Chapitre 21. Les fonctions analytiques

I. Rappels et compléments sur les séries entières

I.1. Polynômes et séries formelles

$K[X]$ l'ensemble des polynômes sur un corps commutatif K, peut se construire à partir de l'ensemble des suites de scalaires dans K a support fini, $K^{(N)}$

$(K[X], +,\cdot,\times)$ est une algèbre commutative unitaire intègre sur K engendrée par $\{1, X\}$

Une **série formelle** sur K correspond à un élément de K^N

L'ensemble des séries formelles est note $\boldsymbol{K}[[\boldsymbol{X}]]$, c'est une algèbre qui contient K[X].

L'ordre d'une série formelle $\boldsymbol{\alpha}$, noté $\boldsymbol{ord(\alpha)}$ est le rang du premier coefficient non nul/ $+\infty$ si $\alpha = 0$

L'ordre du produit de séries formelles est la somme des ordres. L'algèbre des séries formelles est intègre

Une famille de séries formelles est dite **algébriquement sommable** si à chaque rang, la famille des coefficients de ce rang a un nombre fini de termes non nuls (donc la somme est finie et peut être bien calculée). Une telle famille définit donc la **série formelle somme d'une famille algébriquement sommable.**

On peut définir la série formelle dérivée, par analogie avec les séries entières $(\sum_{n\geq 0} a_n X^n)' = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}X^n$

I.2. Séries entières

Une **série entière** sur $\mathbb{K}$=R ou C est une série de fonctions de la forme $z \mapsto a_n z^n$ avec $a_n \in K^N$

Toute série entière correspond donc également à sa série formelle canonique associée $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$

Si pour un complexe $z_0 \in C$ on a $a_n z_0^n$ est bornée, alors sur tout le disque ouvert de rayon $|z_0|$, la série entière converge absolument, normalement sur tout compact, $a_n z^n \to 0$ et $a_n z^n$ est bornée. Un majorant est donne par les inégalités de Cauchy pour $z \in D(0, R)$: $|a_n||z|^n \leq \|f\|_{\infty, C(0,|z|)}$

On peut définir le **rayon de convergence de la série entière** comme le supremum des $|z|$ tel que $(a_n z^n)_n$ est bornée. On a donc les propriétés précédentes sur le disque ouvert de convergence. Sur le cercle de convergence on ne sait rien. $\sum_{n\geq 0} nz^n$ DG pour $|z| = R = 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ AC pour $|z| = R = 1$.

En dehors du disque fermé de convergence, la série diverge grossièrement.

$\sum_{n\geq 0} z^n$ est de rayon de convergence 1. Et $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

Pour une fraction rationnelle complexe $F \in \mathbb{C}(X)$ sans pôle dans $\mathbb{N}$, $\sum_{n\geq 0} F(n) z^n$ est de rayon 1.

Pour $k \in \mathbb{N}$ $\sum_{n\geq 0}\binom{n+k}{k} z^n$ est de rayon de convergence 1. Et $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}$

$\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ est de rayon $\frac{1}{e}$.

La série entière de coefficients les décimales de pi est de rayon 1.

Règle de d'Alembert. Si le module du rapport de deux coefficients successifs tend vers $l \in [0, \infty]$, alors le rayon de convergence est $R = 1/l$

Formule de Hadamard. On a toujours la formule $R = \frac{1}{limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$

La somme de deux séries entières de rayons distincts est une série entière de rayon le min.

La somme de deux séries entières de même rayon, est une série entière de rayon au moins ce rayon.

Le produit de deux séries entières est de rayon supérieur au min de leur rayon.

Multiplier une série entière par un scalaire conserve le rayon.

Si $a_n =_{n\to\infty} O(b_n)$, alors le rayon de la s.e. de coeffs (a_n) est $\geq$ au rayon de la s.e. de coeffs (b_n)

Si $a_n \sim_{n\to\infty} b_n$, alors le rayon de la s.e. de coeffs (a_n) est $=$ au rayon de la s.e. de coeffs (b_n)
Toute série entière est infiniment dérivable au sens complexe sur son disque de convergence et on peut écrire $f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\dots(n+k)a_{n+k}z^n$, et $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ Donc $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$
Toute série entière réelle est intégrable sur son disque de convergence d'intégrale $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$
Inégalités de Cauchy. Pour une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ on a $|a_n|r^n \leq M_r = Sup_{|z|=r}|f(z)|$ si $r < R$.
Si une série entière est d'ordre k alors on peut l'écrire sous la forme $z^k g(z)$ avec g ne s'annulant pas au voisinage de 0, donc la série entière ne s'annule qu'en 0 au voisinage de 0 (si $k > 0$).
DL. (formules aussi valables pour des séries entières réelles)
Pour une s.e. $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon $R > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \underset{\substack{z\to 0\\ |z|<R}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + O(z^{n+1})$
Pour une s.e. $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon $R > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \underset{\substack{z\to 0\\ |z|<R}}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + o(z^n)$
$\forall x \in]-1,1[$ $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\quad \forall x \in]-1,1[$ $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$
$\forall x \in]-1,1[$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!}$
$\forall x \in]-1,1[$ $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ $\quad \forall x \in]-1,1[$ $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\mathrm{ch}\, x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\mathrm{sh}\, x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$
$\forall x \in \mathbb{R}$ $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\mathrm{arcth}\, x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$

I.3.2. Séries formelles composées

$\alpha = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ et $\beta = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$ deux séries formelles de $\mathbb{K}[[X]]$, pour définir la série composée il faut $b_0 = 0$ alors la famille des $(a_n\beta^n)_n$ est algébriquement sommable et on peut définir la **série formelle composée** comme la somme de cette famille. $\boldsymbol{\alpha \circ \beta = \sum_{n\geq 0} a_n \beta^n}$
$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ s.e. de C de rayons $R_a > 0, R_b > 0$, et $b_0 = 0$ alors la série entière composée, est la série entière associée à la série formelle composée des séries formelles associées au deux s.e. Elle est de rayon $R \geq R^* = \sup\{r > 0 |\ \sum_{n=0}^{\infty}|b_n|r^n < R_a\}$ et dans le disque $D(0, R^*)$ on a composition des sommes.

I.3.3. Série formelle inverse pour x

Pour que la série formelle $\alpha = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ ait un inverse multiplicatif $1/\alpha$ il faut et suffit que $a_0 \neq 0$
Dans ce cas si la série entière associée à α a un rayon >0, alors la série associée à l'inverse a un rayon >0, de plus sur le disque de rayon le min de ces deux rayon, les sommes des séries entières sont inverses.

I.3.4. Série formelle inverse pour o

$\alpha = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ série formelle. Alors les conditions $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$ équivaut aux conditions il existe $\beta = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$ tel que $b_0 = 0$ et $\alpha \circ \beta = X$. Dans ce cas on a $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha = X$, unicité de α et β, $b_1 = \frac{1}{a_1} \neq 0$
Dans ce cas si la série entière associée à α a un rayon >0, celle associée à la série réciproque β a aussi un rayon >0, de plus sur le disque de rayon le min de ces deux rayons, les sommes sont réciproques.

II. Les fonctions analytiques.

II.1. Définitions et premiers exemples.

Une fonction f d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, est développable en série entière (d.s.e.) en un point

$\boldsymbol{z_0} \in \boldsymbol{U}$ ssi $\exists r > 0\ \exists (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ $\begin{cases} D(z_0, r) \subseteq U \\ \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ de rayon } R \geq r \\ \forall z \in D(z_0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \end{cases}$

Une fonction f d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, est développable en série de Taylor (d.s.t.) en un point

$\boldsymbol{z_0} \in \boldsymbol{U}$ ssi $\exists r > 0$ $\begin{cases} D(z_0, r) \subseteq U \\ f \text{ est holomorphe sur le voisinage } D(z_0, r) \\ \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n \text{ est de rayon } R \geq r \\ \forall z \in D(z_0, r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \end{cases}$

d.s.e. $\Leftrightarrow$ **d.s.t.** Une fonction complexe $f: U \to \mathbb{C}$ est d.s.e. en $z_0 \in U$ ssi elle est d.s.t. en z_0. Dans ce cas on a toujours $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. Il y a unicité des coefficients de la série entière dans la définition de d.s.e.

Une fonction f d'un ouvert U de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ est développable en série entière (d.s.e.) en un point

$\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{U}$ ssi $\exists r > 0\ \exists (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ $\begin{cases}]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq U \\ \sum_{n\geq 0} a_n x^n \text{ de rayon réel } R \geq r \\ \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \end{cases}$

Une fonction f d'un ouvert U de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ est développable en série de Taylor (d.s.t.) en un point

$\boldsymbol{x_0} \in \boldsymbol{U}$ ssi $\exists r > 0$ $\begin{cases}]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq U \\ f \text{ est } C^{\infty} \text{ sur le voisinage }]x_0 - r, x_0 + r[\\ \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n \text{ est de rayon réel } R \geq r \\ \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \end{cases}$

d.s.e. $\Leftrightarrow$ **d.s.t.** Une fonction réelle $f: U \to \mathbb{R}$ est d.s.e. en $x_0 \in U$ ssi elle est d.s.t. en x_0. Dans ce cas on a toujours $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Il y a unicité des coefficients de la série entière dans la définition de d.s.e.

