Matrices.
Une **matrice $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ sur un ensemble $\boldsymbol{X}$** correspond à une famille $\left(A_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in X^{mn}$.
On note $\boldsymbol{M_{m,n}(X)}$ l'ensemble des matrices $m \times n$ sur un ensemble X.
Notation matricielle.
Pour $A = \left(A_{i,j}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} \in M_{m,n}(X)$ on représente généralement A sous la forme $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A_{1,1}} & \cdots & \boldsymbol{A_{1,n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A_{m,1}} & \cdots & \boldsymbol{A_{m,n}} \end{bmatrix} = A$
Pour 2 ensembles cardinaux quelconques M et N, une **matrice de taille $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{N}$ sur un ensemble $\boldsymbol{X}$** correspond à une famille $\left(a_{i,j}\right)_{i\in M, j\in N} \in X^{M\times N}$.
On note $\boldsymbol{M_{M,N}(X)}$ l'ensemble des matrices $M \times N$ sur X. Le cas fini $M_{m,n}(X)$ peut être vu comme cas particulier du cas $M \times N$ plus général.
Bien souvent on identifie $M_{M,N}(X) \approx X^{M\times N} \approx F(M \times N, X)$. On préfère garder la distinction $M \times N$ et $N \times M$, càd bien distinguer lignes et colonnes, car cela importe pour faire les produits.
Une **matrice $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{N}$** tout court correspond à une matrice sur un ensemble non spécifié, donc simplement à une famille d'ensembles. On note $\boldsymbol{M_{M,N}}$ la classe des matrices $M \times N$.
On notera **matrice $(\boldsymbol{M}) \times \boldsymbol{N}$** une matrice $M \times N$ dont les colonnes sont à support fini dans M. On note $\boldsymbol{M_{(M),N}}$ la classe des matrices $(M) \times N$
Une matrice **carrée** est une matrice telle que $M = N$.
On note $\boldsymbol{M_N} = M_{N,N}$. On note $M_{(N)} = M_{(N),N}$. Attention $M_{(N)} \neq M_{(N),(N)}$ dans le cas infini.
Pour une matrice $A \in M_{M,N}(X)$, on note **$\boldsymbol{A_{i,j}}$ le coefficient $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{N}$** de la matrice. On a $A_{i,j} \in X$
Pour une matrice $A \in M_{M,N}(X)$, et $i \in M$, la **$\boldsymbol{i}$-eme ligne de $\boldsymbol{A}$** notée $\boldsymbol{L_i^A}$ correspond à la matrice/au vecteur ligne $\left[A_{i,j}\right]_{1, j\in N} \in M_{1,N}(X) \approx X^N$
Pour une matrice $A \in M_{M,N}(X)$, et $j \in N$, la **$\boldsymbol{j}$-eme colonne de $\boldsymbol{A}$** notée $\boldsymbol{C_j^A}$ correspond à la matrice/au vecteur colonne $\left[A_{i,j}\right]_{i\in M, 1} \in M_{I,1}(X) \approx X^M$
Un **support matriciel** correspond à un couple d'ensembles (M, N).
Le **support d'une matrice $\boldsymbol{A}$** $\in M_{M,N}(X)$ est le support matriciel (M, N)
Un **support extrait** d'un support matriciel (M, N) correspond à un couple d'ensembles (M', N') avec $M' \subseteq M, N' \subseteq N$.
Un **support extrait d'une matrice** est un support extrait du support de cette matrice.
Une **sous-matrice d'une matrice $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_{M,N}(X)}$** correspond à la donnée de A et un support extrait de A.
Un **découpage d'un support matriciel $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$**, correspond à une famille de supports matriciels $(M_u, N_v)_{\substack{u\in U\\v\in V}}$ partitionnant le support (M, N), càd avec $(M_u)_{u\in U}$ partition de M et $(N_v)_{v\in V}$ partition de N.
Un **sous-découpage d'un découpage** $(M_u, N_v)_{\substack{u\in U\\v\in V}}$ de (M, N) est un découpage $(U_s, V_t)_{\substack{s\in S\\t\in T}}$ de (U, V).
