Chapitre 10. Intégrale de Riemann

I. Intégrale de Riemann d'une fonction en escalier

On suppose $(E, \|\quad\|_E)$ espace de Banach, K = R ou C, a et b deux réels tels que $a \leq b$. On note F([a,b],E) l'ensemble des fonctions de [a,b] dans E, on munit cet espace de la semi-norme uniforme à valeur dans $[0, \infty]$. Cette semi-norme est une norme dans B([a,b], E).

I.1. Fonctions en escaliers

On suppose $a < b$

Une **subdivision** de [a,b] est une famille finie strictement croissante de réels dont le premier est a, le dernier est b. Le **pas d'une subdivision** est l'écart maximal entre deux termes consécutifs de la subdivision. Pour une subdivision s on note **<s>** l'ensemble associé. Pour un ensemble C fini de points dans [a,b] on note [C] la subdivision associée (en y ajoutant éventuellement a et b).

L'ensemble des subdivisions est partiellement ordonné par la relation suivante. On dit que **v est plus fine que u et on note $\boldsymbol{u \leq v}$** si <u>⊆<v>. On définit la **réunion de deux subdivisions u** ∨ **v** = [<u>U<v>].

La réunion de subdivision est plus fine que chaque subdivision.

Une **subdivision adaptée à une propriété** P(A) d'une partie de R est une subdivision telle que la propriété se vérifie sur les intervalles ouverts de R dont les bornes sont des termes consécutifs de la subdivision càd si la propriété se vérifie sur la partie strictement « entre » chaque terme.

Si une propriété se conserve sur les sous-parties de la partie, alors toute subdivision plus fine conserve l'adaptation à la propriété, la réunion de subdivisions étant plus fine que chaque elle hérite des adaptations de chacune.

Une fonction de [a,b] à valeurs dans E est une **fonction en escalier** si elle admet une subdivision adaptée à la propriété être constante. On note **Esc([a,b], E)** l'ensemble des fonctions en escalier de F([a,b],E).

De [a,b] dans E, l'ensemble des fonctions en escaliers est un K sev des fonctions bornées, et même une sous-algèbre si E est une algèbre.

I.2. Intégrale d'une fonction en escalier

Pour une fonction en escalier f, et une subdivision adaptée fixée, on peut calculer la somme des aires des rectangles suivant la subdivision adaptée. On montre que cette somme est indépendante de la subdivision adaptée choisie, cette somme définit **l'intégrale d'une fonction f en escalier de [a,b] dans E** $\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt}$. De plus on pose $\boldsymbol{\int_a^a f(t)dt} = 0$

Appliquer la norme à une fonction en escalier donne une fonction en escalier. L'intégrale vérifie l'inégalité triangulaire $\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\, dt$. **L'opérateur intégrale** qui aux fonctions en escaliers muni de la norme uniforme associe l'intégrale dans l'espace de Banach est linéaire continue, donc uniformément continue. On a l'inégalité $\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq (b-a)\|f\|_u$.

L'application qui a une fonction en escalier associe l'intégrale de la norme de la fonction, définit une semi norme $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{1}}$ sur Esc de noyau les fonctions identiquement nulles sauf en un nombre fini de points.

On peut définir $f^+ = Max(f, 0), f^- = -Min(f, 0)$ et interpréter l'intégrale dans R comme l'aire sous la courbe.

II. Intégrale de Riemann d'une fonction réglée

On définit **l'ensemble des fonctions réglées $\boldsymbol{Reg([a,b],E)}$** $= \overline{Esc([a,b],E)}^u$ comme l'adhérence des fonctions en escalier, dans l'ensemble des applications $(F([a,b],E), \|f\|_u)$ muni de la topologie

