#\frac{G}{D(G)} = \frac{\#G}{\#D(G)}$
On peut montrer le théorème de classification des groupes abéliens finis.
Un groupe abélien fini est isomorphe à son dual, $\widehat{G} \approx G$ (non canoniquement). On le sait dans le cas cyclique et $\widehat{A\times B} = \widehat{A}\times\widehat{B}$.
Sur un groupe abélien fini, sur $F(G,\mathbb{C})$, $\langle u,v\rangle = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} u(g)\overline{v}(g)$ est un produit scalaire hermitien.
Pour $\chi_1,\chi_2 \in \widehat{G}$, $\langle \chi_1,\chi_2\rangle = \langle \chi_1\chi_2^{-1}, \square\rangle$
Pour ce produit scalaire, les caractères de G forment une base orthonormale, (et donc une famille libre).

Théorie des représentations
Une représentation d'un groupe G correspond à un $(\mathbb{K}, V, \rho)$ où V est un $\mathbb{K}$ ev non réduit à $\{0\}$, et ρ est un morphisme de groupes $\rho : (G, .) \to (GL(V), \times)$ de G vers le groupe linéaire sur V.
Une représentation ρ d'un groupe G vérifie $\forall s, t \in G\ \ \rho(st) = \rho(s)\rho(t),\ \ \rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}$ et $\rho(1) = I_V$.
Au programme on considère $\mathbb{K} = \mathbb{C},\ \#G < \infty$ et $\dim(V) < \infty$.
Une représentation d'un groupe G est une action de groupe de G sur V.
Une représentation d'un groupe G a pour image $\rho(G)$ un sous-groupe fini de $GL(V)$.
Le degré d'une représentation ρ d'un groupe G est la dimension de son espace vectoriel, $\deg(\rho) = \dim(V)$.
Deux représentations $(\rho, V), (\rho', V')$ d'un même groupe G sont isomorphes
ssi $\exists \varphi \in GL(V, V')\ \forall s \in G\ \rho(s) \circ \varphi = \varphi \circ \rho'(s)$. (le diagramme commute)
ssi $\exists \varphi \in GL(V, V')\ \forall s \in G\ \rho(s) = \varphi \circ \rho'(s) \circ \varphi^{-1}$.
Autrement dit ssi pour tout $s \in G$ $\rho(s)$ et $\rho'(s)$ sont conjuguées avec un morphisme de passage indépendant de l'élément s considéré du groupe.
Matriciellement, deux représentations d'un même groupe sur un même espace vectoriel de dimension finie sont isomorphes ssi dans une base fixée B_0, $\forall s \in G$ les matrices $[\rho(s)]^{B_0}$ et $[\rho'(s)]^{B_0}$ sont semblables avec une matrice de passage constante par rapport à s.
Un sous-espace d'une représentation d'un groupe est un sous-espace de son espace vectoriel.
Un sous-espace W d'une représentation ρ d'un groupe G est stable ssi $\forall s \in G\ \ W$ est stable par $\rho(s)$ ssi $\forall s \in G\ \forall x \in W\ \rho(s)x \in W$.
On dit aussi que **W est (ρ, G) stable**
Une sous-représentation d'une représentation ρ d'un groupe, n'est pas à proprement parler « la restriction de la représentation ρ à un de ses sous-espaces stable » qui ne veut rien dire.
La sous-représentation induite sur un sous-espace W stable d'une représentation ρ d'un groupe fini G est l'application $\boldsymbol{\rho^W}: G \to GL(W): s \mapsto \rho(s)_W$. (W, ρ^W) est encore une représentation de G.
Pour une représentation de groupe donnée, fixer une sous-représentation revient donc à fixer un sous-espace stable.
Caractérisations matricielles de la stabilité.
Un sous-espace W d'une représentation ρ d'un groupe G est stable ssi $\exists B_W$ base de W $\exists B = (B_W, C)$ base de $\forall s \in G\ \ \exists A_s \in M_{\dim(W)}(K)\ \ [\rho(s)]^B = \begin{bmatrix} A & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$. Dans ce cas $A = [\rho^W(s)]^{B_W}$.
Pour p sous-espaces W_i stables d'une représentation ρ d'un groupe fini G de dimension n tels que $V = \bigoplus_{i=1}^p W_i$ avec une base adaptée $B = B_1 \vee \dots \vee B_p$, alors

