Chapitre 13. L'intégrale de Lebesgue
I. L'intégrale sur un espace mesuré
I.1. Fonctions étagées mesurables
I.1.1. Définition et représentation standard des fonctions simples
Une application entre deux ensembles est une **fonction simple** si son ensemble image est une partie finie de l'ensemble d'arrivée.
Toute application à valeurs dans un ensemble fini est donc simple, en particulier les indicatrices.
Toute fonction simple vers un anneau unitaire peut être écrite comme combinaison linéaire finie de fonctions indicatrices. Il existe une écriture standard (en considérant l'image réciproque de chaque point distinct de l'image) ou les indicatrices sont sur des parties qui forment une partition du domaine de la fonction.
Une **fonction étagée** est une fonction simple mesurable, d'un espace mesurable, vers $\mathbb{C}/\mathbb{R}/[0,\infty]$ muni de sa tribu borélienne.
Une fonction en escalier est étagée mais pas forcément l'inverse.
I.1.2. Intégration des fonctions étagées mesurables
L'intégrale sur un espace mesuré, d'une fonction indicatrice d'une mesurable de cet espace, est la mesure de cette partie. $\int_X \boldsymbol{I_A d\mu} = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{A})$
L'intégrale sur un espace mesuré d'une fonction étagée mesurable, qu'on peut écrire comme combinaison linéaire d'indicatrices, définie sur l'espace mesuré, a valeurs dans $[0,+\infty]$ muni de sa tribu borélienne, est la combinaison linéaire correspondante des mesures des parties des indicatrices. $\int_X \boldsymbol{f\, d\mu} = \int_X \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{y_j I_{A_j}\ d\mu} = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{y_j \mu(A_j)} = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{y_j} \int_X \boldsymbol{I_{A_j} d\mu}$. La valeur est indépendante de l'écriture choisie.
L'intégrale sur un espace mesuré de deux fonctions étagées de cet espace vers [0,+∞], est la somme des intégrales. $\int_X f + g d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$
L'intégrale sur un espace mesuré de $\alpha \geq 0$ fois une fonction étagée de cet espace vers [0,+∞], est l'intégrale fois α. $\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$
L'intégrale sur un espace mesuré vers [0,+∞] est monotone par rapport aux fonctions étagées.
L'intégrale sur un mesurable d'un espace mesuré d'une fonction étagée mesurable vers [0,+∞], est l'intégrale de la fonction étagée fois l'indicatrice sur la partie $\int_A f d\mu = \int_X f \cdot 1_A\, d\mu$
L'intégrale sur un espace mesuré vers [0,+∞] est monotone par rapport aux parties considérées.
Une fonction en escalier d'un segment vers $[0,+\infty]$ est une fonction étagée mesurable dont l'intégrale de Lebesgue coïncide avec l'intégrale de Riemann (La mesure de Lebesgue étant restreinte au segment).
Une fonction étagée mesurable vers [0,+∞] f fixée définit une **mesure a densité d'une fonction étagée** $\nu_f: A \in M \mapsto \int_A f\, d\mu$, l'évaluation de son intégrale sur un mesurable. $\boldsymbol{\nu_f = f \cdot \mu}$
I.2. Fonctions mesurables a valeurs dans [0,+∞]
I.2.1. Integration des fonctions mesurables a valeurs dans [0,+∞]
Approximation des fonctions mesurables positives.
Toute fonction mesurable f d'un espace mesuré vers $[0,+\infty]$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions étagées mesurables f_n. ($\forall n\ 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq f$). De plus cette suite converge uniformément vers la fonction sur toute partie de l'espace sur laquelle la fonction est bornée.
On appelle **intégrale de Lebesgue de la fonction mesurable positive** le supremum des intégrales des fonctions étagées positives mesurables inférieures à la fonction considérée.
Une fonction d'un espace mesuré vers [0,+∞] est une **fonction intégrable** si elle est mesurable

d'intégrale de Lebesgue finie. L'image réciproque de $+\infty$ d'une telle fonction est de mesure nulle.
L'intégrale de Lebesgue d'une fonction positive est encore monotone, linéaire.

