Chapitre 18. Espaces de Hilbert

I. Produits scalaires et espaces de Hilbert

$\mathbb{K}$ corps $\subseteq \mathbb{C}$ de caractéristique $\neq 2$.

Un **espace de Hilbert**, est un $\mathbb{K}$ev H, muni d'un produit scalaire, complet pour la norme induite par le produit scalaire.

Dans un Hilbert, l'inégalité de Cauchy Schwarz s'applique, les identités de polarisation s'appliquent.

Un Hilbert est uniformément convexe donc réflexif.

$(x|y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$ définit un produit scalaire pour l'espace $\mathbb{K}^n$ de dimension finie.

$(x|y) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ définit un produit scalaire pour les suites presque nulles de scalaires $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ qui forment un espace non complet pour la norme associée.

$(f|g) = \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$ définit un produit scalaire sur $L^2(X, \mu, \mathbb{K})$ qui forme un espace de Hilbert.

$(x|y) = \sum_{i\in I} x_i \overline{y_i}$ définit un produit scalaire sur $l^2(I, \mathbb{K})$ qui forme un espace de Hilbert.

Un espace préhilbertien, peut être complété pour la norme associée au produit scalaire. Il est possible de prolonger le produit scalaire à l'espace complété, en restant un produit scalaire, ce qui fait du complété un espace de Hilbert, aussi appelé **complété hilbertien**.

Tout élément du complété étant limite d'une suite de Cauchy, on peut prolonger le produit scalaire de deux éléments comme limite des produit scalaires des termes de deux suites qui tendent vers eux.

L'espace $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est le complété hilbertien de l'ensemble $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ des familles presque nulles de scalaires.

Le produit scalaire est une application continue pour la norme produit.

Sur un espace de Hilbert $(H, (.|.))$ l'application $x \to (.|x) \in H'$ est semilinéaire continue injective.

II. Projection orthogonale

Deux éléments d'un espace de Hilbert sont **orthogonaux** si leur produit scalaire est nul. Deux parties d'un espace de Hilbert sont **parties orthogonales**, si tout couple d'élément provenant de chaque partie est orthogonal.

L'**orthogonal d'une partie** d'un espace de Hilbert note $A^\perp$ est l'ensemble des éléments de l'espace orthogonaux a la partie. $A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, (x|y) = 0\}$.

L'orthogonal d'une partie d'un Hilbert est toujours un sous-espace fermé et donc complet de l'Hilbert.

L'orthogonal d'une sous-partie contient l'orthogonal de la partie $B \subseteq A \Rightarrow A^\perp \subseteq B^\perp$

L'orthogonal de l'orthogonal d'une partie contient la partie $A \subseteq (A^\perp)^\perp$

L'orthogonal de l'adhérence est l'orthogonal de la partie $\overline{A}^\perp = A^\perp$

L'orthogonal d'une partie est l'orthogonal du sous-espace engendré par la partie, et est aussi l'orthogonal de l'adhérence du sous-espace engendré $A^\perp = \mathrm{vect}(A)^\perp = \overline{\mathrm{vect}(A)}^\perp$

L'adhérence du sous-espace engendré par une partie, est en somme directe avec l'orthogonal de la partie. $\overline{\mathrm{vect}(A)} \cap A^\perp = \{0\}$

Conditions pour $\boldsymbol{E = F \oplus^\perp F^\perp}$

Un sev H d'un espace quadratique non dégénéré E est de dim finie ssi son orthogonal est de codimension finie, et dans ce cas on a $\dim(H) = \mathrm{codim}(H^\perp)$ et donc $H^{\perp\perp} = H$.

Si H est un sous-espace <u>de dimension finie</u> d'un espace quadratique E, H est non-isotrope ssi $H^\perp$ est non-isotrope ssi $E = H \perp H^\perp$.

Deux sevs supplémentaires <u>orthogonaux</u> d'un préhilbertien H càd tels que $H = F \oplus^\perp G$ vérifient

$G = F^\perp, G^\perp = F$, donc sont fermés, on a donc $H = F \oplus^\perp F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.
Un sev d'un préhilbertien est toujours non-isotrope $F + F^\perp = F \oplus^\perp F^\perp$.
Si F est un sous-espace de dimension finie d'un préhilbertien H, on a $H = F \oplus^\perp F^\perp$.
Tout sev fermé/complet d'un Hilbert vérifie $H = F \oplus^\perp F^\perp$. (voir plus loin)
Projection orthogonale sur un convexe complet. Dans un préhilbertien, (en particulier dans un Hilbert) la distance d'un point à une partie convexe complète non vide est atteinte en un unique point de la partie appelé **projeté orthogonal** du point sur la partie, et noté $p_A(x)$.
Cela définit une application unique $\boldsymbol{p_A}: H \to H$, appelé **le projecteur orthogonal sur $\boldsymbol{A}$**.
En particulier sur les sous-espaces fermés/complets d'un espace complet.
En particulier sur les sous-espaces d'un espace de dimension fini.
En particulier si $H = F \oplus^\perp F^\perp$, la distance est toujours atteinte car F est un sev fermé.
Dans un espace métrique (en particulier Hilbert), la distance a une partie compacte non vide est atteinte.
Dans un espace métrique (en particulier Hilbert), une partie compacte non vide a son diamètre atteint en au moins un couple de ses points.
Caractérisation de la projection orthogonale sur un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert.
Un point d'un sev fermé/complet d'un Hilbert $a \in F$, est la projection orthogonale d'un autre point quelconque du Hilbert $x \in H$, ssi leur différence est dans l'orthogonal du sous-espace fermé.
Autrement dit $p_F(x) = a \Leftrightarrow d(x, F) = \|x - a\| \Leftrightarrow x - a \in F^\perp$
Le projecteur orthogonal sur un sous-espace fermé F d'un Hilbert H vérifie:
$p_F \in L_c(H)$, $p_F^2 = p_F$, $\ker(p_F) = F^\perp$ et $Im(p_F) = F$, et $H = F \oplus^\perp F^\perp$.
Donc le projecteur orthogonal sur F, n'est autre que le projecteur sur F parallèlement a $F^\perp$.
Donc tout sev fermé/complet d'un Hilbert vérifie $H = F \oplus^\perp F^\perp$.
Toute partie $A \subseteq H$ d'un Hilbert verifie $\overline{\mathrm{vect}(A)} \oplus A^\perp = H$, et $(A^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{vect}(A)}$
En particulier tout sev K d'un Hilbert verifie $\overline{K} \oplus K^\perp = H$, et $(K^\perp)^\perp = \overline{K}$
Pour un sev fermé/complet F d'un Hilbert H, $P_{F^\perp} = Id_H - P_F$
Pour un sev fermé/complet F d'un Hilbert H, $\forall x \in H\ \ d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|$
Caractérisation utile pour preuve de densité/bases hilbertiennes. Un sous-espace d'un Hilbert est dense ssi son orthogonal est réduit à 0, $\overline{K} = H \Leftrightarrow K^\perp = \{0\}$
Un sous-espace d'un Hilbert est dense ssi toute forme linéaire continue non nulle sur le Hilbert, n'est pas nulle sur le sous-espace. / nulle sur le sous-espace, implique nulle sur l'espace.