$$\forall s \in G\ [\rho(s)]^B = \begin{bmatrix} [\rho^{W_1}(s)]^{B_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & [\rho^{W_p}(s)]^{B_p} \end{bmatrix}$$

Réciproquement, si $\exists B = (e_1, \dots, e_r) = B_1 \vee \dots \vee B_p$ base de V tel que $\forall s \in G\ \ [\rho(s)]^B = \begin{bmatrix} A_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_p(s) \end{bmatrix}$ avec $A_i(s) \in M_{|B_i|}(K)$, alors pour tout i, $W_i := Vect(B_i)$ est un sous-espace stable de ρ, dont B_i est une base et $A_i = [\rho^{W_i}(s)]^{B_i}$, et de plus $V = \bigoplus_{i=1}^p W_i$
Représentation somme.
Pour p représentations ρ_i d'un même groupe G, dont les espaces W_i respectifs sont en somme directe, on peut poser $V = \bigoplus_{i=1}^p W_i$ et définir **la représentation somme $\boldsymbol{\bigoplus_{i=1}^p \rho_i}$** $: G \to GL(V): g \mapsto$

$\left(v=\sum_{i=1}^{p} w_i \mapsto \sum_{i=1}^{p} \rho_i(w_i)\right)$. C'est une représentation de G sur $V=\bigoplus_{i=1}^{p} W_i$.
Alors $\forall i\ \ W_i$ est stable par la représentation somme, et $\left(\bigoplus_{i=1}^{p} \rho_i\right)^{W_i}=\rho_i$.
Une représentation ρ d'un groupe est réductible ssi elle admet deux sous-espaces stables non triviaux supplémentaires ssi elle est somme de deux représentations non triviales du groupe.
Une représentation ρ d'un groupe est irréductible ssi elle n'est pas réductible ssi $\forall W, W'$ sevs stables de ρ tels que $V=W \oplus W'$ alors ($W=V$ et $W'=\{0\}$) ou ($W=\{0\}$ et $W'=V$).
Une représentation de degré 1 est toujours irréductible.
Le caractère <u>d'une représentation ρ d'un groupe fini G</u> est $\chi_\rho : G \to \mathbb{K} : s \mapsto tr(\rho(s))$
Attention ce n'est pas pareil qu'un caractère <u>d'un groupe</u> G.
Propriétés élémentaires du caractère d'une représentation
Un caractère d'une représentation d'un groupe est irréductible ssi sa représentation associée l'est.
Une fonction définie sur un groupe G est centrale ssi l'image d'un élément ne dépend que de sa classe de conjugaison.
Le caractère d'une représentation d'un groupe fini est une fonction centrale du groupe.
$\forall g \in G\ \ \chi_\rho(g^{-1})=\overline{\chi_g}$
$\chi_\rho(1)=\dim(V_\rho)=\deg(\rho)$.

$\forall g \in G\ \ \rho(g)$ est diagonalisable <u>sur $\mathbb{C}$</u> car annulé par $X^{\#G}-1$ scindé simple, les valeurs propres de $\rho(g)$ sont racines $\#G$-ième de l'unité, $\chi(g)$ est donc somme de n racines $\#G$ ièmes de l'unité.
Attention a priori les $\rho(g)$ ne commutent pas 2 à 2 a priori, donc pas de codiagonalisabilité a priori.
Dans une base de vecteur propres B_g $\ [\rho(g)]_{B_g}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$
$|\chi(g)| \leq |\lambda_1|+\cdots|\lambda_n| \leq n=\dim(V)$. Avec égalité à gauche ssi $\lambda_1=\cdots=\lambda_n$.
$\chi(g)=n$ ssi $\forall i\ \ \lambda_i=1$ ssi $\rho(g)=I_V$ ssi $g \in \ker(\rho)$.

