PARTIE 2. Intégration et théorie de la mesure

Chapitre 15. Les espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p

I. Espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p pour $p \in [1, \infty)$

I.1. Espaces $\mathcal{L}^p$

On suppose $p \in R_+^*$, Pour un espace mesuré (X, M, μ), on note $\boldsymbol{\mathcal{L}^p(X, M, \mu, C)}$ ou plus simplement $\boldsymbol{\mathcal{L}^p(\mu)}$ l'ensemble des fonctions mesurables de l'espace mesuré vers C dont le module a la puissance p est Lebesgue-intégrable/ d'intégrale de Lebesgue finie. $\int_X |f|^p < \infty$ Une fonction est donc $\mathcal{L}^p$ ssi elevee a la puissance p, elle est $\mathcal{L}^1$.

Dans le cas de la mesure de Lebesgue on note $\boldsymbol{\mathcal{L}^p(R^n)}$ ou $\boldsymbol{\mathcal{L}^p(A \subseteq R^n)}$

Dans le cas de la mesure de comptage sur l'espace discret de tribu P(X), on note $\mathbf{l^p}(\boldsymbol{X})$

L'ensemble des fonctions $\mathcal{L}^p$ est un sous-espace vectoriel des fonctions $F(X, C)$ quelconques.

<u>Si l'espace mesuré est de mesure finie</u>, les espaces $\mathcal{L}^p$ sont <u>décroissants</u> avec l'exposant >0. Un exposant plus petit contient plus. $p \leq p' \Rightarrow \mathcal{L}^{p'} \subset \mathcal{L}^p$

Cette dernière propriété est donc fausse pour la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}^n$, et fausse pour la mesure de comptage. Par exemple $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}(\ln^2(x)+1)}$ est dans L^p mais dans aucun autre L^q.

Sur un ensemble quelconque d'indices I, les espaces $l^p(I)$ sont <u>croissants</u> avec l'exposant >0.

Si $1 \leq p \leq r \leq q < \infty$, et $f \in \mathcal{L}^p \cap \mathcal{L}^q$ alors $f \in \mathcal{L}^r$.

On définit $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{p}} = \left(\int_X |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Cette quantité est toujours définie $\leq \infty$ si la fonction est mesurable.

Pour une fonction mesurable, $f \in \mathcal{L}^p$ équivaut donc à $\|f\|_p < +\infty$

I.2. Inégalités de convexité.

Un **couple d'exposants conjugués** est un couple $(p, q) \in [0, +\infty]^2$ tels que la somme des inverses $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Cela impose que les exposants sont ≥ 1.

Inégalité de Hölder. Pour tout couple d'exposants conjugués (p, q), deux fonctions mesurables d'un espace mesuré vers [0,+∞] vérifient toujours $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \leq +\infty$

Si le second terme est fini, alors il y a égalité ssi $|f|^p$ et $|g|^p$ colineaires presque partout ssi il existe $\alpha, \beta \in R$, non tous deux nuls, tels que $\alpha|f|^p = \beta|g|^p$

On a un résultat analogue si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ alors $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \leq +\infty$ avec même cas d'égalité.

Si les deux fonctions sont à valeurs dans R ou C, il faut de plus qu'elles soient $f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^q$, ce qui entraine toujours que $fg \in \mathcal{L}^r$, et l'inégalité est finie. On a le même cas d'égalité.

Si μ est une mesure de probabilité, alors $1 \leq p \leq p' \Rightarrow \|f\|_p \leq \|f\|_{p'}$, on retrouve $\mathcal{L}^{p'} \subset \mathcal{L}^p$.

On peut généraliser Hölder encore plus loin avec des hypothèses analogues

Si $p_1, \dots, p_k, r \in [0, \infty], \frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k}$ et $\forall i\ f_i \in L^{p_i}$, alors $\|f_1 f_2 \dots f_k\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_k\|_{p_k}$

Si $p, q, r \in [0, \infty], \alpha \in [0,1]$ $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ et $f \in L^p \cap L^q$, alors $\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$

Inégalité de Cauchy-Schwarz. On applique l'inégalité de Hölder au couple (2,2),

Deux fonctions mesurables d'un espace mesuré vers [0,+∞] vérifient $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \leq +\infty$

Dans le cas complexe les deux fonctions doivent être $\mathcal{L}^2$, et on peut écrire deux inégalités :

$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty$ ou bien $\|f\overline{g}\|_1 = \left|\int_X f\overline{g}\, d\mu\right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 < \infty$.