La condition f est C^{∞} de d.s.t.r. ne suffit pas. $\exists$ une fonction f d'un ouvert U de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, $\exists x_0 \in U$

$\begin{cases} f \text{ est } C^{\infty} \text{ sur le voisinage } U \\ \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n \text{ est de rayon réel } \mathrm{R} = 0 \end{cases}$

Théorème de Borel. Pour $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ \ C^{\infty}$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ f^{(n)}(0) = a_n$

Donc il suffit de prendre $a_n = (n!)^2$

Les deux premières conditions de d.s.t.r. ne suffisent pas. $\exists$ une fonction f d'un ouvert U de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$,

$\exists x_0 \in U\ \exists r > 0$ $\begin{cases}]x_0 - r, x_0 + r[\subseteq U \\ f \text{ est } C^{\infty} \text{ sur le voisinage }]x_0 - r, x_0 + r[\\ \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n \text{ est de rayon réel } \mathrm{R} \geq \mathrm{r} \\ \forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[,\ f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \end{cases}$

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est C^{∞} sur $\mathbb{R}$ mais pas d.s.e. en 0.

Une fonction <u>réelle</u> est d.s.e. en $x_0 \in U$ ssi sur voisinage de x_0, le reste de Taylor intégral d'ordre n converge simplement vers 0 quand $n \to \infty$. (on utilise T.R.I. et d.s.e. $\Leftrightarrow$ d.s.t.). Je ne sais pas dans $\mathbb{C}$.

Corollaire ITL. Si $\exists r > 0\ \exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in U \cap]x_0 - r, x_0 + r[\ \ |f^n(x)| \leq M$ alors f est d.s.e. en x_0

Exemples : $Argch$ est d.s.e. en 2.
$x \mapsto e^{Arcsin(x)}$ est d.s.e. en 0.
L'inverse multiplicatif $\frac{1}{f}$ d'une fonction complexe f d.s.e. en $z_0 \in U$ tel que $f(z_0) \neq 0$, est défini au voisinage de z_0 et d.s.e. en z_0.
$F(z) = E(z) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(z-a_i)^j}$ donc F est d.s.e. en 0 de rayon $R = \min_{1 \leq i \leq r} |a_i|$

II.2. Propriétés élémentaires des fonctions analytiques

Une fonction complexe f est analytique sur un ouvert de $\mathbb{C}$ ssi elle est d.s.e. en tout point de l'ouvert.
La fonction somme d'une série entière de rayon>0 est analytique sur tout son disque de convergence.
Une fonction d.s.e./d.s.t. en un point, est analytique sur un voisinage de ce point.
$f(z) = 1/z$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$ et $\forall z_0 \in \mathbb{C}^*$ $\forall z \in D(z_0, |z_0|)$ $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n$
Pour une fraction rationnelle complexe $F \in \mathbb{C}(X)$ dont 0 n'est pas pôle, alors $\tilde{F}$ est d.s.e. avec pour rayon de convergence le module minimum des pôles de F, càd de disque le plus grand ne contenant aucun pole, de plus le développement est combinaison linéaire des $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n = \frac{1}{(1-z)^{k+1}}$ k variant dans $\mathbb{N}$.
La somme et le produit de deux fonctions analytiques dans un ouvert U sont analytiques sur U.
L'ensemble des fonctions d.s.e. en un point z_0 d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{C}$ algèbre pour les lois usuelles, comme sous $\mathbb{C}$ algèbre de $(F(U, \mathbb{C}), +, \times, \cdot)$.
L'ensemble des fonctions analytiques sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{C}$ algèbre pour les lois usuelles.
L'inverse multiplicatif $\frac{1}{f}$ d'une fonction analytique f sur un ouvert U est bien définie et analytique sur l'ouvert $U \setminus f^{-1}(\{0\})$
Soit f analytique sur un ouvert U, g analytique sur un ouvert V tel que $g(V) \subseteq U$, alors la composée $f \circ g$ est analytique sur V.
Inversion locale analytique. Soit une fonction f analytique sur un ouvert U. Soit z_0 un point de U ou la dérivée ne s'annule pas. Alors il existe un voisinage du point, et un voisinage de son image tel que la fonction restreinte à ces voisinages soit bijective, de réciproque analytique.
Théorème d'Abel radial. Si en un point z_0 du cercle de convergence d'une s.e. complexe $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$, il y a convergence, alors $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ CU sur le rayon du cercle $[0, z_0[$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \underset{\substack{z \to z_0 \\ z \in [0, z_0[}}{\to} \sum_{n=0}^{\infty} a_n {z_0}^n$
Pour $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0\ [\pi]$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n} = \ln\left(2 \left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|\right)$

III. Exemples fondamentaux : exponentielle et logarithme

III.1. La fonction exponentielle complexe

La fonction exponentielle est un morphisme de (C, +) sur le groupe $(C^*, \times)$
exp est surjective sur $\mathbb{C}^*$
exp est holomorphe (et analytique) sur $\mathbb{C}$ et égale à sa dérivée
exp restreint a R est un C^∞ difféomorphisme croissant convexe de R sur R_+^* de limite 0 en -∞ et ∞ en ∞
exp est $2i\pi$ periodique.
La fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$: $x \mapsto \exp(ix)$ est periodique d'image le cercle unité U, de période 2π.

III.2. Argument et logarithme complexe

III.2.1. Fonctions arguments et logarithme complexe

Un **argument** de $z \in C^*$ est un <u>réel</u> θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$. Il en existe toujours un et même une infinité
D'un argument de z , on obtient tous les autres en ajoutant $2k\pi$, k dans Z.
Un **logarithme** de $z \in C^*$ est un <u>complexe</u> ω tel que $z = e^{\omega}$. Il en existe toujours un et même infinité.
ω logarithme de z équivaut a $\omega = \ln|z| + i\theta$ avec θ un argument de z.
D'un logarithme de z, on obtient tous les autres en ajoutant $2ik\pi$, k dans Z.
Une **puissance $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}$ d'un réel >0 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^*$** est un complexe de la forme $p = \exp(\alpha\zeta)$ avec ζ logarithme de x, càd $p = \exp(\alpha \ln x)$. Il n'y en a qu'un seul qu'on peut donc noter $\boldsymbol{x^{\alpha}} = e^{\alpha \ln x}$
Une **puissance $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}$ d'un complexe $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^*$** est un complexe de la forme $p = \exp(\alpha\zeta)$ avec ζ logarithme de z, càd $p = \exp(\alpha \ln|z| + i\alpha\theta) = |z|^{\alpha}e^{i\alpha\theta}$ avec θ un argument de z.
D'une puissance z^{α}, on obtient toutes les autres en multipliant par $e^{i\alpha 2k\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$
Rappel racine nième : $z^n = Z \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!]\ z = |Z|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i}{n}(ArgZ + 2k\pi)} \Leftrightarrow z$ est puissance $\frac{1}{n}$-ième de Z.
De façon générale, est-ce que Z est puissance α de z ssi z est puissance α^{-1} de Z ?
Une **détermination continue de l'argument <u>sur un ouvert</u> U** est un $\theta: U \to R$ continue tel que tout $\theta(u)$ est un argument de u.
Une **détermination continue du logarithme sur un ouvert U** est un $\omega: U \to C$ continue tel que tout $\omega(u)$ est un logarithme de u.
Une **détermination continue de $\boldsymbol{z} \to \boldsymbol{z^{\alpha}}$, $(\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{C})$ sur un ouvert U** est une fonction continue $p: U \to C$ telle que pour tout $u \in U$ $p(u)$ est une puissance α ieme de z
Caractérisation : $p(z) = \exp(\alpha l(z))$ avec l une détermination continue du logarithme.
Une **détermination continue de l'argument <u>d'une fonction $\boldsymbol{f}$</u>: $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{C}$** est un $\theta: V \to R$ continue tel que tout $\forall u \in V\ \ \theta(u)$ argument de $f(u)$.
On généralise ce genre de définition…
Fixer une détermination continue de l'argument sur un ouvert correspond à fixer une détermination continue du logarithme sur l'ouvert, et correspond à fixer une détermination continue de z^{α} pour un α fixé.
Sur un ouvert connexe de C^*, D'une détermination continue du logarithme, on obtient toutes les autres par addition de $2ik\pi$ ou k est entier relatif constant. $l_k = l + 2ik\pi$.
De plus toutes ces déterminations continues du logarithme sont analytiques.

