Partie III. Applications linéaires en dimension finie.

Quelques rappels de topologie.
La **codimension** d'un sev d'un Kev est la dimension d'un sev supplémentaire quelconque.
Un **hyperplan** d'un Kev est un sev de codimension 1.
Entre deux Kevns E, F on note $\boldsymbol{L(E,F)}$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F
Entre deux Kevns E, F on note $\boldsymbol{L_c(E,F)}$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F
Une application linéaire f d'un Kevn E vers un Kevn F vérifie les équivalences :
f continue ssi f continue en 0 ssi f bornée sur $B_f(0,1)$ ssi f bornée sur $S(0,1)$ ssi $\exists M \in R_+ \ \forall x \in E \ \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ ssi f lipschitzienne ssi f uniformément continue.
Un **opérateur borné entre deux evn** désigne une application linéaire continue.
Une application linéaire n'est jamais bornée au sens strict.
Pour un Kev E, on note $\boldsymbol{E^\star} = L(E,R)$ **le dual algébrique de E.**
Pour un Kevn E, on note $\boldsymbol{E'} = L_c(E,R)$ **le dual topologique de E.**
Un sev d'un Kev E est un hyperplan ssi c'est le noyau d'un forme linéaire non nulle.
Une forme linéaire non nulle est complètement déterminée par la donnée de l'image d'un vecteur n'appartenant pas à son noyau.
Deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles ssi elles ont même noyau hyperplan.
Dans un Kevn, un hyperplan est fermé ssi une forme linéaire de noyau cet hyperplan est continue.
Dans ce cas si $K = R$, le complémentaire de l'hyperplan possède deux composantes connexes $C_+ = \{x \in E \mid \phi(x) > 0\}$ et $C_- = \{x \in E \mid \phi(x) < 0\}$
On suppose K = R ou C
Sur un Kev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
Toute application linéaire d'un Kevn de dimension finie vers un Kevn quelconque est continue.
Toute application n-linéaire d'un produit fini de Kevn de dimensions finies vers un Kevn quelconque est continue.
Dans un Kevn, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est complet et donc fermé.
Un Kevn complet de dimension infinie ne possède pas de base algébrique dénombrable.
Riesz. Un Kevn est de dim finie ssi il est localement compact ssi la boule unité fermée est compacte.
Les parties compactes d'un Kevn de dimension finie sont exactement les fermés bornés.
La norme d'opérateur/subordonnée/triple/duale a $\boldsymbol{f \in L_c(E,F)}$ est $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L_c(E,F)}} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$
Caractérisation: $\|f\|_{L_c(E,F)} = \inf\{M \in R_+ \mid \forall x \in E \ \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E\}$
$\left(L_c(E,F), \| \quad \|_{L_c(E,F)}\right)$ est un Kevn complet si $(F, \| \quad \|_F)$ l'est.
Le dual topologique E' d'un Revn est donc toujours complet car R l'est.
En dimension finie tout opérateur est borné. $L(E,F) = L_c(E,F)$
Pour 3 Kevn E, F, G, $\forall f \in L_c(E,F) \ \forall g \in L_c(F,G)$ alors $g \circ f \in L_c(E,G)$ et $\|g \circ f\| \leq \|g\|\|f\|$
$\forall u \in GL_c(E) \ \|u^{-1}\| \geq \|u\|^{-1}$
$E' \times E \to R: (f,x) \mapsto \langle f,x \rangle = f(x)$ est **le crochet de dualité**.
Rappel bidual
Le bidual d'un Kev E est l'espace dual de $E^\star$ c'est-à-dire l'espace $E^{\star\star} = (E^\star)^\star$

Ayant fixe un $x \in E$, l'application qui a une forme linéaire associe son crochet de dualité par cet élément, est un élément du bidual de E. Autrement dit $\forall x \in E \ \ (.|x) \in E^{\star\star}$. On le note $\widehat{\boldsymbol{x}} = (.|x)$.
L'application $J: E \to E^{\star\star} : x \mapsto \hat{x}$ est linéaire. **C'est l'application linéaire canonique de E dans $\boldsymbol{E}^{\star\star}$**
L'application linéaire canonique de $E \to E^{\star\star}$ est injective (AC) mais pas forcément surjective.
Elle n'est pas surjective dans $R[X]$ muni de $P \mapsto P(1)$
Le bidual topologique peut être muni de la norme $\|\xi\|_{E''} = \sup_{\|f\|_{E'} \leq 1} \|\xi(f)\|$
L'application linéaire canonique J est une isométrie, $\forall x \in E \ \ \|\hat{x}\|_{E''} = \|x\|_E$
Un Kev E est **réflexif** ssi le morphisme canonique injectif dans son bidual est aussi surjectif.
Un Kevn réflexif est donc isométriquement isomorphe et peut être identifié à son bidual topologique, $E'' = E$
Un Kevn non réflexif est isométriquement isomorphe a un sous espace de son bidual topologique.
Quoi qu'il en soit, on peut toujours plonger un Kevn dans son bidual topologique.

