Un arc paramétré de classe C^k d'un $\mathbb{R}$ean E, correspond à un couple (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \to E$ de classe C^k avec $k \in \mathbb{N}$.
La trajectoire/Le support d'un arc paramétré (I, f) correspond à l'ensemble $f(I) \subseteq E$
Deux arcs paramétrés $(I, f), (J, g)$ d'un $\mathbb{R}$ean sont C^k équivalents ssi $g = f \circ \theta$ avec $\theta: J \to I$ un C^k difféomorphisme de J sur I. (qui doit donc être strictement monotone)
Deux arcs paramétrés $(I, f), (J, g)$ d'un $\mathbb{R}$ean sont C^k équivalents positivement ssi $g = f \circ \theta$ avec $\theta: J \to I$ un C^k difféomorphisme croissant de J sur I
Deux arcs paramétrés $(I, f), (J, g)$ d'un $\mathbb{R}$ean sont C^k équivalents négativement ssi $g = f \circ \theta$ avec $\theta: J \to I$ un C^k difféomorphisme décroissant de J sur I
Ces trois dernières propriétés sont des relations d'équivalence sur la classe des arcs paramétrés.
Deux arcs paramétrés équivalents le sont soit positivement, et on dit qu'ils sont **de même sens** soit négativement et on dit qu'ils sont **de sens contraire**.
Un arc paramétré, C^k équivalent à un autre arc C^k, est automatiquement C^k par composition.
Deux arcs paramétrés équivalents ont même trajectoire.
Deux arcs paramétrés ayant même trajectoire, peuvent ne pas être équivalents : par exemple un arc parcourant un segment directement sans revenir en arrière, et un arc qui revient sur ses pas temporairement ne sont pas équivalents, car il ne pourrait y avoir une bijection continue monotone entre les deux. Intuitivement deux arcs équivalents correspondent au même parcours, deux arcs non équivalents correspondent à des parcours différents, quand bien même les trajectoires peuvent coïncider.
Un arc géométrique de classe C^k d'un $\mathbb{R}$ean, correspond à une classe de la relation C^k-équivalent sur l'ensemble des arcs paramétrés C^k de l'espace. Intuitivement un arc géométrique correspond donc à un sens de parcours donné de l'arc, sans information de vitesse.
Un paramétrage (admissible) d'un arc géométrique, est un arc paramétré élément de sa classe d'équivalence.
Les paramétrages d'un même arc géométrique, ont même trajectoire.
La trajectoire d'un arc géométrique, est la trajectoire de n'importe lequel de ses paramétrages.
La trajectoire d'un arc géométrique, peut être celle de plusieurs arcs géométriques distincts ayant des parcours différents.
Un arc géométrique C^k est aussi C^l pour tout $l \in [\![0, k]\!]$
Parmi les paramétrages admissibles d'un arc géométrique C^k, il y a au plus 2 classes de C^k-équivalence positive. S'il y en a bien 2 on dit que **l'arc géométrique est orientable.**
Orienter un arc géométrique orientable, c'est désigner une de ces 2 classes de C^k équivalence positive comme **directe**. L'autre classe est qualifiée d'**indirecte**.
Une **courbe différentiable C^k** de $\mathbb{R}^n$/ d'un $\mathbb{R}$ean / d'une variété différentiable C^k correspond à une sous-variété C^k de dimension 1.
Un **arc géométrique est simple** si n'importe lequel de ses paramétrages est injectif.
La trajectoire d'un arc géométrique/paramétré C^k simple est une courbe C^k connexe ? TODO
Une courbe C^k connexe, est la trajectoire d'un arc simple ? TODO
Etude des arcs géométriques.
Un point d'un arc géométrique, est un point de sa trajectoire.
Pour $(I, f), (J, g)$ deux paramétrages d'un même arc géométrique C^k avec $k \geq 2$, et $M_0 = f(t_0) = g(u_0)$ un point de l'arc, on a $vect_{1 \leq i \leq k} \overrightarrow{f^{(i)}(t_0)} = vect_{1 \leq i \leq k} \overrightarrow{g^{(i)}(u_0)}$.
Pour un arc géométrique C^k avec $k \geq 2$, en un point $M_0 = f(t_0)$ de la trajectoire,