III.2.2. Déterminations principales et fonctions puissance

L'**argument principal** d'un $z \in C^*$ est l'unique argument de z dans $]-\pi, \pi]$. On le note $\mathbf{arg}\,\boldsymbol{z}$

On a $arg\left(z = re^{i\theta} = x + iy\right) = \begin{cases} 2\arctan\left(\frac{\frac{y}{r}}{1+\frac{x}{r}}\right) & \text{si } z \notin \mathbb{R}_- \\ \pi \text{ si } z \in \mathbb{R}_- \end{cases} = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) \text{ si } x > 0 \\ \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \text{ si } x < 0 \text{ et } y > 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right) \text{ si } x < 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$

Il détermine la **détermination continue de l'argument principal : $\boldsymbol{Arg}$**$: C \setminus R_- \to (-\pi, \pi)$
Le **logarithme principal** d'un $z \in C^*$ est l'unique logarithme associé à l'argument principal. Il détermine la **détermination continue du logarithme principal : $\boldsymbol{Log}$**$: C \setminus R_- \to C$
Pour $\alpha \in R$ sur un ouvert $C \setminus R_- e^{i\alpha}$ il existe une détermination continue de l'argument $Arg_{\alpha}(z) = Arg\left(ze^{-i\alpha}\right)$. Au voisinage de tout complexe non nul, il existe une détermination continue de l'argument
Une fonction continue sur un ouvert connexe de C^* à valeurs dans C, est une primitive de $1/z$ sur

l'ouvert ssi c'est une détermination continue du log sur l'ouvert.
Il n'y a pas de détermination continue du logarithme/de l'argument sur le cercle unité, ou tout lacet continu entourant 0.
$(z^\alpha)' = \frac{\alpha}{z} z^\alpha$ et $z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta$, attention souvent $(z_1 z_2)^\alpha \neq z_1^\alpha z_2^\alpha$ (a vérifier ?). $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$
L'argument/logarithme principal fournit une **détermination continue principale de $\boldsymbol{z^\alpha}$**.
$\boldsymbol{z^\alpha} = |z|^\alpha e^{i\alpha Arg(z)} = \exp(\alpha Log(z))$

Chapitre 22. Fonctions holomorphes et théorie de Cauchy
I. La notion d'holomorphie
$\boldsymbol{L_R(C,C)}$ Rev des a.l. R-linéaires de C dans C. (dimension = 4)
$\boldsymbol{L_R^C(C,C)}$ Cev des a.l. R-linéaires de C dans C. (dimension = 2)
$\boldsymbol{L_C^C(C,C)}$ Cev des a.l. C-linéaires de C dans C. = formes linéaires (dimension = 1)
$dx(z = x+iy) = x = Re(z) \in L_R^C(C,C)$, $dy(z = x+iy) = y = Im(z) \in L_R^C(C,C)$
$dz = dx + idy \in L_R^C(C,C)$, $d\overline{z} = dx - idy \in L_R^C(C,C)$
(dx, dy) est une base de $L_R^C(C,C)$. $(dz, d\overline{z})$ est une base de $L_R^C(C,C)$.
dz est aussi une base de $L_C^C(C,C) = C^\star$
I.1. Fonctions holomorphes
$f: U \to C$ d'un ouvert de C, est **holomorphe/dérivable au sens complexe** en $z_0 \in U$ **de dérivée** $l \in C$ si $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \to_{z\to z_0} l$ dans ce cas la limite est unique on l'appelle **dérivée de f en $\boldsymbol{z_0}$** et on note $\boldsymbol{f'(z_0)}$
Une fonction **holomorphe** sur un ouvert U est une fonction dérivable au sens complexe en tout point de l'ouvert. On note $\boldsymbol{H(U)}$ l'ensemble des fonctions holomorphe sur un ouvert U.
Toute fonction polynomiale est holomorphe sur C. Toute série entière est holomorphe sur son disque de convergence.
La composée de fonctions holomorphes est holomorphe et vérifie la chain rule.
f est holomorphe en z_0 ssi f est R différentiable en z_0 et sa R-différentielle en z_0 est C-linéaire.
I.2. Conditions de Cauchy-Riemann
Soit une fonction d'un ouvert de C vers C, on suppose que f est R-différentiable en z_0, alors comme $d_{z_0}f = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)dy$ et $dz = \cdots, d\overline{z} = \cdots$
On pose $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$, $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$
De sorte à réécrire la différentielle $d_{z_0}f = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)d\overline{z}$
Alors f est holomorphe en z_0 ssi $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$ ssi $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = 0$ ssi $\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0)$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(z_0)$ avec $P = Re(f), Q = Im(f)$.
Dans ce cas on a toujours $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$, et $d_{z_0}f(z) = zf'(z_0)$
Une fonction $f: U \to C$ d'un ouvert de C vers C admet une **primitive** F sur U si $F: U \to C$ est holomorphe sur U et $F' = f$
II. Intégration le long de chemins dans C
II.1. Chemins de C
Un **chemin** d'un ouvert U de C d'extrémités z_1, z_2 est une application $\gamma: [a,b] \subseteq R \to U$ continue telle

que $\gamma(a) = z_1$ et $\gamma(b) = z_2$
Un **lacet** est un chemin d'extrémités égales. L'image d'un chemin est un compact de C.
On peut définir le **chemin opposé, le chemin juxtaposé, chemin C1 par morceaux.** TODO
Un chemin C1 par morceaux de dérivée nulle est un chemin constant (ponctuel).

II.2. Intégration complexe le long d'un chemin

Une fonction de C dans C continue sur l'image d'un chemin C1 par morceaux γ permet de definir l'**intégrale complexe le long du chemin** $\int_\gamma \boldsymbol{f(z)dz} = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$
Deux chemins C1 par morceaux sont **équivalents** s'il existe une bijection continue strictement croissante et C1 par morceaux de réciproque continue C1 par morceaux, tel que l'un est obtenu en composant l'autre avec cette bijection. Définit une relation d'équivalence. Deux chemins C1 par morceaux équivalents donnent lieu aux mêmes intégrales pour une même fonction.
L'inégalité triangulaire est fausse pour les intégrales le long d'un chemin.
La **longueur** d'un chemin C1 par morceaux est $\boldsymbol{l(\gamma)} = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$
On a $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \|f\|_\gamma l(\gamma)$
Une suite de fonctions continues sur $Im\gamma$ qui converge uniformément, alors la fonction limite est aussi continue sur $Im\gamma$ on peut écrire et permuter limite et intégrale le long d'un chemin C1/m.
Une série de fonctions continues sur $Im\gamma$ qui converge uniformément/normalement, alors la fonction somme est aussi continue sur $Im\gamma$ on peut écrire et permuter somme et intégrale le long d'un chemin C1/m.

Lemmes de Jordan.
Lemme 1 : $zf(z) \to_{|z|\to\infty} 0 \Rightarrow \int_{z=re^{it},t_1\leq t\leq t_2} f(z)dz \to_{r\to\infty} 0$
Lemme 2 : $zf(z) \to_{|z|\to 0} 0 \Rightarrow \int_{z=re^{it},t_1\leq t\leq t_2} f(z)dz \to_{r\to 0^+} 0$
Lemme 3 : $f(z) \to_{|z|\to\infty} 0 \Rightarrow \int_{z=re^{it},0\leq t\leq \pi} f(z)e^{iz}dz \to_{r\to\infty} 0$

II.3. De l'intégrale sur les chemins a l'existence de primitives

f d'un ouvert U dans C. Si f admet une primitive F sur U alors pour tout chemin dans U $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$, en particulier pour tout lacet $\int_\gamma f(z)dz = 0$ donc si sur un certain lacet $\int_\gamma f(z)dz \neq 0$ alors, f n'admet pas de primitive.
Pour $n \neq -1$, pour tout lacet de C, $\int_\gamma z^n dz = 0$, $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ primitive de z^n sur C.
Pour $n = -1$ il n'y a pas de détermination continue du logarithme/de l'argument sur C^* car $\int_{z=re^{it},0\leq t\leq 2\pi} \frac{dz}{z} = 2i\pi$
Sous continuité de f, alors f admet une primitive sur un ouvert U ssi pour tout lacet de U, $\int_\gamma f(z)dz = 0$
Sur un ouvert <u>convexe</u>, f étant continue, alors f admet une primitive sur U ssi pour tout triangle fermé inclus dans U, on a $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$

III. Théorèmes de Cauchy

III.1. Le théorème de Cauchy pour le bord d'un triangle

Lemme de Goursat.* Une fonction continue <u>sur tout un ouvert</u>, et <u>holomorphe</u> sur l'ouvert sauf en un point/sauf une partie finie, vérifie pour tout triangle fermé dans U, $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$

IV. Indice et théorème de Cauchy

IV.1. Indice d'un lacet C1 par morceaux

L'indice d'un lacet C1 par morceaux en un point z_0 pas sur le lacet est l'intégrale $\boldsymbol{Ind_\gamma(z_0)} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$

L'indice d'un cercle autour d'un point est 1, l'indice d'un cercle pas autour d'un point est 0. L'indice d'un cercle autour d'un point parcouru n fois est n.

