Réduction des endomorphismes

Un **endomorphisme** est un morphisme d'espaces vectoriels d'un Kev dans lui-même.

Un **sous-espace** d'un Kev est **stable par un endomorphisme** du Kev, ssi l'image du sous-espace par l'endomorphisme est contenue dans le sous-espace. $u(F) \subseteq F$

Le noyau et l'image d'un endomorphisme sont des sous-espaces stables par l'endomorphisme.

L'**endomorphisme induit sur un sous-espace** d'un Kev par un endomorphisme du Kev est l'endomorphisme défini uniquement sur le sous-espace par restriction. $\boldsymbol{u_F} = u_{|F}$

Pour deux endomorphismes qui commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

Pour un sous-espace F de dimension r d'un Kev E de dimension n, soit B_F base de F completee en une base B de E de sorte que $B = (B_F, e_{r+1}, \dots, e_n)$, alors $[u]^B = \begin{bmatrix} [u_F]^{B_F} & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$

Réciproquement, lorsque la matrice d'un endomorphisme d'un Kev E de dimension finie n, s'écrit dans une base $B = (e_1, \dots, e_r)$ sous la forme $[u]^B = \begin{bmatrix} A & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$ avec $A \in M_r(K)$, alors $F \coloneqq Vect(e_1, \dots, e_r)$ est un sous-espace de E stable par u, dont $B_F \coloneqq (e_1, \dots, e_r)$ est une base et $A = [u_F]^{B_F}$.

Pour p sous-espaces d'un Kev de dimension n tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ avec une base adaptee a la décomposition $B = B_1 \vee \dots \vee B_p$, alors $[u]^B = \begin{bmatrix} \left[u_{F_1}\right]^{B_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left[u_{F_2}\right]^{B_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left[u_{F_p}\right]^{B_p} \end{bmatrix}$

Réciproquement, lorsque la matrice d'un endomorphisme d'un Kev E de dimension finie n, s'écrit dans une base $B = (e_1, \dots, e_r) = B_1 \vee \dots \vee B_p$ sous la forme $[u]^B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_p \end{bmatrix}$ avec $A_i \in M_{|B_i|}(K)$, alors pour tout i, $F_i \coloneqq Vect(B_i)$ est un sous-espace de E stable par u, dont B_i est une base et $A_i = \left[u_{F_i}\right]^{B_i}$, et de plus $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$

Notions générales en dimension quelconque.

Ayant fixe un Kev et un endomorphisme, on peut définir le **morphisme d'évaluation** $f_u: K[X] \to L(E): P \mapsto P(u)$. Ce morphisme est un morphisme de K-algèbre

La **sous-algèbre engendrée par un endomorphisme** est l'image du morphisme d'évaluation $\boldsymbol{K[u]} = Im(f_u) = \{P(u) : P \in K[X]\}$. C'est une K sous-algèbre abélienne de $(L(E), +, \times, \circ)$

L'**idéal annulateur d'un endomorphisme** est le noyau du morphisme d'évaluation $\boldsymbol{I_u} = Ker(f_u) = \{P \in K[X] \mid P(u) = 0\}$.

Pour un endomorphisme, son idéal annulateur est non trivial ($I_u \neq \{0\}$) ssi sa sous-algèbre engendrée est de dimension finie, auquel cas on dit qu'il est **algébrique**. Lorsque le Kev est de dimension finie, c'est toujours le cas. L'idéal annulateur d'un endomorphisme algébrique est un idéal de $K[X]$ principal donc admet un **polynôme minimal** $\boldsymbol{\pi_u}$ tel que $I_u = \langle \pi_u \rangle$.

Le polynôme minimal d'un endomorphisme algébrique est toujours unitaire et de son degré est égal à la dimension de la sous-algèbre engendrée par l'endomorphisme. $\deg \pi_u = \dim K[u]$ et $\left(1, u, \dots, u^{d-1}\right)$ est une base de $K[u]$

L'inverse d'un endomorphisme algébrique inversible, s'exprime comme un polynôme de l'endomorphisme initial. $\forall u \in GL(E)\ \ u^{-1} \in K[u]$

Pour un endomorphisme u fixe d'un Kev, le noyau et l'image de $P(u)$ sont stable par u pour n'importe quel polynôme sur K.

Lemme des noyaux. Pour un endomorphisme u d'un Kev, et r polynômes sur K premiers entre eux 2 à 2, on a $\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker P_r(u)$ avec $P = P_1 \times \ldots \times P_r$

Si de plus, le produit des polynômes P annule u, on peut écrire E comme la somme directe des noyaux car $E = \ker P(u)$

Une **droite vectorielle d'un Kev** est un ensemble de la forme $Kx = \{\lambda x \in E : \lambda \in K\}$ avec $x \in E, x \neq 0_E$

Pour un vecteur x <u>non nul</u> d'un Kev, et un scalaire $\lambda \in K$, on dit que $\boldsymbol{x}$ **est un vecteur propre associé à la valeur propre** $\boldsymbol{\lambda}$ **pour l'endomorphisme** $\boldsymbol{u}$ ssi $u(x) = \lambda x$.

Un vecteur propre ne peut être associé qu'à une seule valeur propre. $u(x) = \lambda x = \lambda' x \Rightarrow \lambda = \lambda'$

Une même valeur propre peut être associée à plein de vecteurs propres. $\forall \alpha \in K\ u(\alpha x) = \lambda(\alpha x)$

Un endomorphisme peut généralement avoir plusieurs, une seule, ou aucune valeur propre.

Un vecteur non nul d'un Kev est un vecteur propre d'un endomorphisme ssi la droite vectorielle engendrée par ce vecteur est stable par l'endomorphisme. $u(Kx) \subset Kx$

Un endomorphisme admet un vecteur propre ssi il admet une valeur propre ssi il stabilise au moins une droite vectorielle.

