Chapitre 4. Géométrie Affine

I.1. Rappels

I.1.1. Espaces affines

Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel sur un corps K quelconque.

On dit que E est un espace affine de direction $\vec{E}$ un espace vectoriel si il existe une application $\overrightarrow{}: E \times E \to \vec{E}: (M, N) \mapsto \overrightarrow{\boldsymbol{MN}}$ telle que 1. et 2.

1. Fixer un vecteur et son origine, fixe son extrémité : $\forall M \in E\ \forall \vec{u} \in \vec{E}\ \exists!\, N \in E\ \vec{u} = \overrightarrow{MN}$

Autrement dit, fixer une origine, donne une bijection point/vecteur : $\forall O \in E\ M \mapsto \overrightarrow{OM}$ bijection.

Autrement dit, fixer un vecteur $\vec{u} \in \vec{E}$ permet de bien définir l'application $M \mapsto N$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$.

On nomme alors **translation de vecteur $\vec{u}$** notée $\boldsymbol{t_{\vec{u}}}$ cette application et on a $N = \boldsymbol{t_{\vec{u}}(M)} \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{MN}$

On note également $\boldsymbol{N = M + \vec{u}}$ pour signifier $N = t_{\vec{u}}(M)$ / $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$

2. La relation de Chasles s'applique : $\forall M, N, P \in E\ \ \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$

Sous 1. la relation de Chasles revient a dire $\forall M \in E\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in \vec{E}\ (M + \vec{u}) + \vec{v} = M + (\vec{u} + \vec{v})$

Sous 1., la relation de Chasles revient a dire que translater par plusieurs vecteurs c'est translater par leur somme $\forall \vec{u}, \vec{v}\ \ t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}+\vec{u}}$.

Dans un espace affine, l'application qui a un vecteur associe sa translation est une action fidèle et transitive du groupe $(\vec{E}, +)$ sur l'ensemble E.

Réciproquement, une action fidèle et transitive du groupe $(\vec{E}, +)$ sur un ensemble quelconque E permet de definir un espace affine E de direction $\vec{E}$ (telle que cette action représente la translation.)

On identifie la **dimension d'un espace affine** a celle de son espace vectoriel direction.

On peut voir un espace vectoriel comme un espace affine de direction lui-même en posant $\overrightarrow{\vec{u}\vec{v}} = \vec{v} - \vec{u}$.

Si A est un point d'un affine E, et $\vec{V} \subseteq \vec{E}$ on note $\boldsymbol{A + \vec{V}} = \{A + \vec{v} : \vec{v} \in \vec{V}\}$ donc $M \in A + \vec{V} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \vec{V}$

I.1.2. Sous-espaces affines

Un **sous-espace affine** d'un espace affine E est un ensemble $A + \vec{V}$ avec $A \in E$ et $\vec{V}$ un sous-espace de $\vec{E}$

De façon équivalente, un sous-espace affine, est une partie d'un espace affine, stable par transformation barycentrique.

Le sous-espace vectoriel $\vec{V}$ associé à un sous-espace affine est unique.

Un sous-espace affine n'est jamais vide puisqu'il contient A.

Un sous-espace affine est lui-même espace affine.

Une **droite affine** est un sous-espace affine de dimension 1.

Un **plan affine** est un sous-espace affine de dimension 2.

Un **hyperplan affine** est un sous-espace affine de dimension $n - 1$ d'un espace affine de dimension n.

2 sous-espaces affines dont les directions sont supplémentaires dans $\vec{E}$ sont des **sous-espaces affines supplémentaires**.

2 sous-espaces affines d'un espace affine E coïncident ssi ils ne sont pas disjoints et ont même direction.

L'intersection quelconque de sous-espaces affines est soit vide, soit un sous-espace affine de direction l'intersection des directions.

L'intersection de 2 sous-espaces affines supplémentaires, est toujours un point.

Le **sous-espace affine engendré par une partie d'un espace affine $\boldsymbol{A \subseteq E}$** note $\boldsymbol{Aff(A)}$ est le plus petit

sous-espace affine de E contenant A.
On a toujours pour une famille de pts $\forall A_0, \dots, A_p \in E\ Aff(A_0, \dots, A_p) = A_0 + vect(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p})$
Le sous-espace affine engendre par $p+1$ points est de dimension au plus p.
$p+1$ points de E forment une **famille affinement indépendante** si la dimension de leur sous-espace affine engendre est exactement p.
Autrement dit $A_0, \dots, A_p \in E$ famille affinement indépendante ssi $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_p})$ famille libre ssi aucun des A_i n'appartient au sous-espace affine engendre par les autres.
Une **base affine** d'un espace affine de dimension n est une famille affinement independante de $n+1$ points.
Un repère affine correspond à une base affine dans laquelle un point est distingué comme origine, donc correspond à un point origine muni d'une base vectorielle de n vecteurs.

I.1.3. Barycentre

Soit $A_1, \dots, A_p$ points d'un espace affine E, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ scalaires dans K.
On dit que $(A, \Lambda) = ((A_i)_{1\le i\le p}, (\lambda_i)_{1\le i\le p})$ est une **famille pondérée de p points.**
La **fonction vectorielle de Leibniz pour une famille pondérée** est $\boldsymbol{\phi_{A,\Lambda}}: E \to \vec{E}: M \mapsto \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$
On a $\forall M, N \in E\ \ \phi(M) = \phi(N) + \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right)\overrightarrow{MN}$
$\forall M \in E\ \ \phi_{A,\Lambda}(M)$ appartient toujours a la direction de $Aff(M, A_1, \dots, A_p)$
Si la somme des pondérations d'une famille pondérée est nulle $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 0$ alors $\phi(M)$ est constant et appartient a la direction de $Aff(A_1, \dots, A_p)$.
Si la somme des pondérations d'une famille pondérée est non nulle $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$ alors il existe un unique point $G \in E$ tel que $\phi(G) = \vec{0}$. Ce point est appelé **barycentre de la famille pondérée (A, Λ)**.
G barycentre de la famille pondérée (A, Λ) ssi $\phi(G) = \vec{0}$ ssi $\exists/\forall\ M \in E\ \phi(M) = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right)\overrightarrow{MG}$
En detail ssi : $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$ ssi $\exists/\forall\ M \in E\ \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\right)\overrightarrow{MG}$
Si G barycentre de la famille pondérée (A, Λ) alors il l'est pour $(A, \lambda\Lambda)$ quelque soit λ scalaire non nul.
Quitte a multiplier par $\lambda = \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i}$, on pourra toujours supposer que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ pour un barycentre.
Associativité des barycentres. Soit une famille pondérée $\left((A_i), (\lambda_i)\right)_{i\in I}$ de barycentre G, que l'on partitionne suivant les indices en k sous-familles $\left((A_i), (\lambda_i)\right)_{i\in I_1}, \dots, \left((A_i), (\lambda_i)\right)_{i\in I_k}$. On peut regrouper les poids $\alpha_j = \sum_{i\in I_j} \lambda_i$ dans une nouvelle famille $(\alpha_j)_{1\le j\le k}$. Si les k sous-familles admettent chacune un barycentre G_j, alors la famille $\left((G_j), (\alpha_j)\right)_{1\le j\le k}$ admet un barycentre qui n'est autre que G.
Un **isobarycentre** est un barycentre d'une famille pondérée dont tous les poids sont egaux.
Lorsque le corps de base est de caractéristique p, l'isobarycentre de p points n'est jamais defini.

I.1.4. Applications affines

Une application $f: E_1 \to E_2$ entre deux espaces affines est une **application affine** si il existe une application lineaire $\vec{f}: \overrightarrow{E_1} \to \overrightarrow{E_2}$ telle que $\forall M, N \in E_1\ \ \overrightarrow{f(M)f(N)} = \vec{f}(\overrightarrow{MN})$
Autrement dit ssi $\exists \vec{f}: \overrightarrow{E_1} \to \overrightarrow{E_2}$ linéaire telle que $\exists/\forall A \in E_1\ \forall \vec{u} \in \overrightarrow{E_1}\ \ f(A + \vec{u}) = f(A) + \vec{f}(\vec{u})$
L'application $\vec{f}$ est alors unique et appelée **partie linéaire** de l'application affine f.
Une application affine est entièrement déterminée par sa partie linéaire et l'image d'un point $(A, f(A))$.