Il y a égalité ssi $\exists\alpha,\beta \in R$, non tous deux nuls, $\alpha f = \beta g$.
Inégalité de Minkowski. On suppose $p \geq 1$, alors $\| \quad \|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire avec hypothèses similaires. Si les deux fonctions sont mesurables d'un espace mesuré vers [0,+∞], alors $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \leq \infty$. Si les deux fonctions sont $\mathcal{L}^{\mathrm{p}}$, vers C alors $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p < \infty$.
L'inégalité n'est pas vérifiée si $p < 1$ donc on se restreint généralement a $p \geq 1$ par la suite
On en deduit que pour $p \geq 1$ $\| \quad \|_p$ est une semi-norme sur l'espace $\mathcal{L}^{\mathrm{p}}(\mu)$

I.3. Les espaces normés L^p

Sur $\mathcal{L}^{\mathrm{p}}(\mu)$, le noyau de la semi-norme $p \geq 1$ est l'ensemble des fonctions nulles presque partout. On définit l'espace $\boldsymbol{L^p(\mu)}$ comme l'espace $\mathcal{L}^{\mathrm{p}}(\mu)$ quotienté par le noyau de la semi-norme p. On identifie donc les fonctions qui coïncident mu presque partout, et $\| \quad \|_p$ est une norme sur l'espace L^p, $p \geq 1$.
L'intégrale de Lebesgue est bien définie sur L^p car elle ne dépend pas du représentant de la classe.
<u>Pour une mesure finie</u> et $p < q$, alors $L^q \to L^p : f \mapsto f$ est continu. Car $\exists C \in \mathbb{R}\, \forall f \in L^q\ \|f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^q}$ (Par Hölder)

II. Complétude des espaces L^p

On montre que les espaces L^p pour $p \geq 1$ sont tous des espaces de Banach ce qui montre un avantage des espaces de fonctions Lebesgue-intégrables car les espaces de fonctions Riemann intégrables sur un segment ne sont jamais complets.
Inégalité de Minkowski dénombrable. On peut étendre l'inégalité triangulaire au cas d'une série de fonctions mesurables d'un espace mesuré vers $[0, +\infty]$, $\|\sum_{n=0}^{\infty} f_n\|_p \leq \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\|f_n\|_p$
Lemme Riesz-Fischer. Pour un espace mesuré vers C, toute suite de fonctions mesurables $(f_n)_n$ dont la série converge absolument en semi-norme p ($\sum_{n\geq 0}\|f_n\|_p$ converge, (impose donc $\forall n, f_n \in \mathcal{L}^{\mathrm{p}}(\mu)$)) alors la série C.S. p.p., et même en semi-norme p, et on a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \in \mathcal{L}^{\mathrm{p}}(\mu)$.
Théorème de Riesz-Fischer. Pour $p \in [1, \infty]$, l'espace $(\mathcal{L}^{\mathrm{p}}(\mu), \| \quad \|_p)$ est semi-normé complet. L'espace $(\mathrm{L}^{\mathrm{p}}(\mu), \| \quad \|_p)$ est un espace de Banach.
Preuve. Pour un espace mesuré vers C, on prend une suite de fonctions $\left(f_n \in \mathcal{L}^{\mathrm{p}}(\mu)\right)_n$ de Cauchy pour la semi-norme p, on écrit $\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\| < \frac{1}{2^k}$ puis on montre avec le lemme que f_n admet une sous-suite convergente μ-p.p. vers une fonction $f \in \mathcal{L}^{\mathrm{p}}(\mu)$, et donc (f_n) converge vers f en semi-norme p.