$\boldsymbol{p} = \min\left\{i \in [\![1,k]\!] \mid \overrightarrow{f^{(i)}(t_0)} \neq \vec{0}\right\}$ existe ? et est indépendant du paramétrage.
Pour un arc géométrique C^k avec $k \geq 2$, en un point $M_0 = f(t_0)$ de la trajectoire,
$\boldsymbol{q} = \min\left\{i \in [\![p+1,k]\!] \mid \left(\overrightarrow{f^{(p)}(t_0)}, \overrightarrow{f^{(i)}(t_0)}\right) \text{ libre}\right\}$ existe ? et est indépendant du paramétrage.
La tangente en un point $\boldsymbol{M_0 = f(t_0)}$ d'un arc $\boldsymbol{C^k}$ ($\boldsymbol{k \geq 2}$) est $D_0 = M_0 + \mathbb{R}\overrightarrow{f^{(p)}(t_0)}$
$\overrightarrow{f^{(p)}(t_0)} = \lim_{t \to t_0} \frac{p!}{(t-t_0)^p} \overrightarrow{M_0 M_t}$??
Un arc $\boldsymbol{C^1}$ admet une demi-tangente en $\left(\boldsymbol{M_0 = f(t_0)}\right)^{-|+}$ dirigée par $\vec{\boldsymbol{a}}$ ssi $\frac{\overrightarrow{M_0 M_t}}{\|\overrightarrow{M_0 M_t}\|} \to_{t \to t_0^{-|+}} \vec{a}$.
Un arc $\boldsymbol{C^1}$ admet une tangente en $\boldsymbol{M_0 = f(t_0)}$ parallèle à $\vec{\boldsymbol{a}}$ ssi l'arc admet une demi tangente en M_0^- et en M_0^+ chacune dirigée par $\vec{a}$ ou $-\vec{a}$. C'est toujours le cas si $k \geq 2$??
Pour <u>$\dim E = 2$</u> soit $R_0\left(M_0, \overrightarrow{f^{(p)}(t_0)}, \overrightarrow{f^{(q)}(t_0)}\right)$ repère en un point d'un arc C^k ($k \geq 2$), alors pour $M_t = f(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$. On a $x(t) \sim_{t \to t_0} \frac{(t-t_0)^p}{p!}$ et $y(t) \sim_{t \to t_0} \frac{(t-t_0)^q}{q!}$
Un point $\boldsymbol{M_0}$ d'un arc $\boldsymbol{C^k}$ ($\boldsymbol{k \geq 2}$) est régulier ssi $p = 1$ ssi $\overrightarrow{f'(t_0)} \neq \vec{0}$
Un point $\boldsymbol{M_0}$ d'un arc $\boldsymbol{C^k}$ ($\boldsymbol{k \geq 2}$) est birégulier ssi $p = 1$ et $q = 2$
Un point $\boldsymbol{M_0}$ d'un arc $\boldsymbol{C^k}$ ($\boldsymbol{k \geq 2}$) est ordinaire ssi p impair et q pair.
Un point $\boldsymbol{M_0}$ d'un arc $\boldsymbol{C^k}$ ($\boldsymbol{k \geq 2}$) est d'inflexion ssi p impair et q impair.
Un point $\boldsymbol{M_0}$ d'un arc $\boldsymbol{C^k}$ ($\boldsymbol{k \geq 2}$) est de rebroussement de 1ère espèce ssi p pair et q impair.
Un point $\boldsymbol{M_0}$ d'un arc $\boldsymbol{C^k}$ ($\boldsymbol{k \geq 2}$) est de rebroussement de 2e espèce ssi p pair et q pair.
TODO schémas.