III. Théorème de représentation de Riesz-Fréchet

Toute forme linéaire continue $f \in H'$ sur un Hilbert, correspond à un unique vecteur $a_f \in E$ tel que $\forall x \in E\ \ f(x) = (x|a)$.
En d'autre termes l'application $H \to H' : a \mapsto (.|a)$ semilinéaire injective isométrique, est même bijective.
De plus $\|f\|_{H'} = \|a_f\|_H$
Donc un Hilbert est isométrique à son dual topologique ?
Toute forme linéaire continue de $L^2(X, \mu, K)$ est de la forme $f \mapsto \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$ avec $g \in L^2(\mu)$

IV. Bases Hilbertiennes

Une famille de vecteurs d'un préhilbertien est une **famille orthogonale** s'ils sont orthogonaux 2 à 2.

Une famille de vecteurs d'un préhilbertien est une **famille orthonormale**, si elle est orthogonale et tous les vecteurs sont de norme 1.
Une famille de vecteurs est une **famille totale** si le sev engendré par la famille est dense dans l'espace.
Une **base hilbertienne** d'un espace de Hilbert, est une famille orthonormale totale de l'espace.
Toute famille orthogonale d'un préhilbertien, est une famille libre.
Toute famille d'un espace de Hilbert, est une famille totale ssi 0 est l'unique point dont le produit scalaire avec tous les éléments de la famille donne 0 c.-à-d. ssi $\forall x \in E\ \forall i \in I\ (x|e_i) = 0 \Rightarrow x = 0$
Une famille de vecteurs d'un Hilbert, est une base hilbertienne ssi c'est une famille orthonormale maximale pour l'inclusion. **(Base incomplète)**
Tout espace de Hilbert possède une base hilbertienne. (Par Zorn)
Tout espace de Hilbert possède une base algébrique. (Par Zorn)
Dans un Hilbert, la projection orthogonale $p_F(x)$ sur un $\mathbb{K}$sev fermé F de base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$, peut s'exprimer comme $p_F(x) = \sum_{i\in I}(x|e_i)e_i$ où la famille $\left((x|e_i)e_i\right)_{i\in I}$ est bien sommable. On peut écrire $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i\in I}|(x|e_i)|^2$. Comme $p_F + p_{F^\perp} = Id_H$ et $p_F(x) \perp p_{F^\perp}(x)$,
$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \left\|p_{F^\perp}(x)\right\|^2 = \sum_{i\in I}|(x|e_i)|^2 + d(x,F)^2$ donc $d(x,F) = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{i\in I}|(x|e_i)|^2}$
Pour le Hilbert lui-même, et toute base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ la famille $\left((x|e_i)e_i\right)_{i\in I}$ est sommable et $x = \sum_{i\in I}(x|e_i)e_i$ pour tout x. Les $(x|e_i)$ sont les coordonnées de x dans la base hilbertienne correspondante. Plus généralement dans un Hilbert, pour une base hilbertienne on peut décomposer un produit scalaire $(x|y) = \sum_{i\in I}(x|e_i)(e_i|y)$ ou la famille correspondante est sommable dans $\mathbb{K}$.
Inégalité de Bessel. Pour toute famille orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ d'un Hilbert, pour tout point x, alors la famille $(|(x|e_i)|^2)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$ et $\sum_{i\in I}|(x|e_i)|^2 \leq \|x\|^2$.
Lemme de convergence d'une famille orthogonale dans un Hilbert.
Soit H un Hilbert et $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ famille orthogonale de H.
$\sum_{n\geq 0} f_n$ converge ssi $\sum_{n=0}^{\infty}\|f_n\|^2 < \infty$. Dans ce cas $\|\sum_{n=0}^{\infty} f_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\|f_n\|^2$
Egalité de Parseval. Pour toute base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ d'un Hilbert, pour tout point x, alors la famille $(|(x|e_i)|^2)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}$, et $\sum_{i\in I}|(x|e_i)|^2 = \|x\|^2$. Réciproquement si on a une famille $(e_i)_{i\in I}$ et on peut écrire cette égalité pour tout x de l'espace, et tout vecteur de la famille est de norme 1, alors la famille est base hilbertienne.
Pour une famille orthonormée $(e_i)_{i\in I}$ d'un Hilbert et $x \in H$
$\sum_{i\in I}|(x|e_i)|^2 = \|x\|^2 \Leftrightarrow x \in \overline{\mathrm{vect}_{i\in I}(e_i)} \Leftrightarrow d\left(x, \mathrm{vect}_{i\in I}(e_i)\right) = 0$
Deux bases hilbertiennes d'un même Hilbert ont même cardinal.
On peut donc définir la **dimension hilbertienne d'un espace de Hilbert** comme ce cardinal.
Un espace de Hilbert est de dimension algébrique finie, ssi il est de dimension hilbertienne finie. On peut donc parler indistinctement de « dimension finie » ou de « dimension infinie ».
Toute base hilbertienne d'un Hilbert de dimension finie, est une base au sens algébrique classique (réciproque fausse), donc dans le cas fini il n'y a pas de différence entre dimension algébrique et dimension Hilbertienne. Dans le cas infini il y a une différence entre ces dimensions.
Un Hilbert de dimension infinie, ne peut être de dimension algébrique dénombrable.
Un Hilbert est séparable (à une partie dénombrable dense) ssi sa dimension hilbertienne est finie ou dénombrable. Dans ce cas on peut montrer qu'il admet une base hilbertienne sans lemme de Zorn.
Orthonormalisation de Gram-Schmidt. Pour toute famille libre dénombrable d'un Hilbert, on peut