L'indice est toujours dans $\mathbb{Z}$, et vaut 0 sur la composante non bornée de $C \setminus Im(\gamma)$.

IV.2. Formule de Cauchy

Théorème de Cauchy. Une fonction d'un ouvert étoilé $U \subseteq \mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ continue sur tout U, et holomorphe sur U sauf en un nb fini de points :

1) admet toujours une primitive sur l'ouvert, et ce qui est équivalent 2) pour tout lacet dans U, $\int_\gamma f(z)dz = 0$, et 3) la formule de Cauchy est vérifiée.

Formule de Cauchy. $\forall z_0 \in U \setminus Im(\gamma)\ \ Ind_\gamma(z_0)f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$

Plus généralement $\forall z_0 \in U \setminus Im(\gamma)\ \ \ \forall n \in \mathbb{N}\ Ind_\gamma(z_0)\frac{f^n(z_0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

Dans le cas ou γ tourne une seule fois autour du point (cercle), on retrouve l'expression du nième coefficient du dev en série entière/de Laurent $a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

Une fonction holomorphe sur un ouvert U de C admet localement une primitive en tout point.

IV.3. Analycité des fonctions holomorphes.

Une fonction holomorphe sur ouvert de C est analytique sur l'ouvert, de plus en tout point de l'ouvert, le rayon de convergence du développement de f centré au point est supérieur à la distance qui sépare le point de la frontière de l'ouvert. càd $\forall z_0 \in U\ \ f$ d.s.e. en z_0 avec $R \geq d(z_0, U^c)$

Toute fonction holomorphe sur un ouvert y est infiniment dérivable au sens complexe.

Il n'y a donc pas de différence entre holomorphie et analycité complexe.

Morera. Toute fonction continue sur un ouvert telle que l'intégrale de la fonction selon tout lacet dans l'ouvert est nul, est une fonction holomorphe sur l'ouvert.

Réciproque fausse en général mais vraie si l'ouvert est simplement connexe/étoilé/convexe.

Morera 2 (+ précis). Toute fonction continue sur un ouvert telle que l'intégrale de la fonction selon tout triangle fermé dans l'ouvert est nul, est une fonction holomorphe sur l'ouvert.

Une fonction continue sur un ouvert, holomorphe sur l'ouvert sauf un nombre fini de points, est holomorphe sur tout l'ouvert.

Chapitre 23. **Les propriétés fondamentales des fonctions holomorphes**

Théorème d'identité. Une fonction analytique sur un ouvert connexe U et z_0 un point fixé de l'ouvert. f est identiquement nulle sur l'ouvert ssi elle l'est sur un voisinage de z_0 ssi $\forall n, f^{(n)}(z_0) = 0$

L'ordre d'un zéro d'une fonction analytique sur un ouvert connexe U, est l'ordre > 0 de la plus petite dérivée nième en ce point qui soit non nulle. Une fonction non identiquement nulle, est donc telle que ses zéros ont tous un ordre fini. Et pour tout zéro z_0 on a $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$ avec $k \geq 1$ est l'ordre du zéro, avec g une fonction holomorphe sur l'ouvert ne s'annulant pas au voisinage de z_0.

Principe des zéros isolés. Pour une fonction analytique sur un ouvert connexe, ou bien elle est identiquement nulle, ou bien l'ensemble de ses zéros est fermé, discret (dénombrable ou fini), et tous ses zéros sont isolés, càd l'ensemble de ses zéros n'a pas de points d'accumulation dans l'ouvert.

Une fonction analytique sur un ouvert connexe, dont l'ensemble des zéros admet un point

d'accumulation dans l'ouvert, est donc identiquement nulle.
Attention, pour une fonction analytique non identiquement nulle sur un ouvert connexe, l'ensemble des zéros peut quand même admettre un point d'accumulation sur la frontière.
Remarque. Un fermé A d'un ouvert U de C, en particulier l'ensemble des zéros vérifie les équivalences suivantes. A n'a que des points isolés ssi A est localement fini dans U ssi l'intersection de A avec tout compact de U est finie ssi (A est discrète et si infinie alors toute suite de A tend vers l'infini ou le bord de U).
Donc pour une fonction analytique f sur un ouvert connexe U, tout compact dans U ne peut contenir qu'un nombre fini de zéros de f.
Principe du prolongement analytique (corollaire). Deux fonctions analytiques sur un ouvert connexe qui coïncident sur un ensemble qui a un point d'accumulation, (par exemple tout intervalle non vide inclus dans l'ouvert) sont égales sur tout l'ouvert.
Par ex l'exponentielle complexe est l'unique prolongement analytique de l'exponentielle réelle sur $\mathbb{R}$.
L'anneau des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe de C est un anneau commutatif intègre.
II. Les inégalités de Cauchy et leurs applications
Inégalités de Cauchy. Une fonction holomorphe sur un ouvert U vérifie pour tout $r \in [0, R[$, $z_0 \in U$ tel que $D(z_0, R) \subseteq U$, l'inégalité $\forall n \in N \quad |a_n| r^n = \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| r^n \leq \|f\|_{u,C(z_0,r)} = \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|$
Estimées dimensionnelles. Une fonction holomorphe sur un ouvert U bornée sur U, vérifie
$\left\|f^{(n)}\right\|_{u,U_\delta} \leq \frac{n!\|f\|_{u,U}}{\delta^n}$ avec $U_\delta = \{z \in U \mid d(z, Fr(U)) > \delta\}$ avec $\delta > 0$
Une **fonction entière** est une fonction holomorphe sur C
Th de Liouville. Une fonction entière bornée est constante sur C.
Th de D'Alembert-Gauss. Tout polynôme complexe non constant admet une racine complexe.
Th de la moyenne. La valeur d'une fonction holomorphe en un point a de C est le centre de gravité de l'image du cercle centré en a, $f(C(a,r))$ pour tout rayon r>0 assez petit (tel que $\overline{D}(a,r) \subseteq U$) alors
$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$
Principe du maximum local. Une fonction holomorphe sur un ouvert de C dont le module admet un maximum local en un point de l'ouvert, est constante sur un voisinage de ce point. Si de plus l'ouvert est connexe, alors la fonction holomorphe est constante sur tout l'ouvert.
Une fonction holomorphe sur un ouvert connexe borné, définie et continue sur l'adhérence de l'ouvert, alors f atteint son max sur la frontière, et s'il est atteint ailleurs que sur la frontière (à l'intérieur de l'ouvert), alors la fonction est constante. Idem pour le min.
Souvent utile pour obtenir des bornes sur des fonctions holomorphes.
Th. Application ouverte. Une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe de C est une application ouverte de l'ouvert dans C
II.2. Comportement local.
Inversion locale. Une fonction holomorphe sur un ouvert de C, et un point **régulier** ($f'(z_0) \neq 0$) de l'ouvert, alors il existe un voisinage du point, et un voisinage de l'image du point tels que la fonction restreinte a ces voisinages est une bijection de réciproque également holomorphe et de dérivée :
$(f^{-1})'(\omega) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\omega))}$

Solutions de $f(z) = a$.
Soit une fonction f holomorphe non constante sur un ouvert connexe de C, soit $a \in C$
et z_0 solution d'ordre $k \geq 1$ de $f(z) = a$, càd z_0 est un zéro d'ordre $k \geq 1$ de $f - a$. (alors $a = f(z_0)$)
Alors il existe un isomorphisme analytique ϕ d'un voisinage V de z_0 vers un voisinage de 0 tel que
$\forall z \in V \;\; f(z) - a = \phi(z)^k$
De plus il existe un voisinage W de a tel que tout point de $W \setminus \{a\}$ a exactement k antécédents.
Inversion globale. f holomorphe et injective, alors f' ne s'annule pas, et f isomorphisme analytique de U sur $f(U)$.
Application ouverte. Une fonction f holomorphe non constante sur un ouvert U connexe alors $f(U)$ ouvert.