I.2.2. Le théorème de convergence monotone (ou de Beppo-Levi)*

Toute suite croissante de fonctions mesurables dans $[0,+\infty]$ converge simplement vers une fonction mesurable dans $[0,+\infty]$ (la fonction supremum de la suite), et définit une suite d'intégrale croissantes qui admet une limite dans [0,+∞], cette limite est egale a l'intégrale de Lebesgue de la fonction et est donc indépendante de la suite choisie. $\forall n, 0 \leq f_n \leq f_{n+1} \Rightarrow \int_X f_n \rightarrow \int_X f = \int_X \sup_n f_n = \sup_n \int_X f_n = \int_X \lim_n f_n = \lim_n \int_X f_n$

La différence avec la construction de l'intégrale de Riemann est notablement, la limite simple et la croissance de la suite qui suffisent à montrer que la limite de l'intégrale existe et est indépendante de la suite. C'est pour ça aussi que l'on commence par considérer que les fonctions positives dans [0,+∞].

La fonction d'un espace mesuré vers $[0,+\infty]$ limite simple d'une suite croissante de fonctions mesurables, est une fonction intégrable ssi la suite des intégrales est majorée.

L'intégrale d'une fonction mesurable d'un espace mesuré vers [0,+∞] est nulle ssi f est nulle mu presque partout. Deux fonctions mesurables vers [0,+∞] qui coincident mu presque partout ont même intégrale de Lebesgue, de plus l'une est intégrable ssi l'autre l'est.

Contre-exemple th Beppo Levi si hypothèse de croissance non vérifiée : $n \mapsto n1_{\left[0,\frac{1}{n}\right]}, n \mapsto 1_{[n,n+1]}$

Une fonction mesurable d'un espace mesuré (X, M, μ) vers [0,+∞] f fixée définit une **mesure a densité/intégrale d'une fonction mesurable par rapport à une autre mesure** $\nu_f: A \in M \mapsto \int_A f\, d\mu$, l'évaluation de son intégrale sur un mesurable. $\boldsymbol{\nu_f = f \cdot \mu}$

I.2.3. Le lemme de Fatou.

Pour toute suite de fonctions $(f_n)_n$ mesurables d'un espace mesuré vers [0,+∞], on a l'inégalité $\int_X \liminf_n f_n\, d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu$

Si la suite de fonctions mesurables admet une limite simple (vrai si elle est croissante) alors l'intégrale de la limite simple est majorée par la limite inférieure de la suite des intégrales $\int_X f d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n d\mu$

I.3. Fonctions Lebesgue-intégrables

I.3.1. Intégration des fonctions a valeurs réelles

Si f est une fonction mesurable d'un espace mesuré vers R, on pose $f^+ = Max(f,0), f^- = Max(-f,0)$ elles sont mesurables d'intégrales de Lebesgue bien définies et $f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$

On dit que f est une **fonction intégrable au sens de Lebesgue** ssi $|f|$ a valeurs dans [0,+∞] l'est ssi f^+ et f^- le sont. Dans ce cas **l'intégrale de Lebesgue** de la fonction est $\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$. On note $\boldsymbol{\mathcal{L}^1(X, \mu, R)}$ l'espace des fonctions intégrables réelles au sens de Lebesgue.

L'ensemble des fonctions $\boldsymbol{\mathcal{L}^1}$ dans R(resp C) est un R (resp C) espace vectoriel. L'opérateur qui à une fonction $\boldsymbol{\mathcal{L}^1}$ dans R/C associe son intégrale, est linéaire. L'intégrale vérifie l'inégalité triangulaire $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$

L'application qui a une fonction de $\boldsymbol{\mathcal{L}^1}$ dans R/C associe l'intégrale de son module est une semi-norme et l'opérateur intégral est continu vis-à-vis de cette semi-norme 1.

Une fonction mesurable a valeurs dans R/C dont le module est majoré par une fonction intégrable a valeurs dans [0,+∞], est une fonction intégrable.

L'ensemble des points d'image non nulle d'une fonction intégrable a valeur dans R/C est σ-fini.

L'intégrale d'une fonction intégrable a valeurs dans R est positive si la fonction l'est.
L'intégrale est monotone pour les fonctions intégrables a valeurs dans R.