construire itérativement une famille orthonormale telle que les sous-espaces engendrés jusqu'au rang n par ces deux familles coïncident pour tout n. $Vect(e_0, \dots, e_n) = Vect(x_1, \dots, x_n)$.
La dimension hilbertienne de $l^2(I, \mathbb{K})$ est $\text{card}(I)$.
La dimension algébrique de $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est $Card\ \mathbb{R}$

V. Isomorphismes d'espaces de Hilbert

Un **morphisme de Hilberts** est une application linéaire entre ces deux espaces qui conserve le produit scalaire. De façon équivalente c'est une application linéaire qui est aussi une isométrie (conserve les normes associées aux produits scalaires).
Un **isomorphisme de Hilberts** est un morphisme de Hilberts bijectif ayant une réciproque qui est aussi morphisme de Hilberts. Un morphisme de Hilbert est toujours continu et injectif.
En fait un morphisme de Hilbert est un isomorphisme de Hilbert ssi le morphisme est bijectif ssi le morphisme est surjectif. Cela suffit pour avoir la même propriété de conservation sur la réciproque.
Dans un même espace de dim finie, puisqu'il y a toujours injectivité et donc bijectivité, un morphisme de Hilberts est toujours un automorphisme.
Dans les espaces de Banach, on ne peut définir un **morphisme de Banachs** que comme une isométrie linéaire. Un morphisme de Banach est continu injectif, et est un isomorphisme ssi surjectif. Les isomorphismes de Banachs sont les isométries linéaires surjectives. Un métrique, image d'une isométrie linéaire surjective d'un autre métrique complet, est nécessairement complet. Un préhilbertien, image d'une isométrie linéaire surjective d'un autre Hilbert, est donc nécessairement un Hilbert.
L'image d'une base hilbertienne par un isomorphisme de Hilberts est une base hilbertienne.
Tout Hilbert est de dimension hilbertienne $\text{card}(I)$ ssi il est Hilbert-isomorphe a $l^2(I, \mathbb{K})$
Deux Hilbert sont Hilbert-isomorphes ssi ils ont même dimension hilbertienne.
Un Hilbert est de dimension infinie est séparable ssi il est isomorphe a $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$

VI. Sommes hilbertiennes

Somme externe : Relativement à une structure algébrique, on peut toujours définir le produit cartésien de structures, et le munir d'opérations produits, la structure produit hérite des propriétés algébriques. C'est la **somme direct externe**, l'ensemble est le même que celui du produit cartésien.
Le produit direct externe vérifie la propriété universelle : TODO
Le sous-ensemble du produit constitué des familles a support fini (avec un nb fini de termes non neutre) est appelé **somme restreint externe.** Dans le cas où la famille est finie, il n'a pas de distinction entre restreint et pas restreint.
Le produit restreint externe vérifie la propriété universelle : TODO
Somme interne : Dans un $\mathbb{K}$ev, la **somme interne** est l'ensemble somme des $\mathbb{K}$evs, les éléments produits le constituant pour qu'ils aient un sens sont <u>nécessairement a support fini</u>.
La **somme direct interne** de $\mathbb{K}$evs d'un $\mathbb{K}$ev est une somme interne, telle que la somme <u>externe</u> correspondante, doit y être ev-<u>isomorphe</u>. Cela revient à exiger l'unicité de l'écriture d'un élément sur la somme interne.
Dans le cas fini on a les caractérisations suivantes :
$F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe $\Leftrightarrow \forall x \in \sum_{k=1}^{n} F_k\ \ \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^{n} F_k\ \ x = \sum_{k=1}^{n} x_k$
$\Leftrightarrow \forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^{n} F_k\ \ \sum_{k=1}^{n} x_k = 0_E \Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}\ x_k = 0_E$
$\Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}\ F_k \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} F_j = \{0_E\}$