Chapitre 24. Théorie de Cauchy homotopique.
I. Intégration sur chemin continu.
Une fonction $f: U \to C$ d'un ouvert de C vers C admet une **primitive** F sur U si $F: U \to C$ est holomorphe sur U et $F' = f$
Une **primitive le long d'un chemin continu** $\gamma: [a, b] \to U$ dans un ouvert, **d'une fonction** f de l'ouvert U vers C, est une fonction continue définie sur l'intervalle du chemin, a valeurs dans C, $F: [a, b] \to C$ telle que $\forall t_0 \in [a, b]\, \exists F_{t_0}: W \in V_{\gamma(t_0)} \supseteq \gamma\big(V \in V_{t_0}\big) \to C$ primitive de f sur W et $\forall t \in V\; F(t) = F_{t_0}\big(\gamma(t)\big)$
Toute primitive d'une fonction sur un ouvert composée après un chemin continu dans l'ouvert donne une primitive le long du même chemin, de cette même fonction.
Toute fonction <u>holomorphe</u> d'un ouvert vers C admet une primitive le long d'un chemin continu quelconque dans cet ouvert. Alors tout autre primitive le long du même chemin de cette même fonction se déduit par addition d'une constante.
L'intégrale d'une fonction holomorphe f d'un ouvert U de C vers C **le long d'un chemin continu** $\gamma: [a, b] \to U$ dans U est $\int_\gamma f(z)dz = F(b) - F(a)$ avec F une primitive quelconque de f le long de γ.
L'intégrale curviligne est donc définie si : chemin C1/m + f continue ou bien chemin C0 + f holomorphe.
I.2. Homotopie de chemins
Deux **chemins continus** dans un ouvert U de C **<u>ayant même origine et même fin</u>** sont dits **homotopes** s'il existe une application continue $\Gamma: [a, b] \times [0,1] \to U$ qui convertit un chemin en l'autre :
$\forall s \in [a, b]\; \gamma_1(s) = \Gamma(s, 0)\; et\; \gamma_2(s) = \Gamma(s, 1)$, et $\forall t \in [0,1]\; \Gamma(a, t) = \gamma_1(a) = \gamma_2(a)\; et\; \Gamma(b, t) = \gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Cette application est appelle **homotopie** d'un chemin à l'autre.
Deux **lacets continus** dans un ouvert U de C sont dits **homotopes** s'il existe une application continue $\Gamma: [a, b] \times [0,1] \to U$ qui convertit un lacet en l'autre :
$\forall s \in [a, b]\; \gamma_0(s) = \Gamma(s, 0)\; et\; \gamma_1(s) = \Gamma(s, 1)$, et $\forall t \in [0,1]\; \Gamma(a, t) = \Gamma(b, t)$.
A t fixé, $\Gamma(., t)$ est un lacet γ_t. On peut penser $\Gamma(s, t) = \gamma_t(s)$
Etre homotope est une relation d'équivalence sur la classe des chemins continus (resp lacets) dans un ouvert fixe. Tout chemin est homotope a un chemin de même image défini sur [0,1]. On suppose donc [a,b]=[0,1]. L'homotopie est une notion topologique, si Φ est continue d'un ouvert dans un autre, deux chemins homotopes dans le premier ouvert, composés avec Φ donne deux chemins homotopes dans le deuxième ouvert. Si Φ homéomorphisme, les espaces de chemins (resp lacets) d'un ouvert ou de l'autre sont en bijection, et l'homéomorphisme préserve les classes d'équivalence d'homotopie.
II. Théorie de Cauchy homotopique.

II.1. Indice et détermination continue de l'argument

L'indice d'un lacet C0 en un point $\boldsymbol{z_0}$ pas sur le lacet est l'intégrale $\boldsymbol{Ind_\gamma(z_0)} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}$

L'indice est toujours dans Z, et 0 sur la composante non bornee de $C \setminus Im(\gamma)$.

Une **détermination continue de l'argument <u>sur un ouvert</u> U** est un $\theta: U \to R$ <u>continue</u> tel que tout $\theta(u)$ argument de u. Il n'y a pas de détermination continue du logarithme/de l'argument sur C^*, (ni sur U).

Une **détermination continue de l'argument <u>le long d'un chemin continu</u> $\boldsymbol{\gamma}$** est un $\theta: [0,1] \to R$ <u>continue</u> tel que pour tout t, $\theta(t)$ argument de $\gamma(t)$.

Tout chemin continu γ admet une détermination continue θ de l'argument le long de lui, unique a addition de $2k\pi, k \in Z$ pres et dans le cas ou γ est un lacet, pour tout point $z_0 \notin Im(\gamma)$ on a $Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\big(\theta(1) - \theta(0)\big)$ à vérifier.

Tout chemin continu γ admet un exp. relèvement continu $\tilde{\gamma}$ cad $exp \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

II.2. Théorème de Cauchy homotopique.*

Les intégrales d'une fonction d'un ouvert vers C le long de chemins (resp lacets) continus homotopes dans l'ouvert sont égales.

Les indices en un point relativement à des lacets homotopes (ne contenant pas le point) sont égaux.

Formule de Cauchy homotopique.

Une fonction holomorphe sur un ouvert contenant un lacet <u>homotope a un point</u>(analogue a convexe) vérifie en tout point de l'ouvert sauf sur le lacet, $Ind_\gamma(z)f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}dz$

III. Simple connexité

Un ouvert de C est **simplement connexe** s'il est connexe et si tout lacet dedans est homotope a un point. (pas de trous) En particulier, un ouvert simplement connexe est connexe par arcs.

La simple connexité est topologique, se conserve par homéomorphisme entre ouverts.

Th. de Cauchy simplement connexe. Toute fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe vérifie pour tout lacet continu dans l'ouvert $\int_\gamma f(z)dz = 0$

Toute fonction holomorphe sur un ouvert simplement connexe y admet une primitive.

Si la fonction ne s'annule pas elle admet un log complexe holomorphe $g: U \to C$ tel que $e^g = f$ et admet une racine nième holomorphe pour tout n $g_n: U \to C$ tel que $(g_n)^n = f$

Une fonction holomorphe sur un ouvert <u>quelconque</u> ne s'annulant pas, admet localement primitive, log complexe holomorphe, et racine nième holomorphe pour tout n.

Une fonction <u>continue</u> sur un ouvert simplement connexe admet un log complexe continu sur l'ouvert.

Chapitre 25 Singularité des fonctions holomorphes théorème des résidus.

I. Classification des singularités isolées.

I.1. Singularité des fonctions holomorphes

On note $D(a,r)$ le disque complexe de centre a de rayon r. On note $D^*(a,r) = D(a,r) \setminus \{a\}$.

Une **singularité** d'une fonction, est un point de C ou la fonction est définie et holomorphe dans un voisinage du point, mais n'est pas définie au point.

Une **singularité d'ordre fini $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{N}$** d'une fonction est une singularité (suppose holomorphe près d'elle) telle que $k = \min\{n \geq 0 \mid (z-a)^{n+1}f(z) \to_{z\to a} 0\}$

càd $k = \min\{n \geq 0 \mid (z-a)^n f(z) \text{ se prolonge en } a \text{ en une fonction holomorphe}\}$

càd $k = \min\{n \geq 0 \mid (z-a)^n f(z) \text{ se prolonge en } a \text{ en une fonction continue}\}$
Dans ce cas $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^k}$ avec g holomorphe, non nulle, partout au voisinage de la singularité, et $(z-a)^k f(z) \to_{z\to a} g(a) \neq 0,\ \forall n \geq k\ \ (z-a)^{n+1} f(z) \to_{z\to a} 0$.
Donc une singularité est une singularité d'ordre fini ssi $\exists n\ (z-a)^n f(z) \to_{z\to a} 0$
ssi $\exists n\ (z-a)^n f(z)$ se prolonge en a en une fonction holomorphe/continue
Une **singularité artificielle** d'une fonction est une singularité telle que la fonction admet un prolongement en ce point, encore holomorphe en ce point. C'est une singularité d'ordre 0.
Une **singularité polaire = pôle d'ordre $k \geq 1$** d'une fonction est une singularité d'ordre $k \geq 1$.
Pour un pôle d'ordre $k \geq 1$ on a, $\exists!\ (a_{-1}, \dots, a_{-k}) \in C^k, a_{-k} \neq 0$, tels que le pôle est une singularité artificielle (d'ordre 0) pour $z \mapsto f(z) - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_{-i}}{(z-a)^i}$.
Une **singularité essentielle** d'une fonction est une singularité qui n'est ni artificielle ni polaire, ssi c'est une singularité qui n'est pas d'ordre fini.
Une singularité est essentielle ssi l'image par la fonction de tout disque épointé de la singularité, est une partie dense de C.

