Un **corps** $\mathbb{K}$ **est ordonné par** $\leq$ ssi $\begin{cases} \forall x, y, z \in \mathbb{K}\ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \\ \forall x, y \in \mathbb{K}\ \ 0 \leq x \text{ et } 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \times y \end{cases}$

Un **corps** $\mathbb{K}$ **est totalement ordonné par** $\leq$ ssi $(\mathbb{K}, \leq)$ est ordonné et $\leq$ ordre total.

Un **corps** $\mathbb{K}$ **est archimédien** ssi $\forall \varepsilon \in \mathbb{K} | \varepsilon > 0\ \ \forall a \in \mathbb{K}\ \exists n \in \mathbb{Z}\ \ n\varepsilon \geq a$

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **sur un corps** $\mathbb{K}$ **est de Cauchy** ssi $\forall \varepsilon \in \mathbb{K} | \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > m \geq N\ \ |x_n - x_m| \leq \varepsilon$

Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **sur un corps** $\mathbb{K}$ **converge vers** $\boldsymbol{l} \in \mathbb{K}$ ssi $\forall \varepsilon \in \mathbb{K} | \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > m \geq N\ \ |x_n - l| \leq \varepsilon$

Un **corps** $\mathbb{K}$ **est complet** signifie que toute suite de Cauchy sur $\mathbb{K}$ converge dans $\mathbb{K}$.

Un **corps** $\mathbb{K}$ **vérifie le théorème des suites adjacentes** ssi pour tout couple de suites dans $\mathbb{K}$ dont l'une est croissante, l'autre est décroissante, de différence qui tend vers 0, alors ces 2 suites convergent vers la même limite.

Un **corps** $\mathbb{K}$ **vérifie le théorème de la limite monotone** ssi toute suite croissante (resp. décroissante) tend vers le sup (resp. l'infimum) de son image.

Modèle de $\mathbb{R}$**.**

Pour un corps totalement ordonné $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$, 1,2,3,4 sont équivalentes :

1. $\mathbb{K}$ archimédien et $\mathbb{K}$ complet
2. $\mathbb{K}$ archimédien et vérifie le théorème des suites adjacentes.
3. Toute partie non vide majorée (resp. minorée) admet un supremum (resp. infimum).
4. $\mathbb{K}$ vérifie le théorème de la limite monotone.

Existence : Il existe $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ vérifiant le modèle de $\mathbb{R}$ càd vérifiant :

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps totalement ordonné par $\leq$, archimédien et complet donc vérifiant 1,2,3,4

La construction peut se faire via les coupures de Dedekind, ou via les suites de Cauchy rationnelles.

Unicité : Tous les corps $(\mathbb{K}, +, \times, \leq)$ vérifiant le modèle de $\mathbb{R}$, sont isomorphes.

Propriétés de $\mathbb{R}$**.**

$\mathbb{R}$ vérifie toutes les propriétés précédemment citées.

Il existe un sous-corps de $\mathbb{R}$ isomorphe a $\mathbb{Q}$. Donc on peut supposer $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ càd $\forall a, b \in \mathbb{R} |\ a < b\ \ \exists c \in \mathbb{Q}\ a < c < b$

On pose $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

On pose $\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

$(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-)$ est une partition de $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}_+^*, \{0\}, \mathbb{R}_-^*)$ est une partition de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}\ \ a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}_+$

Valeur absolue. Pour $x \in \mathbb{R}$, $|\boldsymbol{x}| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ |x| \geq 0$

$x, y \in \mathbb{R}$ sont de même signe ssi $xy = |x||y|$

$x, y \in \mathbb{R}$ sont de signe contraire ssi $xy = -|x||y|$

Pour $x, y \in \mathbb{R}\ \ |x + y| \leq |x| + |y|$

Pour $x, y \in \mathbb{R}\ \ \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

Pour $x, y \in \mathbb{R}\ \ |xy| \leq |x||y|$

Pour $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$ alors $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Partie entière. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\exists!\, \boldsymbol{E(x)} \in \mathbb{Z}\ \ E(x) \leq x < E(x) + 1$

Infinis.

On introduit deux nouveaux symboles $\infty, -\infty$ et on définit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

On étend les opérations usuelles.

Pour $x \in]-\infty, \infty]$ $\ x + \infty = \infty + x = \infty$
Pour $x \in [-\infty, \infty[$ $\ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$
Pour $x \in]0, \infty]$ $\ x \times \infty = \infty \times x = \infty,\ \ x \times -\infty = -\infty \times x = -\infty$
Pour $x \in [-\infty, 0[$ $\ x \times \infty = \infty \times x = -\infty,\ \ x \times -\infty = -\infty \times x = \infty$
$x \in [-\infty, \infty[\Leftrightarrow x < \infty,\ x \in]-\infty, \infty] \Leftrightarrow -\infty < x,\ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -\infty < x < \infty \Leftrightarrow |x| < \infty$
Caractérisation des bornes sup/inf dans $\mathbb{R}$. Pour une partie $E \subseteq \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$
E admet un sup dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow E$ non vide majoré
E admet un inf dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow E$ non vide minoré
E admet un sup dans $\mathbb{R}$ et $m = \sup_{\mathbb{R},\leq} E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E\ \ x \leq m \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists x \in E\ \ m - \varepsilon < x \end{cases}$
E admet un inf dans $\mathbb{R}$ et $m = \inf_{\mathbb{R},\leq} E \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E\ \ m \leq x \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists x \in E\ \ x < m + \varepsilon \end{cases}$
Bornes sup/inf dans $[-\infty, \infty]$. Une partie $E \subseteq \mathbb{R}$ admet toujours un sup et un inf dans $[-\infty, \infty]$.
$\sup_{\leq} E = \infty \Leftrightarrow E$ non majoré. $\sup_{\leq} E = -\infty \Leftrightarrow E = \emptyset$. $\sup_{\leq} E \in \mathbb{R} \Leftrightarrow E$ non vide majoré.
$\inf_{\leq} E = -\infty \Leftrightarrow E$ non minoré. $\inf_{\leq} E = \infty \Leftrightarrow E = \emptyset$. $\inf_{\leq} E \in \mathbb{R} \Leftrightarrow E$ non vide minoré.