Ajouter une constante à une application affine la laisse affine, et ne change pas sa partie linéaire.
Conservation des barycentres. L'image d'un barycentre par une application affine est le barycentre des images en gardant mêmes coefficients de pondération.
L'image directe d'un sous-espace affine $A+\vec{V}$ par une application affine f est le sous-espace affine $f(A)+\vec{f}(\vec{V})$
L'image réciproque par une application affine f d'un sous-espace affine de direction $\vec{W}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $f^{-1}(\vec{W})$.
En particulier une application affine **conserve l'alignement** = 3 points alignés donne 3 points alignés.
Théorème fondamental de la géométrie affine* [Berger]. Une application entre deux R-espaces affines de même dimension $n \geq 2$, est une application affine ssi elle conserve l'alignement.
La composée de deux applications affines est une application affine de partie linéaire la composée des parties linéaires.
Un **isomorphisme affine**, est une application affine bijective. Càd ssi sa partie linéaire est isomorphisme. Un isomorphisme affine est de partie linéaire, un isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme affine est une application également affine dont la partie linéaire est la réciproque de la partie linéaire.
On note $\boldsymbol{GA(A)}$ l'ensemble des automorphismes affines d'un espace affine A.
Les translations d'un espace affine sont des isomorphismes affines.
Un endomorphisme affine est une translation ssi sa partie linéaire est l'identité $\vec{f}=Id_{\vec{E}}$
Un endomorphisme affine est une **homothétie de rapport $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{K}^*$** ssi sa partie linéaire est $\vec{f}=k \cdot Id_{\vec{E}}$
Si V et W sont deux sous-espaces affines supplémentaires, la **projection affine sur $\boldsymbol{V}$ parallelement a $\boldsymbol{W}$** est l'application qui a tout point M associe l'unique point d'intersection des sous-espaces affines $M+\vec{W}$ et V qui sont aussi supplémentaires.
La projection affine sur V parallèlement a W est une application affine de partie linéaire la projection vectorielle sur $\vec{V}$ parallèlement a $\vec{W}$.
Une application affine p est une projection affine ssi p admet un point fixe. (TODO vérifier)
Une application affine p est de partie lineaire une projection vectorielle ssi $p \circ p = p$
On peut définir similairement **symétrie affine, et affinité affine.** TODO

I.1.5. Vectorisation

Si O est un point fixe d'un espace affine E, l'application $\varphi_O : E \to \vec{E} : M \mapsto \overrightarrow{OM}$ est une application affine de partie linéaire l'identité. Ayant fixe une origine O on peut « vectoriser » en O, identifier M avec $\overrightarrow{OM}$
L'image par φ_O d'un sous-espace affine V contenant l'origine O est le sous-espace vectoriel $\vec{V}$.
L'application φ_O est un isomorphisme affine. On parle de vectorisation en O.

I.2. Complément sur les barycentres

I.2.1. Notation $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i A_i}$

Si G est le barycentre d'un système pondéré $\big((A_i),(\lambda_i)\big)_{1 \leq i \leq p}$ alors $\overrightarrow{OG}=\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$, cela justifie l'écriture $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i} = \varphi_O^{-1}\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}\right)$ de sorte que $G=\sum_{i=1}^{p} \lambda_i A_i$. Cette notation est bien indépendante de l'origine O fixee. On a d'ailleurs pas besoin de supposer $\sum_i \lambda_i \neq 0$. Seulement $\lambda_i \in K$

I.2.2. Coordonnees barycentriques

L'ensemble des barycentres d'un ensemble fini de points, n'est autre que le sous-espace affine

engendre par ces points. Si de plus, l'ensemble de ces points générateurs forme une famille affinement indépendante de points, alors tout barycentre de ces points admet une écriture unique en tant que tel.
Si E est un espace affine admettant une base affine de $n+1$ points $(A_0, \dots, A_n)$, alors tout point $M \in E$ s'ecrit de manière unique $M = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_i$ avec $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$. Les $(\lambda_i)_{0\le i\le n}$ sont **les coordonnées barycentriques de M dans la base affine $(A_0, \dots, A_n)$.** Cela revient à dire que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les coordonees de $\overrightarrow{A_0M}$ dans la base $\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\right)$ de $\vec{E}$. (pas besoin de spécifier $\lambda_0 = 1 - \sum_{i>0} \lambda_i$)
Soit $(A_0, \dots, A_n)$ base affine de E, et soit $(B_0 = \sum_i \lambda_i^0 A_i, \dots, B_n = \sum_i \lambda_i^n A_i)$ une famille de E.
La famille B est une base affine de E ssi $\begin{vmatrix} \lambda_0^0 & \cdots & \lambda_0^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^0 & \cdots & \lambda_n^n \end{vmatrix} \neq 0$ car $\begin{vmatrix} \lambda_0^0 & \cdots & \lambda_0^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^0 & \cdots & \lambda_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_0^1 - \lambda_0^0 & \cdots & \lambda_1^n - \lambda_1^0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^1 - \lambda_n^0 & \cdots & \lambda_n^n - \lambda_n^0 \end{vmatrix}$
Ce déterminant simplifié permet d'obtenir des équations par ex $M \in (B_0B_1)$ ssi (M, B_0, B_1) base affine.
Changement de coordonnées barycentriques. Analogue au changement de base avec 1 dimension en +.
Soit $(A_0, \dots, A_n), (B_0, \dots, B_n)$ deux bases affines de E. On suppose $\forall i\ B_i$ a pour coordonnées barycentriques $(\lambda_0^i, \dots, \lambda_n^i)$ dans la base affine A.
Soit $M \in E$ de coordonnes barycentriques $(\mu_0, \dots, \mu_n)$ dans la base affine B. Alors ses coordonnées $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ dans la base A sont donnees par $\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0^0 & \cdots & \lambda_0^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^0 & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$. En gros $X = PX'$

I.3. Complements sur les applications affines

I.3.1. Points fixes

Soit une application affine f d'un espace affine E de dimension finie vers lui-même.
L'ensemble des points fixes de f est soit vide soit un sous-espace affine dont la direction est l'ensemble des vecteurs fixes de sa partie linéaire.
Si 1 n'est pas valeur propre de sa partie linéaire, f admet exactement un point fixe.

I.3.2. Décomposition canonique

Il est facile d'écrire une application affine f comme composee d'une translation et d'une application affine g admettant un point fixe : Il suffit pour un point A quelconque de poser $g = t_{\overrightarrow{f(A)A}} \circ f$ et on a alors $f = t_{\overrightarrow{Af(A)}} \circ g$ et $g(A) = A$. A priori en général on n'a pas forcément $t_{\overrightarrow{Af(A)}} \circ g = g \circ t_{\overrightarrow{Af(A)}}$.
Décomposition canonique de f. Une application affine f d'un espace affine E dans lui-même dont la partie linéaire $\vec{f}$ verifie $\vec{E} = Ker\left(\vec{f} - Id_{\vec{E}}\right) \oplus Im\left(\vec{f} - Id_{\vec{E}}\right)$ se decompose de manière unique sous la forme $f = t_{\vec{u}} \circ g$ avec g application affine admettant un point fixe <u>et</u> vérifiant $t_{\vec{u}} \circ g = g \circ t_{\vec{u}}$.

I.4. Topologie d'un espace affine réel de dimension finie

On suppose E un R-espace euclidien de dimension finie n.

I.4.1. Distance

L'**application distance** sur E : $\boldsymbol{d}: E^2 \to R: (A, B) \mapsto \boldsymbol{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ est une distance sur E. (E, d) metrique.
La distance définit donc une topologie sur un R-espace euclidien de dimension finie

I.4.2. Ouverts. Fermés. Intérieur. Adhérence. Frontière. Voir topologie

I.4.3. Diamètre. Le diamètre d'une partie P non vide de E est $\boldsymbol{diam(P)} = \sup_{(A,B)\in P\times P} d(A, B)$
Une partie non vide de E est **bornée** si son diamètre est fini.

I.4.4. Distance a une partie.

La distance d'un point M a une partie non vide P est $\boldsymbol{d(M, P)} = \inf_{N\in P} d(M, N)$

Un point est adhérent a une partie non vide P ssi la distance de ce point a la partie est 0.
La distance d'un point a une partie non vide fermée, est toujours atteinte.
L'application $E \to R: M \mapsto d(M, P)$ est 1-lipschitzienne donc continue.

I.4.5. Continuité

Une application affine entre deux R espaces affines de dimension finie est lipschitzienne

I.4.6. Conservation du contact. Soit Γ une courbe parametree, et f un isomorphisme affine.
Si Γ admet une demi-tangente (resp. tangente) T en $M(t_0)$ dirigee et orientee par $\vec{u}$ alors $f(\Gamma)$ admet une demi-tangente (resp. tangente) $f(T)$ en $f\big(M(t_0)\big)$ dirigee et orientee par $\vec{f}(\vec{u})$.
Exemple : Construction de la tangente a une ellipse. TODO

I.5. Hyperplans affines et demi-espaces

On suppose E un espace euclidien de dimension finie n sur un corps K.

I.5.1. Formes affines et hyperplans affines

Une **forme affine sur E** est une application affine de $E \to K$.
Une application constante de $E \to K$ est une forme affine de partie linéaire nulle.
Si f est une forme affine non nulle et $\lambda \in K$, alors $\{M \in E \mid f(M) = \lambda\}$ est un hyperplan affine de E.
En fait H est un hyperplan affine de E ssi il existe f forme affine $\neq 0$ telle que $H = \{M \in E \mid f(M) = 0\}$
Autrement dit un hyperplan affine est défini par une équation $f(M) = 0$. On peut mettre une constante si on veut, ça ne change pas le caractère affine f, l'hyperplan affine est aussi défini par une eq $f(M) = \lambda$
Deux equations $f(M) = 0$ et $g(M) = 0$ definissent le meme hyperplan ssi f et g sont proportionnelles.
Dans un espace affine <u>euclidien</u> : une forme affine $\neq 0$ peut s'écrire $\overrightarrow{OM}.\vec{n}$, <u>pour un certain</u> O et $\vec{n}$ mais quitte à ajouter une constante <u>on peut choisir</u> n'importe quelle origine $O \in E$ et un hyperplan peut tjrs s'écrire $\overrightarrow{OM}.\vec{n} = \lambda$ avec $\lambda = 0$ ssi $O \in H$ et $\vec{n}$ est un vecteur dit normal a l'hyperplan. Sa direction n'est pas choisie et dépend de l'hyperplan, mais on peut changer sa longueur.