I.2. Séries de Laurent. (sur des lacets circulaires donc C1/m)

Formule de Cauchy sur couronne. Une fonction définie et holomorphe sur une couronne ouverte centrée en 0, vérifie la relation $f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=\rho_2} \frac{f(z)}{z-a} dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=\rho_1} \frac{f(z)}{z-a} dz$ à tout point a strictement dans une couronne interne (délimitée par les rayons quelconques $\rho_2 > \rho_1$) à la couronne de définition.
Toute fonction holomorphe sur une couronne ouverte centrée en un point quelconque a peut s'écrire comme la somme d'une série $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$. La **série de Laurent** de f en a est l'unique série normalement convergente sur tout compact de la couronne tel qu'on puisse écrire cela $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$. Ici a priori on doit préciser la normale convergence, car on est pas tout à fait dans le cas des séries entières vu que les puissances vont dans les négatifs. Les **coefficients de Laurent** sont donc déterminés uniquement $a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$ sur un lacet circulaire dans la couronne. La série de Laurent généralise donc le dev en série entière lorsque la fonction est holomorphe seulement autour d'un point. Dans le cas où la fonction est holomorphe sur tout un disque, la série de Laurent correspond au développement en série entière. On retrouve la formule de Cauchy d'ordre n.
L'intuition dans le dev d'une série de Laurent est que les coefficients d'ordre négatifs représentent le caractère d'une singularité. On peut en effet classifier une singularité suivant les coefficients a_n du développement en série de Laurent autour d'elle. Soit $J = \{n < 0 \mid a_n \neq 0\}$
La singularité est artificielle ssi $J = \emptyset$, la singularité est polaire ssi J fini non vide, et la singularite est essentielle ssi J est infini.
La valuation de la singularité est le min de l'ensemble des indices des coefficients non nuls dans le dev en série de Laurent en la singularité.
Un point est un zéro d'ordre m ssi sa valuation est m
Un point est un pôle d'ordre m ssi sa valuation est –m
Un point est une singularité essentielle ssi sa valuation est $-\infty$

II. Primitives et résidus

II.1. Résidu d'une fonction

Le **résidu** d'une fonction f (holomorphe au voisinage épointé) d'une singularité a est le coefficient a_{-1}

de son développement de Laurent en a. On a donc $res_a(f)Ind_\gamma(a) = a_{-1}Ind_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz$ pour tout lacet C1/m. Pour calculer le résidu on prend en général un cercle autour de a pour avoir un indice de 1.

Une fonction f holomorphe au voisinage épointé d'une singularité a, admet une primitive sur D(a,r) ssi son résidu en la singularité est nul.

Théorème des résidus. Si au lieu d'une singularité, on a un ensemble A de singularités isolées inclus dans un ouvert U, et f est supposée pour faire simple, holomorphe sur $U \setminus A$ alors pour tout lacet d'image dans $U \setminus A$ évitant les singularités, lacet supposé <u>homotope a un point dans U</u>, alors on peut écrire, $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{a\in A} Ind_\gamma(a)Res_a(f)$

II.2. Indice et nombre de zéros et de pôles.

Soit U ouvert connexe, et P ensemble de points isolés de U, f une fonction holomorphe sur $U \setminus P$, P est l'ensemble des pôles de f, Z l'ensemble des zéros de f comptés avec leur multiplicité. Alors pour tout lacet dans $U \setminus (Z \cup P)$ homotope a un point dans U, et toute fonction g holomorphe sur U on a :

$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in Z} g(a)Ind_\gamma(a) - \sum_{b\in P} g(b)Ind_\gamma(b)$ et chacune des sommes est finie.

Théorème de l'indice. Une fonction sur un ouvert connexe, n'admettant que des singularités polaires isolées sur l'ouvert, alors le long d'un cercle ne rencontrant aucune singularité orienté positivement inclus dans l'ouvert, on peut écrire $\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = n_Z - n_P$ ou n_Z et n_P sont respectivement le nombre de zeros et de pôles situés a l'intérieur du cercle, comptés avec leur multiplicité (ordre).

On peut aussi voir $\frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Ind_{f\circ C}(0) = n_Z - n_P$.

II.3. Calculs d'intégrales

Premier type : Fonction rationnelle réelle sans pole réel. $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$. Pour que I converge il suffit que $zf(z) \to_{|z|\to\infty} 0$. Alors $I = 2i\pi \sum_{p\in P_f, Im(p)>0} Res_p(f)$. Se montre par th résidus le long d'un demi disque vers le haut centre en 0.

Deuxième type : Fonction avec exponentielle. $I = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ix}dx$ en supposant que I a un sens. Alors $I = 2i\pi \sum_{p\in P_g, Im(p)>0} Res_p\left(g(z)e^{iz}\right)$. Se montre par th résidus le long d'une demi-couronne vers le haut centrée en 0.

Troisième type : Avec $\mathbf{1/z^\alpha}$ $I = \int_0^\infty \frac{g(z)}{z^\alpha}dz$. En supposant que I a un sens. Alors $g(z) \to_{|z|\to\infty} 0$ et on a $I = \frac{2i\pi}{1-e^{-2i\pi\alpha}}\sum_{p\in P_g} Res_p(g) = \frac{\pi}{\sin(\alpha)}e^{i\pi\alpha}\sum_{p\in P_g} Res_p(g)$. Se montre par intégration le long d'une couronne privée d'un secteur angulaire autour de l'axe des réels positifs, symétrique d'angle $2\theta \to 0$. (ressemble à un aimant).

III. Fonctions méromorphes

Un fermé A d'un ouvert U de C, vérifie les équivalences suivantes.

A n'a que des points isolés ssi A est localement fini dans U ssi l'intersection de A avec tout compact de U est finie ssi (A est discrète et si infinie alors toute suite de A tend vers l'infini ou le bord de U).

Une fonction **méromorphe** sur un ouvert U de C est une fonction holomorphe sur l'ouvert sauf sur un ensemble de points isolés, constitué uniquement de pôles de la fonction. On note $\boldsymbol{M(U)}$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur U. Une fonction méromorphe sur U n'est donc pas nécessairement définie sur tout U. Toute fonction holomorphe sur un ouvert y est méromorphe. $H(U) \subseteq M(U)$

Caractérisation : Une fonction d'un ouvert de C vers C est méromorphe sur l'ouvert ssi elle est localement le quotient de deux fonctions holomorphes (locales).
L'ensemble $(M(U), +, \times)$ des fonctions méromorphes sur un ouvert connexe de C est un corps.

IV. Quelques mots sur la sphère de Riemann.

La **sphère de Riemann notée** $\widehat{\boldsymbol{C}}$ est $C \cup \{\infty\}$ muni de la topologie dont les ouverts sont réunions de disques ouverts de C et/ou de ($\{\infty\}$ union complémentaires de disques fermés).
C'est le compactifié d'Alexandroff de l'espace topologique localement compact C munie de la topologie usuelle.
La sphère de Riemann est un espace topologique compact homéomorphe à la sphère.

IV.1. Fonctions méromorphes sur $\widehat{\boldsymbol{C}}$

Les notions de fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\hat{C} \setminus \{\infty\}$ sont identiques à celles dans C.
Si U est l'ouvert complémentaire d'un disque fermé dans la sphère de Riemann, on dit qu'une fonction définie sur l'ouvert est **holomorphe (resp méromorphe) en** ∞ si $z \mapsto f(z^{-1})$ est holomorphe (resp méromorphe) en 0.
Toute fonction polynomiale complexe est méromorphe en ∞ donc sur la sphère de Riemann.
Une fraction rationnelle complexe est holomorphe en ∞ ssi son degré est négatif ou nul ssi $degP \leq degQ$.
Une fraction rationnelle complexe est méromorphe sur la sphère de Riemann.
La fonction exponentielle n'est pas méromorphe en ∞. $z \mapsto e^{z^{-1}}$ admet une singularité essentielle en 0.
On peut considérer une fonction d'un ouvert de la sphère de Riemann a valeur dans C, comme une fonction a valeurs dans la sphère de Riemann. Dans ce cas on peut prolonger la fonction par continuité en tout point dont l'image tend en module vers l'infini, en posant que l'image du point est ∞. Par exemple les fonctions méromorphes peuvent se prolonger en chacun de leur pôles l'image d'un pôle étant ∞.
Les fonctions holomorphes de la sphère de Riemann dans C sont les fonctions constantes. (Liouville)
Une fonction méromorphe de la sphère de Riemann dans C admet un nb fini de pôles et de zéros.
Caractérisation des fonctions méromorphes sur la sphère de Riemann. Les fonctions méromorphes sur la sphère de Riemann sont exactement les fonctions rationnelles a coefficients complexes.
Une fonction méromorphe sur la sphère de Riemann possède autant de pôles que de zéros (comptés avec multiplicité) sur la sphère de Riemann.

IV.2. Résidu à l'infini.

Le **résidu d'une fonction** méromorphe sur U un voisinage de ∞ épointé, **en** ∞ est $\boldsymbol{Res_\infty(f)} = -Res_0\left(\frac{f(z^{-1})}{z^2}\right)$

On a $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)dz = Res_\infty(f)Ind_\gamma(\infty)$ si f est <u>holomorphe</u>, et γ chemin dans le disque épointé de ∞

Chapitre 26. Espaces de fonctions holomorphes et méromorphes.