III. Les espaces $\boldsymbol{\mathcal{L}^\infty}, \boldsymbol{L^\infty}$

Un **majorant essentiel d'une fonction d'un espace mesuré vers $\overline{R}$** est un élément de $\overline{R}$ tel que l'ensemble des points dont les images sont strictement supérieures à cet élément $\{f > m\}$ est négligeable.
L'ensemble des majorants essentiels d'une fonction d'un espace mesuré vers $\overline{R}$ est un intervalle fermé de la forme $[m_0, +\infty]$. La **borne supérieure essentielle de f**, est la borne inférieure m_0.
$\|\boldsymbol{f}\|_\infty = \inf\left\{M \in \overline{R}\,\middle|\,\{|f| > M\}\ \mu \text{ negligeable}\right\} = \left\{M \in \overline{R} \mid \forall x \in X\ \mu \text{ p.p. } |f(x)| \leq M\right\} = \inf_{N\subseteq R, \mu(N)=0}\|f\|_{u,R\setminus N}$
Une fonction d'un espace mesuré vers C, est **essentiellement bornée** si $\|f\|_\infty < \infty$.
L'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{L}^\infty(\mu)}$ est l'ensemble des fonctions mesurables f essentiellement bornées $\|f\|_\infty < \infty$
En résumé $\boldsymbol{\mathcal{L}^\infty(\mu)} = \{f\colon \mathrm{X} \to C \mid \exists M \geq 0\ \forall x \in X\ \mu \text{ p.p. } |f(x)| \leq M\}$
$\| \quad \|_\infty$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^\infty(\mu)$
On note $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{u}} = \sup_{x\in X}|f(x)|$.

Sur les fonctions bornées $B(X,C)$, $\| \quad \|_u$ est une norme, **la norme uniforme.**
On a toujours $\|f\|_\infty \leq \|f\|_u$, l'inégalité peut être stricte ex $\|1_Q\|_\infty = 0 < \|1_Q\|_u = 1$.
Si $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ est vide, alors clairement $\|f\|_\infty = \|f\|_u$
L'inégalité de Hölder marche encore avec q=∞. $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ (si $f \in \mathcal{L}^1$, $g \in \mathcal{L}^\infty$)
Sur $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, le noyau de la semi-norme ∞ est l'ensemble des fonctions nulles presque partout. On définit l'espace $L^\infty(\mu)$ comme l'espace $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ quotienté par le noyau de la semi-norme ∞. On identifie donc les fonctions qui coïncident mu presque partout, et $\| \quad \|_\infty$ est une norme sur l'espace L^∞.
L'intégrale de Lebesgue est bien définie sur L^∞ car elle ne dépend pas du représentant de la classe.
Le théorème de Riesz-Fischer marche encore l'espace $(\mathcal{L}^\infty(\mu), \| \quad \|_\infty)$ est semi-normé complet.
L'espace $(\mathrm{L}^\infty(\mu), \| \quad \|_\infty)$ est un espace de Banach.

IV. Parties denses des espaces L^p

Sur un espace mesuré <u>sigma fini</u>, l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans L^p ($p \in [1,\infty)$)
L'ensemble des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques, d'ouverts de mesures finies, est dense dans $L^p(R^n)$, pour $p \in [1,\infty)$
L'espace $\boldsymbol{C_c(R^n)}$ des **fonctions continues à support compact** est dense dans $L^p(R^n)$, pour $p \in [1,\infty)$
L'espace $\boldsymbol{C_c^\infty(R^n)}$ des **fonctions $\boldsymbol{C^\infty}$ à support compact** est dense dans $L^p(R^n)$, pour $p \in [1,\infty)$
$L^p(R^n)$ est une complétion des fonctions continues à support compact muni de la norme p, mais pas vrai pour $p = \infty$. La complétion des fonctions continues à support compact muni de la norme ∞ est l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini.

V. Un premier résultat de dualité

Soit un couple d'exposants conjugués finis dans $(1,\infty)^2$,
pour tout fonction intégrable fixée $g \in L^q(\mu)$, l'application $\boldsymbol{\varphi_g}: f \in L^p(\mu) \mapsto \int_X fg d\mu$ est une forme lineaire continue sur $L^p(\mu)$ dont la norme est égale à la norme q de l'application fixée $\|\varphi_g\| = \|g\|_q$
L'application $\boldsymbol{\phi}: g \to \varphi_g$ est isométrie linéaire bijective (par Radon Nikodym) de $(L^p(\mu))'$ vers $L^q(\mu)$.
Dans le cas $(p,q) = (1,\infty)$, φ_g est encore une forme linéaire continue sur $L^1(\mu)$ et $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_\infty$ avec égalité si l'espace mesuré est sigma-fini.
Dans le cas $(p,q) = (\infty, 1)$, φ_g est une forme lineaire continue sur $L^\infty(\mu)$ et $\|\varphi_g\| = \|g\|_1$