I.3.2. Intégration des fonctions a valeurs complexes

On dit que f une fonction mesurable d'un espace mesuré vers C est une **fonction intégrable au sens de Lebesgue** ssi son module $|f|$ l'est ssi $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont. Dans ce cas **l'intégrale de Lebesgue** de la fonction est $\int_X f d\mu = \int_X Re(f) d\mu + i \int_X Im(f) d\mu$. note $\boldsymbol{\mathcal{L}^1(X, \mu, C)}$ l'espace des fonctions intégrables à valeurs complexes au sens de Lebesgue.
Autres propriétés simples de l'intégrale (TODO)

I.3.3. Fonctions définies sur un espace mesuré complet

Soit [0,+∞], R, ou C un ensemble d'arrivee.
Un espace mesuré (de mesure mu) est **complet** ssi (pour toute fonction coïncidant presque partout avec la limite simple de toute suite de fonctions mesurables (de l'espace vers l'ensemble d'arrivée) alors la fonction est mesurable) ssi (pour tout couple de fonctions de cet espace vers l'ensemble d'arrivée identiques mu presque partout, l'une est mesurable ssi l'autre est mesurable)
Dans ce cas si l'une est intégrable, l'autre l'est et elles ont même intégrale de Lebesgue.
En particulier toute fonction nulle presque partout sur un espace mesurable complet est mesurable.
Une fonction d'un espace mesuré vers [0,+∞], R, ou C qui est mesurable, est aussi mesurable sur l'espace mesuré complété, de plus la fonction est intégrable par rapport à la mesure ssi elle l'est par rapport à la mesure complété, et dans ce cas les intégrales coïncident.
Pour une fonction d'un espace mesuré vers [0,+∞], R, ou C qui est mesurable par rapport a la tribu de l'espace mesuré complété, il existe une autre fonction mesurable par rapport à la tribu de l'espace mesuré non complète, qui coïncide avec elle presque partout (pour la mesure μ non complete), μ intégrable ssi la fonction l'est par rapport à $\hat{\mu}$, dans ce cas de meme intégrale.
Une fonction mesurable d'un espace mesuré vers C de module majore mu presque partout par une fonction intégrable, est intégrable.

I.3.4. Le théorème de convergence dominée

D'un espace mesuré complet vers C,
Une suite de fonctions mesurables, qui converge simplement presque partout, et telle que la suite des modules est majore presque partout par une fonction intégrable, alors la limite simple (ou toute fonction presque partout =) est intégrable, la suite converge en semi-norme 1 vers la limite simple, L'intégrale de la limite simple est la limite des intégrales de la suite. On peut intervertir limite et intégrale. L'hypothèse de domination est nécessaire ($n \mapsto n 1_{\left[0, \frac{1}{n}\right]}, n \mapsto 1_{[n,n+1]}$)

I.3.5. Intégration des applications a valeurs dans $\boldsymbol{R^n}$ ou $\boldsymbol{C^n}$

Dans K^n = R^n ou C^n l'intégrabilité se définit comme équivalente a l'intégrabilité des composantes, l'intégrale de Lebesgue est le n uplet des intégrales des composantes.
Le théorème de convergence dominée s'applique encore avec n hypotheses de dominations, une sur chaque fonction composante.
Dans un K ev de dimension finie, on peut aussi généraliser l'intégrabilité, en considérant comme équivalente à l'intégrabilité des composantes suivant une base. Cela est indépendant de la base choisie, l'intégrale aussi. Le théorème de convergence dominée s'applique encore.
En dimension infinie, c'est plus difficile.

I.3.6. Intégration par rapport à une mesure image

Théorème de transfert. Soit une fonction mesurable h entre deux espaces mesurables, le premier etant mesure, de mesure mu de sorte à définir la mesure image $h * \mu$ sur l'espace d'arrivee. Alors toute fonction f définie sur le deuxième espace, a valeurs dans R/C est intégrable par rapport à la mesure image ssi composée avec la fonction initiale, elle $(f \circ h)$ est intégrable pour la mesure initiale mu. Dans ce cas on a égalité des intégrales $\int_Y f d(h * \mu) = \int_X (f \circ h) d\mu$. Dans le cas a valeurs dans [0,+∞] la mesurabilite de la nouvelle fonction f suffit, pour pouvoir ecrire les intégrales et leur égalité. possible ∞

I.3.7. Intégration sur une partie et espace mesuré induit.