I. Problèmes de convergence

I.1. Suites de fonctions holomorphes

Soit une suite de fonctions continues d'un ouvert de C vers C qui converge uniformément sur U ou

seulement sur tout compact de U, alors la fonction limite est continue sur l'ouvert.
Soit une suite de fonctions holomorphes d'un ouvert de C vers C qui converge uniformément sur U ou seulement sur tout compact de U, alors la fonction limite f est holomorphe sur l'ouvert, de plus sa dérivée f' est limite uniforme sur tout compact de la suite des dérivées $(f_n')_n$. (vient de Morera).
Puisque holomorphie entraine infinie dérivabilité on a aussi par récurrence immédiate que la fonction limite dérivée k fois est la limite uniforme sur tout compacte de la suite des dérivées k-ièmes.
Conditions supplémentaires :
Si l'ouvert est connexe, et si tous les f_n sont sans zéros, alors la fonction limite f est soit identiquement nulle, soit sans zéros.
Si l'ouvert est connexe, et si tous les f_n sont injectives, alors la fonction limite est soit constante, soit injective.

I.2. Topologie de la convergence compacte.

Une suite de compacts d'un ouvert est **exhaustive** si sa réunion est l'ouvert, et chaque compact de la suite est inclus dans l'intérieur du suivant.
Tout ouvert de C admet une suite exhaustive de compacts.
Pour un compact fixe dans un ouvert admettant une suite exhaustive de compacts, le compact fixe sera inclus à partir d'un certain rang dans tous les compacts de la suite exhaustive de rang supérieur.
On note $\|f\|_K = \sup_{z\in K}|f(z)|$ la semi-norme uniforme sur $C(U,C)$ avec K un compact fixe dans U.
Sur $C(U,C)$, la convergence uniforme sur tout compact se ramène à la convergence uniforme pour tout compact de rang fixé d'une suite exhaustive fixe de compacts. $\forall p\ \ \|f_n - f\|_{Kp} \to_{n\to\infty} 0$
L'application $d : C(U)^2 \to R_+$ tel que $d(f,g) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2^p}\inf\big(1, \|f-g\|_p\big)$ est une distance sur $C(U)$ invariante par translation : **la distance de la convergence compacte.** $d(f_n, f) \to 0$ est equivalent a dire que $f_n \to f$ sur tout compact.
$\big\{V_{K,\varepsilon} = \{f \in C(U) |\ \|f\|_K < \varepsilon\} : K \text{ compact de } U, \varepsilon > 0\big\}$ système fondamental de voisinages de $0_{C(U)}$ pour la topologie de la convergence compacte.
Dans la topologie de la convergence compacte, la somme et le produit sont des applications continues de $C(U)\times C(U) \to C(U)$. (penser a la caractérisation séquentielle).
L'espace H(U) des fonctions holomorphes sur U est un sous-espace topologique fermé de C(U) muni de la topologie de la convergence compacte. L'application dérivation est une application continue de $H(U) \to H(U)$.
L'espace C(U) muni de la distance de la convergence compacte est un espace métrique complet.
Le sous-espace $H(U)$ est fermé donc complet.

I.3. Compacité

On parle de parties de fonctions. Penser aux formes séquentielles pour des parties dénombrables.
Pour la topologie de la convergence compacte sur $C(U)$ ou U est un ouvert de C, une partie A de $C(U)$ est bornée, ssi $\forall K$ compact de U $\exists M_K\ \forall f \in A\ \|f\|_K \le M_K$
Une suite de $C(U)$ est bornee ssi $\forall K$ compacte de $U\ \exists M_K\ \forall n \in N\ \ \|f_n\|_K \le M_K$
Rappel. Une partie A de l'espace des fonctions continues entre deux espaces métriques $C(E,F)$ est **équicontinue en un point** $x \in E$ si $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall y \in B(x,\delta)\ \forall f \in A\ f(y) \in B(f(x),\varepsilon)$ ou encore $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \ \forall f \in A\ f\big(B(x,\delta)\big) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$. Le delta ne dépend pas de f.
Une partie est **équicontinue** sur E si elle l'est en tout point de E.

Théorème d'Ascoli. Dans l'espace des fonctions continues d'un compact U vers C, une partie A de cet espace est relativement compacte ssi elle est équicontinue et $\forall z \in U\ A_z = \{f(z) : f \in A\}$ relativement compact.
Etrange : Dans le Marco L3 U est ouvert qq. et la condition 2 est :$\forall z \in U\ \exists M \in R\ \forall f \in A\ |f(z)| \leq M$
Une partie compacte de fonction holomorphes sur un ouvert de C, est fermée bornée dans $H(U)$ au sens de la semi-norme sur un compact fixe à l'avance de l'ouvert.
Réciproque Montel. Une partie compacte de fonction holomorphes sur un ouvert de C, est fermée bornée dans H(U) muni de la topologie de la convergence compacte.
Th. de Montel. Une partie de fonction holomorphes sur un ouvert de C, bornée dans $H(U)$ muni de la topologie de la convergence compacte, est alors relativement compacte.
Th. de Montel forme seq. utile. Une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert C, bornée uniformément sur tout compact de l'ouvert, admet une suite extraite qui converge uniformément sur tout compact de l'ouvert vers une fonction holomorphe sur U.
Caractérisation. Une partie de fonction holomorphes sur un ouvert de C, est fermée bornée ssi elle est compacte dans C(U) muni de la topologie de la convergence compacte.

II. Séries de fonctions holomorphes et méromorphes.

II.1. Séries de fonctions holomorphes.

Soit une série de fonctions continues d'un ouvert de C vers C qui converge uniformément sur U ou seulement sur tout compact de U, alors la fonction somme est continue sur l'ouvert.
Soit une série de fonctions holomorphes d'un ouvert de C vers C qui converge uniformément sur U ou seulement sur tout compact de U, alors la fonction somme est holomorphe sur l'ouvert, de plus sa dérivée est somme des dérivées $(f_n')_n$, la série des dérivées CU sur tout K. On peut intervertir somme et dérivation. Si la série des fonctions CN sur tout compact, alors la série des dérivées CN sur tout compact.
Puisque holomorphie entraine infinie dérivabilité on a aussi par récurrence immédiate que la somme dérivée k fois est somme de la suite des dérivées k-ièmes, la série des dérivées k-ièmes CU (resp CN) sur tout compact.
Si une série de fonctions holomorphes sur un ouvert de C, voit sa série de modules CU sur tout K, alors la série de fonctions sans module CN sur tout K.

II.2. Séries de fonctions méromorphes.

Les séries de fonctions méromorphes nécessitent des défs particulières, car pas définies partout.
Soit une suite de fonctions méromorphes sur un ouvert, La série associée est dite uniformément convergente sur tout compact de U si pour tout compact K de U :
1. il existe un entier N_K tel que $\forall n \geq N_K$ la fonction f_n n'a pas de pôles dans K.
2. La série de fonctions tronquée $\sum_{n \geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K.
Dans ce cas on a $(f_n)_{n \geq N_K}$ holomorphes, et donc $\sum_{n \geq N_K} f_n$ série de somme holomorphe sur l'ouvert.
et $\forall z \in K\ f(z) = \sum_{n=0}^{N_K - 1} f_n(z) + \sum_{n=N_K}^{\infty} f_n(z)$ ou la 1^{ere} somme est méromorphe, la 2^{e} holomorphe.
Théorème : Soit une <u>suite</u> de fonctions méromorphes sur un ouvert uniformément convergente sur tout compact de l'ouvert U. Alors on a les conséquences suivantes :
1. La réunion des pôles $P = \cup_n P_n$ est un ensemble fermé et discret, tel que pour tout pole $p \in P$, on a $ord_p(f) \leq \max_{n \in N} ord_p(f_n)$
2. La série de terme général $f_n(z)$ converge absolument pour tout $z \in U \setminus P$

3. La somme de la serie de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est definie sur $U \setminus P$ et meromorphe sur U.
4. La derivee de la somme definie sur $U \setminus P$ est la somme de la série des dérivées.

III. Produits infinis de fonctions

III.1. Produits infinis de nb complexes

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ on appelle **produit partiel de $(\boldsymbol{u_n})$** la suite $(P_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k$

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ on appelle **produit infini de $(\boldsymbol{u_n})$** noté $\boldsymbol{\prod_{n\geq 0} u_n}$ la donnée de (u_n) et de sa suite associée des produits partiels.

Soit un produit infini complexe $\prod_{n\geq 0} u_n$, si la suite des produits partiels $(P_n)_n$ admet une limite on appelle **résultat du produit infini de $(\boldsymbol{u_n})$** noté $\boldsymbol{\prod_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} P_n = P}$

On peut également étendre ces définitions au cas $(u_n)_{n\geq n_0}$

$\boldsymbol{\prod_{n\geq 0} u_n}$ **est faiblement convergent** si $\prod_{n=0}^{\infty} u_n$ existe et est fini.

$\boldsymbol{\prod_{n\geq 0} u_n}$ **est strictement convergent** si d'une part, à partir d'un certain rang N_0, u_n n'est plus jamais nul, et d'autre part si le résultat du produit infini au-delà de ce rang $\prod_{n=N_0}^{\infty} u_n$ existe, est fini, <u>et non nul</u>.

La stricte convergence implique la faible convergence. Il reste possible que $\prod_{n=0}^{\infty} u_n = 0$ si $u_{N_1<N_0} = 0$.