induite par la semi-norme uniforme. On montre que l'ensemble des fonctions réglées est aussi l'adhérence des fonctions en escalier sur l'ensemble des fonctions bornées $(B([a,b],E),\|f\|_u)$ munie de la norme uniforme. C'est donc un sous K ev fermé de $B([a,b],E)$.
Une **fonction réglée** de [a,b] dans E est un élément de $Reg([a,b],E)$, c'est une limite uniforme de fonctions en escaliers.
Caractérisation des fonctions réglées : Une fonction de $[a,b] \to E$ est réglée ssi elle admet une limite à droite en a, une limite à gauche en b et une limite a droite et a gauche en tout point de (a,b) (Admet des limites a gauche et droite partout ou possible).
Une fonction de [a,b] dans E continue est réglée.
Une fonction de [a,b] dans R et monotone est réglée.
L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée sur [a,b] est au plus dénombrable.
On définit **l'opérateur intégrale des fonctions réglées de [a,b] dans E** comme étant l'unique prolongement continu de l'opérateur intégrale des fonctions en escaliers. Cet opérateur est encore uniformément continu.
On définit **l'intégrale d'une fonction réglée f de [a,b] dans E, $\int_a^b f(t)dt$** comme etant l'evaluation en la fonction de l'opérateur intégrale des fonctions réglées de [a,b] dans E.
Soit une suite de fonctions en escaliers qui converge en semi-norme uniforme (donc vers une fonction réglée), alors la suite des intégrales converge vers l'intégrale de la limite.
L'inégalité triangulaire est toujours vérifiée pour l'intégrale réglée.
On a l'inégalité $\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq (b-a)\|f\|_u$.
L'application qui a une fonction réglée associe l'intégrale de la norme de la fonction, définit une semi norme $\|\boldsymbol{f}\|_{\mathbf{1}}$ sur Reg de noyau les fonctions identiquement nulles sauf en un nombre fini ou dénombrable de points. Sur C^0 , cette semi norme est une norme (par def de noyau la fonction nulle).
Soit une suite de fonctions réglées qui converge en semi-norme uniforme, alors la limite est réglée et on peut permuter intégrale et limite.
Autres propriétés classiques de l'intégrale à mentionner TODO.

III. Intégrale de Riemann

On a vu qu'il est possible de munir F([a,b],E) de la semi norme uniforme (sup$\|f(t)\|_E$), et on obtient une topologie T_u
On peut aussi définir la semi-norme 1 de façon générale à partir des fonctions en escaliers. Soit une fonction de [a,b] dans E donnée, si on considère les intégrales de toutes les fonctions en escaliers réelles positives qui majorent pointwise la norme de la fonction donnée, alors la **semi norme 1** est l'infimum de ces intégrales. $\|f\|_1 = \inf_{\mu \in Esc([a,b],R), \mu \geq \|f\|_E} \int_a^b \mu(t)dt$. Alors $\|f\|_1 \in [0,+\infty]$
La semi-norme 1 est une semi-norme sur F([a,b],E), et on obtient une topologie T_1
On définit **l'ensemble des fonctions Riemann-intégrable $\boldsymbol{RI}([\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}],\boldsymbol{E}) = \overline{Esc([a,b],E)}^1$** comme l'adherence des fonctions en escalier, dans l'ensemble des applications $(F([a,b],E),\|f\|_1)$ muni de la topologie induite par la semi-norme 1. On montre que l'ensemble des fonctions RI est aussi l'adhérence des fonctions en escalier sur l'ensemble des fonctions bornées $(B([a,b],E),\|f\|_1)$ munie de la norme 1. C'est donc un sous K ev fermé de $B([a,b],E)$.
Une **fonction Riemann intégrable** de [a,b] dans E est un élément de $RI([a,b],E)$, c'est une limite en semi norme 1 de fonctions en escaliers.
Caractérisation des fonctions Riemann-intégrables : Une fonction est Riemann-intégrable ssi on

peut trouver une fonction en escalier dans E dont la distance à la fonction dans E est majorée pointwise par une autre fonction en escalier réelle positive dont l'intégrale est aussi petite que l'on veut.
La topologie définie par la semi norme 1 est moins fine que celle définie par la semi norme uniforme, donc l'adhérence pour la semi norme 1 est plus grosse que celle pour la norme uniforme.
On a $T_1 \subseteq T_u$, $\overline{Esc([a,b],E)}^{u} = Reg([a,b],E) \subseteq \overline{Esc([a,b],E)}^{1} = RI([a,b],E)$ On peut integrer plus.
On définit **l'opérateur intégrale des fonctions RI de [a,b] dans E** comme étant l'unique prolongement continu de l'opérateur intégrale des fonctions en escaliers. Cet opérateur est uniformément continu.
On définit **l'intégrale d'une fonction RI, f de [a,b] dans E, $\int_a^b f(t)dt$** comme étant l'évaluation en la fonction de l'operateur intégrale des fonctions RI de [a,b] dans E.
Soit une suite de fonctions en escaliers qui converge en semi-norme uniforme (ou 1) (donc vers une fonction RI), alors la suite des intégrales converge vers l'intégrale de la limite.
L'inégalité triangulaire est toujours vérifiée pour l'intégrale de Riemann.
On a l'inégalité $\left\|\int_a^b f(t)dt\right\| \leq \|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_u$.
L'application qui a une fonction Riemann-intégrable associe l'intégrale de la norme de la fonction, définit une semi norme qui n'est en fait rien d'autre que la semi-norme 1.
Pour des suites de fonctions, convergence en semi-norme uniforme implique convergence en semi-norme 1.
Soit une suite de fonctions Riemann-intégrable qui converge en semi-norme uniforme (ou 1), alors la limite est Riemann intégrable et on peut permuter intégrale et limite.
Autres propriétés classiques de l'intégrale à mentionner TODO.