Plus de propriétés [Brezis]

Pour $p \in [1,\infty]$ d'une suite de L^p qui converge en norme p, on peut extraire une sous-suite convergeant presque surement vers la même limite, et la sous-suite est dominée presque partout par une fonction L^p.

4.3. Réflexivité. Séparabilité. Dual de L^p

On notera p' l'exposant conjugué de $p \in [0,\infty]$, autrement dit $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}$
Pour $p \in]1,\infty[$, L^p est réflexif.
Représentation de Riesz. $\forall p \in [1,\infty[\ \forall \phi \in (L^p)'\ \exists! u \in L^{p'}\ \forall f \in L^p\ \langle \phi, f \rangle = \int uf$, de plus $\|u\|_{L^{p'}} = \|\phi\|_{(L^p)'}$
En conséquence, l'application $\phi \mapsto u_\phi$ est une isométrie linéaire surjective ce qui permet d'identifier le dual topologique $(L^p)'$ avec l'espace conjugué $L^{p'}$.
Un **espace topologique séparable** est un espace topologique ssi il contient une partie dénombrable et

dense.
Un **espace mesuré séparable** est un espace mesuré dont la tribu est engendrée par une famille dénombrable de mesurables.
L'espace mesuré $(R^n, M_L(R^n), \lambda_n)$ est séparable.
Un espace métrique séparable topologiquement, définit un espace mesuré de Borel séparable.
Sur un espace mesuré séparable, l'espace mesuré L^p est aussi séparable pour $p \in [1, \infty)$
Représentation de Riesz $\boldsymbol{L^1}$. $\forall \phi \in (L^1)' \ \exists!\, u \in L^\infty \ \forall f \in L^1 \ \langle \phi, f \rangle = \int uf$, de plus $\|u\|_{L^\infty} = \|\phi\|_{(L^1)'}$
On peut identifier $(L^1)' = L^\infty$ par l'isométrie linéaire surjective ainsi définie.
L'espace $L^1(X)$ n'est en général jamais réflexif, sauf dans le cas où l'espace mesuré est un ensemble fini.
L'espace $L^\infty(X)$ n'est en général jamais ni réflexif, ni séparable, sauf dans le cas où l'espace mesuré est un ensemble fini. Le dual de L^∞ est plus compliqué, mais strictement plus grand que L^1

Compléments.