I.5.2. Demi-espace

On suppose pour cette définition que $K = R$
Soit H un hyperplan affine défini par une équation $f(M) = \lambda$. Un **demi-espace fermé (resp. ouvert) délimité par *H*** est soit l'ensemble défini par $f(M) \geq \lambda$ (resp $>$) soit celui defini par $f(M) \leq \lambda$ (resp $<$)
Bien qu'un hyperplan affine puisse admettre plusieurs équations, elles définissent <u>un unique couple</u> de demi-espace fermé (resp. ouvert). Quitte à enlever la constante et multiplier par -1, on peut toujours ramener l'inéquation d'un demi-plan fermé (resp ouvert) a la forme $f(M) \leq 0$ (resp $f(M) < 0$)
Un demi-espace fermé (resp ouvert) est un fermé (resp ouvert) de l'espace affine.
Soit un hyperplan affine définissant donc deux demi-espaces, et soit deux points <u>pas</u> dans l'hyperplan. Alors ces deux points sont dans le même demi-espace ssi le segment les joignant n'intersecte jamais l'hyperplan. Il y a intersection en un unique point ssi ils sont dans des demi-espaces opposes.
La frontière d'un demi-espace ouvert/fermé délimité par un hyperplan affine est cet hyperplan affine.

I.6. Compléments de géométrie euclidienne

On suppose E espace affine euclidien, donc de dim finie, sur R, avec un produit scalaire.

I.6.1. Demi-espaces dans un espace affine euclidien

Rappel : φ forme linéaire <u>non nulle</u> sur E ssi $\exists(!)\ \vec{u} \neq \vec{0} \in \vec{E}\ \ \forall \vec{x} \in \vec{E}\ \ \varphi(\vec{x}) = \vec{x}.\vec{u}$ (Th de Riesz) et $\vec{u} \mapsto \varphi_{\vec{u}}$ isomorphisme de $\vec{E}$ dans l'espace de formes linéaires $\vec{E}^\star$.
ϕ forme affine <u>non constante</u> sur E ssi $\exists(!)\ O \in E\ \exists(!)\ \vec{u} \neq \vec{0} \in \vec{E}\ \ \forall M \in E\ \phi(M) = \overrightarrow{OM}.\vec{u}$

Dans ce cas sa partie linéaire est une forme linéaire non nulle représentée au sens de Riesz par $\vec{u}$.

I.6.2. Distance euclidienne

Une norme quelconque ne permet pas toujours d'obtenir des égalités métriques, mais la norme euclidienne permet des calculs de produits scalaires s'interprétant comme des égalités métriques.

Pour trois points M, N, P on a toujours $MP^2 = MN^2 + NP^2 + 2\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}$

Soit un segment $[AB]$ de milieu I.

Egalite de la médiane : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

On a aussi $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$

L'ensemble des points équidistants de A et B est un hyperplan dit **médiateur** d'équation $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = 0$ qui contient I et definit deux demi espaces dont les equations equivalent a $MA \geq MB$ et $MA \leq MB$.

I.6.3. Distance de deux sous-espaces affines

La distance entre deux sous-espaces affines euclidiens est atteinte en un couple de points

Soit deux espaces affines euclidiens $V = A + \vec{V}$ et $W = B + \vec{W}$

La distance est atteinte en un couple fixé $(M, N) \in V \times W$ $d(M, N) = d(V, W)$ ssi $\overrightarrow{MN} \in (\vec{V} + \vec{W})^{\perp}$

La distance est atteinte en un unique couple ssi $\vec{V} \cap \vec{W} = \{\vec{0}\}$ cad ssi $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont en somme directe.

Perpendiculaire commune à 2 droites. Si D et D' sont deux droites non paralleles d'un espace affine euclidien de dimension 3 alors il existe une unique droite Δ orthogonale et sécante aux 2 droites D,D'.

Δ est appelée la **perpendiculaire commune a $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D'}$**.

La distance de D a D' est atteinte en un seul couple de points : les points $\Delta \cap D$ et $\Delta \cap D'$.

II. Convexité

Dans toute cette partie on suppose E espace affine <u>réel</u> de direction un espace vectoriel <u>normé</u> $\vec{E}$.

II.1. Ensembles convexes

II.1.1. Combinaisons convexes

Une **combinaison convexe** d'un ensemble fini de points est un barycentre de ces points pour des coefficients positifs. M combinaison convexe de $P_0, \dots, P_k$ ssi $\exists \lambda_0, \dots, \lambda_k \in R_+$ $\sum_i \lambda_i = 1$ et $M = \sum_i \lambda_i P_i$

Une **combinaison convexe stricte** est une combinaison convexe avec poids strict. positifs $\forall i$ $\lambda_i > 0$.

II.1.2. Convexes.

Une partie d'un espace affine réel est **convexe** si tout segment d'extrémités dans la partie, est contenu dans la partie.

Une partie d'un espace affine réel est convexe ssi elle est stable par combinaison convexe.

Une partie convexe d'un R-espace affine est connexe par arcs.

Les convexes de R sont les intervalles. Les convexes compacts de R sont les segments. Pareil dans une droite affine.

Un sous-espace affine est convexe. Un demi-espace est convexe. Une boule est convexe.

Un **ellipsoïde** d'un R-espace affine est une partie définie par l'équation $q(\overrightarrow{OM}) \leq r$ avec $r \in R_+^*$ et q forme quadratique <u>définie positive</u> sur $\vec{E}$. Un ellipsoïde est convexe.

II.1.3. Convexes et applications affines. L'image d'un convexe par une application affine est convexe.

II.1.4. Intersection de convexes. Une intersection quelconque de convexes est convexe.

II.2. Enveloppe convexe

II.2.1. Définitions

Une combinaison convexe de combinaisons convexes dans $A \subseteq E$ est une combinaison convexe dans A
L'**enveloppe convexe** d'une partie A d'un R-espace affine est le plus petit (intersection) convexe contenant A. On la note $\boldsymbol{cv(A)}$
L'enveloppe convexe de A est aussi l'ensemble des combinaisons convexes de points dans A.

II.2.2. Simplexe

Un $\boldsymbol{n}$**-simplexe** est l'enveloppe convexe de $n+1$ points affinement indépendants. Il généralise le triangle en n dimensions.
Un simplexe est compact.
Soit un simplexe généré par $(A_0, \dots, A_n)$ base affine d'un espace affine. Dans le repère $\left(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\right)$, le simplexe est défini par les inégalités $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ et $x_1 + \dots + x_n \leq 1$.
L'hyperplan d'équation $x_i = 0$ est l'hyperplan contenant tous les sommets sauf A_i.
L'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots x_n = 1$ est l'hyperplan contenant tous les sommets sauf A_0.
L'ensemble $\{(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in R^{n+1} \mid \forall i \lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}$ est un n-simplexe de l'hyperplan de R^{n+1} d'équation $\sum_{i=0}^{n} x_i = 1$ en tant qu'enveloppe convexe de la base canonique de R^{n+1}.

II.2.3. Théorème de Carathéodory. L'enveloppe convexe d'une partie A non vide d'un R-espace affine de dimension n est l'ensemble des combinaisons convexes de au plus $n+1$ elements de la partie A.

II.2.4. Enveloppe convexe d'un compact. Dans un R-espace affine de dim finie, l'enveloppe convexe d'une partie compacte est aussi compacte.

II.2.5. Frontière d'un convexe. Dans un R-espace affine, toute droite passant par l'intérieur d'un convexe compact rencontre sa frontière en deux points.
Tout convexe compact est l'enveloppe convexe de sa frontière.

II.3. Intérieur et adhérence

II.3.1. Dimension d'un convexe

Si un convexe d'un R-espace affine contient une famille affinement indépendante de points, il contient le simplexe engendre par ces points.
Un convexe non vide est d'intérieur non vide dans la topologie induite par son espace affine engendre.
La **dimension d'un convexe** est la dimension de l'espace affine engendre par ce convexe.

II.3.2. Intérieur et adhérence

Si un point P interieur a un convexe d'interieur non vide, et Q un point de l'adherence du convexe. Alors tout point de $[PQ[$ est intérieur au convexe.
Si un convexe est d'intérieur non vide, alors son adhérence et son intérieur sont eux-mêmes convexes de même intérieur et de même adhérence que celle du convexe initial.

II.4. Hyperplan d'appui et projection

II.4.1. Séparation d'un point et d'un convexe

Un **hyperplan affine $\boldsymbol{H}$ separe un point $\boldsymbol{A \notin H}$ d'un convexe $\boldsymbol{C}$** si le point et le convexe sont dans des demi-espaces fermés opposes, pour le couple de demi-espaces fermés délimité par l'hyperplan.
Par convention on note R le demi-espace fermé contenant C, $M \in R \Leftrightarrow f(M) \leq 0$, et donc $f(A) > 0$

II.4.2. Hyperplan d'appui

Un hyperplan affine **$\boldsymbol{H}$ est un hyperplan d'appui d'un convexe $\boldsymbol{C}$ en un point $\boldsymbol{P \in C}$** ssi H délimite un demi-espace fermé contenant le convexe, et contient le point P du convexe.
Donc pour un hyperplan d'appui on a toujours $\exists P \in C \cap H$. Le point P d'appui est sur la frontière de C.