Rappels orthogonalité dualité.

On peut définir un concept d'orthogonalité pour la dualité algébrique ou topologique.
On suppose K = R ou C, donc en particulier K est complet et donc le dual topologique est complet.
L'**orthogonal dual algébrique (resp. topologique) d'une partie <u>non vide</u> d'un Kev (resp. Kevn)**, est l'ensemble des formes linéaires quelconques (resp. continues) s'annulant sur la partie.
L'**orthogonal vectoriel algébrique (resp. topologique) d'une partie <u>non vide</u> du <u>dual</u> d'un Kev (resp. Kevn)**, est l'ensemble des vecteurs annulant toutes les formes linéaires quelconques (resp. continues) de la partie.

Propriétés générales s'appliquant au cas algébrique et topologique. (à vérifier)

L'orthogonal dual/vectoriel est toujours un K-sous-espace vectoriel.
L'orthogonal dual du singleton nul, est l'espace dual entier. $\{0_E\}^\perp = E^\star$
L'orthogonal dual de l'espace entier, est le singleton de la forme linéaire nulle. $E^\perp = \{0_{E^\star}\}$
L'orthogonal vectoriel du singleton de la forme linéaire nulle, est l'espace vectoriel entier. $\{0_{E^\star}\}^\perp = E$
L'orthogonal vectoriel de l'espace dual, contient mais <u>n'est pas toujours</u> le singleton nul. $\{0_E\} \subseteq (E^\star)^\perp$
En dimension finie, l'orthogonal vectoriel de l'espace dual, est le singleton nul. $(E^\star)^\perp = \{0_E\}$
L'orthogonal dual (resp. vec) d'une partie non vide est aussi l'orthogonal dual (resp. vec) du sous-espace engendré par la partie. $A^\perp = (vect\ A)^\perp$
Pour l'orthogonal dual (resp. vectoriel) on a $\emptyset \neq A_1 \subseteq A_2 \subseteq E \Rightarrow A_2^\perp \subseteq A_1^\perp$
L'orthogonal dual (resp. vec) de l'orthogonal d'une partie d'un Kev, contient la partie. $A \subseteq (A^\perp)^\perp$

Propriétés topologiques. (propriétés à vérifier)

L'orthogonal dual topologique d'une partie est un Ksev <u>fermé</u> donc complet du dual topologique.
L'orthogonal vectoriel topologique d'une partie duale est un Ksev fermé du Kevn. (complet si E banach)
On peut écrire $A^\perp = \overline{A}^\perp = \overline{A^\perp} = vect(A)^\perp = \overline{vect(A)}^\perp = \overline{vect(A)^\perp}$
On a $\overline{vect(A)} \cap A^\perp = \{0\}$
Pour un <u>sous-espace vectoriel</u> F du Kevn E on a $\overline{F} = (F^\perp)^\perp$ et donc $F \subseteq \overline{F} = (F^\perp)^\perp$
Pour un <u>sous-espace vectoriel</u> N du dual topologique E' on a juste $N \subseteq \overline{N} \subseteq (N^\perp)^\perp$
Cependant si le Kevn E est <u>réflexif</u>, on a également $\overline{N} = (N^\perp)^\perp$ et donc $N \subseteq \overline{N} = (N^\perp)^\perp$

Chapitre 16. Le théorème de Hahn-Banach.

I. Le théorème de Hahn-Banach.

Une **fonction sous-linéaire sur un Rev** est une fonction $q : E \to R$ telle que $\forall x, y \in E\ q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ et $\forall \alpha \geq 0\ \forall x \in E\ q(\alpha x) = \alpha q(x)$ attention à $\alpha \geq 0$, et la fonction doit être réelle.
Une semi-norme sur un Rev est sous-linéaire. Les jauges de parties convexes d'un Rev sont sous-linéaires.

Théorème de Hahn-Banach.* Une forme linéaire définie sur un sous-espace d'un Rev, majorée par une fonction sous-linéaire définie sur tout l'espace, peut être prolongée en une forme linéaire sur tout l'espace toujours majorée par la même fonctionnelle sous-linéaire.