Un (S, T)-découpage $(M'_s, N'_t)_{\substack{s\in S\\t\in T}}$ de (M, N) est **moins fin/plus grossier** qu'un autre (U, V)-découpage $(M_u, N_v)_{\substack{u\in U\\v\in V}}$ de (M, N) ssi il existe un $\underline{(S, T)}$-sous-découpage $(U_s, V_t)_{\substack{s\in S\\t\in T}}$ de $(M_u, N_v)_{\substack{u\in U\\v\in V}}$ tel que $\forall s \in S \;\; M'_s = \bigcup_{u\in U_s} M_u$, $\forall t \in T \; N'_t = \bigcup_{v\in V_t} N_v$.
Un sous-découpage d'un découpage D de (M, N) correspond à un découpage <u>plus grossier</u> que D de (M, N).
La matrice par blocs de $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{M_{M,N}(X)}$ selon un découpage $(\boldsymbol{M_u}, \boldsymbol{N_v})_{\substack{u\in U\\v\in V}}$ de $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ correspond à la matrice $U \times V$ définie par $\left[B_{u,v} = \left[A_{i,j}\right]_{\substack{i\in M_u\\j\in N_v}} \in M_{M_u,N_v}(X)\right]_{u\in U, v\in V} \in M_{U,V}$

Prendre une matrice par blocs d'une matrice par blocs de $A \in M_{M,N}(X)$ correspond à considérer un sous-découpage d'un découpage, donc correspond à prendre une matrice par blocs de A plus grossière.
D'une matrice par blocs $U \times V$, on peut déterminer la **matrice initiale** $M \times N$, $A \in M_{M,N}(X)$

Operations.

La **transposée** d'une matrice $A = [A_{i,j}]_{\substack{i\in M\\ j\in N}} \in M_{M,N}(X)$ est la matrice $\boldsymbol{A^T} = [A_{j,i}]_{\substack{i\in N\\ j\in M}} \in M_{N,M}(X)$
Relativement à une l.c.i. $+$ sur X, on peut définir **l'addition matricielle** comme l.c.i. $+$ sur $M_{M,N}(X)$ par $[A_{i,j}]_{\substack{i\in M\\ j\in N}} + [B_{i,j}]_{\substack{i\in M\\ j\in N}} = [A_{i,j} + B_{i,j}]_{\substack{i\in M\\ j\in N}}$
Relativement à un groupe $(X,+)$, cela définit la l.c.e. $Z \times M_{M,N}(X) \to M_{M,N}(X)$: $k[A_{i,j}]_{\substack{i\in M\\ j\in N}} = [kA_{i,j}]_{\substack{i\in M\\ j\in N}}$
Relativement à un groupe $(X,+)$, la matrice nulle est l'élément neutre de $+$. On la note $\boldsymbol{0_{M_{M,N}(X)}}$
Relativement à une l.c.e. quelconque $\cdot: K \times X \to X$, on peut définir la **multiplication scalaire gauche matricielle** comme l.c.e. $\cdot: K \times M_{M,N}(X) \to M_{M,N}(X)$ par $\alpha[A_{i,j}]_{\substack{i\in M\\ j\in N}} = [\alpha A_{i,j}]_{\substack{i\in M\\ j\in N}}$
On peut de façon analogue définir la multiplication scalaire droite matricielle, relativement à une l.c.e. à droite.
Si X est un anneau, la multiplication scalaire est définie à gauche et à droite en considérant $\times$ comme la l.c.e. (à gauche ou à droite).
Quand l'ensemble X est un anneau commutatif les deux multiplications sont identiques.
Cependant, si l'anneau n'est pas commutatif, tel que celui des quaternions, alors ils peuvent être différents. Par exemple $i\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} i$

Somme directe de matrices.

Multiplications de matrices.

Relativement à un anneau $(X,+,\times)$, on peut définir la **multiplication matricielle** $\times: M_{M,N}(X) \times M_{(M),P}(X) \to M_{M,P}(X)$ par $[A_{i,j}]_{\substack{i\in M\\ j\in N}} \times [B_{i,j}]_{\substack{i\in N\\ j\in P}} = [\sum_{k\in N} A_{i,k}B_{k,j}]_{\substack{i\in M\\ j\in P}}$
En général on effectue des multiplications de matrices d'applications linéaires, donc on considère plutôt $\times: M_{(M),N}(X) \times M_{(M),P}(X) \to M_{(M),P}(X)$
Le produit matriciel $\times$ est associatif, distributif à gauche et à droite, et compatible avec la multiplication par un scalaire càd $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
La multiplication de matrices par blocs donne une matrice par blocs de la multiplication des matrices initiales.