$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n} F_k \to \sum_{k=1}^{n} F_k : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k$ isomorphisme d'ev
$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n} F_k \approx \sum_{k=1}^{n} F_k$
Une somme directe externe peut être vue comme une somme directe interne de chaque espace plongé dans le produit cartésien via injection canonique.
La somme directe externe d'une famille quelconque de Hilberts peut être muni canoniquement d'un produit scalaire, somme des produits scalaires. $(x|y) = \sum_{i\in I}(x_i|y_i)_{H_i}$ et donc d'une norme.
On appelle **somme hilbertienne externe** d'une famille quelconque de Hilberts $(H_i)_{i\in I}$, le complété hilbertien de la somme directe externe de la famille et on note $\widehat{\oplus} H_i$. On a donc fabriqué un Hilbert en sommant d'autres Hilberts.
Caractérisation de la somme hilbertienne externe. Une famille d'éléments chacun dans son Hilbert, appartient à la somme hilbertienne des espaces ssi la famille des normes au carré est sommable.
$\widehat{\oplus} H_i = \left\{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} H_i \mid \sum_{i\in I} \|x_i\|^2_{H_i} < \infty\right\}$
Somme hilbertienne interne de sous-espaces <u>fermés</u> <u>2 a 2 orthogonaux</u>. On peut définir de façon analogue la somme hilbertienne interne. Le caractère 2 à 2 orthogonaux entraine le fait que la somme interne est directe. Le complété hilbertien de cette somme est en fait l'adhérence de cette somme dans le Hilbert, c'est la **somme hilbertienne interne**. Il y a isomorphisme de Hilbert entre somme hilbertienne externe et interne de sous-espaces.
La projection orthogonale sur la somme hilbertienne interne quelconque, peut s'exprimer comme la somme (bien définie) des projections orthogonales sur chaque Hilbert constituant la somme.
Caractérisation de la somme hilbertienne interne. Tout élément de la somme hilbertienne interne (même dans l'adhérence), peut s'écrire comme une somme bien définie d'une unique famille d'éléments dans chaque Hilbert telle que la famille des normes au carré est sommable. Et réciproquement toute telle famille peut être sommée en un élément qui est dans la somme hilbertienne interne. De plus la relation de Pythagore généralisée peut s'écrire $\forall \sum_{i\in I} x_i \in \overline{\oplus_{i\in I}^{\perp} H_i}$ $\|\sum_{i\in I} x_i\|_H^2 = \sum_{i\in I}\|x_i\|_H^2$ et donc aussi avec les projecteurs.
Un espace de Hilbert peut être vu comme la somme hilbertienne interne des droites engendrées par chaque élément d'une base hilbertienne fixée du Hilbert.
Théorème de Stampacchia. (par th. du point fixe de Banach)
Pour ϕ une forme <u>bilinéaire</u> continue coercive sur un Banach H, et $\varphi \in H'$ une forme <u>linéaire</u> continue sur H, alors toute partie convexe fermée $K \subseteq H$, admet un unique élément $u \in K$ tel que
$\forall v \in K\ \phi(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle$
De plus si ϕ est symétrique, u est caractérisé par $u \in K$ et $u = \mathrm{argmin}_{v\in K}\left(\frac{1}{2}\phi(v,v) - \langle\varphi, v\rangle\right)$
Théorème de Lax-Milgram. Pour ϕ une forme <u>bilinéaire</u> continue coercive sur un Banach H, et $\varphi \in H'$ une forme <u>linéaire</u> continue sur H, alors $\exists!\, u \in H$ tel que $\forall v \in H\ \ \phi(u,v) = \langle\varphi, v\rangle = \varphi(v)$
De plus si ϕ est symétrique, u est caractérisé uniquement par $u = \underset{v\in H}{\mathrm{argmin}}\left(\frac{1}{2}\phi(v,v) - \langle\varphi, v\rangle\right)$
Ce théorème est un outil efficace et très simple pour résoudre des PDE linéaires elliptiques. Dans le langage du calcul des variations, on dit que $\forall v \in H\ \ \phi(u,v) = \langle\varphi, v\rangle$ est l'équation d'Euler associée au problème de minimisation $\min_{v\in H}\left(\frac{1}{2}\phi(v,v) - \langle\varphi, v\rangle\right)$. Approximativement, l'équation d'Euler traduit le fait que $F'(u) = 0$ avec $F(v) = \frac{1}{2}\phi(v,v) - \langle\varphi, v\rangle$

Pour la méthode des éléments finis, on applique souvent la formule de green pour faire apparaitre les hypothèses du théorème de Lax Milgram.

VII. Produit tensoriel de deux espaces de Hilbert

Pour E, F Kevs sur un corps commutatif K, il existe un Kev noté $\boldsymbol{E \otimes F}$ et une application bilinéaire notée $\otimes \in L_2(E \times F, E \otimes F)$ tels que pour tout Kev G et tout $\phi \in L_2(E \times F, G)$, il existe une unique application linéaire $f \in L(E \otimes F, G)$ telle que $\forall x \in E\ \forall y \in F\ \phi(x, y) = f(x \otimes y)$

De plus le Kev $E \otimes F$ est unique a isomorphisme d'ev près.

$\boldsymbol{E \otimes F}$ est le produit tensoriel algébrique de $\boldsymbol{E}$ par $\boldsymbol{F}$

Si $(e_i)_{i \in I}$ base de E et $(f_j)_{j \in J}$ base de F alors $(e_i \otimes f_j)_{i \in I, j \in J}$ base de $E \otimes F$.

En particulier si E et F de dimension finie alors $E \otimes F$ aussi et $\dim E \otimes F = \dim E \times \dim F$

On peut réitérer l'opération. Le produit tensoriel est associatif, il existe un isomorphisme naturel (càd ne dépendant pas du choix des bases) entre $(E \otimes F) \otimes G$ et $E \otimes (F \otimes G)$. Cet isomorphisme envoie $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$. De même les espaces $E \otimes F$ et $F \otimes E$ sont isomorphes. Mais attention si $E = F$, l'application $\otimes \ \in L_2(E \times E, E \otimes E)$ n'est pas symétrique.