Une fonction d'une partie d'un espace mesurable dans C est intégrable pour la mesure induite sur la partie, ssi elle est restriction d'une fonction sur tout l'espace mesurable qui multipliée à l'indicatrice sur la partie est une fonction intégrable sur tout l'espace pour la mesure de l'espace.

II. Intégration des fonctions définies sur un espace produit.

II.1. Mesure produit et sommation par tranches

Sur deux espaces mesurés de mesures respectives μ, ν, un pavé mesurable $A \times B$ s'exprimant comme l'union d'une famille disjointe finie ou dénombrable de pavés mesurables $A \times B = \bigcup_{j \in J} A_j \times B_j$ permet d'écrire $\mu(A)\nu(B) = \sum_{j \in J} \mu(A_j)\nu(B_j)$

Pour deux espaces mesurés $(X, M, \mu), (Y, N, \nu)$, il existe une mesure λ sur la tribu produit $M \otimes N$ vérifiant $\forall A \in M\ \forall B \in N\ \lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. Si de plus μ et ν sont σ-finies, une telle mesure est unique est appelée **mesure produit de $\boldsymbol{\mu}$ par $\boldsymbol{\nu}$** et notée $\boldsymbol{\mu \otimes \nu}$. En fait, la σ-finitude n'est pas requise pour désigner une mesure produit particulière de façon canonique, la démonstration montre que l'on peut choisir λ égale a la restriction a $M \otimes N$ de la mesure extérieure sur $X \times Y$ induite par la prémesure définie uniquement sur les pavés élémentaires, λ est la **mesure produit de $\boldsymbol{\mu}$ par $\boldsymbol{\nu}$** et encore notée $\boldsymbol{\mu \otimes \nu}$. (démonstration utilise théorème de prolongement des prémesures définies sur algèbres).

$\mu \otimes \nu$ est aussi σ-fini.

Sur un espace produit $X \times Y$, **la tranche/section verticale en un point $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ d'une partie $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$** est l'ensemble $\boldsymbol{E}_{(\boldsymbol{x},\cdot)} = \{y \in Y \mid (x, y) \in E\}$.

Sur un espace produit $X \times Y$, **la tranche/section horizontale en un point $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$ d'une partie $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$** est l'ensemble $\boldsymbol{E}_{(\cdot,\boldsymbol{y})} = \{x \in X \mid (x, y) \in E\}$.

Sur un espace produit fini de 2 espaces mesurables, les tranches d'une partie mesurable sont des parties mesurables c'est-à-dire $\forall E \in M \otimes N\ \ \forall x \in X\ E_{(x,\cdot)} \in M$ et $\forall y \in Y\ E_{(\cdot,y)} \in N$. Réciproque fausse.

Soit une application <u>mesurable</u> d'un espace produit fini de 2 espace mesurables vers un troisième espace mesurable : $f : (X \times Y, M \otimes N) \to (Z, P)$, alors les applications partielles sont des applications mesurables : $\forall x \in X\ f(x,\cdot) : (Y, N) \to (Z, P)$ est mesurable et $\forall y \in Y\ f(\cdot, y) : (X, M) \to (Z, P)$ est mesurable. Réciproque fausse.

Sommation par tranches. Sur un espace produit fini de 2 espaces mesurables <u>σ-finis</u> un mesurable $E \in M \otimes N$ définit les fonctions $X \to [0, +\infty] : x \mapsto \nu(E_{(x,\cdot)})$ et $Y \to [0, +\infty] : y \mapsto \mu(E_{(\cdot,y)})$ qui sont alors respectivement M-mesurable et N-mesurable et on a $\int_X \nu(E_{(x,\cdot)}) d\mu = \int_Y \mu(E_{(\cdot,y)}) d\nu = (\mu \otimes \nu)(E)$. Cela fournit donc une définition équivalente de la mesure produit λ définie sur $M \otimes N$. L'hypothèse de σ-finitude est nécessaire pour que la sommation par tranche soit vraie.

II.2. Théorème de Fubini-Tonelli

Soit $(X, M, \mu), (Y, N, \nu)$ deux espaces mesurés <u>σ-finis</u>.