II. Prolongement des formes linéaires définies sur un espace semi-norme

On note K=R ou C
Une forme linéaire à valeurs dans K, définie sur un sous-espace d'un Kev, dont le module est borné par une semi-norme définie sur tout l'espace, peut être prolongée en une forme linéaire sur tout l'espace toujours bornée en module par la même semi-norme. Ici la semi-norme est obligatoire.

Prolongement des formes linéaires continues.
Une forme linéaire continue à valeurs dans K, définie sur un sous-espace d'un Kevn, peut être prolongée en une forme linéaire sur tout l'espace en conservant la même norme d'opérateur.
Etant donne une famille libre finie d'un Kev norme, et autant de scalaires de K, on peut obtenir une forme linéaire sur tout l'espace, continue à valeurs dans K qui envoie chaque vecteur de la famille libre sur son scalaire correspondant. On peut affirmer en particulier, qu'il existe une forme linéaire <u>continue</u> non identiquement nulle sur n'importe quel Kev norme de dimension > 0 finie ou <u>infinie</u>.

III. Quelques conséquences géométriques du théorème de Hahn-Banach dans les espaces vectoriels normes

La norme d'opérateur sur le dual topologique E' est souvent notée $\|u\|_{E'} = \|u\|_{L_c(E,R)}$
Pour un Kevn E, $\forall x \in E\ \exists u \in E'\ \ \|x\|_E = \|u\|_{E'}$ et $\langle u, x\rangle = u(x) = \|x\|_E^2 = \|u\|_{E'}^2$
Sur un Kevn E, on a $\forall x \in E\ \|x\|_E = \sup\{|u(x)| : u \in E', \|u\| \leq 1\} = \sup\{|u(x)| : u \in E', \|u\| = 1\}$, de plus ces bornes sups sont atteintes et donc des max. En quelque sorte subordonner la norme subordonnée redonne la norme.
Un hyperplan affine $H = \{f = \alpha\}$ d'un Kevn, est fermé ssi sa forme linéaire f est continue.
Un **hyperplan affine $[\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\alpha}]$ sépare deux ensembles $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ d'un Kevn $\boldsymbol{E}$** ssi $f_{|A} \leq \alpha$ et $f_{|B} \geq \alpha$ ou l'inverse.
Un **hyperplan affine $[\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\alpha}]$ sépare <u>strictement</u> deux ensembles $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ d'un Kevn $\boldsymbol{E}$** ssi $\exists \varepsilon > 0$ $f_{|A} \leq \alpha - \varepsilon$ et $f_{|B} \geq \alpha + \varepsilon$ ou l'inverse.
Théorème de Hahn-Banach géométrique. Deux parties convexes non vides disjointes d'un Kevn E dont une au moins est ouverte, peuvent être séparées.
Deux parties convexes non vides disjointes d'un Kevn E dont l'une est fermée et l'autre est compacte, peuvent être séparées et même <u>strictement</u>.
En général, en dimension infinie, deux parties convexes non vides disjointes d'un Kevn E, même toutes deux fermées, peuvent être impossible à séparer, même au sens large.
Dans un Kevn de dimension finie, deux parties convexes non vides disjointes, peuvent toujours être séparées.

Etant donne un Ksev propre fermé d'un Kevn, le Kevn admet une forme linéaire non nulle, mais nulle sur le sous-espace.
Plus précisément, étant donne un Ksev propre fermé d'un Kevn, et un point à distance >0 du sous-espace, il existe une forme linéaire continue sur K, nulle sur le sous-espace, valant 1 au point, et de norme l'inverse de la distance du point au sous-espace fermé.
Pour un Ksev d'un Kevn, l'adhérence du sous-espace est égale à l'intersection des noyaux de toutes les formes linéaires continues de noyau contenant le sous-espace.
Un Ksev d'un Kevn est dense dans l'evn ssi (toute forme linéaire continue non nulle, n'est pas nulle sur le sous-espace) ssi (La nullité sur le sous-espace de toute forme linéaire continue définie sur tout l'evn, entraine sa nullité sur tout l'espace)