Le produit tensoriel algébrique de 2 Hilberts $H \otimes K$ peut être muni d'un produit scalaire $\langle \quad \rangle$ en posant $\forall x, x' \in H, \forall y, y' \in K \langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle = \langle x, x' \rangle_H \ \langle y, y' \rangle_K$ et en prolongeant par linéarité en fixant une base $(e_n)_n$ de $H \otimes K$: TODO préciser ? $\forall \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (x_i \otimes y_i)$

Le produit tensoriel hilbertien est le complété hilbertien du produit tensoriel algébrique muni du produit scalaire précèdent.

Chapitre 19. Opérateurs bornés

I. L'espace des opérateurs bornés

Un **opérateur borné entre deux evn** désigne une application linéaire continue, donc tel que $\exists M > 0, \forall x \in E, \|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$, c'est-à-dire tel que sa **norme (uniforme) d'operateur** $\|\boldsymbol{T}\|_{\boldsymbol{L_c(E,F)}} = \sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Tx\|_F$ est finie. Les opérateurs bornés muni de la norme d'opérateur forment un evn note $\boldsymbol{L_c(E, F)}$ qui est de Banach si l'espace d'arrivée est de Banach. En dimension finie tout opérateur est borné.

La **topologie uniforme des opérateurs** est la topologie induite par la norme d'opérateur.

La norme d'opérateur est une norme d'algèbre sur $L_c(E, E)$. On parle de convergence uniforme.

La norme d'opérateur de la composée est toujours majorée par le produit des normes d'opérateurs.

La **topologie forte** des opérateurs est la plus petite topologie telle que toutes les applications $(T \in L_c(E, F) \mapsto Tu)_{u \in E}$ soient continues. Pour cette topologie une suite d'opérateurs bornés T_n converge vers un opérateur borné T ssi $\forall u \in E \|T_n u - Tu\|_F \to 0$ ssi T_n converge simplement vers T. Dans ce cas on note $\boldsymbol{slim}\ \boldsymbol{T_n} = T$. On dit que **$\boldsymbol{T_n}$ converge fortement vers $\boldsymbol{T}$**

La **topologie faible** des opérateurs bornés <u>entre Hilberts</u> est la plus petite topologie telle que toutes les applications $\big(T \in \mathrm{L_c}(E, F) \mapsto (Tu|v)\big)_{(u,v) \in E \times F}$ soit continues. Pour cette topologie, $T_n \to T$ signifie $\forall u, v \in E \times F\ \ (T_n u|v) \to (Tu|v)$. Dans ce cas on note $\boldsymbol{wlim}\ \boldsymbol{T_n} = T$. On dit que **$\boldsymbol{T_n}$ converge faiblement vers $\boldsymbol{T}$**

Pour les opérateurs bornés, convergence uniforme => convergence forte(simple) => convergence faible.

Une suite d'opérateurs bornés d'un Hilbert dans lui-même qui converge faiblement vérifie, que la limite faible est de norme majorée par la limite inférieure des normes de la suite.

Une suite de <u>points</u> u_n dans un Hilbert **converge faiblement** si $\forall v\ (u_n|v) \to (u|v)$. En effet les limites précédentes peuvent être étendues aux suites de points. Un point étant un opérateur constant.
Entre deux Hilberts on a $\|T\|_{\mathrm{L_c}(E,F)} = \sup_{\|u\|_E\leq 1, \|v\|_F\leq 1}|(Tu|v)| = \sup_{\|u\|_E=1,\|v\|_F=1}|(Tu|v)|$

II. Adjoint d'un opérateur borné dans un espace de Hilbert

Tout opérateur borné T d'un <u>espace de Hilbert dans lui-même</u> admet un unique operateur borné dit **operateur adjoint note T^*** tel que $(Tu|v) = (u|T^*v)$
L'adjoint de la somme est la somme des adjoints. $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$
L'adjoint de la dilation d'un opérateur, est la dilation conjuguée de l'adjoint. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$
L'adjoint de la composée est la composée des adjoints dans l'autre sens $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$
L'adjoint de l'adjoint est l'identité. $(T^*)^* = T$
Si un opérateur borné T est bijectif d'inverse T^{-1} alors son adjoint est aussi inversible et l'inverse de l'adjoint est l'adjoint de l'inverse $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Rappel : inverses sont automatiquement continus.
L'adjoint et son opérateur ont même norme d'opérateur. $\|T\| = \|T^*\|$. De plus $\|T^*T\| = \|T\|^2$
Le noyau de l'adjoint est l'orthogonal de l'image $KerT^* = (ImT)^\perp$
L'orthogonal du noyau de l'adjoint est l'adhérence de l'image $(KerT^*)^\perp = \overline{ImT}$
Un sous-espace stable par l'opérateur a son orthogonal stable par l'adjoint. $T(F) \subseteq F \Rightarrow T^*(F^\perp) \subseteq F^\perp$
Un opérateur borné dans un espace de Hilbert est un **opérateur auto adjoint** s'il est son adjoint. $T = T^*$
Dans un espace de Hilbert, un opérateur borné P est un projecteur ssi $P^2 = P$.
Un projecteur orthogonal est un projecteur auto-adjoint. $P \in L_c(H)\ P^2 = P, P^* = P$
Operateur de Multiplication dans $L^2(\mu)$ sigma fini TODO.
Pour un opérateur borné T <u>auto-adjoint</u> d'un Hilbert on a $\|T\|_{\mathrm{L_c}(H)} = \sup_{\|u\|_E=1}|(Tu|u)|$
Un opérateur borné auto-adjoint T d'un Hilbert vérifie toujours $\forall u \in H\ \ (Tu|u) \in R$
On note $\boldsymbol{a} = \inf_{\|u\|_E\leq 1}(Tu|u)$ et $\boldsymbol{b} = \sup_{\|u\|_E\leq 1}(Tu|u)$, [a,b] est **l'intervalle caractéristique** de l'opérateur borné auto adjoint.
Théorème de Hellinger-Toeplitz. Un endomorphisme d'ev, d'un Hilbert dans lui-même vérifiant la condition d'auto adjonction $\forall u, v \in H\ (Tu|v) = (u|Tv)$ est continu (un opérateur borné), et donc auto-adjoint. Vient du théorème du graphe fermé.
Une suite d'opérateurs bornés converge faiblement vers un opérateur borné ssi, la suite des adjoints converge vers l'adjoint de la limite faible.
Tout opérateur borné d'un Hilbert complexe, peut s'écrire comme combinaison linéaire de deux operateurs auto adjoints.