De plus, tous les points situes dans l'autre demi-espace ouvert sont séparés de C par H.
Soit un convexe d'intérieur non vide muni d'un hyperplan d'appui, dans un espace affine <u>euclidien</u>, on place une origine O dans l'intérieur du convexe, alors $\exists ! \vec{n} \neq \vec{0} \in \vec{E}$ tel que l'hyperplan soit défini par l'équation $\overrightarrow{OM}.\vec{n} = 1$. De plus tout point M du convexe vérifie $\overrightarrow{OM}.\vec{n} \leq 1$.
Dans un espace affine, soit un convexe ayant un hyperplan d'appui. Si l'hyperplan d'appui contient une combinaison convexe a poids <u>strictement</u> positifs de $n+1$ points du convexe, alors l'hyperplan contient aussi ces $n+1$ points.

II.4.3. Théorème de projection sur un convexe fermé

Dans un espace affine euclidien E, soit un convexe fermé non vide C et un point $A \notin C$ en dehors. Alors la distance du point A au convexe fermé est atteinte en un unique point $P \in C$. L'hyperplan contenant ce point P orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AP}$ est hyperplan d'appui du convexe en P et sépare le convexe de A.
Un convexe fermé d'un espace affine euclidien est l'intersection des demi-espaces fermés le contenant.

II.4.4. Existence d'un hyperplan d'appui en tout point de la frontière.

Un convexe fermé d'un espace affine euclidien admet un hyperplan d'appui en tout point de sa frontière

II.5. Points extrémaux

On suppose E R-espace affine quelconque.

II.5.1. Généralités

Un point d'un convexe est un **point extrémal du convexe** ssi il n'est pas le milieu de deux points distincts du convexe ssi il n'est pas contenu dans un segment d'extrémités dans le convexe distinctes du point ssi il n'est pas combinaison convexe de points du convexe distincts de lui ssi le convexe privé du point est encore convexe.
Tout point extrémal d'un convexe est un point frontière.
Toute partie d'un R-espace affine contient les points extrémaux de son enveloppe convexe.
Si un convexe admet un hyperplan d'appui en un point du convexe tel que l'intersection du convexe et de l'hyperplan se réduit a ce point, alors ce point est extrémal pour le convexe. Réciproque fausse.
Soit un convexe admettant un hyperplan d'appui, alors les points <u>extrémaux de l'intersection</u> (qui est aussi convexe) sont les points <u>extrémaux du convexe</u> contenus dans l'hyperplan d'appui.
Les points extrémaux d'une boule fermé, sont la sphère correspondante.
Les points extrémaux de $\left\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1} \mid x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\right\}$ sont la base canonique de R^{n+1}

II.5.2. Théorème de Krein-Millman

Tout convexe compact d'un espace affine euclidien est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.
Un convexe compact d'un espace affine euclidien admet au moins un point extrémal.

II.6. Fonctions convexes

II.6.1. Généralités

Soit C un convexe d'un espace affine reel.
Une fonction $f: C \to R$ d'un convexe C d'un R-espace affine vers R est une **fonction convexe** ssi $\forall M, N \in C\ \forall t \in [0,1]\ f(tM + (1-t)N) \leq tf(M) + (1-t)f(N)$ ssi l'image de toute combinaison convexe est majoree par la meme combinaison de toutes les images : $f(\sum_i \lambda_i P_i) \leq \sum_i \lambda_i f(P_i)$
Une fonction $f: C \to R$ convexe vérifie donc pour toute combinaison convexe $f(\sum_i \lambda_i P_i) \leq \max_i f(P_i)$
Une fonction $f: C \to R$ affine conservant les barycentres est une fonction convexe.
Si $f_1: C \to R, \dots, f_k: C \to R$ et $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_k \geq 0$ alors $f = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i f_i$ est une fonction convexe.

Si $O \in E$ est fixe, alors $M \in E \mapsto OM \in R$ est convexe.

II.6.2. Majoration d'une fonction convexe sur un compact

On se place dans un R-espace affine normé (tel que sa direction est un Revn)

Diamètre de l'enveloppe convexe. Le diamètre d'une partie bornée d'un R-espace affine normé, est égal au diamètre de son enveloppe convexe.

La somme des distances aux sommets d'un simplexe admet un maximum atteint en un de ces sommets.

Une fonction convexe sur un simplexe admet un maximum en un des points définissant le simplexe.

Une fonction convexe qui admet un maximum sur un convexe compact (la continuité suffit), atteint ce maximum en un des points extrémaux du convexe.

Une fonction convexe n'est pas forcement majorée sur un convexe compact.

II.7. Application de la convexité au théorème de Jung

Soit A un compact de diamètre δ dans un espace affine euclidien E. Il existe une unique boule fermée contenant A de rayon minimal r, on note son centre O. Le centre O appartient à l'enveloppe convexe de l'intersection du compact et de la sphère de centre O de rayon r. De plus $r \leq \delta\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$

II.8. Polyèdres convexes

Un **polyèdre convexe d'un espace affine euclidien** est une intersection finie de demi-espaces fermés.

Un **polytope d'un espace affine euclidien** est un polyèdre convexe compact d'intérieur non vide.

Un polyèdre convexe est donc défini par un système fini d'inéquations $f_1(M) \leq 0, \dots, f_k(M) \leq 0$

Un repère de l'espace affine euclidien choisi un **polyèdre convexe sous la forme standard** s'écrit

$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n \leq b_1 \\ \dots \\ a_{1k}x_1 + \dots + a_{nk}x_n \leq b_k \end{cases}$ soit : $\boldsymbol{AX} \leq \boldsymbol{B}$ avec $A \in M_{k,n}(R), B \in R^k$, d'inconnue $X \in R^n$

Un polyèdre convexe est convexe. L'intersection finie de polyèdres convexes est un polyèdre convexe.

Tout sous-espace affine est un polyèdre convexe.

Un polytope d'une droite affine est un segment non trivial.

Un simplexe est un polytope.

Soit p points distincts d'une origine O dans un espace affine euclidien, l'ensemble des points de l'espace plus proche de l'origine que de ces p points, forme un polyèdre convexe d'intérieur non vide.

II.8.1 Faces d'un polyèdre convexe

Une **famille minimale de demi-espaces fermés définissant un polyèdre convexe** est une famille finie, telle que l'intersection est le polyèdre convexe, et telle qu'aucun demi-espace n'est redondant, c.-à-d. aucun ne contient l'intersection des autres.

Tout polyèdre convexe admet une unique famille minimale définissante de demi-espaces fermés (à l'ordre près) qu'on peut appeler **demi-espaces fermés définissants du polyèdre convexe**. Les hyperplans affines frontières de ces demi-espaces sont **hyperplans définissants du polyèdre convexe**.

Une **face d'un polyèdre convexe** est l'intersection d'un hyperplan définissant avec le polyèdre.

Toute face d'un polyèdre convexe est convexe d'intérieur non vide dans l'hyperplan affine définissant.

Un polyèdre convexe a un nombre fini de faces, et sa frontière, est la réunion de ses faces.

Un polyèdre peut être d'intérieur vide mais est d'intérieur non vide dans l'espace affine qu'il engendre.

Tout hyperplan affine dont l'intersection avec un polyèdre convexe est d'intérieur non vide dans l'hyperplan, est un hyperplan définissant du polyèdre, et cette intersection est une face du polyèdre.

Une face d'un polyèdre convexe admet un unique hyperplan d'appui la contenant : l'hyperplan définissant de cette face.
On peut donc également définir une **face d'un polyèdre convexe** comme l'intersection d'un hyperplan d'appui du polyèdre avec celui-ci, lorsque cette intersection est d'intérieur non vide dans l'hyperplan.
Si on fixe une origine O dans l'intérieur d'un polyèdre convexe, $\exists! \overrightarrow{n_1}, \dots, \overrightarrow{n_k} \in \vec{E}$ on peut définir le polyèdre par $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{n_1} \leq 1, \dots, \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{n_k} \leq 1$ et chacune des k faces est definie par $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{n_\iota} = 1$.
Pour un n-simplexe de $n+1$ points affinement independants, les faces correspondent aux hyperplans qui contiennent tous les points sauf 1. Il y a donc $n+1$ faces.

II.8.2. Intersection avec un sous-espace

Dans un R-espace affine, l'intersection d'un sous-espace affine avec un polyèdre convexe d'intérieur non vide, est un polyèdre convexe du sous-espace affine. Si ce nouveau polyèdre est d'intérieur non vide dans ce sous-espace, ses faces sont des intersections des faces du polyèdre initial avec le sous-espace : Celles (intersections) dont l'intérieur est non-vide dans le sous-espace affine.
Une face d'un polyèdre convexe est elle-même un polyèdre convexe.
Dans un espace affine euclidien de dim n, une **(n-1)-face d'un polyedre convexe** est une face du polyèdre. Une ***k*-face d'un polyèdre convexe** est une face d'une $(k+1)$-face
Une **arête d'un polyèdre convexe**, est une 1-face.
Un **sommet d'un polyèdre convexe** est une 0-face.
Deux k-faces d'un polyèdre convexe sont **adjacentes** ssi elles contiennent une même (k-1)-face cad ssi elles ont une face commune.
Deux arêtes sont donc adjacentes ssi elles ont un sommet en commun.
Deux sommets sont adjacents ssi ils appartiennent à une même arête.
Si $j < k$ les j-faces d'une k-face d'un polyèdre convexe, sont aussi des j-faces du polyèdre convexe.
Une $(n-k)$-face d'un polyèdre convexe est intersection d'au moins k faces du polyèdre. (Exactmnt ?)