IV. Sommes de Riemann

Une **subdivision pointée de [a,b]** notée $\Delta = (s,x)$ est la donnee d'une subdivision s de [a,b] avec une autre famille finie strictement croissante x dans [a,b] comportant un element en moins, et telle que chaque $x_i \in [s_i, s_{i+1}]$, c'est-à-dire $a = s_0 \leq x_0 \leq s_1 \leq x_1 \leq \cdots \leq s_{n-1} \leq x_{n-1} \leq s_n = b$, avec $s_0 < \cdots < s_n$.
Une **subdivision pointée stricte de [a,b]** est une subdivision pointée de [a,b] telle que chaque $x_i \in (s_i, s_{i+1})$ c'est-à-dire $a = s_0 < x_0 < s_1 < x_1 < \cdots < s_{n-1} < x_{n-1} < s_n = b$
Le **pas d'une subdivision pointée** est le pas de la subdivision s de [a,b] correspondante.
La **somme de Riemann d'une fonction de [a,b] dans E suivant une subdivision pointée $\boldsymbol{\Delta} = (\boldsymbol{s}, \boldsymbol{x})$**, est la somme $\boldsymbol{S_\Delta(f)} = \sum_{i=0}^{n-1}(s_{i+1} - s_i)f(x_i)$
La somme de Riemann d'une fonction en escalier sur [a,b] suivant une subdivision pointée stricte adaptée a la fonction en escalier correspond à l'intégrale de cette fonction.
La somme de Riemann d'une fonction en escalier sur [a,b] suivant une subdivision pointée quelconque de [a,b], peut être aussi proche que l'on veut de l'intégrale de cette fonction pourvu que le pas de la subdivision soit suffisamment faible. Propriété encore vraie pour les fonctions Riemann-intégrables.
On peut prendre une subdivision canonique paramétrée par n, en prenant tous les x_i a gauche resp. a droite, resp. au milieu, et on obtient ainsi que la limite suivant n doit être égale a l'intégrale.
$\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \to \int_a^b f(t)dt$, $\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) \to \int_a^b f(t)dt$, $\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) \to \int_a^b f(t)dt$
Reciproque. Si on a une fonction de [a,b] dans E telle que la somme de Riemann de la fonction sur

[a,b] suivant toute subdivision pointée quelconque de [a,b], peut être aussi proche que l'on veut d'un certain élément de l'espace E pourvu que le pas de la subdivision soit suffisamment faible, alors la fonction est Riemann-intégrable sur [a,b] et son intégrale est cet élément.

V. Intégrales de Riemann généralisées

V.I. Intégrale d'une fonction $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \boldsymbol{E}$

Ici on suppose $b \leq +\infty$. Une fonction de [a,b) dans E est **Riemann localement intégrable** si sa restriction a tout segment de inclus dans [a,b) est Riemann intégrable. On note $\boldsymbol{RI_{loc}}([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \boldsymbol{E})$ l'ensemble.

Les fonctions continues de [a,b) dans E sont Riemann localement intégrables, donc il existe des fonctions Riemann localement intégrables non bornées.

Une fonction de [a,b) dans E est **Riemann-intégrable (sens généralisé)** si elle est Riemann localement intégrable et $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite quand x tend vers b. On dit aussi de façon synonyme : $\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt}$ **est convergente. L'intégrale de Riemann généralisée** est $\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt} = lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt.$

On dit que $\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt}$ **est absolument convergente** si $\int_a^b \|f(t)\| dt$ est convergente**.**

Toute intégrale de Riemann absolument convergente est convergente.

On dit qu'une fonction localement intégrable **vérifie le critère de Cauchy intégral en b** si $\forall \varepsilon > 0 \; \exists A \in [a, b) \; \forall d > c > A, \left\| \int_c^d f(t)dt \right\|_E < \varepsilon$

$\int_a^b f(t)dt$ est convergente ssi la fonction vérifie le critère de Cauchy intégral en b.

V.II. Quelques difficultés de la théorie de Riemann

$1_{Q \cap [0,1]}$ n'est pas Riemann-intégrable sur [0,1]

TODO.

Complément 1. L'intégrale de Henstock Kurzweil

TODO.