III. Opérateurs positifs

Un opérateur borné T d'un Hilbert est dit **positif $\boldsymbol{T \geq 0}$** s'il est auto-adjoint et $\forall u \in H, (Tu|u) \in R_+$
On note $\boldsymbol{S \geq T}$ pour dire $S - T \geq 0$
Une puissance naturelle d'un opérateur borné positif est un opérateur borné positif $T \geq 0 \Rightarrow T^n \geq 0$
Pour un opérateur borné auto adjoint d'un Hilbert, on a. $\|T\| \leq M \Leftrightarrow -MId \leq T \leq MId$
Attention si K=C, $(Tu|u) \in R_+ \forall u$ entraine automatiquement le caractere auto-adjoint, mais cela n'est pas vrai si le corps de base du Hilbert est K=R.
Pour tout opérateur borné T, alors T^*T est un opérateur borné auto-adjoint positif.
Racine carrée d'un opérateur positif*. Pour tout operateur borné T positif $T \geq 0$, il existe un unique operateur borné positif $S \geq 0$ tel que $S^2 = T$. On note $S = \sqrt{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T}^{\frac{1}{2}}$. De plus l'operateur racine carrée

commute avec tout operateur borné qui commute avec T.
La composée de deux operateurs bornés positifs qui commutent est un opérateur positif.
On appelle **module d'un opérateur borné**, l'opérateur positif $|\boldsymbol{T}| = \sqrt{T^*T}$
Le module d'un opérateur borné est homogène $|\alpha T| = |\alpha||T| \quad \forall\alpha \in C$
En général les propriétés $|TS| = |T||S|$ et $|T^*| = |T|$ sont fausses. L'inégalité triangulaire est fausse.
L'application qui transforme un opérateur borné en son module $T \to |T|$ est continue pour la topologie uniforme des opérateurs. On ne sait pas si elle est lipchitzienne.
La norme de l'image par un opérateur borné est la norme de l'image par le module de l'opérateur.
$\forall T \in L_c(H)\ \ \forall u \in H\ \ \|Tu\| = \||T|u\|$
La norme d'opérateur d'un opérateur borné et de son module sont égales $\|T\| = \||T|\|$
Le noyau d'un opérateur borné = celui de son module. $KerT = Ker\ |T|$
Rappel : Un opérateur borné sur un Hilbert est une **isométrie** ssi il conserve les normes.
Un opérateur borné sur un Hilbert est une **isométrie partielle** si sa restriction à l'orthogonal de son noyau est une isométrie. L'orthogonal du noyau est fermé, une isométrie partielle étant isomorphisme de Hilbert sur son image donc ?, l'image est fermé. $H = KerU \oplus (KerU)^{\perp} = ImU \oplus (ImU)^{\perp}$
Une isométrie partielle est l'analogue d'un nombre complexe de module 1. En dimension finie, isométrie, isométrie partielle, automorphisme orthogonal/unitaire sont confondus.
Décomposition polaire*. Pour tout operateur borné T sur un Hilbert, il existe une isométrie partielle U telle que $T = U|T|$. L'isometrie partielle U est determinee de facon unique si on rajoute la condition $Ker(U) = Ker(T)$. De plus on a $Im(U) = \overline{Im(T)}$
Si à un opérateur auto-adjoint T, on applique un polynôme P réel positif ou nul sur l'intervalle caractéristique de l'opérateur, alors on obtient un opérateur $P(T)$ auto-adjoint et positif.
Soit un opérateur borné auto-adjoint T, alors pour tout polynôme réel, $P(T)$ est un opérateur borné de norme d'opérateur majorée par sup de $|P(t)|$ sur l'intervalle caractéristique. $\|P(T)\| \leq \sup_{[a,b]} |P(t)|$
Une suite d'opérateurs bornés positifs, décroissante $(\forall n\ T_{n+1} \leq T_n)$ sur un Hilbert converge fortement (simplement) vers un opérateur borné positif.
Tout opérateur borné d'un Hilbert complexe, peut s'écrire comme combinaison linéaire de deux opérateurs auto adjoints. Tout opérateur auto-adjoint sur un Hilbert complexe peut s'écrire comme combinaison linéaire de deux opérateurs unitaires. Donc tout opérateur borné d'un Hilbert complexe peut s'écrire comme combinaison linéaire de quatre opérateurs unitaires.
Un **opérateur unitaire** est un opérateur borné d'un Hilbert tel que $U^*U = UU^* = I$ où U^* est l'adjoint de U, et I l'opérateur identité. Cette propriété est équivalente à : U est une application d'image dense et U préserve le produit scalaire $\langle\ ,\rangle$. Autrement dit, pour tous vecteurs x et y de l'espace de Hilbert, $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ (ce qui entraîne que U est linéaire). D'après l'identité de polarisation, on peut remplacer « U préserve le produit scalaire » par « U préserve la norme » donc par « U est une isométrie qui fixe 0 ». Le fait que U soit une isométrie assure qu'il est injectif et que son image est complète donc fermée donc (par densité) que U est surjectif. La bijection réciproque $U^{-1} = U^*$ est également un opérateur unitaire. Par conséquent, les opérateurs unitaires apparaissent comme des isomorphismes de l'espace de Hilbert, c'est-à-dire qu'ils en préservent la structure algébrique et métrique. Dans le cas réel on parle d'opérateur **orthogonal.**
L'opérateur de multiplication par f défini sur $L^2(R)$, ou f une fonction de R dans R_+ mesurable bornée,

est un opérateur auto-adjoint positif.