Tonelli. Pour une fonction $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ $M \otimes N$ mesurable, les fonctions partielles sont mesurables, $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ est M-mesurable, $y \mapsto \int_X f(x, y) d\nu(x)$ est N-mesurable, et on a

$\int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y) = \int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu)$ (peut valoir $+\infty$)

Fubini. = Tonelli pour les fonctions a valeurs dans C et intégrables au lieu de simplement mesurable.

Une fonction $f : X \times Y \to C$ est $\mu \otimes \nu$-intégrable càd $\int_{X\times Y}|f(x,y)|d(\mu\otimes\nu)(x,y) < \infty$ ssi $\int_X\left(\int_Y|f(x,y)|d\nu(y)\right)d\mu(x) < \infty$ ssi $\int_Y\left(\int_X|f(x,y)|d\mu(x)\right)d\nu(y) < \infty$

Dans ce cas, les fonctions partielles sont intégrables, $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ est μ-intégrable, $y \mapsto \int_X f(x,y)d\nu(x)$ est ν-intégrable, et on a

$\int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y) = \int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu)$ (toujours fini dans C)

Les hypothèses sont bien toutes nécessaires (même la σ-finitude).

Théorème de Fubini-Tonelli pour le complété d'un espace produit.

Soit $(X, M, \mu), (Y, N, \nu)$ deux espaces mesurés <u>σ-finis</u>. Soit $\left(X \times Y, \widehat{M\otimes N}, \widehat{\mu\otimes\nu}\right)$ l'espace mesuré complété de $(X \times Y, M\otimes N, \mu\otimes\nu)$

Tonelli. Pour une fonction $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ $\widehat{M \otimes N}$ mesurable, les fonctions partielles sont mesurables, $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ est M-mesurable, $y \mapsto \int_X f(x,y)d\nu(x)$ est N-mesurable, et on a

$\int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y) = \int_{X\times Y} f\,d\widehat{\mu\otimes\nu}$ (peut valoir $+\infty$)

Fubini. Pour une fonction $f : X \times Y \to C$ $\widehat{\mu \otimes \nu}$-intégrable,

Une fonction $f : X \times Y \to C$ est $\widehat{\mu \otimes \nu}$-intégrable càd $\int_{X\times Y}|f(x,y)|d\left(\widehat{\mu\otimes\nu}\right)(x,y) < \infty$ ssi $\int_X\left(\int_Y|f(x,y)|d\nu(y)\right)d\mu(x) < \infty$ ssi $\int_Y\left(\int_X|f(x,y)|d\mu(x)\right)d\nu(y) < \infty$

Dans ce cas les fonctions partielles sont intégrables, $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ est μ-intégrable, $y \mapsto \int_X f(x,y)d\nu(x)$ est ν-intégrable, et on a

$\int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x) = \int_Y\left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right)d\nu(y) = \int_{X\times Y} f\,d\widehat{\mu\otimes\nu}$ (toujours fini dans C).

Cas particulier Fubini. Si f est continue sur un produit de segments, les hypothèses de Fubini sont vérifiées, donc les conclusions s'appliquent.

On omettra donc généralement les parenthèses dans une suite d'intégrales simples. Les théorèmes vus dans cette section s'étendent au cas d'un produit <u>fini</u> de n espaces mesurés. On ne peut pas généraliser simplement au cas dénombrable infini car rien ne garantit la convergence du procédé d'intégration par rapport à une suite infinie de variables. L'erreur la plus courante dans Fubini, est d'oublier de vérifier la mesurabilité/intégrabilité de l'application $f: X \times Y \to C/[0, +\infty]$

III. Compléments [wiki, Barbe-Ledoux]

III.1. Inégalité de Jensen. Dans un espace probabilisé ($\mu(\Omega) = 1$), pour une fonction f μ-intégrable a valeurs dans R et φ une fonction convexe d'un intervalle de R contenant l'image de f, vers R, alors on a l'inégalité $\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \le \int_\Omega \varphi \circ f\,d\mu$. L'intégrale de droite pouvant être égale a $+\infty$.

Lorsque φ est strictement convexe, les deux membres sont égaux ssi f constante μ-pp.

III.2. Théorème de Radon-Nikodym.