IV. Dual topologique d'un sous-espace fermé et d'un espace quotient

La restriction d'une forme linéaire continue d'un Kevn à un Ksev est une forme linéaire continue sur le sous-espace de norme subordonnée inférieure ou égale à la norme de la forme linéaire sur tout l'espace.
Si le sev est fermé, on peut quotienter le dual topologique de l'evn E' par $F^o = \{v \in E' \mid v_{|F} = 0\}$ le sous-espace des formes linéaires continues dont la restriction au sev est nulle. L'application qui a une classe, dans cet espace topologique quotienté, associe la forme linéaire correspondante restreinte au sev, dans l'espace topologique du sev, $\rho : \frac{E'}{F^o} \to F'$, $\rho(u + F^o) = u_{|F}$ est bien définie, et est une isométrie linéaire surjective.
L'application qui a une forme linéaire continue u du dual topologique du quotient d'un Kevn, par un sev fermé $\left(\frac{E}{F}\right)'$, donne la forme linéaire correspondante composée après la projection canonique $\sigma : u \to u \circ \pi$ est une isométrie linéaire du quotient $\left(\frac{E}{F}\right)'$ vers l'image $F^o = \{v \in E' \mid v_{|F} = 0\} \subseteq E'$ des formes linéaires continues de l'evn dont la restriction au sev est nulle. A vérifier.

Introduction à la théorie des fonctions convexes conjuguées. [Brezis]

On considère les fonctions φ d'un ensemble E vers $]-\infty, \infty]$.
Le domaine d'une telle fonction est l'ensemble $\boldsymbol{D(\varphi)} = \{\varphi < \infty\} = \{x \in E \mid \varphi(x) \in R\}$.
L'**épigraphe** d'une telle fonction est l'ensemble $\boldsymbol{epi(\varphi)} = \{(x, \lambda) \in E \times R \mid \varphi(x) \leq \lambda\}$
Une fonction φ d'un espace topologique vers $]-\infty, \infty]$ est **semi continue inférieurement (s.c.i.) sur E**
ssi l'ensemble $[\varphi \leq \lambda] = \varphi^{-1}(]-\infty, \lambda])$ est fermé pour tout réel λ,
ssi son épigraphe est une partie fermée de $E \times R$.
ssi $\forall x_0 \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists V \in V_{x_0}\ \forall x \in V\ \varphi(x) \geq \varphi(x_0) - \varepsilon$
Une fonction φ d'un espace métrique vers $]-\infty, \infty]$ est semi continue inférieurement sur E
ssi $\forall x_0 \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(x_0) - \varepsilon$
ssi $\forall x_0 \in E\ \forall (u_n)_n \in E^N | u_n \to_{n\to\infty} x_0\ \ \liminf_{n\to\infty} \varphi(u_n) \geq \varphi(x_0)$
Une somme finie de fonctions s.c.i. est s.c.i.
L'enveloppe supérieure d'une famille quelconque de fonctions s.c.i., c'est-à-dire $\sup_{i\in I} \varphi_i$ est s.c.i.
Une fonction φ s.c.i. d'un espace topologique compact E vers $]-\infty, \infty]$ atteint sa borne infimum sur E.
Une fonction φ d'un K espace vectoriel E vers $]-\infty, \infty]$ est une **fonction convexe**
ssi $\forall x, y \in E\ \forall t \in [0,1]\ \varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)$
ssi son épigraphe est une partie convexe de $E \times R$