Support.
Le **support d'une fonction continue $\boldsymbol{f}$ d'un ouvert $\boldsymbol{\Omega} \subseteq \boldsymbol{R^d}$ vers un Revn $\boldsymbol{F}$** est l'adhérence <u>dans Ω</u> des points en lesquels la fonction ne s'annule pas. $\boldsymbol{supp(f)} = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}^{\Omega}$ C'est un fermé de Ω
Une fonction $f \in C^0(\Omega \subseteq \mathrm{R}^\mathrm{d}, F)$ est de support vide ssi elle est identiquement nulle.
Le support d'un produit fini de fonctions $C^0(\Omega \subseteq \mathrm{R}^\mathrm{d}, F)$ est inclus dans l'intersection finie des supports.
Pour tout multi-indice α de taille d et de module inferieur a k, et toute fonction $f \in C^k(\Omega \subseteq R^d, F)$, on a $supp(\partial^\alpha f) \subseteq supp(f)$
On veut définir le **support essentiel d'une fonction mesurable $\boldsymbol{f}$ d'un ouvert $\boldsymbol{\Omega} \subseteq \boldsymbol{R^d}$ vers un Revn $\boldsymbol{F}$** de telle façon qu'il ne dépende que de la classe d'équivalence des fonctions égales à f presque partout, c'est-à-dire sauf sur un ensemble de mesure nulle. Il suffit de poser :
$\boldsymbol{supp_{ess}(f)} = \Omega \setminus \{\omega \in \Omega \mid \exists V \in V_\omega \ f_{|V} = 0 \ p.p.\}$. C'est un fermé de Ω
Pour une fonction mesurable et continue support et support essentiels coïncident.
Une fonction a **support compact** est une fonction dont le support est un compact de Ω cad une partie bornée dans Ω. Autrement dit ssi il existe un compact K de Ω telle que la fonction est nulle p.p. sur $\Omega \setminus K$
Soit K un compact de R^d inclus dans U
Espaces fonctionnels courants.
$\boldsymbol{F(U, F)}$ est l'ensemble des fonctions d'un ouvert U d'un Revn E, vers un Revn F.
$\boldsymbol{B(U, F)}$ est l'ensemble des fonctions bornées d'un ouvert U d'un Revn E, vers un Revn F.
Pour $k \in [\![0, \infty]\!]$, $\boldsymbol{C^k(U, F)}$ est l'espace des fonctions C^k d'un ouvert U d'un Revn E, vers un Revn F.
Pour $k \in [\![0, \infty]\!]$, $\boldsymbol{C^k_K} \subset \boldsymbol{C^k}$ est l'espace des fonctions $f \in C^k$ a support un compact (de R^d) fixé $K \subseteq U$,
Pour $k \in [\![0, \infty]\!]$, $\boldsymbol{C^k_c} \subset \boldsymbol{C^k}$ est l'espace des fonctions $f \in C^k$ a support un compact (de R^d) $\subseteq U$
Pour $k \in [\![0, \infty]\!]$, $\boldsymbol{C^k_c} = \bigcup_{K \text{ compact} \subset \Omega} C^k_K = \bigcup_{n \geq 0} C^k_{K_n}$
Pour $k \in [\![0, \infty]\!]$, $\boldsymbol{C^k_{\to 0}}$ est l'ensemble des $f \in C^k$ telles que $f(u) \to_{|u| \to \infty} 0$
$\boldsymbol{\mathcal{L}_{loc}}$ est l'espace des fonctions mesurables localement intégrables (sur tout compact $K \subseteq U$)

On note $\boldsymbol{\mathcal{L}_c^0}$ l'ensemble des fonctions mesurables a support essentiel compact.
On ajoute souvent un indice c pour signifier qu'on a intersecté l'espace avec $\boldsymbol{\mathcal{L}_c^0}$**.**
Par exemple $C_c^\infty = C^\infty \cap \mathcal{L}_c^0$
$C_c^k \subseteq L^p$ ($C_c^k \to L^p : f \mapsto [f]$ injective) mais attention C^k n'est pas inclus dans L^p en général.
Un **majorant essentiel d'une fonction d'un espace mesure vers $\overline{\boldsymbol{R}}$** est un élément de $\overline{R}$ tel que l'ensemble des points dont les images sont strictement > a cet élément $\{f > m\}$ est negligeable.
L'ensemble des majorants essentiels d'une fonction est un intervalle ferme de la forme $[m_0, +\infty]$ dont la borne inférieure est appelée la **borne supérieure essentielle de f**.
$\|\boldsymbol{f}\|_\infty = \inf\left\{m \in \overline{R} \,\middle|\, \{f > m\}\ \lambda\text{-negligeable}\right\} = \inf_{N \subseteq R, \lambda(N)=0} \|f\|_{u, R\setminus N}$
On a toujours $\|f\|_\infty \le \|f\|_u$. Si $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ est vide, alors clairement $\|f\|_\infty = \|f\|_u$
Normes et distances.
Lemme. Tout ouvert $U \subseteq R^d$ admet une suite de compacts $(K_n)_{n\in N}$ telle que $K_n \subset Int(K_{n+1})$ et $U = \bigcup_{n\ge 0} K_n = \bigcup_{n\ge 1} Int(K_n)$ telle que tout compact $K \subset U$ est inclus dans un K_{n_0}.
Pour $k \in N$,
$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C^k,p,K}} = \sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{u,\mathrm{K}}\ (p=1), \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{u,\mathrm{K}}^p\right)^{\frac{1}{p}}\ (p \in [1,\infty)), \max_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{u,\mathrm{K}}\ (p=\infty)$
$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C^k,p}} = \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C^k,p,U}}$, $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C^k}} = \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C^k,1}}$
Pour $k \in N$, $\|\ \ \|_{C^k,p}$ est une norme sur C^k et même sur C^l pour $l \in [\![k,\infty]\!]$
Pour $k \in N$, $\|\ \ \|_{C^k,p,K}$ est une norme sur C_K^k et même sur C_K^l pour $l \in [\![k,\infty]\!]$
$\boldsymbol{d_{C^\infty,p,K}(f,g)} = \sum_{n\in N} 2^{-n} \frac{\|g-f\|_{C^n,p,K}}{1+\|g-f\|_{C^n,p,K}}$
$\boldsymbol{d_{C^\infty,p}(f,g)} = \sum_{n\in N} 2^{-n} \frac{\|g-f\|_{C^n,p,K_n}}{1+\|g-f\|_{C^n,p,K_n}}$
$d_{C^\infty,p}$ est une distance sur C^∞ et sur C_c^∞
$d_{C^\infty,p,K}$ est une distance sur C_K^∞