Relèvement sur le cercle unité. Pour tout $n \geq 0$, une fonction f d'un intervalle I vers $\mathbb{U}$, de classe C^n et admet un relèvement imaginaire pur : $\exists \theta: I \to \mathbb{R}$ C^n sur I tel que $f = e^{i\theta}$
Pour un arc paramétré C^k normal en dimension 2 de composantes cartésiennes $x, y: I \to \mathbb{R}$, il existe une fonction $\theta \in C^k(I, \mathbb{R})$ telle que $\forall t \in I$ $x(t) = \cos\big(\theta(t)\big)$ et $y(t) = \sin\big(\theta(t)\big)$
Passage coordonnées polaires. En dimension 2, un arc C^k écrit sous **forme cartésienne** $(I, f = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$ dans une b.o.n., ne passant pas par 0, peut s'écrire sous **forme polaire** $\exists r, \theta \in C^k(I, \mathbb{R})$ $\forall t \in I$ $\begin{cases} x(t) = r(t)\cos\big(\theta(t)\big) \\ y(t) = r(t)\sin\big(\theta(t)\big) \end{cases}$
Etude asymptotique.
Soit t_0 un point d'accumulation d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'un paramétrage d'un arc C^k.
Une droite $\boldsymbol{\Delta}$ est une asymptote à un arc $\boldsymbol{C^k}$ en $\boldsymbol{t_0}$ ssi $d(f(t), \Delta) \to_{t \to t_0} 0$
Un arc $\boldsymbol{C^k}$ admet une branche infinie en $\boldsymbol{t_0}$ ssi $\|f(t)\| \to_{t \to t_0} \infty$
Dans ce cas en dimension 2 :
Si $x(t) \to_{t \to t_0} x_0 \in \mathbb{R}$ alors $x = x_0$ asymptote verticale en t_0
Si $y(t) \to_{t \to t_0} y_0 \in \mathbb{R}$ alors $y = y_0$ asymptote horizontale en t_0
Si $\frac{y(t)}{x(t)} \to_{t \to t_0} m \in [-\infty, \infty]$ alors direction asymptotique de pente m (verticale si $m = \pm\infty$)
Si $\exists m \in \mathbb{R}$ $y(t) - mx(t) \to_{t \to t_0} p \in \mathbb{R}$ alors asymptote oblique $y = mx + p$
Un arc $\boldsymbol{C^k}$ admet une branche infinie en $\boldsymbol{t_0}$ de direction asymptotique $\vec{\boldsymbol{v}} \in \vec{\boldsymbol{E}}$ ssi $\frac{f(t)}{\|f(t)\|} \to_{t \to t_0} \vec{v}$
Longueur et abscisse curviligne.
Un arc est régulier ssi tous ses points le sont càd ssi $\forall t \in I$ $\overrightarrow{f'(t)} \neq \vec{0}$
Un arc <u>paramétré</u> $\boldsymbol{C^1}$ est normal ssi $\forall t \in I$ $\left\|\overrightarrow{f'(t)}\right\| = 1$. Dans ce cas il est régulier.
La longueur d'un arc $\boldsymbol{\Gamma}$ <u>$\boldsymbol{C^1}$</u> <u>compact</u> de paramétrage $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], \boldsymbol{f})$ d'un <u>espace euclidien</u>, se définit par