Pour une fonction convexe, l'ensemble $[\varphi \leq \lambda] = \varphi^{-1}(]-\infty, \lambda])$ est convexe pour tout réel λ, mais la réciproque est fausse.
Une somme finie de fonctions convexes est convexe
L'enveloppe supérieure d'une famille quelconque de fonctions convexes, c'est-à-dire $\sup_{i\in I} \varphi_i$ est convexe.
La **fonction conjuguée** d'une fonction φ d'un Kevn E vers $]-\infty,\infty]$ telle que $D(\varphi) \neq \emptyset$ est la fonction $\boldsymbol{\varphi}^* : E' \to]-\infty,\infty] : f \mapsto \boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{f}) = \sup_{x\in E}\big(\langle f,x\rangle - \varphi(x)\big)$
La fonction conjuguée est convexe et s.c.i. sur le dual topologique E'. (car sup des $f \mapsto \langle f,x\rangle - \varphi(x)$)
Inégalité de Young. $\forall x \in E\ \forall f \in E'\ \ \langle f,x\rangle \leq \varphi(x) + \varphi^*(f)$
Pour une fonction φ <u>convexe et s.c.i.</u>, d'un Kevn E vers $]-\infty,\infty]$ telle que $D(\varphi) \neq \emptyset$, alors sa fonction conjuguée vérifie aussi $D(\varphi^*) \neq \emptyset$, de plus φ est minorée par une fonction continue et affine. On peut donc définir φ^{**} sur le bidual topologique. On ne considère que la restriction de φ^{**} sur l'espace E plongé dans son bidual. On peut donc écrire $\forall x \in E\ \ \varphi^{**}(x) = \sup_{f\in E'}\big(\langle f,x\rangle - \varphi^*(f)\big)$
Th. Fenchel-Moreau. De plus on a $\varphi^{**} = \varphi$.
Pour un ensemble K dans un ensemble E, l'**indicatrice convexe** est la fonction $I_K : E \to]-\infty,\infty]$ qui vaut 0 sur K et $+\infty$ ailleurs. Attention à ne pas confondre avec l'indicatrice usuelle.
Sur un Kevn E, l'indicatrice convexe selon K est une fonction convexe ssi K est une partie convexe.
Sur un Kevn E, l'indicatrice convexe selon K est une fonction s.c.i. ssi K est une partie fermée.
Sur un Kevn E, la **fonction support d'un ensemble $\boldsymbol{K}$** non vide, est la fonction conjuguée de l'indicatrice convexe I_K^*.
La fonction support d'un sous-espace vectoriel F est l'indicatrice convexe de l'orthogonal dual. $I_F^* = I_{F^\perp}$
De plus $I_F^{**} = I_{(F^\perp)^\perp}$. Si de plus F est fermé, on retrouve $I_F^{**} = I_F$ et $(F^\perp)^\perp = F$
Th. Fenchel-Rockafellar (Dualité). Soit φ, ψ deux fonctions convexes d'un Kevn E vers $]-\infty,\infty]$. Soit $x_0 \in D(\varphi) \cap D(\psi)$ un point en lequel φ est continue. Alors
$\inf_{x\in E}\big(\varphi(x) + \psi(x)\big) = \sup_{f\in E'}\big(-\varphi^*(-f) - \psi^*(f)\big) = \max_{f\in E'}\big(-\varphi^*(-f) - \psi^*(f)\big) =$
$-\min_{f\in E'}\big(\varphi^*(-f) + \psi^*(f)\big)$
On retrouve cette dualité en optimisation avec la forme primale/duale.
Pour K un convexe non vide d'un Kevn E, et $x_0 \in E$,
on a $d(x_0,K) = \inf_{x\in K}\|x - x_0\| = \max_{\substack{f\in E'\\ \|f\|\leq 1}}\big(\langle f,x_0\rangle - I_K^*(f)\big)$
Pour F un sous-espace vectoriel d'un Kevn E et $x_0 \in E$, $d(x_0,K) = \max_{\substack{f\in F^\perp\\ \|f\|\leq 1}}\langle f,x_0\rangle$
Pour F un sous-espace vectoriel d'un Kevn E et φ une fonction convexe et continue de E vers R on peut ecrire $\inf_{x\in F}\varphi(x) = -\min_{f\in F^\perp}\varphi^*(f)$ (par th. Fenchel-Rockafellar avec $\psi = I_F$)

Chapitre 17 : Théorème de Baire et applications linéaires
Rappels :
Un **espace de Baire** est un espace topologique dans lequel toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide / toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.
La propriété de Baire est topologique (se conserve par homéomorphisme entre espaces topologiques)
Tout ouvert d'un espace de Baire, est de Baire pour la topologie induite.