On note $\boldsymbol{M_{(N)}(X)} = M_{(N),N}(X)$. Attention en dimension infinie $M_{(N)}(X) \neq M_{(N),(N)}(X)$
$\times$ est une l.c.i sur les matrices carrées de $M_{(N)}(X)$
La **matrice identité d'ordre N** sur un anneau (unitaire) X est la matrice $\boldsymbol{I_N} = [\delta_{i,j}1_X]_{i,j\in N} \in M_{(N)}(X)$ valant 1_X sur la diagonale et 0_X partout ailleurs.
Une matrice carrée $A \in M_{(N)}(X)$ sur un anneau est **inversible** si elle est symétrisable pour la multiplication matricielle. Càd ssi il existe $B \in M_{(N)}(X)$ tel que $AB = BA = I_N$
Dans ce cas B est unique et appelée **inverse de A**, et notee $\boldsymbol{A^{-1}}$. On a donc $AA^{-1} = A^{-1}A = I_N$
On note $\boldsymbol{GL_{(N)}(X)}$ l'ensemble des matrices $(N) \times N$ inversibles.
Pour $R \leq Max(M,N)$, on définit la matrice $\boldsymbol{J_R^{M,N}} \in M_{(M),N}(X)$ par $J_{i,j} = \delta_{i,j}1_X(i \leq R)$ valant 1_X sur la diagonale jusqu'au rang R, et 0_X partout ailleurs.
Relativement à un anneau $(X,+,\times)$, on peut définir **le produit de Hadamard** $\cdot$ comme la l.c.i. sur $M_{M,N}(X)$ par $[A_{i,j}]_{\substack{i\in M\\ j\in N}} \cdot [B_{i,j}]_{\substack{i\in M\\ j\in N}} = [A_{i,j}B_{i,j}]_{\substack{i\in M\\ j\in N}}$

Le produit de Hadamard, est associatif, distributif à gauche et à droite, et compatible avec la multiplication par un scalaire càd $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
Le produit de Hadamard est commutatif, si l'anneau sous-jacent l'est.
Relativement à un anneau $(X, +, \times)$, on peut définir **le produit tensoriel de Kronecker**, pour $A \in M_{M,N}(X)$ et $B \in M_{P,Q}(X)$, on pose par exemple $A \otimes B \in M_{M\times P, N\times Q}(X) \quad (A\otimes B)_{(i,k),(j,l)} = A_{i,j}B_{k,l}$
Il y a plusieurs façons similaires de définir ce produit. On peut le voir comme une matrice par blocs $A\otimes B = \begin{bmatrix} A_{1,1}B & \cdots & A_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1}B & \cdots & A_{m,n}B \end{bmatrix}$
Le produit matriciel tensoriel, est associatifs, distributif à gauche et à droite, et compatible avec la multiplication par un scalaire càd $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$
Structure.
Pour tout $(K, +, \cdot)$ corps, $(M_{M,N}(K), +, \cdot)$ est un Kev isomorphe a $K^{M\times N}$, $F(M \times N, K)$
Pour tout $n \in N$, $(A, +, \times)$ anneau, $(M_n(A), +, \times)$ est un anneau. Souvent ni intègre, ni abélien.
Pour tout $n \in N$, $(K, +, \cdot)$ corps, $(M_n(K), +, \cdot, \times)$ est une K-algebre.
Pour $(A, +, \times)$ anneau, $i \in M, j \in N$ on définit $\boldsymbol{E_{i_0,j_0}^{M,N}}$ la matrice $M \times N$ sur A valant 1_A en (i_0, j_0) et 0_A ailleurs. $E_{i_0,j_0}^{M,N} = [\delta_{i,i_0}\delta_{j,j_0}]_{\substack{i\in M \\ j\in N}}$
On a $E_{i_0,j_0}^{M,N} E_{j_0',k_0}^{M,P} = \delta_{j_0,j_0'} E_{i_0,k_0}^{M,P}$
Pour un corps K, et $m, n \in N$ les $\left(E_{k,l}^{m,n}\right)_{k\in I, l\in J}$ forment une base de $M_{m,n}(K)$, qui est donc de K-dimension mn.