IV. Operateurs compacts.

Un opérateur entre deux Banachs est un **opérateur compact** si l'adhérence de l'image de la boule unité fermée est une partie compacte (du Banach d'arrivée). C'est-à-dire ssi l'image de la boule unité fermée est relativement compacte. On note $\boldsymbol{B_\infty(E,F)}$ l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F.

Tout opérateur compact est borné (continu) donc $B_\infty(E,F) \subseteq L_c(E,F)$.

Rappel théorème de Riesz : Un Kevn est de dim finie ssi la boule unité fermée est compacte.

Si $E = F$ est de dimension infinie, l'identité bien que continue n'est pas compacte $B_\infty(E,F) \subset L_c(E,F)$

$Tu(x) = \int_X K(x,y)u(y)d\mu(y)$ pour un espace mesuré de mesure finie, $K \in C(X \times X, R)$, et $u \in E = F = C(X,R)$ avec X métrique compact, définit un opérateur T compact sur $C(X,R)$ par th. d'Ascoli.

Un opérateur borné est dit **de rang fini** si son image est de dimension finie.

Tout operateur borné de rang fini est compact.

Toute suite d'opérateurs compacts convergente en norme d'opérateur, converge vers un opérateur borné et compact. Ainsi $B_\infty(E,F)$ est Ksev fermé de $L_c(E,F)$ pour la topologie uniforme d'opérateur.

Pour que la composée d'opérateurs bornés (entre Banachs), forme un opérateur borné compact, il suffit que au moins un des opérateurs soit compact.

Si $T \in B_\infty(E,F)$ alors $T^* \in B_\infty(F',E')$

Si une suite de <u>points</u> d'un Hilbert converge faiblement, alors sa suite image par un opérateur compact fixé, converge <u>en norme</u> dans H, vers l'image de la limite faible par l'opérateur compact.

Sur un Hilbert séparable, un opérateur borné est compact ssi il est limite en norme d'opérateur, d'une suite d'opérateurs bornés de rangs finis.

Un opérateur borné d'un Hilbert est compact ssi son operateur adjoint l'est.

IV.2. L'alternative de Fredholm*

Th. Fredholm analytique. * Soit une fonction d'un ouvert connexe de C qui a tout point associe un opérateur borné compact d'un Hilbert. Alors ou bien 1. $\left(I - f(z)\right)^{-1}$ n'existe pour aucun z, ou bien 2. $\left(I - f(z)\right)^{-1}$ existe pour tout $z \in D \setminus S$ ou S est une partie discrète de D. Dans ce cas $\left(I - f(z)\right)^{-1}$ est méromorphe sur D, analytique sur $D \setminus S$ et les résidus aux pôles sont des opérateurs de rang fini, et enfin si $z \in S$, l'equation $f(z)u = u$ possede une solution non triviale dans H.

Alternative de Fredholm. Soit un opérateur compact sur un Hilbert H. Alors ou bien $(I - T)^{-1}$ existe et est borné, ou bien $Tu = u$ possède une solution non identiquement nulle.

Alternative de Fredholm. [Brezis] Soit un opérateur compact T sur un Banach E. Alors

Problème de Dirichlet dans $\boldsymbol{R^3}$. TODO

Chapitre 20. Spectre des opérateurs bornés

I. Spectre, résolvante et rayon spectral

Dans ce contexte on travaille essentiellement dans un Banach complexe. On note svt $T - \lambda = T - \lambda Id_E$.

Une **valeur spectrale** $\lambda \in C$ d'un opérateur borné T sur un Banach, est un scalaire tel que $T - \lambda$ n'est pas inversible/bijectif. (Equivalent par théorème de l'isomorphisme).

Le **spectre** $\boldsymbol{\sigma(T)}$ d'un opérateur borné T sur un Banach est l'ensemble de ses valeurs spectrales.

Une **valeur propre** d'un opérateur borné T sur un Banach est un scalaire tel que $T - \lambda$ n'est pas injectif, cad tel que $Ker(T - \lambda) \neq \{0\}$. Pour les endomorphismes en dim finie, valeur propre=valeur spectrale.