II.8.3. Faces adjacentes

Une $(n-2)$-face d'un polyèdre convexe est intersection d'exactement 2 faces du polyèdre.
En dimension 2, deux arêtes adjacentes se coupent en un sommet qui n'appartient à aucune autre arête
En dimension 3, deux faces adjacentes se coupent en une arête qui n'est dans aucune autre face.

II.8.4. Extrémalité

Toute k-face d'un polyedre convexe est l'intersection du polyedre avec un de ses hyperplans d'appui.
Si une combinaison convexe stricte de points d'un polyèdre convexe est dans une k-face du polyèdre, alors les points définissant cette combinaison sont aussi dans cette même k-face.
Les points extrémaux d'un polyèdre convexe sont exactement les sommets (0-faces) du polyèdre.

II.8.5. Image d'un polyèdre convexe par un isomorphisme affine

Soit un isomorphisme affine entre deux espaces affines euclidien de même dimension, alors l'image directe d'un polyèdre convexe d'intérieur non vide est un polyèdre convexe d'intérieur non vide. De plus l'isomorphisme affine induit une bijection des k-faces de P, aux k-faces de $f(P)$, pour tout k.
En particulier les arêtes de $f(P)$ sont images des arêtes de P. Les sommets de $f(P)$ sont images des sommets de P. Deux faces adjacentes de P sont envoyees sur deux faces adjacentes de $f(P)$, 2 sommets adjacents de P sont envoyes sur 2 sommets adjacents de $f(P)$. Deux images de faces distinctes ne peuvent pas coïncider.

II.8.6. Polytopes

Un polytope est l'enveloppe convexe de ses sommets. (preuve avec ou sans Krein-Millman)

Les sommets d'un n-simplexe defini par $A_0, \dots, A_n$ sont les points $A_0, \dots, A_n$

L'enveloppe convexe d'un ensemble fini de pts est un polytope du sous-espace affine qu'il engendre.*

Etre un polytope c'est donc être une enveloppe convexe d'un nb fini de points.

II.8.7. Polygones convexes et pyramides

Un polytope convexe d'un espace affine de dimension 2 est un **polygone convexe**

On peut numéroter les sommets d'un polygone convexe sous la forme $A_1, \dots, A_n$, (on pose $A_{n+1} = A_1$) de sorte que les arêtes du polygone convexe sont exactement tous les $[A_i, A_{i+1}]$. (Il y en a n).

La somme des angles géométriques intérieurs d'un polygone a n cotés vaut $(n-2)\pi$.

Un **triangle** est un polygone convexe a 3 sommets (soit 3 aretes).

Dans un espace affine de dimension 3, une **pyramide** est l'enveloppe convexe d'une famille $\{S, A_0, \dots, A_{p-1}\}$ ou $(A_0, \dots, A_{p-1})$ définissent un polygone convexe plan **dit de base** (on suppose ils engendrent un plan affine), et S est un point de l'espace pas dans le plan du polygone.

Les plans faces de la pyramide sont le plan du polygone de base, et les plans des triangles $A_i S A_{i+1}$.

Les arêtes d'une pyramide sont les arêtes du polygone de base, et les segments $[SA_i]$.

Les sommets d'une pyramide sont $\{S, A_0, \dots, A_{p-1}\}$.

L'intersection d'une pyramide avec un plan affine séparant le sommet du polygone de base est un polygone convexe ayant le même nombre de cote que le polygone de base.

II.8.8. Connexité de l'ensemble des faces

Dans un polygone convexe du plan, on peut relier deux arêtes (ou 2 sommets) quelconque par une suite finie d'arêtes adjacentes

Dans un polytope de dimension 3, on peut relier deux faces par une suite finie de faces adjacentes.

Dans un polytope de dimension 3, on peut relier deux sommets par une suite finie d'arêtes adjacentes.

II.8.9. Formule d'Euler (Uniquement en dimension 3 pour un R espace affine).

Projection stéréographique. Soit un polytope convexe d'intérieur non vide, soit F une face de plan affine H, on considère le demi-plan ouvert <u>externe</u> de cette face, et on l'intersecte avec <u>tous</u> les <u>autres</u> demi-plans ouvert <u>internes</u> du polytope de sorte à avoir une sorte de cône pyramidal infini qui s'élargit plus on s'éloigne. On prend A dans cette zone, et on note H_A le plan affine passant par A parallèle a H. Tout point $M \notin H_A$ forme avec A une droite (AM) qui coupe H en un unique M'. L'application $M \notin H_A \mapsto M' \in H$ est la **projection stéréographique de centre A sur le plan H.**

La projection stéréographique de centre A sur le plan H d'une face F induit une bijection de la frontière du polytope privée de la face F vers l'intérieur de la face F. Autrement dit une bijection de toutes les autres faces vers l'intérieur de la face F. Toute autre face G a pour image dans F, un polygone convexe ayant le même nombre de cotes que G. La réunion de tous ces polygones correspondant a chaque face distincte de F, redonne exactement la face F.

Formule d'Euler. Si un polytope d'un espace affine réel de dimension 3 admet f faces, a aretes et s sommets, alors $a = s + f - 2$.

Solides de Platon. Dans un espace affine euclidien de dimension 3, soit un polytope tel que le nombre d'arêtes par face est une constante $a_f \geq 3$, le nombre d'arête par sommet est une constante $a_s \geq 3$.

Alors $2a = s \times a_s = f \times a_f$, et la valeur du couple $\left(a_s, a_f\right)$ determine la valeur du triplet (s, a, f). De plus les seules valeurs sont :

$\left(a_s, a_f\right)$	(s, a, f)	Solide
$(3,3)$	$(4,6,4)$	**Tétraèdre**
$(3,4)$	$(8,12,6)$	**Cube**
$(3,5)$	$(20,30,12)$	**Dodécaèdre**
$(4,3)$	$(6,12,8)$	**Octaèdre**
$(4,5)$	$(12,30,20)$	**Icosaèdre**

Complément 1. Matrices bistochastiques

Complément 2. Théorème de Morley

Chapitre 5. Géométrie projective.

I. Espace engendre par un espace affine

L'espace vectoriel engendre par un espace affine A de dimension finie n, noté $\boldsymbol{A}^{\vee}$ est le Kev de base $(a_0, \dots, a_n)$ une base affine de A de sorte que $A^{\vee} = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i : (\lambda_i)_{0 \le i \le n} \in K^{n+1}\} = K a_0 \oplus \dots \oplus K a_n$.
L'espace vectoriel engendre est un Kev de dimension $n+1$. Ce n'est pas $\vec{A}$. On pose aussi $\emptyset^{\vee} = \{0\}$.
Rappel : Pour un espace affine A de base $(a_0, \dots, a_n)$ on peut écrire $A = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i : \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\} \subset A^{\vee}$ et pour sa direction on peut écrire $\vec{A} = \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i : \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 0\} \subset A^{\vee}$
L'espace vectoriel engendre ne dépend pas de la base affine choisie, il est canoniquement associe a A.
L'espace vectoriel engendre peut se définir aussi par : $A^{\vee} \approx \vec{A} \cup (K^* \times A)$. On a $(K^n)^{\vee} = K^{n+1}$
Une formule affine de A utilisant des sommes et barycentres de points et de vecteurs est vraie dans A si elle est vraie dans $A^{\vee}$, il est plus facile de calculer et de montrer des identités dans $A^{\vee}$ grace a sa structure plus maniable d'espace vectoriel.
Une application affine $f: A \to B$ entre deux espaces affines se prolonge de facon unique en une application linéaire $f^{\vee}: A^{\vee} \to B^{\vee}$ entre les deux espaces vectoriels engendres. $\boldsymbol{f}^{\vee}$ est **l'application linéaire engendrée par l'application affine $\boldsymbol{f}$.**
$\vee: GA(A) \to GL(A^{\vee}): f \mapsto f^{\vee}$ est un morphisme de groupes injectif d'image $\{\phi \in GL(A^{\vee}) | \phi(A) = A\}$.