Un scalaire λ est une valeur propre d'un endomorphisme u ssi $u - \lambda Id_E$ n'est pas injectif ssi $\ker u - \lambda Id_E \neq \{0_E\}$

Dire qu'un endomorphisme est injectif revient donc à dire que 0 n'en est pas une valeur propre.

Le **sous-espace propre associé à une valeur propre** $\boldsymbol{\lambda}$ **d'un endomorphisme** $\boldsymbol{u}$ **d'un Kev** $\boldsymbol{E}$ est l'ensemble $\boldsymbol{E_\lambda(u)} = \ker u - \lambda Id_E$. C'est un sous-espace de E stable par l'endomorphisme.

Un sous-espace propre n'est jamais trivial ($\neq \{0\}$) donc est de dimension ≥ 1.

Pour un même endomorphisme, un nombre fini de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes 2 à 2, sont toujours en somme directe $\sum_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}(u)$

Pour un même endomorphisme, un nombre fini de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes 2 à 2, forment toujours une famille libre.

Pour deux endomorphismes qui commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Une valeur propre d'un endomorphisme induit sur un sous-espace stable, est toujours une valeur propre de l'endomorphisme initial. La réciproque est fausse.

Le sous-espace propre associé à une valeur propre donnée d'un endomorphisme induit, s'obtient en intersectant le sous-espace propre de l'endomorphisme initial correspondant, avec le sous-espace sur lequel l'endomorphisme est induit. λ vp de $u_F \Rightarrow E_\lambda(u_F) = E_\lambda(u) \cap F$

Si λ est une valeur propre de u alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$ pour tout polynôme $P \in K[X]$.

Les valeurs propres d'un endomorphisme sont donc racines de tout polynôme annulateur de cet endomorphisme.

Donc dans le cas algébrique il ne peut y en avoir qu'un nombre fini ou dénombrable.

Pour un endomorphisme, les 2 opérations : induire sur un sous-espace stable, ou appliquer un polynôme, commutent, c'est-à-dire $P(u)_F = P(u_F)$ pour F sev stable de E.

Pour un endomorphisme algébrique, l'endomorphisme induit sur un sous-espace stable est encore algébrique et dans ce cas le polynôme minimal de l'endomorphisme induit divise celui de l'endomorphisme initial. $\pi_{u_F}|\pi_u$

Réduction en dimension finie.

On se place désormais dans un Kev E de dimension finie $n \in N$.

Le **spectre d'un endomorphisme** (relativement au corps K) est l'ensemble $\boldsymbol{Sp_K(u)}$ de ses valeurs propres dans K.

Pour une extension de corps L: K telle que E reste un L e.v., le spectre ne peut que grandir $Sp_K(u) \subseteq Sp_L(u)$

Un scalaire $\lambda \in K$ est une valeur propre d'un endomorphisme $u \in L(E)$ ssi $u \in Sp_K(u)$ ssi $u - \lambda Id_E$ non injectif ssi $\ker u - \lambda Id_E \neq \{0\}$ ssi $u - \lambda Id_E$ non bijectif ssi $\det u - \lambda Id_E = 0$

Un hyperplan $H = \ker \phi$ est stable par un endomorphisme $u \in L(E)$ ssi $\exists \lambda \in Sp_K(u)\ \phi \circ u = \lambda \phi$

Réduction matricielle.

Soit $A = [u]^B \in M_n(K)$ la matrice d'un endomorphisme $u \in L(E)$ dans une base fixée B du Kev E de dimension n.

On écrira X pour designer la matrice colonne d'un vecteur $x \in E$ dans B, $X = [x]^B \in M_{n,1}(K)$

Pour $X \neq 0$, et un scalaire $\lambda \in K$, on dit que $\boldsymbol{X}$ **est un vecteur propre associé à la valeur propre** $\boldsymbol{\lambda}$ **pour la matrice** $\boldsymbol{A}$ ssi $AX = \lambda X$ ssi $[u]^B[x]^B = \lambda[x]^B$ ssi $u(x) = \lambda x$ ssi x vecteur propre associé à la valeur propre λ pour l'endomorphisme u.

Le **spectre d'une matrice** $\boldsymbol{A}$ est $\boldsymbol{Sp_K A} = \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ valeur propre de } A\} = Sp_K(u)$

Le **sous-espace propre associé à une valeur propre** $\boldsymbol{\lambda}$ **d'une matrice** $\boldsymbol{A}$ est l'ensemble $\boldsymbol{E_\lambda(A)} = \ker A - \lambda I_n \approx E_\lambda(u)$.

Un scalaire $\lambda \in K$ est une valeur propre d'une matrice A ssi $\lambda \in Sp_K(A)$ ssi $\ker A - \lambda I_n \neq \{0\}$ ssi $\det A - \lambda I_n = 0$ ssi $A - \lambda I_n \notin GL_n(K)$

Pour un polynôme $P \in K[X]$ et une matrice $A \in M_n(K)$ on peut définir $\boldsymbol{0(A)} = 0_n, \boldsymbol{\lambda(A)} = \lambda I_n, \boldsymbol{P(A)} = \sum_{k=0}^{p} p_k A^k \in M_n(K)$. Définitions analogues pour $u \in L(E)$.

Le **polynôme caractéristique d'une matrice** est défini par $\boldsymbol{P_A} = \det(A - XI_n) \in K[X]$, parfois on prend une autre convention $\boldsymbol{\chi_A} = \det(XI_n - A)$ mais les résultats sont analogues.