Dans un espace de Baire couvert par une suite de fermés, la réunion des intérieurs de ces fermés est dense dans l'espace. Donc au moins un de ces fermés est d'intérieur non vide.
Théorème de Baire. Tout espace métrique complet est un espace de Baire. En particulier tout espace de Banach est un espace de Baire.
Un $\boldsymbol{G_\delta}$ est une intersection dénombrables d'ouverts d'un espace topologique.
Un $\boldsymbol{F_\sigma}$ est une réunion dénombrable de fermés d'un espace topologique.
Une partie d'un espace de Baire est **maigre** ssi elle est contenue dans une union dénombrable de fermés tous d'intérieurs vides ssi elle est contenue dans un F_σ d'interieur vide.
Une partie d'un espace de Baire est **résiduelle** ssi elle est contient une intersection dénombrable d'ouverts tous denses ssi elle contient un G_δ dense.
I. Théorème de Banach-Steinhaus* Etant donnée une famille quelconque d'opérateurs bornés d'un espace de Banach vers un autre espace vectoriel norme, alors soit la famille est uniformément majorée en norme d'opérateur, soit il existe une partie résiduelle du Banach dans lequel si on fixe n'importe quel point x, $\sup_{i\in I}\|T_i(x)\|_F = \infty$, autrement dit on peut lui appliquer un certain operateur de la famille de sorte à obtenir une norme d'arrivée aussi grande que l'on veut.
Corollaire : Principe de la borne uniforme de Banach-Steinhaus. Etant donnée une famille quelconque d'opérateurs bornés d'un Banach vers un autre evn, si pour tout point du premier espace il existe un majorant uniforme des normes des images du point par tous les opérateurs de la famille, alors la famille d'opérateurs est uniformément majorée en norme d'opérateur.
Symboliquement $(\forall x \in E\ \ \sup_{i\in I}\|T_i(x)\|_F < \infty) \Rightarrow \sup_{i\in I}\|T_i\|_{L_c(E,F)} < \infty$
Autrement dit $\forall x \in E\ \exists c_x > 0\ \forall i \in I\ \|T_i(x)\|_F \le c_x \Rightarrow \exists c > 0\ \forall x \in E\ \forall i \in I\ \|T_i(x)\|_F \le c\|x\|_E$
c_x ne peut pas dépendre de i mais peut dépendre de x donc pas de diff. si on remplace c_x par $c_x\|x\|_E$.
Apres ce remplacement, on voit que le principe signifie on peut permuter les 2 premiers quantificateurs.
Conséquences.
D'un Banach vers un evn, la fonction T limite simple d'une suite d'applications linéaires continues $(T_n)_n$ est aussi une application linéaire continue. $\sup_n\|T_n\|_{L_c(E,F)} < \infty$ et $\|T\|_{L_c(E,F)} \le \liminf_{n\to\infty}\|T_n\|_{L_c(E,F)}$
Si pour une partie d'un Banach son image par toute application linéaire continue est bornée dans R, alors cette partie est bornée. $\forall A \subseteq E\ \ (\forall f \in E'\ \{\langle f, x\rangle : x \in A\}$ bornée dans R $\Rightarrow A$ bornée dans E.)
Propriété analogue duale : $\forall B \subseteq E'\ \ (\forall x \in E\ \{\langle f, x\rangle : f \in B\}$ bornée dans R $\Rightarrow B$ bornée dans E')
Toute forme bilinéaire sur deux Banach, à valeurs complexes, dont les deux applications partielles sont continues, est continue (sur le produit des deux Banach). Et réciproquement.
II. Théorème de l'application ouverte*
Toute application linéaire continue surjective entre deux Banachs est une application ouverte.
Théorème de l'isomorphisme de Banach. La réciproque d'une application linéaire continue bijective entre deux Banach est aussi continue.
Toute application linéaire ouverte est surjective.
Normes équivalentes sur un Banach. Si deux normes rendent un Kev complet, et l'une est dominée par l'autre, alors ces deux normes sont en fait équivalentes.
III. Théorème du graphe fermé
Le **graphe d'une application** T entre deux ensemble E, F est $\Gamma(T) = \{(u, Tu) : u \in E\} \subseteq E \times F$.
Le produit de deux Banach muni de la topologie produit définie par la norme $\|(u, v)\|_{E\times F} = \|u\|_E +$

$\|v\|_F$ est un espace de Banach pour cette norme produit.

Th. du graphe fermé. Une application linéaire entre deux Banach est continue ssi son graphe est fermé.

Tout projecteur sur un sous-espace fermé d'un espace de Banach est une application linéaire continue.

2.4. Supplémentaire topologique. Inversibilité gauche et droite d'opérateurs [Brezis]

Dans un Banach E, pour deux sous-espaces fermés F, G dont la somme interne est aussi fermée, il existe $C \geq 0$ telle que tout élément de la somme peut s'écrire $z = x + y$ avec $\|x\| \leq C\|z\|$ et $\|y\| \leq C\|z\|$

De plus $\exists C \geq 0\ \forall x \in E\ \ dist(x, F \cap G) \leq C\big(dist(x, F) + dist(x, G)\big)$

Un **supplémentaire topologique** d'un sous-espace <u>fermé</u> F d'un Banach E, est un sous-espace <u>fermé</u> G supplémentaire de F dans E, c'est-à-dire tel que $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.

En dimension finie, pas de différence entre supplémentaire quelconque et supplémentaire topologique.

Un sev fermé <u>de codimension finie</u> d'un Banach admet toujours un supplémentaire topologique.

Un sev fermé d'un Hilbert admet toujours un supplémentaire topologique.

Un Banach non isomorphe a un Hilbert, admet des sous-espaces fermés qui n'ont aucun supplémentaire topologique.