II. Espaces projectifs

II.1. Espaces projectifs et applications projectives

L'espace projectif $\boldsymbol{P}(\vec{\boldsymbol{E}})$ d'un Kev $\vec{E}$ de dimension finie est le quotient de $\vec{E} \setminus \{0\}$ par la relation d'equivalence de colinearite : $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^* \ x = \lambda y$ cad dont les classes sont les droites vectorielles privees de $\vec{0}$ dans $\vec{E}$. $P(\vec{E})$ est donc l'ensemble des droites vectorielles de $\vec{E}$. On note $[x]$ les classes.
On dit que **l'espace projectif est de dimension $\boldsymbol{n}$** si son espace vectoriel E est de dimension $n+1$.
Attention un espace projectif n'est pas un espace vectoriel. L'idée est que c'est un hyperplan à l'infini.
Un **point projectif** est un espace projectif de dimension 0, c'est une droite vectorielle fixée.
Une **droite projective** est un espace projectif de dimension 1.
Un **plan projectif** est un espace projectif de dimension 2. Correspond la vision humaine dans l'espace 3D, c'est un « plan à l' infini ».
Une droite projective prise comme sous-espace projectif d'un plan projectif, revient à restreindre le

champ de vision par une sorte de fente infinie suivant une unique droite projective.
On note $\boldsymbol{P^1(R)} = P(R^2)$ la **droite projective réelle**
On note $\boldsymbol{P^1(C)} = P(C^2)$ la **droite projective complexe**
Exemple : TODO (illisible)
Soit la droite $D = \{(x_0, 1) : x_0 \in K\}$ du plan vectoriel K^2, de direction $\vec{D} = \{(x_0, 0) : x_0 \in K\}$, la droite projective de K, $P^1(K) = P(K^2)$ est aussi égale a $P(D^\vee) = \{(x_0: 1) : x_0 \in K\} \cup \{(1: 0)\}$, ou l'on note $(x: y)$ la classe d'equivalence de (x, y). Les $(x_0: 1)$ sont les droites vectorielles de K^2 distinctes de $\vec{D}$ privees de (0,0), et $(1: 0)$ est la droite $\vec{D}$ privee de (0,0).
En posant $\phi: P(K^2) \to K \cup \{\infty\}: (x: 1) \mapsto x,\ (1: 0) \mapsto \infty$ on identifie $P(K^2)$ a $K \cup \{\infty\}$.
Coordonnées projectives. Soit $\vec{E}$ un Kev de dim. $n + 1$ et de base $B = (\vec{e_0}, \dots, \vec{e_n})$ soit $\vec{x} = \sum_{i=0}^{n+1} x_i \vec{e_i} \in \vec{E}$. Dans l'espace projectif $(\vec{E})$, un élément est de la forme $[\vec{x}] = \{(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n): \lambda \in K^*\} =$
$(\boldsymbol{x_0}: \dots : \boldsymbol{x_n}) = K^*(x_0, \dots, x_n)$ et pour tout $\lambda \in K^*$ on a $[\lambda\vec{x}] = (\lambda x_0: \dots : \lambda x_n) = (x_0: \dots : x_n) = [\vec{x}]$.
L'espace projectif de l'espace vectoriel engendre par un espace affine de dimension n $P(A^\vee)$ est l'ensemble des droites vectorielles de $A^\vee$, cet ensemble est appelé **complété projectif de $\boldsymbol{A}$.**
Le complété projectif $P(A^\vee)$ est la réunion disjointe de P_1 l'ensemble des droites de $A^\vee$ qui rencontrent A et de P_2 l'ensemble des droites de $A^\vee$ qui ne rencontre pas A. P_1 est en bijection avec A, et $P_2 = P(\vec{A})$, donc on peut identifier $P(A^\vee) \approx A \cup P(\vec{A})$ ou les droites vectorielles de $\vec{A}$ cad $P(\vec{A})$ représente l'ensemble des points a l'infini de A. Exemple : $P(K^{n+1}) \approx K^n \cup P(K^n) \approx K^n \cup K^{n-1} \cup \dots \cup K \cup \{\infty\}$
Un Kev $\vec{E}$ est l'ev engendré par tout hyperplan affine H ne contenant pas 0, et donc l'espace projectif du Kev est aussi le complété projectif de H et peut s'écrire comme l'union disjointe $P(\vec{E}) = H \cup P(\vec{H})$. Le complémentaire des points à l'infini de l'hyperplan $P(\vec{E}) \setminus P(\vec{H})$ est en bijection avec H et même avec tout hyperplan de même direction, ne passant pas par 0.
Coordonnées projectives standardisées. Pour un espace affine A de dimension n on peut supposer :
$A = \{(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, 1)\}, \quad P(A^\vee) = \{(x_0: \dots : x_n)\}, \quad P(\vec{A}) = \{(x_0: \dots : x_{n-1}: 0)\}$
Par exemple on considère un espace affine A de dimension $n = 2$, on peut l'imaginer comme hyperplan affine de l'espace $3D$, ensuite on repositionne ce plan de sorte que $z = 1$, alors $A = \{(x, y, 1)\}$, son espace projectif est le plan à l'infini $P(\vec{A}) = \{(x: y: 0) = K^*(x, y, 0)\}$, L'espace projectif de K^3 est $\{(x: y: z)\} = \{K^*(x, y, z)\}$, fixer une droite vectorielle $(x: y: z)$ revient a fixer un point $(x, y, 1)$ de A si $z \neq 0$, et revient a fixer une droite $(x: y: 0)$ si $z = 0$.
Intuitions : Plan a l'infini = Plan ∪ droite à l'infini, droite à l'infini = droite ∪ point a l'infini
Si $\vec{F}$ est un sev d'un Kev $\vec{E}$ de dimension finie, alors $P(\vec{F}) \subseteq P(\vec{E})$
Un **sous-espace projectif d'un espace projectif** d'un Kev $\vec{E}$ de dimension finie, est l'espace projectif d'un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.
Un **hyperplan projectif** d'un espace projectif $P(\vec{E})$ est un sous-espace projectif de $P(\vec{E})$ de dimension $\dim\left(P(\vec{E})\right) - 1$. Il y a bijection entre hyperplans vectoriels de $\vec{E}$ et hyperplans projectifs de $P(\vec{E})$. Par ex : Si $\vec{E} = R^3$, hyperplan vectoriel = Plan vectoriel de dimension 2 = droite projective de $P(R^3)$ = hyperplan projectif de $P(R^3)$.
L'intersection de sous-espaces projectifs est un sous-espace projectif du même espace projectif.
Le **sous-espace projectif engendré** par une partie d'un espace projectif, est le plus petit (intersection)

sous-espace projectif contenant la partie.
Le sous-espace projectif engendré $\overline{P}$ par l'union de deux sous-espaces projectifs P', P'' d'un même espace projectif $P(\vec{E})$ vérifie $\dim(\overline{P}) = \dim(P') + \dim(P'') - \dim(P' \cap P'')$
Deux droites projectives (se proj. de dim 1) distinctes d'un plan projectif se coupent en un point projectif : Si elles sont parallèles elle se coupent au même point de la droite à l'infini bordure du plan projectif, Si en plus elles sont d'angle nul, elles se coupent au point à l'infini de cette droite à l'infini.
Une **application projective = homographie** est une application entre deux espaces projectifs $f: P(E) \to P(F)$ telle qu'il existe une application linéaire entre les Kev correspondant $\phi: E \to F$ telle que $\forall [x] \in P(E)\ f([x]) = [\phi(x)]$, cad telle que $f = [\boldsymbol{\phi}]$**.**
Une homographie est toujours injective ainsi que son application linéaire associée. Ainsi s'il existe une homographie $P(E) \to P(F)$ alors $\dim(P(E)) \leq \dim(P(F))$
Deux applications linéaires injectives entre deux mêmes Kev $E \to F$ représentent la même homographie ssi elles sont proportionnelles. $[\phi] = [\phi'] \Leftrightarrow \exists \lambda \in K^*\ \phi = \lambda\phi'$.
Le groupe des automorphismes de K^n est noté $\boldsymbol{GL(K^n)} = \boldsymbol{GL_n(K)}$ ce sont les matrices carrées inversibles.
Le **groupe projectif linéaire en dimension $\boldsymbol{n+1}$ de $\boldsymbol{K}$** et noté $\boldsymbol{PGL_{n+1}(K)}$ est le groupe des homographies de l'espace projectif $P(K^{n+1})$ sur lui-même de dimension n.
Le groupe $PGL_{n+1}(K)$ est le quotient de $GL_{n+1}(K)$ par le sous-groupe des matrices scalaires inversibles $\{\lambda I_{n+1} : \lambda \in K^*\}$
La composée de deux homographies $[\phi]: P(E) \to P(F)$, et $[\psi]: P(F) \to P(G)$ est l'homographie $[\psi \circ \phi]: P(E) \to P(G)$.
Un **repère projectif** d'un espace projectif $P(\vec{E})$ de dimension n d'un Kev $\vec{E}$ de dim $n+1$ est une famille de $n+2$ points projectifs $(M_0, \dots, M_{n+1})$ de $P(\vec{E})$ de la forme $M_0 = [e_0], \dots, M_n = [e_n], M_{n+1} = [e_0 + \dots + e_n]$ avec $B = (e_0, \dots, e_n)$ une base de E. Les coordonnées projectives de ces points projectifs dans la base B sont $(1:0:\dots:0), (0:1:0:\dots:0), \dots, (0:\dots:0:1), (1:1:\dots:1)$.
$n+2$ points projectifs quelconques forment un repère projectif ssi en retirant n'importe lequel de ces points projectifs, ceux restant ne font pas partie du même hyperplan projectif. Dans ce cas la base correspondante est déterminée de façon <u>unique</u> a un facteur $\lambda \in K^*$ pres.
Deux espaces projectifs P, P' de même dimension ayant chacun un repère projectif R, R', alors il existe une <u>unique</u> homographie de $P \to P'$ qui envoie R sur R'. (Preuve justifiant def repère projectif)
De plus elle est bijective de réciproque l'unique homographie $P' \to P$ qui envoie R' sur R.
3 points distincts d'une droite projective forment toujours un repère projectif de cette droite.
4 points distincts d'un plan projectif, tel que retirer un point ne donne pas 3 points alignes est un repère projectif du plan projectif.