Le polynôme caractéristique d'une matrice représentative d'un endomorphisme $u \in L(E)$ est indépendant de la base choisie. Le **polynôme caractéristique d'un endomorphisme** $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L(E)}$ est donc cet unique polynôme $\boldsymbol{P_u} \in K[X]$ tel que dans n'importe quelle base B, $P_u = P_{[u]^B}$

Attention a priori $\det u - XId_E$ n'est pas défini. On définirait de même $\chi_u = \chi_{[u]^B}$.

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Les propriétés suivantes ont généralement une version matricielle analogue.

Le degré du polynôme caractéristique est égal à la dimension de l'espace E c'est-à-dire la taille de la matrice. $\deg P_u = n = \dim(E)$

Les valeurs propres d'un endomorphisme sont les racines de son polynôme caractéristique. $\lambda \text{ v.p.} \Leftrightarrow P_u(\lambda) = 0$

L'ordre de multiplicité $\boldsymbol{m_\lambda(u)} \in N^*$ d'une valeur propre λ d'un endomorphisme u est son ordre en tant que racine du polynôme caractéristique.

Un endomorphisme admet donc au plus $n = \dim E$ valeurs propres distinctes. $0 \leq |Sp_K(u)| \leq n$

Lorsque le corps de base est algébriquement clos, et l'espace est de dimension ≥ 1, un endomorphisme admet au moins une valeur propre. $Sp_K(u) \neq \emptyset$

Pour un R espace vectoriel de dimension impaire, un endomorphisme admet au moins une valeur propre. $Sp_R(u) \neq \emptyset$
Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit sur un sous-espace stable divise celui de l'endomorphisme initial. $P_{u_F} \mid P_u$
Un endomorphisme est toujours algébrique (en dimension finie) et admet toujours un polynôme minimal et on a $\pi_{u_F} | \pi_u$ et on a toujours $\deg \mu \leq n$
La dimension d'un sous-espace propre est toujours inferieure à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante. $\forall \lambda \in Sp_K(u)\ 1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$
Pour p sous-espaces stables par un endomorphisme $u \in L(E)$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ alors le polynôme caractéristique de u s'exprime comme le produit des polynômes caractéristiques induits sur chaque espace. $P_u = P_{u_{F_1}} \times \ldots \times P_{u_{F_p}}$
Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme a des termes de degrés extrémaux simples :
$P_u = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} tr(u) X^{n-1} + \cdots + \det u$
Avec la convention alternative $\chi_u = X^n - tr(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u$, χ_u unitaire.
Ecrivant $\beta_1, \ldots, \beta_n$ les coeffs de sorte que $tr(u) = \beta_0, \det u = \beta_n$, il s'avère qu'en fait chaque β_k est la somme des mineurs principaux (inter de lignes et colonnes de mêmes indices) de $[u]^B$ d'ordre k.
Si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est scindé, on peut écrire $P_u = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ avec $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs propres de l'endomorphisme comptées avec leur multiplicité.
Dans ce cas $\chi_u = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n$, avec $\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k}$ le k-ieme polynôme symétrique élémentaire. De plus comme $K[X_1, \ldots, X_n]^{G_n} = K[S_1, \ldots, S_n]$, $\forall k\ \ \sigma_k$ s'exprime comme un polynôme en sommes de newton des racines càd $\sigma_k \in K[tr(u), tr(u^2), \ldots, tr(u^n)]$.
La trace d'un endomorphisme de polynôme caractéristique scindé, est la somme de ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité. $tr(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
Le déterminant d'un endomorphisme de polynôme caractéristique scindé, est le produit de ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité. $\det u = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$
Une **matrice compagnon** est une matrice de la forme : $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in M_n(K)$ ou bien de la forme transposée.
Le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon est $P_A = (-1)^n (X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0)$ autrement dit $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$. Idem pour A^T
Cayley Hamilton. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est un polynôme annulateur de cet endomorphisme. $P_u(u) = 0$
Le polynôme minimal d'un endomorphisme divise son polynôme caractéristique. $\pi_u | P_u$ cad $P_u \in \langle \pi_u \rangle$
Généralement $1 \leq \deg u = \dim K[u] \leq \deg P_u = n = \dim E$
$\forall u \in GL(E)\ \ u^{-1} \in K[u]$
<u>Les</u> valeurs propres d'un endomorphisme c'est à dire <u>les</u> racines de son polynôme caractéristique, sont aussi <u>les</u> racines de son polynôme minimal. λ v.p. $\Leftrightarrow P_u(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \pi_u(\lambda) = 0$
Rappel : On note $\boldsymbol{m_\lambda(u)} \in N^*$ l'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ d'un endomorphisme u en

tant que racine du polynôme caractéristique.
On note $\boldsymbol{n_\lambda(u)} \in N^*$ l'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ d'un endomorphisme u en tant que racine du polynôme minimal. On a toujours $1 \leq n_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$

Diagonalisabilité.