Matrices et espaces vectoriels.
La **matrice d'un vecteur $\boldsymbol{x} = \sum_{i\in M} \boldsymbol{x_i e_i}$ dans une base $\boldsymbol{B}$** $= (e_i)_{i\in M}$ d'un Kev E, est $[\boldsymbol{x}]^{\boldsymbol{B}} = [x_i]_{i\in M,1} \in M_{(M),1}(K)$. Seul un nombre fini de x_i sont non nuls. M est le cardinal représentant la dimension de E.
La **matrice d'une famille de vecteur $\left(\boldsymbol{x_j}\right)_{\boldsymbol{j\in N}}$** d'un $Kev\ E$ dans une base $B = (e_i)_{i\in M}$, est la matrice $\left[\left(\boldsymbol{x_j}\right)_{\boldsymbol{j\in N}}\right]^{\boldsymbol{B}}$ initiale de la matrice par blocs $\left[\left[x_j\right]^B\right]_{1,j\in N}$. Càd $\left[\left(\boldsymbol{x_j}\right)_{\boldsymbol{j\in N}}\right]^{\boldsymbol{B}} = \left[\left(x_j\right)_i\right]_{i\in M, j\in N} \in M_{(M),N}(K)$
La **matrice d'une application linéaire $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L_K(E, F)}$** d'une base $B = \left(e_j\right)_{j\in N}$ d'un $Kev\ E$ vers une base $C = (f_i)_{i\in M}$ d'un $Kev\ F$ est $[\boldsymbol{u}]_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{C}} = [u(B)]^C = \left[\left(u(e_j)\right)_{j\in N}\right]^C \in M_{(M),N}(K)$
La j-ieme colonne de la matrice de u dans la base C contient l'expression de $u(e_j)$ dans C.
Pour E et F de dimension finie m et n, $[u]_B^C \in M_{m,n}(K)$ et $\left([u]_B^C\right)_{i,j} = f_i^\star\left(u(e_j)\right) = \langle f_i^\star, u(e_j)\rangle$
Pour $u \in L_K(E, F)$ et $x \in E$ on a $[u(x)]^C = [u]_B^C[x]^B$
Pour $u \in L_K(E, F)$ et $v \in L_K(F, G)$ on a $[v \circ u]_B^D = [v]_C^D[u]_B^C$
Pour $u \in L_K(E, F)$, la transposée $u^T \in L_K(F^\star, E^\star)$ et $[u^T]_{C^\star}^{B^\star} = \left([u]_B^C\right)^T$
Dans un Kev E de dimension finie n, l'application $(L_K(E), +, \cdot, \circ) \to (M_n(K), +, \cdot, \times): u \mapsto [u]^B$ est un isomorphisme de K-algebres.
Ayant fixé une base $B = \left(e_j\right)_{j\in N}$ d'un Kev E, et une base $C = (f_i)_{i\in M}$ d'un Kev F, et une matrice $A \in M_{(M),N}(K)$ alors il y a un seul morphisme d'ev dont c'est la matrice : $\exists!\, u \in L_K(E, F) \quad [u]_B^C = A$
La **matrice de passage** d'une base B vers une base B' d'un même Kev E, est la matrice de la nouvelle base dans l'ancienne $\boldsymbol{P_{B\to B'}} = [id_E]_{B'}^B = [B']^B \in GL_{(M)}(K)$. Il est courant d'écrire cette matrice : P
On a $P_{B'\to B} = (P_{B\to B'})^{-1}$. Il est courant d'écrire cette matrice : P^{-1}
Tout matrice de passage est inversible et réciproquement, toute matrice inversible de $GL_{(M)}(K)$ est la matrice de passage d'une certaine base de E vers une certaine autre base de E.