VI. Produit de convolution
On se place dans $(R^n, M_L(R^n), \lambda_n)$
VI.1. Cas des fonctions positives
Le **produit de convolution** de deux fonctions mesurables de R^n dans [0, +∞], est donné par la formule
$(\boldsymbol{f} * \boldsymbol{g})(x) = \int_{R^n} f(x-y)g(y)dy$
alors le produit de convolution est mesurable et $\|f * g\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$
Le produit de convolution est commutatif sur les fonctions mesurables positives.
Si $p \in [1,\infty]$, on a $\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1$
VI.2. Cas des fonctions de $\boldsymbol{L^p}$
Soit une fonction $f \in L^p$ et une fonction $g \in L^1$, telles que l'intérieur du produit de convolution $y \mapsto f(x-y)g(y)$ intégrable, alors le produit de convolution $f * g$ est bien défini et dans L^p, de plus on a encore l'inégalité $\|f * g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1 < \infty$.
VI.3. Dérivabilité

Si $f \in L^\infty(R^n)$ de classe C^1 de dérivées partielles d'ordre 1 bornées, et $g \in L^1(R^n)$, alors le produit de convolution est de classe C^1 ses dérivées partielles sont bornées et $\frac{\partial(f*g)}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) * g$

VI.4. Approximation de l'unité*

Une famille $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ est **approximation positive de l'unité sur $\mathbb{R}^n$** ssi

1. Chaque fonction est mesurable d'intégrale valant 1 : $\forall\varepsilon > 0\ \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)dx = 1$
2. $\forall\delta > 0\ \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\delta)} \rho_\varepsilon(x)dx \to_{\varepsilon\to 0^+} 0$

Une famille $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ est **approximation de l'unité sur $\mathbb{R}^n$** ssi

1. Chaque fonction est $L^1(\mathbb{R}^n)$ et d'intégrale valant 1 : $\forall\varepsilon > 0\ \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)dx = 1$
2. La famille des intégrales des modules est majorée. $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall\varepsilon > 0\ \int_{\mathbb{R}^n} |\rho_\varepsilon(x)|dx \le M$
3. $\forall\delta > 0\ \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\delta)} |\rho_\varepsilon(x)|dx \to_{\varepsilon\to 0^+} 0$

3 (alt pour les suites). Dans le cas où $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une suite on trouve parfois la condition plus forte : $\exists (t_k)_k \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$ tendant vers 0, $\forall k\ supp(f_k) \subseteq B_f(0, t_k)$.

Pour une application $f \in L^p(R^n)$, $p \in [1, \infty)$, on a toujours $f_k * f$ converge vers f en norme p.

Une application L^p peut être approchée par n'importe quelle approximation de l'unité convolée avec elle.*

Une suite de fonctions f_n <u>de $L^1(T)$</u> est une **approximation de l'unité sur le tore** si

1. La suite des normes $L^1(T)$ des fonctions est bornée. $\sup_{n\in N} \|f_n\|_{L^1(T)} < \infty$
2. Chaque fonction est $L^1(T)$ d'intégrale normalisée 1. $\forall n \in N\ f_n \star 1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)dt = 1$
3. $\forall\delta \in (0, \pi)\ M_\delta(f_n) := \frac{1}{2\pi}\int_{T\setminus\overline{[-\delta,\delta]}} |f_n(t)|\mu_T(dt) \to_{n\to\infty} 0$

*Pour toute fonction dans un Banach homogène, si on convole la fonction par tout élément d'un approximation de l'unité, alors on obtient une suite $K_n \star f$ dans le Banach homogène, qui converge vers la fonction dans B. $K_n \star f \to f$.