On note $D_n(K)$ l'ensemble des matrices diagonales a coefficients dans K.
Un endomorphisme d'un Kev de dimension finie est dit **diagonalisable** ssi sa matrice représentative dans une certaine base est diagonale.
Une matrice est **diagonalisable** ssi elle est semblable à une matrice diagonale.
Dans une base quelconque B, u est diagonalisable ssi $[u]^B$ est diagonalisable.
Critères de diagonalisabilité. Un endomorphisme est diagonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé sur K et tout sous-espace propre a même dimension que l'ordre de multiplicité de sa valeur propre ssi l'espace est somme directe de tous les sous-espaces propres.
u diagonalisable $\Leftrightarrow P_u$ scindé sur K et $\forall \lambda \in Sp_K(u) \dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u) \Leftrightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in Sp_K(u)} E_\lambda(u)$
Lorsque le polynôme caractéristique est scindé a racines simples sur K, u est nécessairement diagonalisable, puisque $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u) = 1$. Réciproque fausse (prendre l'identité).
Un endomorphisme est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur K ssi le polynôme minimal de l'endomorphisme π_u est scindé a racines simples sur K.
Tout endomorphisme induit sur un sous-espace stable par un endomorphisme diagonalisable, est également diagonalisable.
Les endomorphismes qui commutent (le commutant) avec un endomorphisme diagonalisable u, sont les endomorphismes laissant stable ses espaces propres (de u).
Tout projecteur est diagonalisable de valeurs propres dans $\{0,1\}$. $Sp_K(p) \subseteq \{0,1\}$
Toute symétrie est diagonalisable de valeurs propres dans $\{-1,1\}$. $Sp_K(s) \subseteq \{-1,1\}$
Tout élément d'un sous-groupe fini (multiplicatif) de $GL_n(C)$ ou $GL_C(E)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines n-iemes de l'unité.
Ex : Si $[u]^{B_0} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$ avec $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in C^n$ et B_0 base canonique de C^n, alors u diagonalisable $[u]^B = \begin{bmatrix} F(\omega_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F(\omega_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F(\omega_n) \end{bmatrix}$ dans la base $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \cdots & \omega_n^{n-1} \end{bmatrix}$ de C^n avec $F = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$, $\omega_k = e^{\frac{2i\pi k}{n}}$.
La **matrice de permutation circulaire** est $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ alors les puissances successives de J font monter les diagonales de 1. On a $J^p = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-p} \\ I_p & 0 \end{bmatrix}$, $J^{n-1} = J^T$ et $J^n = I_n$. J est diagonalisable et $Sp_C(J) = U_n$

Trigonalisabilité.

On note $T_n^S(K)$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients dans K.

Toute matrice est semblable à sa transposée.
Un endomorphisme d'un Kev de dimension finie est dit **trigonalisable** ssi sa matrice représentative dans une certaine base est triangulaire.
Une matrice est **trigonalisable** ssi elle est semblable à une matrice triangulaire.
Dans une base quelconque B, u est trigonalisable ssi $[u]^B$ est trigonalisable.
Critères de trigonalisabilité. Un endomorphisme est trigonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé sur K ssi le polynôme caractéristique de l'endomorphisme P_u est scindé sur K ssi le polynôme minimal de l'endomorphisme π_u est scindé sur K.
Sur un corps K est algébriquement clos, un endomorphisme est toujours trigonalisable.
Sur le corps de décomposition de P_u ou π_u, un endomorphisme est toujours trigonalisable.
Nilpotence.
Un endomorphisme u est dit **nilpotent** ssi $\exists k \in N^* \ u^k = 0$
Un endomorphisme u est dit **nilpotent d'indice k** $\in N^*$ ssi $u^k = 0$ et $u^{k-1} \neq 0$ avec la convention que l'endomorphisme nul est nilpotent d'indice 0.
Théorème. Un endomorphisme est nilpotent ssi sa matrice représentative dans une certaine base est triangulaire stricte (que des 0 dans la diagonale) ssi $P_u = (-1)^n X^n$ ssi $\chi_u = X^n$
Pour un endomorphisme nilpotent d'indice $n = \dim E$, on peut trouver $x \in E, x \neq 0$ tel que $\left(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\right)$ est une base de E. (il suffit de prendre x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$)
Codiagonalisabilité/Cotrigonalisabilité.
Une famille quelconque d'endomorphismes est dite **codiagonalisable** ssi il existe une même base dans laquelle la matrice représentative de chaque élément de la famille est diagonale.
Une famille quelconque d'endomorphismes tous diagonalisables, et qui commutent 2 à 2, est une famille codiagonalisable.
Une famille quelconque d'endomorphismes est dite **cotrigonalisable** ssi il existe une même base dans laquelle la matrice représentative de chaque élément de la famille est diagonale.
Une famille quelconque d'endomorphismes tous trigonalisables, et qui commutent 2 à 2, est une famille cotrigonalisable.
Commutant. Le commutant d'un endomorphisme $u \in L(E)$ est l'ensemble $\boldsymbol{\Gamma(u)}$ des endomorphismes qui commutent avec lui.
Le commutant d'un endomorphisme diagonalisable a pour dimension.
$\dim \Gamma(u) = \sum_{\lambda \in Sp_K(u)} (\dim E_\lambda(u))^2$
Pour un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres toutes distinctes, alors $\Gamma(u) = K[u]$
Pour un endomorphisme de polynôme minimal de degré $\dim E$, $\Gamma(u) = K[u]$. (vient de $\exists x, \pi_{u,x} = \pi_u$)
Indice et polynôme minimal. Soit E un K-ev de dimension finie $n \in N^*$.
Rappel : On note $\boldsymbol{m_\lambda(u)} \in N^*$ l'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ d'un endomorphisme u en tant que racine du polynôme caractéristique.
On note $\boldsymbol{n_\lambda(u)} \in N^*$ l'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ d'un endomorphisme u en tant que racine du polynôme minimal. On a toujours $1 \leq n_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$
Pour un endomorphisme $u \in L(E)$ on a toujours $\ker u \subseteq \ker u^2 \subseteq \ker u^3 \subseteq \cdots$.
Si $\ker u^k = \ker u^{k+1}$ alors $\forall n \geq k \ker u^n = \ker u^k$.
L'indice d'un endomorphisme $u \in L(E)$ est le plus petit $r \in N$ tel que $\ker u^r = \ker u^{r+1}$.