Pour B, B' bases d'un Kev E, $P_{B\to B'}[x]^{B'} = [x]^B$, on écrit souvent $PX' = X$, ou $X' = P^{-1}X$
Changement de bases. Pour B, B' bases d'un Kev E, C, C' bases d'un Kev F, $u \in L_K(E, F)$,
$[u]_{B'}^{C'} = P_{C'\to C}[u]_B^C P_{B\to B'}$ on écrit souvent $A' = Q^{-1}AP$
Sur un anneau X, 2 **matrices $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M}_{(\boldsymbol{M}),\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{X})$ sont équivalentes** et on note $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$ ssi $\exists Q \in GL_{(M)}(X)\ \exists P \in GL_{(N)}(X)\ B = Q^{-1}AP$
$\sim$ est une relation d'équivalence sur $M_{(I),J}(X)$
D'après la formule de changement de bases, $[u]_{B'}^{C'} \sim [u]_B^C$ toutes les matrices d'une application linéaire u appartiennent à la même classe d'équivalence. De plus, toute matrice de cette classe d'équivalence ($\sim [u]_B^C$), est la matrice de u respectivement a une certaine base de E et une certaine base de F.
Sur un anneau X, 2 **matrices carrées $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{M}_{(\boldsymbol{N})}(\boldsymbol{X})$ sont semblables** et on note $\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{B}$ ssi $\exists P \in GL_{(N)}(X)\ \ B = P^{-1}AP$
$\sim$ est une relation d'équivalence sur $M_{(N)}(X)$
D'après la formule de changement de bases, $[u]_{B'} \sim [u]_B$ toutes les matrices d'un <u>endomorphisme</u> u dans une même base appartiennent à la même classe de similitude. De plus, toute matrice de cette classe de similitude ($\approx [u]_B$), est la matrice de u respectivement a une certaine base de E.
La matrice représentative de l'identité dans n'importe quelle base est toujours I_N.
La matrice représentative d'un projecteur p dans une base adaptee a la décomposition $E = \ker p \oplus im\, p$ est $[p]^B = J_r$ avec $r = rg(p)$
Algèbre linéaire sur les matrices.
La base canonique du $\boldsymbol{K}$ev $\boldsymbol{K}^{(N)}$ $\approx M_{(N),1}(K)$ avec K un corps, et N quelconque, est la base $(e_i)_{i\in N}$ avec $(e_i)_j = \delta_{i,j}$. En dimension infinie c'est encore bien une base de $K^{(N)}$ (mais pas de K^N)
L'application linéaire canonique d'une matrice $A \in M_{(M),N}(K)$ est l'unique a.l. $u \in L_K\left(K^{(N)}, K^{(M)}\right)$ dont A est la matrice représentative relativement aux bases canoniques B_0, C_0 de $K^{(N)}, K^{(M)}$.
Les notions d'algèbre linéaire relatives à une application linéaire peuvent être définies relativement à une matrice, en les assimilant à la même notion sur l'application linéaire canonique de la matrice.
Le **noyau d'une matrice** $A \in M_{(M),N}(K)$ est $\mathbf{ker}\, \boldsymbol{A} = \left\{X \in M_{(N),1}(K) \mid AX = 0_{(M),1}\right\} \subseteq M_{(N),1}(K)$
L'**image d'une matrice** $A \in M_{(M),N}(K)$ est $\mathbf{im}\, \boldsymbol{A} = \left\{AX : X \in M_{(N),1}(K)\right\} \subseteq M_{(M),1}(K)$
Le noyau d'une application linéaire est isomorphe au noyau de sa matrice représentative dans n'importe quelle base fixée.
L'image d'une application linéaire est isomorphe à l'image de sa matrice représentative dans n'importe quelle base fixée.
Le **rang d'une matrice** est le rang de n'importe quelle application linéaire dont elle est représentative. (indépendant de u, E, F, B, C)
Le **rang d'une famille quelconque de vecteurs colonnes** est la dimension de l'espace qu'ils engendrent.
L'image d'une matrice est engendrée par ses vecteurs colonnes. $\operatorname{im} A = \operatorname{vect}\left(C_j^A\right)_{j\in N}$
Le rang d'une matrice est égal à la dimension de son image. $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{im} A = \dim \operatorname{vect}\left(C_j^A\right)_{j\in N}$
Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille de ses vecteurs colonnes. $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\left(C_j^A\right)_{j\in N}$
Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes. $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\left(L_i^A\right)_{i\in M}$
Théorème du rang. Le rang d'une matrice est toujours égal à la codimension de son noyau.