Rappel : Dans un espace mesuré de mesure μ σ-finie, la **mesure intégrale/a densité d'une fonction $\boldsymbol{h}$ mesurable positive (resp. $\boldsymbol{\mu}$-intégrable réelle/complexe) relativement a $\boldsymbol{\mu}$**, correspond à la fonction $\boldsymbol{\nu_h}: A \in M \mapsto \int_A h\,d\mu$, l'évaluation de son intégrale sur un mesurable. On note $\boldsymbol{\nu_h = h \cdot \mu}$ ou encore $h = \frac{d\nu_h}{d\mu}$

La mesure intégrale ν, est aussi une mesure σ-finie. $\boldsymbol{h = \frac{d\nu}{d\mu}}$ est appelée **densité de $\boldsymbol{\nu}$ par rapport a $\boldsymbol{\mu}$**

Dans un espace mesurable, **une mesure $\boldsymbol{\sigma}$-finie $\boldsymbol{\nu}$ est absolument continue par rapport à une mesure $\boldsymbol{\sigma}$-finie $\boldsymbol{\mu}$** et on note $\boldsymbol{\nu \ll \mu}$ ssi tout mesurable de mesure nulle pour μ est de mesure nulle

pour ν.
Théorème de Radon-Nikodym. Pour deux mesures σ-finies μ, ν sur un espace mesurable, ν est absolument continue par rapport à μ ssi ν est une mesure intégrale par rapport a μ ssi ν admet une densité par rapport a μ. Autrement dit $\forall A \in M\ \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$ ssi $\exists f$ μ-intégrable $\forall A \in M\ \nu(A) = \int_A f\ d\mu$. Autrement dit $\nu \ll \mu$ ssi $\frac{d\nu}{d\mu}$ existe.
Il existe une généralisation de ce théorème (voir Wikipédia).

Chapitre 14. Calcul intégral

I. L'intégrale de Lebesgue sur $\boldsymbol{R^n}$

I.1. L'espace de Lebesgue $(\boldsymbol{R^n}, \boldsymbol{M_L}(\boldsymbol{R^n}), \boldsymbol{\lambda_n})$

On considère les fonctions définies sur cet espace, a valeurs dans $[0, +\infty]$, R, ou C les espaces d'arrivée étant toujours supposés muni de leur tribu borélienne. Une fonction sera dite **fonction Lebesgue-mesurable** si elle est mesurable vis-à-vis de la tribu borélienne sur l'espace d'arrivée, et la tribu de Lebesgue sur l'espace de départ. Il faut faire attention car la composée de fonctions réelles Lebesgue-mesurable n'est donc pas nécessairement Lebesgue-mesurable (c'est cependant le cas si par exemple la fonction externe est continue ou encore borélienne).
Une **fonction borélienne** est une fonction mesurable relativement aux tribus de Borel.
On a toujours $B(R^{p+q}) = B(R^p) \otimes B(R^q) \subset M_L(R^p) \otimes M_L(R^q) \subset M_L(R^{p+q})$
$\rho^{\otimes n} = \lambda_n | B(R^n)$, $(R^n, M_L(R^n), \lambda_n)$ est le complété de $\left(R^n, B(R^n), \rho^{\otimes n}\right)$
L'espace de Lebesgue $\left(R^{p+q}, M_L(R^{p+q}), \lambda_{p+q}\right)$ est le complété de $\left(R^{p+q}, M_L(R^p) \otimes M_L(R^q), \lambda_p \otimes \lambda_q\right)$
Pour une fonction Lebesgue-mesurable, il existe une fonction borélienne, qui coïncide avec elle Borel presque partout, Borel-intégrable ssi la fonction est Lebesgue-intégrable, dans ce cas de même intégrale. $\int_{R^n} f d\lambda_n = \int_{R^n} g d\rho^{\otimes n}$

I.2. Résultats de comparaison des intégrales de Lebesgue et de Riemann

Toute fonction Riemann intégrable d'un segment vers C est aussi Lebesgue-intégrable sur ce segment (en particulier Lebesgue-mesurable) et son intégrale de Lebesgue coïncide avec celle de Riemann.
$RI([a, b], C) \subset \mathcal{L}^1([a, b], C)$
Si au lieu d'un segment, b est exclu et possiblement infini, toute fonction localement Riemann-intégrable sur [a,b[est aussi Lebesgue-mesurable sur [a,b[, et de plus, Lebesgue-intégrable sur [a,b[ssi l'intégrale de Riemann généralisée est absolument convergente. Dans ce cas les intégrales coïncident.