Tout endomorphisme d'un Kev de dim finie admet un indice r fini et donc on peut toujours ecrire
$\{0\} = \ker u^0 \subsetneq \ker u \subsetneq \cdots \subsetneq \ker u^r = \ker u^{r+1} = \ker u^{r+2} = \cdots = \bigcup_{k\in N} \ker u^k$
$0 = \dim\ker u^0 < \dim\ker u < \cdots < \dim\ker u^r = \dim\ker u^{r+1} = \dim\ker u^{r+2} = \cdots$
$E = \operatorname{im} u^0 \supsetneq \operatorname{im} u \supsetneq \cdots \supsetneq \operatorname{im} u^r = \operatorname{im} u^{r+1} = \operatorname{im} u^{r+2} = \cdots = \bigcap_{k\in N} \operatorname{im} u^k$
$n = \dim\operatorname{im} u^0 > \dim\operatorname{im} u > \cdots > \dim\operatorname{im} u^r = \dim\operatorname{im} u^{r+1} = \dim\operatorname{im} u^{r+2} = \cdots$
L'indice d'un endomorphisme nilpotent s'avère être l'indice de l'endomorphisme au sens général.
Un endomorphisme $u \in L(E)$ vérifie toujours $\ker f^r \oplus \operatorname{im} f^r = E$ pour son indice r.
En dimension finie, le polynôme minimal d'un endomorphisme de polynôme caractéristique scindé sur K est aussi scindé de mêmes racines, s'écrit $\pi_u(X) = \prod_{\lambda\in Sp(u)}(X-\lambda)^{n_\lambda(u)}$, et $\forall\lambda$, $n_\lambda(u)$ s'avère être l'indice de l'endomorphisme $u - \lambda Id_E$.
Ce théorème permet de calculer le polynôme minimal de u : on calcule le polynôme caractéristique puis pour toutes les racines on calcule l'indice de $f - \lambda id_E$ (en pratique les calculs peuvent être long).
Sous-espaces caractéristiques.
Le **sous-espace caractéristique associé à une valeur propre λ d'un endomorphisme u d'un Kev E <u>de dim finie</u>** est l'ensemble $\boldsymbol{N_\lambda(u)} = \ker\left((u-\lambda Id_E)^{n_\lambda(u)}\right)$. C'est un sous-espace de E stable par l'endomorphisme.
Pour tout $m \geq n_\lambda(u)$ $N_\lambda(u) = \ker((u-\lambda Id_E)^m)$ en particulier $N_\lambda(u) = \ker\left((u-\lambda Id_E)^{m_\lambda(u)}\right)$
Pour tout $m \leq n_\lambda(u)$ $\ker((u-\lambda Id_E)^m) \subseteq N_\lambda(u)$, en particulier $E_\lambda(u) \subseteq N_\lambda(u)$
Donc $N_\lambda(u) = \bigcup_{m\in N^*} \ker((u-\lambda Id_E)^m)$.
Pour un vecteur x <u>non nul</u> d'un Kev, et un scalaire $\lambda \in K$, on dit que **x est un vecteur propre <u>généralisé</u> associé à la valeur propre λ pour l'endomorphisme u** ssi $\exists k \in N^*$ $(u-\lambda Id_E)^k(x) = 0$ ssi $x \in N_\lambda(u)$
Un sous-espace caractéristique est de dimension $\dim N_\lambda(u) = m_\lambda(u)$.
Attention, il est possible que $\dim N_\lambda(u) = m_\lambda(u) > n_\lambda(u)$
Tout sous-espace caractéristique $F = \ker\left((u-\lambda Id_E)^{n_\lambda(u)}\right)$ est stable par l'endomorphisme u, et l'endomorphisme induit dessus u_F admet λ pour seule valeur propre, et $u_F = \lambda Id_F + n_F$ avec n_F nilpotent d'indice = $n_\lambda(u)$, $P_{u_F} = (-1)^p(X-\lambda)^{m_\lambda(u)}$, $\pi_{u_F} = (X-\lambda)^{n_\lambda(u)}$, u_F trigonalisable dans une base B_F, $[u_F]^{B_F} = \lambda I_p + N = \begin{bmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$
Décomposition de Dunford (additive). Un endomorphisme $u \in L(E)$ est trigonalisable
ssi P_u est scindé sur K ssi π_u est scindé sur K
ssi E est la somme directe des sous-espaces caractéristiques de l'endomorphisme $E = \bigoplus_{\lambda\in Sp_K(u)} N_\lambda(u)$
ssi il existe une base de E formée de vecteurs propres généralisés de l'endomorphisme
ssi u peut s'écrire comme la somme $u = d + n$ d'un endomorphisme diagonalisable d et d'un endomorphisme <u>nil</u>potent n qui commutent $dn = nd$. (*)
Dans ce cas :
d et n sont uniques (à satisfaire les 4 conditions de (*)).
d et n sont des polynômes en u.
on a $\sum_{\lambda\in Sp_K(u)} m_\lambda(u) = \dim E$, n est déterminé par $n \coloneqq u - d$, et d est déterminé par $d_{N_\lambda} = \lambda Id_{N_\lambda}$,

c'est-à-dire par $[d]^B = \begin{bmatrix} [\lambda_1 Id_{m_1}]^{B_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & [\lambda_r Id_{m_r}]^{B_r} \end{bmatrix}$, dans une base $B = B_1 \vee \dots \vee B_r$ adaptée a $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp_K(u)} N_\lambda(u)$. Et on peut donc écrire

$$[u]^B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = D_1 + N_1 \in M_{m_1}(K) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} \lambda_r & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{bmatrix} = D_r + N_r \in M_{m_r}(K) \end{bmatrix}$$

Avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u. N_i est nilpotente d'indice n_i, $1 \le n_i \le m_i$

$\pi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)^{n_\lambda(u)} = \prod_{i=1}^r (X-\lambda_i)^{n_i} = \prod_{\lambda \in Sp(u)} \pi_{u_{N_\lambda(u)}}$

$P_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X-\lambda)^{m_\lambda(u)} = \prod_{i=1}^r (X-\lambda_i)^{m_i} = \prod_{\lambda \in Sp(u)} P_{u_{N_\lambda(u)}}$

Décomposition de Dunford multiplicative. Un endomorphisme inversible $u \in GL(E)$ est trigonalisable ssi u peut s'écrire comme le produit $u = c \circ m$ d'un endomorphisme diagonalisable c et d'un endomorphisme <u>uni</u>potent m qui commutent $cm = mc$. (**)

ssi Dunford additif s'applique.