$\boldsymbol{l_\Gamma} = \int_a^b \left\|\overrightarrow{f'(t)}\right\| dt$, elle est indépendante du paramétrage équivalent choisi.
Pour un arc cartésien $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $l_\Gamma = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$
Pour le graphe d'une fonction $y = h(x)$, $l_\Gamma = \int_a^b \sqrt{1 + h'(x)}dx$
Pour un arc polaire $f(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$, $l_\Gamma = \int_a^b \sqrt{\rho'(t)^2 + \big(\rho(t)\theta'(t)\big)^2}dt$
Pour un arc d'équation polaire $\rho(\theta)$, $l_\Gamma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2}d\theta$
L'abscisse curviligne d'un arc $\boldsymbol{\Gamma}$ $\boldsymbol{C^1}$ d'un <u>espace euclidien</u> selon un paramétrage $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{f})$ d'origine $\boldsymbol{t_0} \in \boldsymbol{I}$ est $\boldsymbol{s}: I \to \mathbb{R}: t \mapsto \int_{t_0}^t \left\|\overrightarrow{f'(u)}\right\| du.$
Autrement dit une abscisse curviligne selon un paramétrage (I, f) est une primitive de $\left\|\overrightarrow{f'}\right\|$
Une abscisse curviligne (I, s) est un paramétrage de l'arc Γ de même sens que f. De plus si l'arc est régulier et simple, alors ce paramétrage est normal.
Tout paramétrage <u>normal</u> (J, g) de l'arc Γ s'écrit comme une abscisse curviligne d'un paramétrage fixé (I, f) de Γ, donc $g = \pm s + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. ($+s$ si g de même sens que f, $-s$ sinon)
Repère de Frenet. On se place dans un espace euclidien <u>de dimension 2.</u>
Pour un arc Γ <u>régulier</u> et C^1 de paramétrage <u>normal</u> (I, f) alors en $s \in I$, $\boldsymbol{M} = f(s)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{t_s}} = \overrightarrow{f'(s)}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{n_s}} = rot_{\frac{\pi}{2}}(\vec{t})$ définit un repère orthonormé direct de E, appelé **repère de Frenet de $\boldsymbol{\Gamma}$ en $\boldsymbol{M}$**.
Rappel relèvement: Pour un tel arc C^{k+1} il existe $\alpha \in C^k(I, \mathbb{R})$ telle que $\forall s \in I$ $\begin{cases} x'(s) = \cos\big(\alpha(s)\big) \\ y'(s) = \sin\big(\alpha(s)\big) \end{cases}$
(En assimilant l'espace E à $(\mathbb{C}, |\quad|)$, $\overrightarrow{f'(s)} \in \mathbb{U}$ car paramétrage normal)
La fonction angulaire de $\boldsymbol{\Gamma}$ en un point $\boldsymbol{s}$ est $\boldsymbol{\alpha(s)}$
$\vec{t} = \cos\big(\alpha(s)\big)\vec{\imath} + \sin\big(\alpha(s)\big)\vec{\jmath}$ et $\vec{n} = -\sin\big(\alpha(s)\big)\vec{\imath} + \cos\big(\alpha(s)\big)\vec{\jmath}$
La courbure de $\boldsymbol{\Gamma}$ en un point s est $\boldsymbol{\gamma(s)} = \frac{d\alpha}{ds}$
$\forall s \in I$ $\frac{d\vec{t}}{ds} = \gamma\vec{n}$ et $\frac{d\vec{n}}{ds} = -\gamma\vec{t}$
$\forall s \in I$ $\det(\vec{t}, \vec{n}) = 1$, donc $\det\left(\overrightarrow{f'(s)}, \overrightarrow{f''(s)}\right) = \det\left(\vec{t}, \frac{d\vec{t}}{ds}\right) = \gamma(s)$
Pour un paramétrage quelconque (J, f), on calcule la courbure avec $\gamma(t) = \frac{\det\left(\overrightarrow{f'(t)}, \overrightarrow{f''(t)}\right)}{\left\|\overrightarrow{f'(t)}\right\|^3}$
Courbure d'un paramétrage quelconque :
En coordonnées cartésiennes : $\gamma = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$
Pour un graphe de fonction $y = g(x)$: $\gamma = \frac{g''(x)}{(1 + g'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$
Pour une équation polaire $\rho(\theta)$: $\gamma = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$
Le rayon de courbure en un point $\boldsymbol{s}$ de courbure non nulle, est $\boldsymbol{R(s)} = \frac{1}{\gamma(s)}$
Le centre de courbure en un point $\boldsymbol{s}$ de courbure non nulle, est $\boldsymbol{I(s)} = f(s) + R(s)\vec{n}$
L'arc Γ est birégulier ssi sa courbure ne s'annule pas ($\forall s \in I$ $\gamma(s) \neq 0$).
Dans ce cas **la développée de $\boldsymbol{\Gamma}$** est l'arc de paramétrage $\big(I, s \mapsto I(s)\big)$ les centres de courbure.
Le cercle osculateur en s est le cercle de centre $I(s)$ et de rayon $|R(s)|$
Equation de courbe
Une équation de courbe $\boldsymbol{C^1}$ d'un espace affine euclidien $\boldsymbol{E}$ de dimension 2 correspond à une

fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et s'écrit $f(x,y)=0$
La courbe C^1 implicite d'équation $f(x,y)=0$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de E est
$C=\{M=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath} \mid f(x,y)=0\}$
Un point $M(x_0,y_0)\in C$ d'une courbe C^1 implicite d'équation $f(x,y)=0$ est régulier ssi
$\vec{\nabla}f_{(x_0,y_0)}\neq\vec{0}$ ssi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$
Une courbe C^1 implicite d'équation $f(x,y)=0$, définit en tout point régulier, un arc paramétrique localement grâce au théorème des fonctions implicites.
La tangente à cet arc en un point régulier $M_0(x_0,y_0)$ a pour équation cartésienne $\vec{\nabla}f\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$ càd
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)=0$

Classification des courbes du second degré dans un espace affine euclidien de dimension 2.
Soit un polynôme $P\in\mathbb{R}[X,Y]$ de degré 2 identifié à sa fonction polynomiale $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.
$P=aX^2+2bXY+cY^2+2\alpha X+2\beta Y+\gamma$
$P=[X\ Y]\begin{bmatrix} a & b\\ b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X\\ Y\end{bmatrix}+2[\alpha\ \beta]\begin{bmatrix} X\\ Y\end{bmatrix}+\gamma$
Soit q la forme quadratique $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de matrice $M=\begin{bmatrix} a & b\\ b & c\end{bmatrix}$ dans la base canonique.
$M\in S_2(\mathbb{R})$ donc $\exists P\in O_2(\mathbb{R})\ \ P^TMP=\begin{bmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$
On cherche la nature de la courbe d'équation implicite $P(x,y)=0$ dans un r.o.n.d. $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de E.
On pose $B=(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ b.o.n. et $B'=(\vec{I},\vec{J})$ la b.o.n. telle que $P=P_{B'\to B}=P^T_{B\to B'}=[B']^{B^T}$
- Si $rg(M)=2$, le SLE $M\begin{bmatrix} X\\ Y\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} \alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ admet une unique solution $\Omega(x_0,y_0)$
Dans le r.o.n.d $(\Omega,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ $x=X-x_0, y=Y-y_0$ $\ P(X,Y)=0\Leftrightarrow[x\ y]M\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}+P(x_0,y_0)=0$
Dans le r.o.n.d $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$ $\ P(X,Y)=0\Leftrightarrow[u\ \ v]\begin{bmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u\\ v\end{bmatrix}+P(x_0,y_0)=0$
On a une équation de la forme $\lambda u^2+\mu v^2+\delta=0$ qu'on peut réécrire avec $a,b>0$ et interpréter :
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ correspond à une courbe vide $C=\emptyset$.
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ correspond à l'unique point $C=\{\Omega\}$
- $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ correspond à une ellipse de centre Ω d'axes $\Omega+\mathbb{R}\vec{I},\ \Omega+\mathbb{R}\vec{J}$ de paramétrage $(\mathbb{R},t\mapsto(x=a\cos(t),y=b\sin(t))$, et est un cercle ssi $a=b$ ssi $\lambda=\mu$ ssi $M=\lambda I_2$
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ correspond à une union de deux droites $\begin{cases}\Delta_1: \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0\\ \Delta_2: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0\end{cases}$ sécantes en $(x,y)=(0,0)$
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ correspond à une hyperbole de centre Ω d'axes $\Omega+\mathbb{R}\vec{I},\ \Omega+\mathbb{R}\vec{J}$ de paramétrage $(\mathbb{R},t\mapsto(x=\pm a\cosh(t),y=b\sin(t))$
- Si $rg(M)=1$ on peut supposer $\mu=0,\lambda\neq 0$.
Dans le r.o.n.d $(O,\vec{I},\vec{J})$ $\ P(X,Y)=0\Leftrightarrow[U\ \ V]\begin{bmatrix} \lambda & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} U\\ V\end{bmatrix}+2[\alpha'\ \beta']\begin{bmatrix} U\\ V\end{bmatrix}+\gamma=0$
On a $\lambda U^2+2\alpha' U+2\beta' V+\gamma=0$
Si $\beta'\neq 0$ l'équation se réécrit $V-\left(\frac{\alpha'^2}{2\beta'\lambda}-\frac{\lambda\gamma}{2\beta'}\right)=-\frac{\lambda}{2\beta'}\left(U+\frac{\alpha'}{\lambda}\right)^2$
Dans le r.o.n.d $(\Omega,\vec{I},\vec{J})$ $\ P(X,Y)=0\Leftrightarrow v=mu^2$ avec $m=-\frac{\lambda}{2\beta'}\neq 0$ et $\Omega\Bigg(x_0=-\frac{\alpha'}{\lambda},y_0=$