$rg_K(A) = \operatorname{codim}_K \ker A$. On a toujours $\dim_K E = \dim_K \ker A + \dim_K \operatorname{im} A$
En dimension finie $n = \dim \ker A + rg\ A$
Le rang d'une matrice vérifie toujours $\operatorname{rg} A \leq \min(M, N)$
Caractérisation de l'équivalence et du rang. Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang.
$\forall A, B \in M_{(M),N}(K)\ \ A \sim B \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$

Toute matrice $A \in M_{(M),N}(K)$ est équivalente à la matrice $J_r^{M,N}$ de son rang $r = rg(A)$
Dans $M_{m,n}(K)$, il y a exactement $\min(m,n) + 1$ classes d'équivalences.
Trace d'une matrice carrée en dimension finie.
La **trace d'une matrice carrée de <u>taille finie</u> $\boldsymbol{n}$** est la somme de ses coefficients diagonaux. $\boldsymbol{tr(A)} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,k}$
Deux matrices carrées finies semblables ont même trace. $\forall A, B \in M_n(K)\ \ A \approx B \Rightarrow tr(A) = tr(B)$
Pour un corps K, l'application trace est une forme linéaire sur le Kev $M_n(K)$. $tr \in \left(M_n(K)\right)^\star$
$\forall A, B \in M_n(K)\ \ tr(AB) = tr(BA)$
Toute forme linéaire sur les matrices carrées $n \times n$, $\phi \in \left(M_n(K)\right)^\star$ vérifiant $\phi(AB) = \phi(BA)$ est proportionnelle à la trace. Càd $\exists \lambda \in K\ \ \phi = \lambda tr$
La **trace d'un endomorphisme** $u \in L(E)$ d'un Kev de <u>dimension finie</u> E, est la trace de n'importe quelle matrice représentative de l'endomorphisme u. $\exists!\, tr(u)\ \forall B$ base de E $\boldsymbol{tr(u)} = tr\ [u]^B$
La trace d'un projecteur d'un Kev de dimension finie E est $tr(p) = \mathrm{rg}(p) 1_K$
Operations sur les lignes et les colonnes
La matrice $\boldsymbol{N \times N}$ de permutation $\boldsymbol{(i,j)}$ est $\boldsymbol{p_N(i,j)} = I_N - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$
La matrice $\boldsymbol{N \times N}$ de dilatation $\boldsymbol{i}$ de coefficient $\boldsymbol{\lambda}$ est $\boldsymbol{d_N(\lambda,i)} = I_N + (\lambda - 1_K)E_{i,i}$
La matrice $\boldsymbol{N \times N}$ de transvection $\boldsymbol{(i,j)}$ de coefficient $\boldsymbol{\lambda}$ est $\boldsymbol{t_N(\lambda,i,j)} = I_N + \lambda E_{i,j}$
Soit $A, B \in M_{M,N}(K)$, soit $i \in M, j \in N$ tels que $i \neq j$
$B =\ \ L_i \leftrightarrow L_j\ (A) \Leftrightarrow B = p_M(i,j) \times A$
$B =\ \ L_i \leftarrow \lambda L_i\ (A) \Leftrightarrow B = d_M(\lambda,i) \times A$
$B =\ \ L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j\ (A) \Leftrightarrow B = t_M(\lambda,i,j) \times A$
$rg(p_M(i,j)A) = rg(d_M(\lambda,i)A) = rg(t_M(\lambda,i,j)A) = rg\ A$
$B =\ \ C_i \leftrightarrow C_j\ (A) \Leftrightarrow B = A \times p_M(i,j)$
$B =\ \ C_i \leftarrow \lambda C_i\ (A) \Leftrightarrow B = A \times d_M(\lambda,i)$
$B =\ \ C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j\ (A) \Leftrightarrow B = A \times t_M(\lambda,i,j)$
$rg\left(Ap_M(i,j)\right) = rg\left(Ad_M(\lambda,i)\right) = rg\left(At_M(\lambda,i,j)\right) = rg\ A$