Dans ce cas : Les conséquences de Dunford additif s'appliquent

c et m sont uniques (à satisfaire les 4 conditions de (**)).

Les couples (d,n) et (c,m) sont liés par les relations : $d = c$ et $m = Id_E + d^{-1} \circ n$.

c et m sont des polynômes en u.

Préliminaires sous-espaces cycliques. Soit E un K ev

L'indice d'un endomorphisme $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L(E)}$ en un vecteur $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ est le plus petit $k \in N$ tel que $u^k(x) = 0$

Le **sous-espace cyclique/clôture stable d'un endomorphisme $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L(E)}$ en un vecteur $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$** est l'espace $\boldsymbol{S_{u,x}} = \text{vect}\,\{u^n(x) : n \in N\} = \{P(u)(x) : P \in K[X]\}$. Cet espace est stable par u

L'idéal conducteur d'un endomorphisme $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L(E)}$ en un vecteur $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ est

$\boldsymbol{I_{u,x}} = \{P \in K[X] \mid P(u)(x) = 0\}$

$\boldsymbol{\phi_{u,x}}: \mathbb{K}[X] \to S_{u,x} : P \mapsto P(u)(x)$ est un morphisme surjectif de $\mathbb{K}$ evs de noyau $I_{u,x}$

$\overline{\boldsymbol{\phi_{u,x}}}: \frac{\mathbb{K}[X]}{I_{u,x}} \to S_{u,x}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ evs.

$I_{u,x} \neq \{0\}$ ssi $S_{u,x}$ de dimension finie.

$S_{u,x}$ est un $\mathbb{K}$ sev de E.

Si E est de dimension finie on a forcément $I_{u,x} \neq \{0\}$. On supposera désormais $I_{u,x} \neq \{0\}$.

Le polynôme conducteur d'un endomorphisme $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L(E)}$ en un vecteur $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{E}$ est le polynôme unitaire engendrant l'idéal conducteur $\boldsymbol{I_{u,x}} = \langle \boldsymbol{\pi_{u,x}} \rangle$, c'est aussi le polynôme minimal de l'endomorphisme induit sur le sous-espace cyclique $\pi_{u,x} = \pi_{u_{S_{u,x}}}$.

Ainsi un polynôme conducteur d'un endomorphisme divise toujours le polynôme minimal de cet endomorphisme.

$\frac{\mathbb{K}[X]}{\langle \pi_{u,x} \rangle}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension $\mathrm{d} = \deg(\pi_{u,x})$ dont $\left(1, \overline{\mathrm{X}}, \overline{\mathrm{X}}^2, \dots, \overline{\mathrm{X}}^{\mathrm{d}-1}\right)$ est une base.

$\frac{\mathbb{K}[X]}{\langle \pi_{u,x} \rangle} \approx S_{u,x}$ donc $\left(1, u(x), u^2(x), \dots, u^{d-1}(x)\right)$ est une base de $S_{u,x}$. donc $\dim(S_{u,x}) = \deg(\pi_{u,x})$.

Si u est d'indice fini d en x, alors $\pi_{u,x} = X^d$.

Sous-espaces cycliques. (Gourdon algèbre p178)

Lemme 1. Si p sous-espaces cycliques $S_{u,x_1}, \dots, S_{u,x_p}$ sont en somme directe alors, $\pi_{u,x_1+\dots+x_p} = ppcm\left(\pi_{u,x_1}, \dots, \pi_{u,x_p}\right)$

Lemme 2. Si p polynômes conducteurs $\pi_{u,x_1}, \dots, \pi_{u,x_p}$ sont premiers entre eux 2 à 2, alors $S_{x_1+\dots+x_p}(u) = \bigoplus_{k=1}^{p} S_{x_k}(u)$

Lemme 3 : Pour tout $M \in \mathbb{K}[X]$ facteur irréductible de π_u de multiplicité $\alpha \in \mathbb{N}^*$ dans sa décomposition en facteurs irréductibles, il existe $x \in \ker\left(M^\alpha(u)\right)$ tel que $\pi_{u,x} = M^\alpha$.

Un **vecteur maximum d'un endomorphisme u** est un vecteur dont le polynôme conducteur est égal au polynôme minimal de l'endomorphisme. $\pi_{u,x} = \pi_u$

Lemme 4. Tout endomorphisme admet au moins un vecteur maximum. $\exists x \in E\ \pi_{u,x} = \pi_u$. (Par 1,2,3)

Lemme 5. Le sous-espace cyclique d'un endomorphisme en un vecteur maximum admet un supplémentaire stable. (Gourdon algèbre p 290)

Décomposition de Frobenius. Pour un endomorphisme $u \in L(E)$, il existe une suite finie de vecteurs $x_1, \dots, x_p$ telle que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} S_{u,x_i}$ avec $\pi_{u,x_p} \left| \pi_{u,x_{p-1}} \right| \dots | \pi_{u,x_1}$.