$\left(\frac{\alpha'^2}{2\beta'\lambda} - \frac{\lambda\gamma}{2\beta'}\right)\Big)$.

On obtient donc une parabole de sommet Ω, d'axe $\Omega + \mathbb{R}\vec{J}$

Si $\beta' = 0$ l'équation se réécrit $\left(U + \frac{\alpha'}{\lambda}\right)^2 = \frac{\alpha'^2}{\lambda^2} - \gamma$

Dans le r.o.n.d $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ $P(X, Y) = 0 \Leftrightarrow c = u^2$ avec $c = \frac{\alpha'^2}{\lambda^2} - \gamma$ et $\Omega\left(x_0 = -\frac{\alpha'}{\lambda}, y_0 = 0\right)$

On obtient soit une union de deux droites parallèles $u = \pm\sqrt{c}$ si $c \geq 0$, soit rien si $c < 0$.

- Si $rg(M) = 0$ on est ramené à l'équation d'une droite, la courbe est de degré 1.

Coniques. Dans un espace affine euclidien orienté E de dimension 2.

Soit D une droite, $F \in E \setminus D$ un point pas sur la droite, et $e \in \mathbb{R}_+^*$ un réel strictement positif.

La conique de directrice $\boldsymbol{D}$, de foyer $\boldsymbol{F}$ et d'excentricité $\boldsymbol{e}$ est $C = \{M \in E \mid MF = ed(M, D)\}$

Soit $R(F, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le r.o.n.d. d'origine le foyer, tel que $\vec{\jmath} \parallel D$ et $\vec{\imath} \perp D$ pointant vers D.

Dans R, la directrice D a pour équation $x = \boldsymbol{q}$ avec $q \in \mathbb{R}_+^*$

Le paramètre de la conique $\boldsymbol{C}$ est $\boldsymbol{p} = eq \in \mathbb{R}_+^*$

Un point $M = F + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ vérifie $M \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (ex - p)^2 \Leftrightarrow r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$

Une ellipse est une conique d'excentricité $e < 1$

Une parabole est une conique d'excentricité $e = 1$

Une hyperbole est une conique d'excentricité $e > 1$

Discussion suivant l'excentricité :

- Si $e = 1$ (parabole) :

$S = F + \frac{p}{2}\vec{\imath}$ est **le sommet de la parabole.**

L'axe de la parabole est $(\boldsymbol{S}, -\vec{\boldsymbol{\imath}})$, c'est un axe de symétrie de la parabole.

$R'(S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est **le repère naturel de la parabole.** C'est un r.o.n.d.