I.3. Intégrale d'une fonction Lebesgue-intégrable admettant une primitive

Premier théorème fondamental du calcul intégral.
Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur un segment [a,b], alors $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de la fonction f sur le segment $[a, b]$.
Second théorème fondamental du calcul intégral. Une fonction F derivable en tout point d'un segment [a,b] et dont la dérivée est Lebesgue-intégrable sur [a,b] vérifie $\int_a^b F'(t) d\lambda(t) = F(b) - F(a)$
Le théorème est faux si la fonction est seulement dérivable presque partout (Escalier de Cantor).

I.4. Intégrales des fonctions de plusieurs variables réelles

TODO

I.5. Formule de changement de variables*

Soit U, V ouverts de R^n, $\varphi: U \to V$ un C^1 diffeomorphisme, $f_Y: V \to C, f_X: U \to C, f_X = f_Y \circ \varphi$
D'un point de vue physicien, on a $y = y(x) = \varphi(x),\ x = x(y) = \varphi^{-1}(y),$ on peut assimiler f_X a f_Y, on peut voir f comme fonction de y partant de V, ou on peut voir f comme partant de U en la composant avec φ. On suppose x et y relies par $y = \varphi(x)$, alors $f_X(x) = f_Y(y)$. On note
$\left|\frac{dy}{dx}\right| = \left|\det\frac{dy}{dx}\right|_x$
$\int_V f_Y(y)dy = \int_U f_Y(y)\left|\frac{dy}{dx}\right| dx = \left(\int_V f_X(x)dy = \int_U f_X(x)\left|\frac{dy}{dx}\right| dx\right)$
Pour que l'egalite soit vérifiée, l'hypothèse supplémentaire est que (f_Y est Lebesgue-intégrable par rapport λ_V) ou ce qui est equivalent que l'intérieur de l'autre intégrale le soit. Dans le cas à valeur dans [0,+∞], seule la Lebesgue mesurabilité est requise, l'intégrale pouvant être infinie. On a l'autre inégalité analogue exprimée par rapport à l'autre variable.
$\int_U f_X\,(x)dx = \int_V f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| dy = \left(\int_U f_Y(y)dx = \int_V f_Y(y)\left|\frac{dx}{dy}\right| dy\right)$
Lemme pour la demo : $\lambda_V\big(y(A)\big) = \left(\int_{y(A)} dy\right) = \int_A \left|\frac{dy}{dx}\right| dx$
Une fonction continue sur un compact de R^n est Lebesgue-intégrable sur le compact.
$x \in [0,1] \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$, et 0 si x=0, est dérivable en tout point de [0,1] mais sa dérivée n'est ni Riemann-intégrable, ni Lebesgue intégrable.

II. Interversion de limites et d'intégrales

II.1. Régularité sous le signe intégrale

II.1.1. Continuité sous le signe intégrale

cf fiche interversions

II.1.2. Dérivabilité sous le signe intégrale

Théorème d'interversion intégrale dérivée.

cf fiche interversions
Le théorème de dérivabilité n'a pas de version locale, on peut montrer la dérivabilité sur tout compact et restreindre la domination sur les compacts, ce qui suffit à montrer la dérivabilité sur l'intervalle
Ex : La transformée de Laplace d'une fonction intégrable sur R+ : $x \geq 0 \mapsto \int_0^\infty e^{-tx} f(t)dt$ est bien définie et continue sur R_+, de classe C^1 sur R_+^* et de limite nulle en $+\infty$.

Théorème d'interversion intégrale dérivée partielle généralise.

cf fiche interversions

Théorème d'interversion intégrale dérivée complexe.

cf fiche interversions

II.2. Interversion de Somme et Intégrale

II.2.1. Séries de fonctions positives

Pour une série de fonctions mesurables sur un espace mesuré, a valeur dans [0,+∞], sa somme et la suite de ses intégrales sont définies et s'intervertissent. $\int_X \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x)$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$

II.2.2. Séries de fonctions a valeurs dans R ou C

cf fiche interversions