Les polynômes conducteurs π_{u,x_i} ne dépendent pas du choix des x_i et ne changent pas lorsqu'on étend le corps K, les $\left(\boldsymbol{\pi_{u,x_i}}\right)_{\mathbf{1 \le i \le p}}$ sont les **facteurs invariants de l'endomorphisme u**. Leur produit est égal au polynôme caractéristique $\pi_1 \dots \pi_p = \chi_u$ et le plus grand est égal au polynôme minimal $\pi_1 = \pi_u$.

De plus $\exists B$ base de E $[u]^B = \begin{bmatrix} C(\pi_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C(\pi_p) \end{bmatrix}$ où $C(P)$ désigne la matrice compagnon associé au polynôme P. On a donc bien u cyclique ssi u n'admet qu'un seul facteur invariant ($p = 1$)

Caractérisation similitude. (En dimension finie)

Deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont mêmes facteurs invariants.

Décomposition de Frobenius nilpotent. (Gourdon algèbre p)

Pour un endomorphisme nilpotent <u>d'indice $n = \dim E$</u>, on peut trouver $x \in E, x \neq 0$ tel que $\left(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\right)$ est une base de E. Dans ce cas $[u]^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{J_n(0)} \in M_n(K)$

Pour un endomorphisme nilpotent <u>quelconque</u>, E est somme directe de sous-espaces u-cycliques $E = \bigoplus_{i=1}^{s} S_{x_i}(u)$ avec $j_i := \dim S_{x_i}$ dans une base adaptée on a $[u]^B = \begin{bmatrix} J_{j_1}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_{j_s}(0) \end{bmatrix}$

Les $(j_1, \dots, j_s)$ forment une partition de n.

Réduction de Jordan.

Un **bloc de Jordan** est une matrice de la forme $\boldsymbol{J_k(\lambda)} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in M_k(K)$, et pour $n = 1$ est de la forme : $[\lambda] \in M_1(K) \approx K$

Dans la décomposition de Dunford, on a choisi les B_i de sorte à rendre triangulaire strict les matrices des endomorphismes nilpotents induits. On peut faire mieux, en appliquant la décomposition de Frobenius nilpotent à chaque endomorphisme nilpotent. On obtient ainsi une décomposition en blocs de Jordan.
Pour tout endomorphisme trigonalisable, on peut donc écrire dans une certaine base B de E,

$$[u]^B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \in M_{k_1}(K) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} \lambda_p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p \end{bmatrix} \in M_{k_p}(K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & J_{k_p}(\lambda_p) \end{bmatrix}$$

Attention car contrairement à Dunford, les λ_i ne sont pas forcément distincts, car la décomposition de Frobenius peut avoir décomposé leur bloc davantage. Mais une vp donnée λ, apparait dans la diagonale autant de fois que m_λ.
On dit que la matrice est **jordanisée**, ou sous **forme réduite de Jordan**.
Le nombre de blocs de Jordan pour λ est donné par $\dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$
La somme des tailles des blocs de Jordan pour λ càd le nombre d'occurrences de λ est m_λ
La taille du plus grand bloc de Jordan pour λ est n_λ sa multiplicité dans π_u
Caractérisation des classes de similitudes. Sur un corps algébriquement clos, deux matrices de $M_n(K)$ sont semblables ssi elles ont même forme réduite de Jordan a l'ordre près des blocs.
Intérêts calculatoires.

$$\exp\big(tJ(\lambda)\big) = \exp(t\lambda) \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & 0 & \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ pratique pour calculer des solutions d'equa diff ou calculer des exponentielles de matrices.

Endomorphismes cycliques.
Sur un K ev E de dimension finie n, un endomorphisme u est **cyclique**
ssi un de ses sous-espaces cycliques engendre tout l'espace $\exists x \in E\ S_{u,x} = E$
ssi son polynôme minimal est de degré $\deg \pi_u = n = \dim E$
ssi son polynôme minimal coïncide avec son polynôme caractéristique au signe près
ssi un endomorphisme commute avec u ssi c'est un polynôme en u : $\Gamma(u) = K[u]$
ssi sa matrice représentative est une matrice compagnon dans une certaine base B de E.
ssi il n'a qu'un unique invariant de similitude (qui donc est $\pi_u = \chi_u$)
Un endomorphisme de polynôme caractéristique scindé simple est cyclique.
La décomposition de Frobenius/Jordan permet d'étudier le commutant et le bicommutant d'un endomorphisme.
Toute matrice carrée est semblable à sa transposée. (on le démontre manuellement pour une matrice compagnon et avec les invariant de similitude).
Si 2 matrices carrées à coefficients dans un corps K sont semblables via une matrice inversible à

coefficients dans une extension de K, alors elles le sont aussi via une matrice inversible à coefficients dans K.

Suites récurrentes linéaires.

Une suite $(\boldsymbol{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sur un $\mathbb{K}$ev, est une suite récurrente linéaire (SRL) d'ordre $\boldsymbol{p} \in \mathbb{N}^*$ de coefficients $(\boldsymbol{\alpha_0}, \dots, \boldsymbol{\alpha_{p-1}}) \in \mathbb{K}^{\boldsymbol{p}}$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+p} + \alpha_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_0 u_n = 0$

Le polynôme caractéristique d'une SRL $\boldsymbol{u_{n+p} + \alpha_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_0 u_n = 0}$ est $\boldsymbol{C_u(X)} = X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$

Terme explicite d'une SRL sur un corps. Pour une suite récurrente linéaire à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, dont le polynôme caractéristique est scindé $\mathbb{K}$, $C_u(X) = X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ racines distinctes de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$, alors on peut expliciter le terme général : $\exists!\, P_1 \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P_1 < m_1, \dots, \exists!\, P_r \in \mathbb{K}[X]$, $\deg P_r < m_r$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k^n\, P_k(n)$

Exercices.