II.2. Droite projective et birapport

Si a, b, c, d sont quatre points distincts d'une même droite affine, alors le rapport $(d-c)/(b-a)$ des vecteurs $\overrightarrow{cd}$ et $\overrightarrow{ab}$ est invariant sous l'action du groupe $GA(A)$ des transformations affines.
On se place dans la droite projective $\widehat{K} = P(K^2) = K \cup \{\infty\}$, dans le repere projectif $[e_1] = (1:0) = \infty, [e_2] = (0:1) = 0, [e_3] = (1:1) = 1$. C'est le **repère projectif canonique** $(\infty, 0{,}1)$ de $\widehat{K}$.
Soit $x \in K$, **le birapport des quatre points** $[\infty, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{x}]$ est défini comme x. Donc $x = [\infty, 0{,}1, x]$.
Le birapport des quatre points distincts d'une droite projective Δ est $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}] = h(D) =$

$[\infty, 0, 1, h(D)]$ avec h l'unique homographie $h: \Delta \to \widehat{K}$, telle que $h(A) = \infty, h(B) = 0, h(C) = 1$.
Conservation du birapport. Soit une homographie entre deux espaces projectifs $P \to P'$. Quatre points distincts d'une droite projective de P sont automatiquement envoyés sur 4 points alignés d'une même droite projective dans P' et le birapport est conservé. $[f(A), f(B), f(C), f(D)] = [A, B, C, D]$
Quatre points distincts d'une droite projective forment une **division harmonique** si leur birapport est -1 cad ssi il existe une homographie $h: \Delta \to \widehat{K}$ envoyant A, B, C, D sur $\infty, 0, 1, -1$ respectant l'ordre.
On dit aussi que D est le **conjugue harmonique de $\boldsymbol{C}$ par rapport a $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$.**
Si A, B, C, D quatre points distincts d'une droite projective Δ sur un corps K de carac. $\neq 2$ avec $A = \infty$ de sorte que $\Delta \setminus \{A\}$ droite affine dont Δ est le complété projectif, alors dire $[A, B, C, D] = -1$ revient a dire B est l'isobarycentre de C, D ou encore si $K = R$, B est le milieu de $[CD]$.
Homographie de la droite projective. Si f homographie de $\widehat{K} \to \widehat{K}$ alors il existe une matrice inversible $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ unique (à multiplication par $\lambda \in K^*$ près) telle que
Si $c \neq 0$, on a, pour $x \in K$ et $x \neq \frac{-d}{c}$, $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty$ et $f(\infty) = \frac{a}{c}$
Si $c = 0$, on a, pour $x \in K$, $f(x) = \frac{ax+b}{d}$, $f(\infty) = \infty$ (cas limite si on fait tendre $c \to 0$)
Le groupe $PGL_2(K)$ est le quotient de $GL_2(K)$ par le sous-groupe des matrices $\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in K^*\right\}$
Exemple : lentilles minces en physique (illisible).
Formule affine du birapport. Si a, b, c, d sont quatre points distincts de $\widehat{K}$ et distincts de ∞, alors leur birapport est donné par (d'où le terme) : $[a, b, c, d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}} : \frac{\overrightarrow{ad}}{\overrightarrow{bd}}$
On a les relations suivantes : $[a, b, c, d] = [b, a, d, c] = [a, b, d, c]^{-1} = [b, a, c, d]^{-1}$
$[a, b, c, d] + [a, c, b, d] = [a, b, c, d] + [d, b, c, a] = 1$
II.3. Dualite
Le **projectif dual d'un espace projectif $\boldsymbol{P}$** $= P(\vec{E})$ est l'espace $\boldsymbol{P}^\star = P(\vec{E}^\star)$ projectif du dual de $\vec{E}$.
Un hyperplan de $\vec{E}$ ou de $P(\vec{E})$ (correspondent) est défini par la donnée d'une forme linéaire $\neq 0$ de $\vec{E}$.
L'espace projectif dual $P^\star$ est en bijection avec l'ensemble des hyperplans de l'espace projectif P et donc aussi avec l'ensemble des hyperplans de $\vec{E}$.
Le dual projectif d'un plan projectif est donc en bijection avec l'ensemble des droites projectives.
Un élément $\varphi = ue_0^\star + ve_1^\star + we_2^\star \in E^\star$ de coordonnées (u, v, w) dans $E^\star$ définit une droite vectorielle élément de $P^\star$ de coordonnées $(u: v: w)$, et correspond à une unique classe de forme linéaires non nulles proportionnelles. Cet élément $(u: v: w)$ de $P^\star$ correspond à un unique plan vectoriel de R^3, cad a une unique droite projective de R^3 : Le plan d'équation $ux + vy + wz = 0$ (dans la base e_0, e_1, e_2).
Donc $(u_1: \ldots : u_n) \in P^\star$ correspond à l'hyperplan vectoriel de $\vec{E}$ d'équation $u_1x_1 + \cdots + u_nx_n = 0$.
On se place désormais dans le plan projectif $P(\vec{E})$ d'un Kev $\vec{E}$ de dimension 3.
P = plan projectif = ensemble des droites vectorielles = $\vec{E}$
Droite de P = droite projective (de P) = plan vectoriel
Point de P = point projectif (de P) = droite vectorielle
Point de $P^\star$ = point projectif de $P^\star$ = plan vectoriel = droite projective de P.
Droite de $P^\star$= Droite projective de $P^\star$ = Faisceau de droites projectives passant par un point projectif.
Un faisceau de droites projectives est un ensemble de droites projectives dans P = points de $P^\star$ qui

forment une droite projective dans $P^{\star}$. C'est juste une droite projective de $P^{\star}$.
L'ensemble de toutes les droites projectives de P qui passe par un point projectif M de P, est un faisceau de droites projectives, et réciproquement tout faisceau de droites projectives est de cette forme. $\boldsymbol{F_M}$
Donc, une droite projective de $P^{\star}$ correspond à l'ensemble des droites projectives qui passent par un point projectif = ensemble des plans vectoriels d'intersection une même droite vectorielle.
L'application $P \to P^{\star\star}$ qui a un point projectif associe le faisceau des droites projectives qui passe par lui, est une homographie bijective.
Le birapport de 4 droites concourantes en un point projectif M d'un plan projectif P, est le birapport des 4 points correspondants sur la droite projective de $P^{\star}$ associée a F_M. 4 droites concourantes forment un **faisceau harmonique** ssi leur birapport est -1.
Homographie entre droite et faisceau. Soit Δ droite du plan projectif P, soit $M \notin \Delta$ point projectif de P. Alors l'application f qui a tout $N \in \Delta \mapsto$ la droite D_N joignant M et N est une homographie bijective de Δ sur la droite projective de $P^{\star}$ associée au faisceau F_M. Soient $N_1, N_2, N_3, N_4 \in \Delta$ distincts, on a alors $[D_{N_1}, D_{N_2}, D_{N_3}, D_{N_4}] = [N_1, N_2, N_3, N_4]$
Homographie entre 2 droites. Soient Δ, Δ' deux droites distinctes du plan projectif P, soit $M \notin \Delta \cup \Delta'$ un point projectif de P alors l'application $h: \Delta \to \Delta': N \mapsto N' = (MN) \cap \Delta'$ est une homographie.

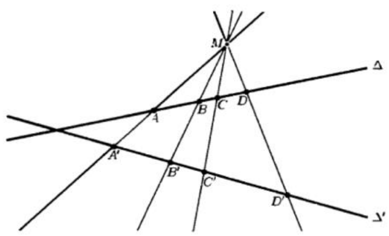

FIGURE 5.2. Homographie de Δ sur Δ'

II.4. Quadrilatere complet. Théorèmes de Pappus et de Desargues
Résultats classiques de géométrie projective. Démonstrations en aller et retour entre géométries affine et projective. En général le résultat est une propriété affine. On complète le plan affine en plan projectif. Cela fait disparaitre les cas particuliers ou certaines droites sont parallèles. Puis on utilise une méthode connue sous le nom d'expédition d'un point / d'une droite à l'infini, en choisissant une droite comme droite a l'infini pour ramener le problème initial a un problème affine plus simple.
Quadrilatère complet. Soient 4 droites D_1, D_2, D_3, D_4 d'un plan projectif P qui forment un repere projectif de $P^{\star}$ ce qui signifie qu'il n'existe pas de point commun a 3 de ces droites. Pour $1 \leq i < j \leq 4$, notons $M_{ij} = D_i \cap D_j$. Le trace fait apparaitre 3 droites supplementaires. La droite $M_{12}M_{34}$, notee Δ. La droite $\Delta' = (M_{13}M_{24})$ et la droite $\Delta'' = (M_{14}M_{23})$. Alors Δ' et Δ'' rencontrent Δ en deux points N' et N'' qui sont conjugues harmoniques par rapport a M_{12} et M_{34} c'est-à-dire $[M_{12}, M_{34}, N', N''] = -1$.