Le caractère d'une somme directe de représentations (dont les espaces sont en somme directe) est la somme des caractères : $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2}=\chi_{\rho_1}+\chi_{\rho_2}$.

Deux représentations isomorphes d'un groupe, ont même caractère. (la réciproque est vraie)

Deux représentations isomorphes peuvent être en somme directe. Deux représentations en somme directe ne sont pas nécessairement pas isomorphe.

Pour un groupe fini G agissant sur un ensemble X de cardinal n, **la représentation de G sur $\mathbb{C}^n$ induite naturellement par l'action** dans la base canonique $(e_x)_{x\in X}$ de $V=\mathbb{C}^n$, est définie par $\rho\colon g \mapsto \left(v=\sum_{x\in X}\lambda_x e_x \mapsto g.v=\sum_{x\in X}\lambda_x e_{gx}\right)$.
Pour un groupe fini G agissant sur un ensemble X de cardinal n,
Le caractère induit naturellement par l'action de G sur X noté $\chi_{G\to X}$ est le caractère de la représentation de G sur $\mathbb{C}^n$ naturellement induite par l'action, et on a $\forall g \in G\ \ \chi_{G\to X}(g)=$ le nombre des points fixes de cet élément g pour l'action de G sur X.

La représentation régulière d'un groupe fini d'ordre n, est la représentation de G sur $\mathbb{C}^n$ induit naturellement par l'action de G sur lui-même G par multiplication, càd $G \times G \to G : (g,g') \mapsto gg'$

On a donc $\boldsymbol{\rho_{reg}}: s \mapsto (v = \sum_{t \in G} \lambda_t e_t \mapsto s.v = \sum_{x \in X} \lambda_t e_{st})$ où $(e_g)_{g \in G}$ base canonique de $V = \mathbb{C}^n$.

Le caractère régulier de $\boldsymbol{G}$ est donc $\boldsymbol{\chi_{reg}}(g) = \#Fix_G(g) = \#\{g' \mid gg' = g'\} = \begin{cases} 0 \text{ si } g \neq 1_G \\ \#G \text{ si } g = 1_G \end{cases}$

Représentation standard de $\boldsymbol{S_n = G_n}$ et caractère induit par l'action naturelle de $\boldsymbol{S_n}$ sur $[\![\mathbf{1}, \boldsymbol{n}]\!]$.
On considère l'action naturelle de $G = S_n$ sur $X = [\![1, n]\!]$.
On considère la représentation naturelle sur $\mathbb{C}^n$ $\rho: g \mapsto \left(v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \mapsto \sigma.v = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_{\sigma(i)}\right)$.

Théorème de Maschke. Pour une représentation d'un groupe fini G (dont le cardinal ne divise pas la caractéristique du corps de l'espace vectoriel de la représentation (vrai pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)), alors :
Un sous-espace stable admet toujours un supplémentaire qui est aussi stable par cette représentation.
Autrement dit, pour une sous-représentation on peut trouver une autre sous-représentation telle que la représentation est somme directe de ces deux sous-représentations.
Symboliquement $\forall W$ sev de V $\exists W'$ sev de V $V = W \oplus W'$.
Alors $\rho = \rho_W + \rho_{W'}$, et $\chi_\rho = \chi_{\rho_W} + \chi_{\rho_{W'}}$
Une représentation d'un groupe fini ($\#G \nmid car(K)$) admet donc une décomposition en sous-représentations irréductibles $\rho_V = \rho_{W_1} \oplus \ldots \oplus \rho_{W_k}$ $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$.
Ces sous-représentations ne sont pas nécessairement non isomorphes les unes aux autres. Certaines peuvent être isomorphes entre elles.