$\prod_{n\geq 0} u_n$ faiblement convergent $\Rightarrow \prod_{n=0}^{\infty} u_n \in \mathbb{C}$

$\prod_{n\geq 0} u_n$ strictement convergent $\Rightarrow \prod_{n\geq 0} u_n$ faiblement convergent et donc $\prod_{n=0}^{\infty} u_n \in \mathbb{C}$

Si $\prod_{n\geq 0} u_n$ est strictement convergent, alors $\prod_{n=0}^{\infty} u_n = 0$ si et seulement $\exists n\ u_n = 0$

Si $\prod_{n=0}^{\infty} u_n \neq 0$ alors $\prod_{n\geq 0} u_n$ est strictement convergent. Réciproque vraie ssi $\forall n\ u_n \neq 0$

Si $\forall n\ u_n \neq 0$ alors $\prod_{n\geq 0} u_n$ faiblement convergent $\Leftrightarrow \prod_{n=0}^{\infty} u_n \in \mathbb{C}$

Si $\forall n\ u_n \neq 0$ alors $\prod_{n\geq 0} u_n$ strictement convergent $\Leftrightarrow \prod_{n=0}^{\infty} u_n \in \mathbb{C}^*$

$\prod_{n\geq 0} u_n$ strictement convergent implique que la suite (u_n) tend vers 1

Remarque**:** En général on étudie surtout la notion de stricte convergence. A cause de la variété des terminologies de produit convergent dans la littérature on reste sur la qualification moins ambigüe de convergence stricte. Sous l'hypothèse $\forall n\ u_n \neq 0$ les différentes terminologies s'accordent généralement. On est bien souvent incité à se placer dans l'hypothèse qu'aucun terme n'est nul car les résultats peuvent de toute façon être montrés sans perte de généralité sous cette hypothèse.

La dernière propriété nous incite à privilégier l'écriture $\prod_{n\geq 0} 1 + u_n$ car la condition nécessaire pour la stricte convergence sera ainsi $u_n \to 0$ ce qui évoque un certain parallélisme avec les séries.

$\boldsymbol{\prod_{n\geq 0} 1 + u_n}$ **absolument convergent** signifie $\prod_{n\geq 0} 1 + |u_n|$ converge strictement

$\boldsymbol{\prod_{n\geq 0} 1 + u_n}$ **commutativement convergent** signifie $\forall \sigma \in S_{\mathbb{N}}\ \prod_{n\geq 0} 1 + u_{\sigma(n)}$ converge strictement.

Condition nécessaire convergence stricte : $\prod_{n\geq 0} 1 + u_n$ strictement convergent implique $u_n \to 0$

Caractérisation convergence stricte : $\prod_{n\geq 0} 1 + u_n$ strictement convergent ssi $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall\ m \geq n \geq N\ |(\prod_{k=n}^{m} 1 + u_k) - 1| = \left|\frac{P_m}{P_n} - 1\right| < \varepsilon$

Inégalité théorique utile 1. $\quad |(\prod_{k=0}^{n} 1 + u_k) - 1| \leq (\prod_{k=0}^{n} 1 + |u_k|) - 1$

Inégalité théorique utile 2. $\quad 1 \leq (\prod_{k=0}^{n} 1 + |u_k|) \leq e^{\sum_{k=0}^{n} |u_k|}$

Théorème 1 stricte convergence : On peut transformer un produit infini en série plus facile à étudier.

Dans l'hypothèse où $Log(1 + u_n)$ défini pour tout n. (on suppose $\forall n\ u_n \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, -1]$)

$\prod_{n\geq 0} 1 + u_n$ strictement convergent $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} Log(1 + u_n)$ convergente

Dans ce cas $Log(\prod_{n=0}^{\infty} 1 + u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} Log(1 + u_n) + 2i\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

c'est à dire $\prod_{n=0}^{\infty} 1 + u_n = \exp(\sum_{n=0}^{\infty} Log(1 + u_n))$

Dans le cas réel on a $k = 0$. Si les u_n sont de signes constant à partir d'un certain rang, on peut rajouter l'équivalence $\sum_{n\geq 0}\log(1+u_n)$ convergente ⇔ $\sum_{n\geq 0}u_n$ convergente (car $\log(1+x)\sim x$)

Théorème 2 convergence absolue : D'une part, dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour les séries comme pour les produits infinis, convergence absolue et commutative sont équivalentes, et si elles ont lieu, le résultat du produit respectivement de la somme est indépendant de la permutation. D'autre part dans l'hypothèse où $Log(1+u_n)$ défini pour tout n. ($\forall n\ u_n \in \mathbb{C}\setminus]-\infty,-1]$), on a les équivalences suivantes :
$\prod_{n\geq 0}1+u_n$ absolument cvg ⇔ $\sum_{n\geq 0}Log(1+u_n)$ absolument cvg ⇔ $\sum_{n\geq 0}u_n$ absolument cvg

III.2. Produits infinis de fonctions.

Soit un produit de fonctions supposées continues sur un ouvert U de C, alors $\boldsymbol{\prod_{n\geq 0}1+f_n}$ **converge normalement sur tout compact de U** signifie : $\sum_{n\geq 0}f_n$ converge normalement sur tout compact de U ou ce qui est équivalent : $(f_n)_n$ converge uniformement vers 0 sur tout compact de U et $\sum_{n\geq 0}Log(1+f_n)$ converge normalement sur tout compact de U.

La convergence normale sur tout compact entraine donc la convergence absolue et commutative en tout point de $\prod_{n\geq 0}1+f_n$, $\sum_{n\geq 0}Log(1+f_n)$, $\sum_{n\geq 0}f_n$.

Théorème. Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions holomorphes d'un ouvert U vers C, telle que $\prod_{n\geq 0}1+f_n$ converge normalement sur tout compact de U, alors $\prod_{n\geq 0}1+f_n$ converge absolument vers une fonction $f=\prod_{n=0}^{\infty}1+f_n$ holomorphe sur U, de plus l'ensemble des zéros de f est la réunion des zéros des $1+f_n$ et la multiplicité d'un zéro de f est la somme des multiplicités de ce zéro pour chaque $1+f_n$.
Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions holomorphes d'un ouvert U vers C, telle que $\prod_{n\geq 0}1+f_n$ converge normalement sur tout compact de U, alors la série de fonctions méromorphes $\sum_{n\geq 0}\frac{(1+f_n)'}{1+f_n}$ CN sur tout K et $\frac{f'}{f}=\frac{(\prod_{n=0}^{\infty}1+f_n)'}{(\prod_{n=0}^{\infty}1+f_n)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+f_n)'}{1+f_n}$.

IV. Interpolation de fonctions holomorphes et méromorphes.

IV.1. Le théorème d'interpolation de Mittag-Leffler.*

Si on fixe un ensemble fermé discret de points $A=\{z_1,\dots\}$ d'un ouvert U de C et on fixe un polynôme complexe pour chacun de ces points $P_i\in C[X]$. Alors il existe une fonction méromorphe sur l'ouvert dont l'ensemble des pôles est exactement cet ensemble fixe de points A, et dont la partie polaire en chacun de ces points $z_i\in A$ est $P_i\left(\frac{1}{z-z_i}\right)$.

IV.2. Le théorème d'interpolation de Weierstrass.*

Si on fixe un ensemble fermé discret de points $A=\{z_1,\dots\}$ d'un ouvert U de C et on fixe un entier strictement positif pour chacun de ces points $m_i=m(z_i)\in N^*$. Alors il existe une fonction holomorphe sur l'ouvert dont les zéros sont exactement les points de l'ensemble A et ont exactement la multiplicité m_i associée a chaque point.

Théorème. Toute fonction méromorphe sur un ouvert s'exprime globalement comme quotient de fonctions holomorphes sur l'ouvert tout entier. $\forall h\in M(U)\ \exists f,g\in H(U)\ h=\frac{f}{g}$.

Conséquence interpolations*. Soit A un ensemble discret de points d'un ouvert connexe de C. Pour chaque $a\in A$ on fixe une famille de complexes de taille quelconque $(w_{a,0},\dots,w_{a,k_a})\in C^{k_a}$ avec $k_a\in N$. Alors il existe une fonction f holomomorphe sur l'ouvert tel que $\forall a\in A\ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}=w_{a,n}$ pour tout rang $n\leq k_a$. Autrement dit on peut fixer la valeur des dérivées en chaque point jusqu'à un ordre fini voulu.

IV.3. Conséquences algébriques.

Le corps des fonctions méromorphes d'un ouvert connexe $M(U)$ est le corps de fraction de l'anneau intègre $H(U)$.
Tout idéal de $H(U)$ engendre par un nombre fini de fonctions est un ideal principal.* On dit que $H(U)$ est **un anneau de Bézout.**
Théorème de représentation conforme. (TODO à vérifier)
Tout domaine simplement connexe différent de C ? est biholomorphe avec C ?.