Une famille de fonctions <u>continues</u> $(f_\alpha: R \to C)_{\alpha\in\Lambda}$ est une **approximation de l'unité en $\boldsymbol{\alpha_0} \in \overline{\boldsymbol{\Lambda}}$** si

1. $\limsup_{\alpha\to\alpha_0} \|f_\alpha\|_{L^1(T)} < \infty$
2. Chaque fonction est $L^1(R)$ d'intégrale 1. $\forall\alpha \in \Lambda\ f_\alpha \star 1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t)dt = 1$
3. $\forall\delta > 0\ M_\delta(f_\alpha) := \int_{R\setminus\overline{[-\delta,\delta]}} |f_\alpha(t)|\mu_T(dt) \to_{\alpha\to\alpha_0} 0$

En général $\alpha_0 = \infty$ et $\Lambda = N$ ou R.

Si $f \in L^1(R)$ d'integrale non nulle sur R, alors $f_n(x) = \frac{nf(nx)}{\int_R f}$ pour $n > 0$ definit une approximation de l'unité.

Espace des fonctions test.

Une **fonction test d'un ouvert $\boldsymbol{\Omega \subseteq R^d}$ vers un $\boldsymbol{R}$evn $\boldsymbol{F}$** est une fonction de $C^\infty(\Omega, F)$ dont le support est compact inclus dans Ω. Autrement dit c'est une fonction de C_c^∞

La **fonction test canonique** est $\boldsymbol{\phi_0}: R^d \to R: x \mapsto \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{1-\|x\|^2}\right) 1_{\|x\|\le 1}(x)$

$\phi_0 \in C_0^\infty(R^d, R)$ et $\int_{R^d} \phi_0(x)dx > 0$

On peut aussi utiliser d'autres fonctions telles que $\exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right) 1_{\|x\|\le 1}(x)$