Exo. L Cev de dim finie. $G \subseteq GL(L)$ sous-groupe fini. $p = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g$ est projecteur d'image $L^G = \{x \in L \mid gx = xg \ \forall g \in G\}$
Donc $tr(p) = \dim(L^G)$.
Exemples pratiques TODO, groupe quaternions, diédral.

Soit ρ_V représentation de G sur un Kev V.Soit ρ_W représentation de G sur un Kev W.
On définit **l'action d'entrelacement** par $\forall g \in G \ \forall u \in L(V, W)$ $\boldsymbol{g.u} = \rho_W(g) \circ u \circ \rho_V(g^{-1}) \in L(V, W)$
C'est une action de G sur $L = L(V, W)$
En restreignant cette action à $GL(V, W)$, On obtient ainsi la représentation $\boldsymbol{\rho_{L(V,W)}}: G \to GL(V, W): g \mapsto \rho_W(g) \circ u \circ \rho_V(g^{-1})$.
Remarque : $\rho_{L(V,W)}$ est définie à partir de ρ_V, ρ_W
On a $\chi_{L(V,W)} = \overline{\chi_V} \chi_W$ càd $\forall g \in G$ $\chi_{L(V,W)}(g) = \overline{\chi_V}(g) \chi_W(g)$.
Pour $W = \mathbb{C}$, $L(V, \mathbb{C}) = V^\star$ est muni d'une représentation $\boldsymbol{\rho_{V^\star}}$ de G de caractère $\chi_{V^\star} = \overline{\chi_V}$.
$\chi_V \chi_W$ est encore le caractère d'une représentation de G sur $L(V^\star, W)$.
$\chi_V + \chi_W$ est encore le caractère d'une représentation de G sur $V \oplus W$ ou $\rho_V \oplus \rho_W$.

Lemme de Schur.
$\boldsymbol{L^G(V, W)} = \{u \in L(V, W) \mid \forall g \in G \ \rho(g) \circ u = u \circ \rho(g)\}$
a) Si deux représentations <u>irréductibles</u> ρ_{V_1} et ρ_{V_2} d'un même groupe G ne sont pas isomorphes alors $L^G(V_1, V_2) = \{0\}$.
b) Pour une représentation <u>irréductible</u> ρ_V alors $L^G(V) = \{\lambda I_V : \lambda \in \mathbb{C}\}$ et donc $\dim\left(L^G(V)\right) = 1$.

On définit un **produit scalaire hermitien naturel sur $\boldsymbol{C(G)}$** = ensemble des fonctions centrales sur G.
Pour $\phi_1, \phi_2 \in C(G)$ $\langle \boldsymbol{\phi_1}, \boldsymbol{\phi_2} \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{g\in G} \overline{\phi_1(g)}\, \phi_2(g)$
On peut même définir ce produit scalaire sur $F(G, \mathbb{C})$
Dans le cas des caractères χ_V, χ_W. $\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{g\in G} \overline{\chi_V(g)}\, \chi_W(g)$
$\langle \chi_V, 1 \rangle = \dim_{\mathbb{C}}(V^G)$
$\langle \chi_V, \chi_W \rangle = \dim_{\mathbb{C}}\big(L^G(W, V)\big)$
Deux caractères distincts de représentations irréductibles (qui ne sont donc pas isomorphes), forment une famille orthonormale. $\chi \neq \chi' \Rightarrow \langle \chi, \chi' \rangle = 0$. Et $\langle \chi, \chi \rangle = 1$
Pour deux caractères irréductibles, ou bien le produit scalaire donne 0 s'ils ne sont pas égaux et donc induits par des représentation non isomorphes, ou bien le produit scalaire donne 1 s'ils sont égaux donc induits par des représentations isomorphes.