Un **inverse droit** d'un operateur $T \in L(E, F)$ est un operateur $S \in L(F, E)$ tel que $T \circ S = Id_F$

Un **inverse gauche** d'un operateur $T \in L(E, F)$ est un operateur $S \in L(F, E)$ tel que $S \circ T = Id_E$

Un opérateur borné surjectif admet un inverse droit ssi son noyau admet un supplémentaire topologique.

Un opérateur borné injectif admet un inverse gauche ssi son image est fermée et admet un supplémentaire topologique.

2.5. Orthogonalité revisitée

Pour deux sev fermés F, G d'un Kevn E, on a

$F \cap G = (F^\perp + G^\perp)^\perp \quad F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$

$(F \cap G)^\perp = \overline{F^\perp + G^\perp} \quad (F^\perp \cap G^\perp)^\perp = \overline{F + G}$

Pour deux sev fermés F, G d'un Banach E, on a

$F + G$ fermé dans E ssi $F + G$ fermé dans E ssi $F + G = (F^\perp + G^\perp)^\perp$ ssi $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$

2.6. Définition de l'adjoint dual d'opérateurs de Banach.

Un opérateur T d'un sous-espace $D(T)$ d'un Banach E, vers un Banach F est un **opérateur fermé** ssi son graphe est une partie fermée de $E \times F$

ssi $\forall x \in E\ \forall y \in F\ \forall (x_n)_n \in D(T)^N |\ x_n \to x$ et $Tx_n \to y$ alors $x \in D(T)$ et $y = Tx$

Le noyau d'un opérateur fermé est fermé. L'image d'un opérateur fermé n'est pas forcement fermé.

En pratique, la plupart des opérateurs non-bornés qu'on étudie sont fermés et a domaine dense.

Pour un opérateur T d'un sous-espace dense $D(T)$ d'un Kevn E, vers un Kevn F, on peut définir

$\boldsymbol{D(T^*)} = \{v \in F' \mid \exists c \geq 0\ \forall u \in D(T)\ |\langle v, Tu\rangle| \leq c\|u\|\}$.

$D(T^*)$ est un sous-espace de F'

Il existe un unique opérateur T^* de $D(T^*) \subseteq F'$ vers E' tel que

$\forall u \in D(T)\ \forall v \in D(T^*)\ \langle v, Tu\rangle_{F',F} = \langle T^* v, u\rangle_{E',E}$. C'est **l'adjoint dual** de T.

$D(T^*)$ peut ne pas être dense dans F' pour la topologie usuelle, même si T est un opérateur fermé.

Toutefois si T est fermé, $D(T^*)$ est dense dans F' pour la topologie $\sigma(F', F)$.

Si l'opérateur T est fermé et le Banach d'arrivée F est réflexif, alors le domaine de l'adjoint $D(T^*)$ est dense dans F' pour la topologie usuelle.

L'adjoint d'un opérateur borné $T \in L_c(E,F)$ est un opérateur borné $T^* \in L_c(F,E)$ de même norme d'opérateur.
L'adjoint d'un opérateur de Banachs a domaine dense, est un opérateur fermé, cad $D(T^*)$ fermé dans $F' \times E'$.
Les graphes d'un opérateur de Banachs a domaine dense T et de son adjoint T^* sont lies par une simple relation d'orthogonalité : $I\big(G(T^*)\big) = G(T)^\perp$ avec $I: F' \times E' \to E' \times F' : (v,f) \mapsto (-f,v)$
Un opérateur de Banachs fermé et a domaine dense T verifie :
$\ker(T) = \mathrm{im}(T^*)^\perp$, $\ker(T^*) = \mathrm{im}(T)^\perp$
$\overline{\mathrm{im}(T^*)} \subseteq \ker(T)^\perp$, $\overline{\mathrm{im}(T)} = \ker(T^*)^\perp$
il est possible que $\overline{\mathrm{im}(T^*)} \neq \ker(T)^\perp$ pour la topologie usuelle, même si T est un opérateur borné.
Toutefois si E est réflexif, on a $\overline{\mathrm{im}(T^*)} = \ker(T)^\perp$.
On a toujours $\overline{\mathrm{im}(T^*)} = \ker(T)^\perp$ pour la topologie faible $\sigma(E',E)$.