Le **spectre ponctuel $\boldsymbol{\sigma_p(T)}$** d'un opérateur borné T sur un Banach est l'ensemble de ses valeurs propres.
Une valeur propre est toujours une valeur spectrale. $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$.
On appelle **vecteur propre** associe a une valeur propre λ d'un opérateur borné T sur un Banach, un vecteur u du Banach tel que $u \neq 0$ et tel que $Tu = \lambda u$
On appelle **multiplicité d'une valeur propre** λ la dimension de $Ker(T-\lambda)$ donc toujours ≥ 1.
On appelle **valeur résiduelle** d'un opérateur borné T sur un Banach un scalaire λ qui n'est pas une valeur propre ($\lambda \notin \sigma_p$) et tel que $Im(T-\lambda)$ n'est pas dense dans E.
Le **spectre résiduel $\boldsymbol{\sigma_r(T)}$** d'un opérateur borné T , est l'ensemble de ses valeurs résiduelles.
Une valeur résiduelle est toujours une valeur spectrale. $\sigma_r(T) \subseteq \sigma(T)$, mais $\sigma_p(T) \cap \sigma_r(T) = \emptyset$
Généralement $\sigma_r(T) \cup \sigma_p(T) \neq \sigma(T)$.
L'**ensemble résolvant $\boldsymbol{\rho(T)}$** d'un opérateur borné T est le complémentaire dans C de son spectre.
La **résolvante d'un opérateur borné** T sur un Banach est l'application définie sur l'ensemble résolvant qui a tout complexe $z \in \rho(T)$ associe l'opérateur borné inversible $(T-z)^{-1}$ appelé **résolvant de T en z** et note $\boldsymbol{R_z(T)}$**.**
Le groupe des inversibles de l'espace des opérateurs bornés est ouvert dans cet espace.
Le spectre d'un opérateur borné d'un Banach, est un compact de C inclus dans le disque fermé en 0 de rayon la norme de l'opérateur. L'ensemble résolvant d'un opérateur borné est un ouvert de C qui contient donc tout point de module supérieur à la norme de l'opérateur.
Pour tout operateur borné T sur un Banach, la résolvante de l'opérateur est holomorphe sur l'ensemble résolvant. La résolvante tend vers 0 quand le module du complexe tend vers l'infini.
Le spectre d'un opérateur borné sur un Banach (non trivial) est toujours non vide. (par Liouville)
Identité de la résolvante. Pour un opérateur borné T sur un Banach et deux valeurs résolvantes on a toujours : $R_z(T)R_{z'}(T) = R_{z'}(T)R_z(T)$ et l'identité $R_z(T) - R_{z'}(T) = (z-z')R_z(T)R_{z'}(T)$
Identité 2 de la résolvante. Pour deux operateurs bornés T, T' sur un Banach qui commutent, et tout $z \in C$ tel que $|z| > \max(\|T\|, \|T\|)$ alors $R_z(T) - R_z(T') = (T'-T)R_z(T)R_z(T')$ de plus $R_z(T)$ et $R_z(T')$ commutent.
Le **rayon spectral** d'un opérateur borné sur un Banach est le réel positif $r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \in [0, \|T\|]$
Formule du rayon spectral.* Pour tout operateur borné T sur un Banach, on a $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \to r(T)$
Le spectre d'un opérateur a la puissance n est l'ensemble des valeurs spectrales a la puissance n.
Le spectre de l'adjoint d'un opérateur borné d'un Hilbert est l'ensemble conjugue du spectre de l'opérateur.
Le conjugue d'une valeur résiduelle d'un opérateur borné d'un Hilbert, est une valeur propre de l'adjoint. $\lambda \in \sigma_r(T) \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(T^*)$
Une valeur propre d'un opérateur borné d'un Hilbert, voit son conjugue être soit une valeur propre, soit une valeur résiduelle de l'opérateur adjoint. $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$ ou $\overline{\lambda} \in \sigma_r(T^*)$
Un opérateur borné auto-adjoint d'un Hilbert, a son spectre dans R. $\sigma(T) \subseteq R$
Un opérateur borné auto-adjoint d'un Hilbert, n'a pas de valeurs résiduelles. $\sigma_r(T) = \emptyset$
Pour un opérateur borné auto-adjoint d'un Hilbert, les vecteurs propres associes a des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
Un opérateur borné auto-adjoint d'un Hilbert a pour rayon spectral, sa norme d'operateur $r(T) = \|T\|$
II. Spectre des opérateurs compacts

II.1. Spectre des opérateurs compacts

Th de Riesz-Schauder*. Soit T un opérateur compact d'un Hilbert, alors son spectre privé de 0, est un ensemble discret de C qui ne contient que des valeurs propres de multiplicités finies. Si le Hilbert est de dimension infinie, 0 est nécessairement une valeur spectrale. 0 peut être point d'accumulation. (Riesz-Schauder se montre Par Fredholm analytique).

Marche encore pour les opérateurs compacts sur un Banach quelconque mais dur à prouver.

Th de Jentzsch*. Apres Ascoli.

$Tu(x \in X) = \int_X K(x,y)u(y)d\mu(y)$ pour un espace mesure de mesure borélienne finie telle que $\mu(U) > 0$ sur tout ouvert, soit $K \in C(X \times X, R)$, et $u \in E = C(X, R)$ avec X metrique compact, definit un operateur T compact sur $C(X, R)$ par th. d'Ascoli. Alors on a les 3 résultats suivants :

1. Le rayon spectral de T est strictement positif
2. Le rayon spectral lui-même, est une valeur spectrale, et c'est la seule valeur spectrale ayant ce module. Autrement dit le rayon spectral s'atteint en lui-même et uniquement en lui-même.
3. Le noyau de $T - r(T)$ est une droite de C engendrée par une fonction continue strictement >0 sur X.

II.2. Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints.

Si T est un opérateur compact auto-adjoint d'un Hilbert, alors sa norme d'opérateur et l'oppose de sa norme d'opérateur sont des valeurs propres de l'opérateur.

Lemme des noyaux. Si T est un opérateur compact auto-adjoint d'un Hilbert, alors on peut décomposer le Hilbert en somme directe interne, du noyau de l'opérateur + la somme hilbertienne interne des espaces spectraux associes aux valeurs spectrales/propres non nulles de l'opérateur.

$H = Ker(T) \oplus \widehat{\bigoplus}_{\lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0} \; Ker(T - \lambda)$ Dans le cas d'un endomorphisme auto adjoint en dimension finie, on retrouve que l'espace est somme directe (orthogonale) de ses sous-espaces propres.

Théorème spectral.* via Riesz-Schauder via Fredholm analytique

Un opérateur borné compact auto-adjoint T d'un Hilbert peut s'écrire comme la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ au sens de la norme d'operateur, ou les λ_n sont les valeurs propres/spectrales non nulles prises dans un ordre donné. Et P_n est la projection sur l'espace propre correspondant $Ker(T - \lambda)$. Ces projections sont de rang fini, et le produit de deux projections distinctes de cette famille, donne toujours 0. Les $\lambda_n \to 0$ et peuvent etre choisis de sorte que $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$. La somme est indépendante de l'ordre des λ_n.