Multiplicité d'une représentation irréductible. Pour une représentation d'un groupe fini G décomposée : $\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} \rho_i$ en somme directe d'irréductibles et une autre représentation τ irréductible alors $\langle \chi_\rho, \chi_\tau \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle \chi_{\rho_i}, \chi_\tau \rangle$ donne le nombre de ρ_i isomorphes à τ. On voit que pour une autre décomposition $\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} \rho_i'$ alors $\langle \chi_\rho, \chi_\tau \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle \chi_{\rho_i'}, \chi_\tau \rangle$ donc $\langle \chi_\rho, \chi_\tau \rangle$ est encore le nombre de ρ_i' isomorphes à τ qui ne dépend donc pas de la décomposition choisie.
La multiplicité d'une représentation irréductible $\boldsymbol{\tau}$ dans une représentation $\boldsymbol{\rho}$ de $\boldsymbol{G}$ est le scalaire $\boldsymbol{m_\tau(\rho)} = \langle \chi_\rho, \chi_\tau \rangle$ qui correspond au nombre de ρ_i isomorphes à τ quelle que soit la décomposition de ρ.
Cela peut être plus que 1, dans une décomposition $\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} \rho_i$, rien n'empêche qu'un ρ_i isomorphe à un autre ρ_j.
On peut réécrire $\rho \sim \bigoplus_j m_j \rho_j$ où les ρ_j sont non isomorphes 2 à 2 et $m_j = \langle \chi_\rho, \chi_{\rho_j} \rangle$.
Intérêt des caractères. Deux représentations sont isomorphes ssi elles ont même caractère.
$\rho \sim \rho' \Leftrightarrow \chi = \chi'$.
L'étude des représentations de groupes est essentiellement ramenée à l'étude de leur caractères.

On note $(\chi_i)_i$ l'ensemble de tous les caractères irréductibles d'un groupe G, de représentations respectives $(\rho_i)_i$ non isomorphes 2 à 2 (contrairement aux décompositions fournies par Maschke).
Soit ρ une représentation quelconque de G. On peut la décomposer avec Maschke, mais on peut aussi la décomposer sur l'ensemble fixé de toutes les représentations $(\rho_i)_i$.
On peut écrire $\rho \sim \bigoplus_i m_i\, \rho_i$ où $\boldsymbol{m_i}(\rho) = \langle \chi_\rho, \chi_i \rangle \in \mathbb{N}$ multiplicité (possiblement 0) de ρ_i (dans ρ).
Alors $\chi_\rho = \sum_i m_i \chi_i$. Donc $\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \sum_j \langle \chi_\rho, \chi_j \rangle = \sum_j \sum_i m_i \langle \chi_i, \chi_j \rangle = \sum_i m_i^2$.

Critère d'irréductibilité. Un caractère χ est irréductible ssi $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

Théorème de structure: L'ensemble de tous les caractères irréductibles (donc non isomorphes 2 à 2) d'un groupe G forment une base orthonormée de $C(G)$.
En particulier il y en a autant que $\#C(G)$ qui est le nombre de classes de conjugaisons de G.
Les tables de caractères sont donc carrées.

On note $(\chi_i)_i$ l'ensemble de tous les caractères irréductibles (donc non isomorphes 2 à 2) d'un groupe G. On pose $\forall i\; n_i = \deg(\rho_i) = \chi_i(1)$.
Par rapport à la représentation régulière, la multiplicité d'une représentation irréductible est égale à

son degré. Autrement dit $\forall i \quad n_i = \langle \chi_i, \chi_{reg} \rangle = m_i(\rho_{reg})$.
Donc $\rho_{reg} = \bigoplus_i n_i \rho_i$ donc $\forall s\ \chi_{reg}(s) = \sum_i n_i \chi_i(s)$ donc en $s = 1$, on obtient $\sum_i n_i^2 = \#G$.
Donc si on a trouvé une famille de χ_i qui vérifient $\sum_i n_i^2 = \#G$, ce sont tous les χ_i.
Sur un groupe fini il n'y a qu'un nombre fini de caractères irréductibles.
On a $\forall i \quad n_i$ divise $\#G$. (admis)