Equation d'une parabole dans son repère. $M \in C \Leftrightarrow Y^2 = -2pX$

Equation de tangente à une parabole dans son repère. $M \in T_{M_0} \Leftrightarrow YY_0 = -2p(X + X_0)$ $(M_0 \in C)$

Paramétrage d'une parabole dans son repère. $\left(\mathbb{R}, t \mapsto \left(x(t) = -\frac{t^2}{2p}, y(t) = t\right)\right)$

- Si $0 < e < 1$ (ellipse) :

$\boldsymbol{a} = \frac{p}{1 - e^2}$ est **le demi grand axe**. $0 < a$

$\boldsymbol{b} = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$ est **le demi petit axe**. $0 < b < a$

$\boldsymbol{c} = ea$ est **la distance centre-foyer**

$c < a$: Le foyer qui est sur le demi-grand axe est à l'intérieur de l'ellipse.

Relations spéciales de l'ellipse.

$a^2 = b^2 + c^2$: Le triangle demi-petit axe, centre-foyer, (rectangle au centre), est d'hypoténuse a.

$ap = b^2$ donc $p = \frac{b^2}{a}$

$S = F - c\vec{\imath}$ est **le centre de l'ellipse.**

$R'(S, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est **le repère naturel de l'ellipse.** C'est un r.o.n.d.

Le demi-petit axe est suivant $(S, \vec{\jmath})$, le demi-grand axe suivant $(S, \vec{\imath})$ ce sont des axes de symétries de l'ellipse.

$\boldsymbol{F'(-c, 0)}$ **est le foyer symétrique** de $F(c, 0)$ par rapport au centre S

La directrice D a pour équation $X = \frac{a}{e}$ dans le repère de l'ellipse.

$\boldsymbol{D'}$ **est la directrice symétrique** de D par rapport au demi petit axe $(S, \vec{j})$ et a pour équation $X = -\frac{a}{e}$

Equation d'une ellipse dans son repère. $M \in C \Leftrightarrow \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$

Equation de tangente à une ellipse dans son repère. $M \in T_{M_0} \Leftrightarrow \frac{XX_0}{a^2} + \frac{YY_0}{b^2} = 1 \ (M_0 \in C)$

Paramétrage d'une ellipse dans son repère. $\left(\mathbb{R}, t \mapsto (x(t) = a\cos(t), y(t) = b\sin(t))\right)$

Equation bifocale d'une ellipse. $M \in C \Leftrightarrow MF + MF' = 2a$

- Si $1 < e < \infty$ (hyperbole) :

$\boldsymbol{a} = \frac{p}{e^2-1} \quad 0 < a$

$\boldsymbol{b} = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}} \quad 0 < a < b$

$\boldsymbol{c} = ea$ est **la distance centre-foyer**

$c > a$: Le foyer est à l'extérieur de l'hyperbole.

Relations spéciales de l'hyperbole.

$a^2 + b^2 = c^2$

$ap = b^2$ donc $p = \frac{b^2}{a}$

$S = F + c\vec{\imath}$ est **le centre de l'hyperbole.**

$R'(S, \vec{\imath}, \vec{j})$ est **le repère naturel de l'hyperbole.** C'est un r.o.n.d.

$(S, \vec{j})$ et $(S, \vec{\imath})$ sont des axes de symétries de l'hyperbole.

$\boldsymbol{F'(c, 0)}$ **est le foyer symétrique** de $F(-c, 0)$ par rapport au centre S

La directrice D a pour équation $X = -\frac{a}{e}$ dans le repère de l'hyperbole.

$\boldsymbol{D'}$ **est la directrice symétrique** de D par rapport à $(S, \vec{j})$ et a pour équation $X = \frac{a}{e}$

Equation d'une hyperbole dans son repère. $M \in C \Leftrightarrow \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$

Equation de tangente à une hyperbole dans son repère. $M \in T_{M_0} \Leftrightarrow \frac{XX_0}{a^2} - \frac{YY_0}{b^2} = 1 \ (M_0 \in C)$

Paramétrage d'une hyperbole dans son repère. $\left(\mathbb{R}, t \mapsto (x(t) = \pm a\cosh(t), y(t) = b\sin(t))\right)$

Equation bifocale d'une hyperbole. $M \in C \Leftrightarrow |MF - MF'| = 2a$

Equation des asymptotes à une hyperbole dans son repère. $Y = \pm\frac{b}{a}X$