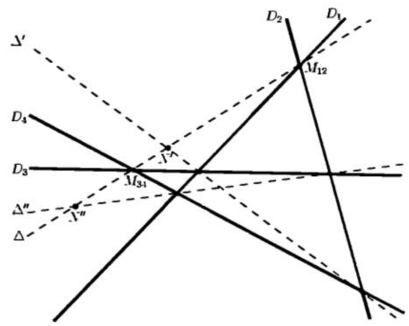

FIGURE 5.4. Quadrilatère complet

Theoreme de Pappus vers 340. Soient P un plan projectif, Δ_a, Δ_b 2 droites distinctes de P, soit $D = \Delta_a \cap \Delta_b$, soient A_0, A_1, A_2 3 points distincts de $\Delta_a \setminus \{D\}$, soient B_0, B_1, B_2 3 points distincts de $\Delta_b \setminus \{D\}$. Pour $\{i, j, k\} = \{0,1,2\}$, soit $C_i = (A_j B_k) \cap (A_k B_j)$, $j \neq k$. Alors C_0, C_1, C_2 sont alignes.

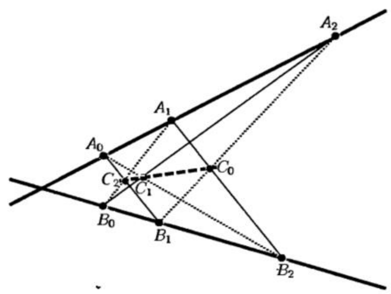

FIGURE 5.5. Théorème de Pappus

Remarque : $\Delta_a \cup \Delta_b$ est une conique degeneree. Un theoreme de Pascal generalise celui de Pappus au cas d'une conique propre. La dem de Pascal s'applique donc aussi a Pappus.

Théorème de Desargues, 1639. Soit P un espace projectif et $S, A_0, A_1, A_2, B_0, B_1, B_2$ sept points distincts de P tels que S, A_0, A_1, A_2 et S, B_0, B_1, B_2 forment un repère projectif de l'espace qu'ils engendrent et pour $i = 0,1,2$. S, A_i, B_i sont alignes. Pour $\{i, j, k\} = \{0,1,2\}$ soit $C_k = (A_i A_j) \cap (B_i B_j)$. Alors les points C_0, C_1, C_2 sont alignes. Autrement dit, si deux triangles ont leurs sommets places deux a deux sur trois droites concourantes, leurs côtes se rencontrent deux a deux en trois points alignes.

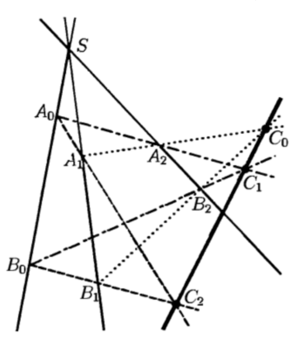

FIGURE 5.6. Théorème de Desargues

II.5. Complexification

Le **complexifié d'un Rev $\boldsymbol{E}$** est l'espace $\boldsymbol{E_C} = E \times E$ muni de l'opération produit $+$ et de l'operation $\cdot_C$ telle que $\forall \lambda = a + ib \in C \ \ \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E_c \ \ \lambda \cdot_C (\vec{u}, \vec{v}) = (a\vec{u} - b\vec{v}, a\vec{v} + b\vec{u})$

On note aussi $\vec{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{i}\vec{\boldsymbol{v}} = (\vec{u}, \vec{v})$ et $E_C = E + iE$

Le complexifié d'un Rev E est un Cev de dimension $\dim_C E_C = \dim_R E$. Le Rev E est identifie a $E \times \{0\}$

et peut donc etre vu comme plongé dans son complexifié.
Toute base d'un Rev E, est aussi une base de son complexifie. Les points du complexifie ont des coordonnées complexes dans la base, et les points de E sont ceux qui ont des coordonnes réelles.
Le **complexifié d'un R-espace affine** A est l'espace $\boldsymbol{A_C} = A \times \vec{A}$ muni de $\overrightarrow{\ \ }_{\boldsymbol{C}}$ defini par $+_C$: $\forall M = (a, \vec{u}) \in A_C\ \forall N = b + \vec{v} \in A_C,\ \overrightarrow{MN_C} = N -_C M = \left(\overrightarrow{ab}, \vec{v} - \vec{u}\right) \in \vec{A}_C = \vec{A} \times \vec{A}$.
Le complexifié d'un R-espace affine est un C-espace affine de direction $\vec{A}_C = \vec{A} \times \vec{A}$ dans lequel on peut identifier A avec $A \times \{0\} \subset A_c$.
Une base affine d'un R-espace affine est aussi une base de son complexifie.
Le **complexifié d'un R-espace projectif** $\boldsymbol{P(E)}$ est l'espace $\boldsymbol{P_C(E)} = P(E_C)$ projectif du complexifie du Rev. Le R-espace projectif $P(E)$ est identifie avec $P(E \times \{0\}) \subset P_C(E)$.
Un repère projectif de P est aussi un repère projectif du complexifie P_C. Les points de P ont des coordonnees projectives reelles dans ce repere, et ceux de P_C ont des coordonnées projectives complexes.
En dim 3. Une **droite réelle du plan projectif complexifie** $\boldsymbol{P_C}$ est une droite de P_C dont le plan vectoriel associe $u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0$ est tel que u_0, u_1, u_2 sont réels, dans un repère projectif R ayant été fixe. Autrement dit, une droite de P_C est reelle ssi le point de $P_C^\star$ associe est un point reel cad de coordonnées projectives réelles dans le repère projectif dual $R^\star$ associe a R. (celui associe a base duale)
Les points réels d'une droite réelle de P_C forment une droite du plan projectif réel P.
Une droite de P_C qui n'est pas une droite reelle n'a qu'un seul point reel.
Dans un complexifié E_c d'un Rev E, on peut definir le **conjugue complexe** $\overline{\boldsymbol{\vec{u} + i\vec{v}}} = \vec{u} - i\vec{v}$.
Dans un complexifié A_C d'un R-espace affine, le **conjugue complexe** est $\overline{\boldsymbol{a + i\vec{u}}} = a - i\vec{u}$

II.6. Structure euclidienne

Soit E un espace euclidien de dim. 2, soit A un espace affine euclidien de direction E, soit $P = P(A^\vee)$ le complete projectif de A. On note $E_C, A_C, P_C = P(E_C)$ les complexifiés associes. On note $D_\infty = P_C \setminus A_C$ la droite projective a l'infini de P_C.
Le **produit scalaire** défini sur E **se prolonge sur son complexifie** E_C en une forme bilinéaire et elle vérifie $\forall \vec{x} + i\vec{y}, \vec{u} + i\vec{v} \in E_C\ (\vec{x} + i\vec{y}|\vec{u} + i\vec{v}) = (\vec{x}|\vec{u}) - (\vec{y}|\vec{v}) + i(\vec{x}|\vec{v}) + i(\vec{y}|\vec{u})$
L'ensemble $\{\vec{z} \in E_C \mid (\vec{z}|\vec{z}) = 0\}$ est forme de 2 droites complexes conjuguées de E_C appelées **droites isotropes du complexifié.**
Ces deux droites isotropes d'un complexifie E_C définissent 2 points I et J a l'infini de P_C qui sont les classes dans P_C de ces deux droites. Ces deux points sont appelés **les points cycliques (projectifs) du complexifié projectif.** Les coordonnées projectives des points cycliques dans un repère projectif de P_C construit en partant de n'importe quelle b.o.n. de E sont $(1{:}\, i{:}\, 0)$ pour I et $(1{:}\, -i{:}\, 0)$ pour J.
Formule de Laguerre, 1853. Considérons deux droites réelles projectives D, D' de P_C distinctes de la droite D_∞ et ne se coupant pas sur D_∞. Posons $M = D \cap D_\infty$, et $M' = D' \cap D_\infty$. Soit α la mesure de l'angle entre D et D'. Le nombre α n'est donc défini que modulo π, et nous notons que le plan A n'est pas oriente pour le moment. Avec ces notations on a la **formule de Laguerre** : $[M, M', I, J] = e^{-2i\alpha}$.
Autrement dit, le birapport des droites D, D' et des deux droites isotropes passant par $D \cap D'$ vaut $e^{-2i\alpha}$
Choisir une orientation du plan équivaut a décider lequel des 2 points cycliques est I. De même qu'orienter le plan complexe revient à choisir i parmi les deux racines carrées de -1. Autrement dit, echanger I et J revient a remplacer α par $-\alpha$. Une fois choisie l'orientation, α est defini a π pres.

La restriction $f_{|A}$ d'une homographie reelle du plan P_C a A est une similitude directe (resp. indirecte) ssi $f(I) = I$ et $f(J) = J$. Resp ($f(I) = J$ et $f(J) = I$).

III. Coniques projectives

III.1. Coniques projectives complexes

III.2. Coniques projectives sur un corps quelconque

III.3. Tangentes aux coniques propres

III.4. Poles et polaires

III.5. Classification des coniques affines réelles propres

Complément 1. Géométrie plane elliptique.

Complément 2. Géométrie plane hyperbolique.

Complément 3. Droite projective complexe – Groupe circulaire – Inversion