Exemple. Si G est commutatif, alors il y a $\#G$ caractères irréductibles tous de degré 1.
On pose pour $s \in G$ f_s la fonction qui vaut 1 sur la classe de s, et 0 ailleurs. $f_s \in C(G)$.
On peut la décomposer sur la base des caractères irréductibles $\chi_1, \dots, \chi_h$ de G
$f_s = \frac{1}{\#G}\sum_{i=1}^{h}\langle f_s | \chi_i \rangle \chi_i = \frac{\#C_s}{\#G}\sum_{i=1}^{h}\overline{\chi_i(s)}\chi_i$ donc évalué en $t \in G$ on obtient les deux égalités.
$\sum_{i=1}^{h}\overline{\chi_i(s)}\chi_i(t) = 0$ si $t \notin C_s$, et $\sum_{i=1}^{h}|\chi_i(s)|^2 = \frac{\#G}{\#C_s}$ si $t \in C_s$.
Application. Si $\frac{G}{H}$ est abélien il y a $\#\frac{\widehat{G}}{H} = \#\frac{G}{H}$ représentation irréductibles de $\frac{G}{H}$,
Il y a donc <u>au moins</u> $\#\frac{G}{H}$ représentations irréductibles de G (non isomorphes 2 à 2 car les caractères sont différents) sur $\frac{G}{H}$. (car des caractères distincts sur $\frac{G}{H}$ entraine des caractères distincts sur G).

Produit tensoriel de deux espaces vectoriels.
Pour E, F Kevs sur un corps commutatif K, il existe un Kev noté $\boldsymbol{E\otimes F}$ et une application bilinéaire notée $\otimes \in L_2(E \times F, E\otimes F)$ tels que
1) Pour tout Kev G et tout $\phi \in L_2(E \times F, G)$, il existe une unique application linéaire $f \in L(E\otimes F, G)$ telle que $\forall x \in E\ \forall y \in F\ \phi(x,y) = f(x\otimes y)$
1') Si $(e_i)_{i\in I}$ base de E et $(f_j)_{j\in J}$ base de F alors $(e_i\otimes f_j)_{i\in I, j\in J}$ base de $E\otimes F$.
(1 et 1' sont équivalents sous le début de la déf).
De plus le Kev $E\otimes F$ est unique à isomorphisme d'ev près.
E⊗F* est le produit tensoriel algébrique de *E* par *F
Si E et F de dimension finie alors $E\otimes F$ aussi et $\dim E\otimes F = \dim E \times \dim F$
On peut réitérer l'opération. Le produit tensoriel est associatif, il existe un isomorphisme naturel (càd ne dépendant pas du choix des bases) entre $(E\otimes F)\otimes G$ et $E\otimes(F\otimes G)$. Cet isomorphisme envoie $(x\otimes y)\otimes z = x\otimes(y\otimes z)$. De même les espaces $E\otimes F$ et $F\otimes E$ sont isomorphes. Mais attention si $E = F$, l'application $\otimes \in L_2(E \times E, E\otimes E)$ n'est pas symétrique.
Produit tensoriel de deux représentations. Soit ρ_V et ρ_W deux représentation d'un même groupe G.
$\exists!\ \boldsymbol{\rho_V\otimes\rho_W}: G \to GL(V \otimes W)\ \forall(x,y) \in E \times F\ \ \rho_V\otimes\rho_W(x\otimes y) = \rho_V(x) \circ \rho_W(y)$
Matriciellement dans une base donnée, la matrice de $\rho_V\otimes\rho_W(s)$ est le produit tensoriel des matrices de $\rho_V(s)$ et de $\rho_W(s)$.
Le produit tensoriel de deux représentations est encore une représentation du même groupe.
Le produit tensoriel de deux représentations irréductibles n'est pas forcément irréductible, on peut le décomposer en somme directe de représentations irréductibles.