Topologie compacte ouverte de $\boldsymbol{C_c^\infty(\Omega, F)}$

Lemme. Tout ouvert $\Omega \subseteq R^d$ admet une suite de compacts $(K_n)_{n\in N}$ telle que $K_n \subset Int(K_{n+1})$ et $\Omega = \bigcup_{n\geq 0} K_n = \bigcup_{n\geq 1} Int(K_n)$ telle que tout compact $K \subset \Omega$ est inclus dans un K_{n_0}.
Remarque : $C_c^\infty(\Omega, F) = \bigcup_{n\geq 0} C_{K_n}^\infty(\Omega, F)$
La **topologie compacte ouverte** est la topologie de $\left(C_c^\infty(\Omega, F), d_{C^\infty,p}\right)$
Caractérisation convergence compacte ouverte. Une suite de fonctions tests $(f_n)_{n\in N} \in C_c^\infty\left(\Omega \subseteq R^d, F\right)$ converge vers une fonction test $f \in C_c^\infty(\Omega, F)$ pour la topologie compacte ouverte ssi pour tout multi indice α, toutes les $(\partial^\alpha f_n)_{n\in N}$ (en particulier $(f_n)_n$ pour $|\alpha| = 0$) convergent uniformément vers $\partial^\alpha f$ sur un même compact fixé K inclus dans Ω et qui contient tous les supports de tous les f_n.
Par exemple pour une fonction test réelle $\phi \in C_c^\infty(R)$, si on pose $\varphi_n(x) = \phi\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - \phi(x)$ alors $\varphi_n \to_{n\to\infty} 0$ dans $(C_c^\infty(R), d)$.
Fonctions « pic » et « plateau »
Une **fonction pic sur un ouvert $\boldsymbol{O} \subseteq \boldsymbol{\Omega} \subseteq \boldsymbol{R^d}$** est une fonction test de Ω vers R, de support inclus dans O et d'intégrale sur R^d valant 1.
Toute boule ouverte non vide $B(x_0, \varepsilon)$ d'un ouvert de R^d admet au moins une fonction pic : en normalisant la fonction test canonique : $\rho(x) = \varepsilon^{-d}\rho_0\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)$ avec $\rho_0(x) = \phi_0(x)/\int_{R^d}\phi_0(u)du$
Une **fonction plateau sur un compact $\boldsymbol{K}$ dans un ouvert $\boldsymbol{O}$ tel que $\overline{\boldsymbol{O}} \subset \boldsymbol{\Omega} \subseteq \boldsymbol{R^d}$** est une fonction test de Ω vers $[0,1]$, de support inclus dans O (donc identiquement nulle sur $\Omega \setminus O$), qui vaut identiquement 1 sur un compact $K \subset O$.
Sur un compact non vide inclus dans un ouvert dont l'adhérence est incluse dans $\Omega \subseteq R^d$, on peut construire au moins une fonction plateau sur ce compact de support dans l'ouvert.
Idée : Pour $\varepsilon > 0$ on pose $K_\varepsilon = \{x \in R^d \mid d(x, K) \leq \varepsilon\}$, ρ_ε fonction pic sur $B(0, \varepsilon)$ et on convole $\theta_\varepsilon = \rho_\varepsilon \star 1_{K_\varepsilon}$.
Densité par troncature.
Produit de convolution. Dans cette section $\Omega = R^d$
Sous de bonnes hypothèses : le **produit de convolution** est $(\boldsymbol{f} \star \boldsymbol{g})(x) = \int_{R^d} f(x-y)g(y)dy$
Si f, g sont mesurables et positives le produit de convolution est bien défini.
Pour $p \in [1, \infty]$, si une fonction est L^p et l'autre est L^1 alors leur convolée est définie p.p. sur R^d, leur convolée est L^p, on a $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_p\|g\|_1$ et $f \star g = g \star f$.
Si $f \in L^\infty$ et $g \in L^1$, alors si $f \in C^k$ avec $k \in N \cup \{\infty\}$ et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k sont toutes bornées alors $f \star g \in C^k$ et pour tout multi-indice $\alpha \in N^d$ $\partial^\alpha(f \star g) = \partial^\alpha f \star g$
Convoler une fonction L_c^p par une fonction test, donne une nouvelle fonction test.
Régularisation.
Intuition : On peut régulariser une fonction non régulière en la convolant avec une fonction régulière.
On considère une fonction pic de support dans $B(0,1)$ d'integrale 1 sur R^d : Pour $\varepsilon > 0$ soit $\boldsymbol{\rho_\varepsilon} = \varepsilon^{-d}\rho(\varepsilon^{-1})$.
La suite $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une approximation de l'unité.
En particulier $\forall p \in [1, \infty)$ $\forall u \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ $\rho_\varepsilon \star u \to_{\varepsilon\to 0}^{\|\ \|_p} u$ et $\forall\varepsilon > 0$ $\|\rho_\varepsilon \star f\|_p \leq \|f\|_p$
Pour $u \in C_c^k$ et $\alpha \in N^d \mid |\alpha| \leq k$, $\partial^\alpha(\rho_\varepsilon \star u)$ converge uniformement vers $\partial^\alpha u$ sur R^d quand $\varepsilon \to 0$
En particulier $\forall u \in C_c^k$ $\rho_\varepsilon \star u \to_{\varepsilon\to 0}^{\|\ \|_u} u$

$\forall p \in [1,\infty)\ \ \forall u \in L_c^p \qquad \rho_\varepsilon \star u \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\|\ \ \|_p} u$
L'espace des fonctions tests est dense dans $\left(C^k, \|\ \ \|_{C^k}\right)$, et dans $(L^p, \|\ \ \|_{L^p})$.
$\forall f \in L_{loc}^1\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \rho_\varepsilon \star f \in C^\infty$.
$\forall f \in L_{c,loc}^1\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \rho_\varepsilon \star f \in C_c^\infty$.
Lemme de Dubois-Reymond. Une fonction $f \in L_{loc}^1$ telle que $\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = 0$ pour toute fonction test $\varphi \in C_c^\infty$, est une fonction nulle presque partout.