Un endomorphisme de rang 1 d'un Kev de dim finie est diagonalisable ssi sa trace n'est pas nulle.

Si ce n'est pas le cas on a $tr(f) = 0$ et $f^2 = 0$.

Un **ensemble d'endomorphismes $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{L(E)}$ est dit irréductible**, ssi les seuls Ksevs de E stables par tous les éléments de Q, sont $\{0\}$ et E.

Lemme de Schur. Dans un $\mathbb{C}$ev, le commutant d'un ensemble irréductible d'endomorphismes, est l'ensemble des homothéties. (On retrouve en particulier pour $L(E)$ son centre).

Dans un $\mathbb{R}$ev de dimension impaire, c'est encore vrai.

Dans un $\mathbb{R}$ev, de dimension paire, c'est faux, il n'y a pas qu'elles, par ex en dim 2 l'ensemble des rotations est irréductible car aucune droite stable par toutes les rotations, mais l'ensemble des rotations commute avec tout lui-même.

Pour f, g endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ev E, tels que $[f, g] = fg - gf = \alpha f$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ alors $\forall k \in \mathbb{N}^*\ [f^k, g] = \alpha k f^k$, f nilpotent, f et g cotrigonalisables. Si on remplace l'hypothèse $[f, g] = \alpha f$ par $[f, g] = \alpha f + \beta g$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$, alors il suffit de poser $h = f + \frac{\beta}{\alpha} g$ pour se ramener au premier cas.

Un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$ev avec $\mathbb{K}$ fini a q éléments, est diagonalisable ssi $u^q = u$

Une matrice par blocs $\begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$ est diagonalisable ssi $A = 0$

L'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$

Dans $M_n(\mathbb{R})$ c'est faux.

L'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{R})$ est dense dans l'ensemble des matrices trigonalisables de $M_n(\mathbb{R})$

Sur un corps $\mathbb{K}$, $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})\ \ P_{AB} = P_{BA}$

(on peut le montrer pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par densité (en traitant d'abord le cas inversible), puis $\mathbb{K}$ infini, preuve différente pour $\mathbb{K}$ quelconque en utilisant juste l'équivalence a une matrice J_r mais encore vrai.)

Sur un corps $\mathbb{K}$, pour $p, q \in \mathbb{N}^*$ $\forall A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ $\forall B \in M_{q,p}(\mathbb{K})$ $(-X)^q P_{AB} = (-X)^p P_{BA}$

Pour $n \geq 2, p \in [\![1, n-1]\!]$, $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid rg(A) \leq p\}$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$, et est aussi l'adhérence de $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid rg(A) = p\}$

Une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable, en une matrice avec des coefficients non diagonaux de module

arbitrairement faible $|t_{i,j}| < \varepsilon$, pour $i < j$.
Une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est nilpotente ssi il existe une suite de matrices toutes semblables a A et tendant vers 0.
Dans $M_n(\mathbb{R})$ si $B = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$ avec $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ alors $\exists P \in \mathbb{R}[X]\ \ B = P(A)$.
L'exponentielle d'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est un polynôme en cette matrice.
Pour un $\mathbb{K}$evn E et $f \in L_c(E)$, $\left(Id_E + \frac{1}{n} f\right)^n \to_{n\to\infty} \exp(f)$
Pour un $\mathbb{K}$evn E et $(f_n)_n \in L_c(E)^{\mathbb{N}}$, $f_n \to_{n\to\infty} f \Rightarrow \left(Id_E + \frac{1}{n} f_n\right)^n \to_{n\to\infty} \exp(f)$
Pour un $\mathbb{K}$evn E et $f, g \in L_c(E)$, $\left(\exp\left(\frac{f}{n}\right) \exp\left(\frac{g}{n}\right)\right)^n \to_{n\to\infty} \exp(f+g)$
Un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$ev de dim finie E, est diagonalisable ssi sa classe de conjugaison dans le groupe linéaire $\{\varphi^{-1} u \varphi : \varphi \in GL(E)\}$ est un fermé de $L(E)$.
Pour une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$, $e^{tM} \to_{t\to\infty} 0$ ssi la partie réelle de toute v.p. de M est < 0.
Une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ et son double $2M$ sont semblables ssi M est nilpotente.
Dans $M_n(\mathbb{C})$ toute matrice est semblable à sa transposée. (algébriquement clos)
Dans $M_n(\mathbb{R})$ toute matrice est semblable à sa transposée. (autre démonstration)
Dans $M_n(\mathbb{K})$ une matrice dont P_M est scindé, est semblable à sa transposée.
Dans $M_n(\mathbb{K})$ une matrice est semblable dans $M_n(\mathbb{L})$ à sa transposée, $\mathbb{L}$ corps de décomposition de P_M
Dans $M_n(\mathbb{K})$ une matrice est semblable à sa transposée, avec $\mathbb{K}$ corps infini. (vrai encore si $\mathbb{K}$ fini).
Problème 1. TODO
Une matrice $M \in M_2(\mathbb{Z})$ tel que $M^n = I_2$ avec $n \geq 1$, alors $M^{12} = I_2$
Dans un $\mathbb{C}$ev E de dim finie n, pour $f \in L(E)$, $\forall k \in [\![1, n]\!]\ tr(f^k) = 0 \Rightarrow f$ nilpotent.
Dans un $\mathbb{C}$ev E de dim finie n, pour $f, g \in L(E)$, $\big[[f, g], f\big] = 0 \Rightarrow [f, g]$ nilpotent.
Dans un $\mathbb{C}$ev E de dim finie n, pour $f, g \in L(E)$, $\forall k \in [\![1, n]\!]\ tr(f^k) = tr(g^k) \Rightarrow P_f = P_g$.
Problème 4. Endomorphismes de $L(E)$ TODO