2.7. Caractérisation des opérateurs a image fermée. Caractérisation des opérateurs surjectifs.

Pour un opérateur de Banachs fermé et a domaine dense T, on a
$\mathrm{im}(T)$ est fermé ssi $\mathrm{im}(T^*)$ est fermé ssi $\mathrm{im}(T) = \ker(T^*)^\perp$ ssi $\mathrm{im}(T^*) = \ker(T)^\perp$
Pour un opérateur de Banachs fermé T, $\mathrm{im}(T)$ est fermé ssi $\exists C \geq 0\ \forall u \in D(T)\ d(u, \ker T) \leq C\|Tu\|$
Caractérisation surjectivité. Un opérateur de Banachs fermé et a domaine dense T est surjectif ssi son opérateur adjoint a un noyau nul et une image fermée
ssi $\exists C \geq 0\ \forall v \in D(T^*)\ \|v\| \leq C\|T^*v\|$ (utile pour prouver la surjectivité).
Caractérisation surjectivité duale. L'adjoint d'un opérateur de Banachs fermé et a domaine dense , est surjectif ssi l'opérateur initial a un noyau nul et une image fermée
ssi $\exists C \geq 0\ \forall x \in D(T)\ \|x\| \leq C\|Tx\|$
Pour un opérateur de Banachs fermé et a domaine dense T,
on a T surjectif $\Rightarrow T^*$ injectif, et T^* surjectif $\Rightarrow T$ injectif
De plus si au moins un des 2 Banachs E, F est de dimension finie,
on a T surjectif $\Leftrightarrow T^*$ injectif, et T injectif $\Leftrightarrow T^*$ surjectif.

Chapitre 3. Topologies faibles. Espaces réflexifs. Espaces séparables. Convexité uniforme. [Brezis]

3.2. Définition et propriétés élémentaires de la topologie faible.

La **topologie faible $\sigma(E,E')$ sur un Banach E** est la plus topologie initiale engendrée par les $\Big(\varphi_f : x \mapsto \langle f,x\rangle = f(x)\Big)_{f \in E'}$. L'espace topologique $\big(E, \sigma(E,E')\big)$ est séparé.
Tout point $x_0 \in E$ admet $(\{x \in E \mid \forall i\ |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon\})_{k \in N, \varepsilon > 0, (f_i \in E')_{1 \leq i \leq k}}$ comme système fondamental de voisinages pour la topologie faible.
Une suite de points $(x_n)_n$ sur un Banach E **converge faiblement** vers $x \in E$ ssi elle converge pour la topologie faible $\sigma(E,E')$ ssi $\forall f \in E'\ \langle f, x_n\rangle \to_{n\to\infty} \langle f,x\rangle$ ssi $\forall f \in E'\ f(x_n) \to_{n\to\infty} f(x)$
Une suite de points $(x_n)_n$ sur un Banach E **converge fortement** vers $x \in E$ ssi elle converge vers x pour la topologie usuelle de la norme du Banach.
Convergence forte entraine convergence faible.
Une suite qui converge faiblement dans un Banach, est bornée et $\|\lim_{n\to\infty} x_n\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$

Si x_n converge faiblement vers x dans un Banach E, et f_n converge fortement vers f dans E' alors $\langle f_n, x_n\rangle \to_{n\to\infty} \langle f, x\rangle$
Dans un Kevn de dimension finie, topologie faible et forte coïncident.
Dans un Banach de dimension infinie, la topologie forte (usuelle) est <u>strictement</u> plus fine que la topologie faible.
Dans un Banach de dimension infinie, la sphère unité $\{\| \quad \|_E = 1\}$ (pour norme usuelle) n'est pas fermée pour la topologie faible, en fait son adhérence faible est la boule $\{\| \quad \|_E \leq 1\}$, de plus la boule $\{\| \quad \|_E < 1\}$ n'est pas ouverte pour la topologie faible.
Dans un Banach de dimension infinie, la topologie faible n'est jamais métrisable.

3.3. Topologie faible, Ensembles convexes, Operateurs linéaires.

Un partie convexe d'un Banach est fermée pour la topologie faible ssi elle l'est pour la topologie forte.
Mazur. Pour une suite (x_n) d'un Banach qui converge faiblement vers $x \in E$, on peut trouver une suite (y_n) faite de combinaisons convexes des x_n qui converge fortement vers x.
Une fonction d'un Banach vers $(-\infty, \infty]$ convexe et s.c.i. pour la topologie forte, est s.c.i. pour la topologie faible.
Une fonction d'un Banach vers $(-\infty, \infty]$ convexe et continue, est s.c.i. pour la topologie faible.
Pour un <u>opérateur linéaire</u> entre deux Banach, les continuités par rapport aux topologies $S \to S, W \to W, S \to W$ sont toutes équivalentes. La continuité $W \to S$ est différente et plutôt rare.
Pour une fonction quelconque entre deux Banach, on ne peut rien dire a priori.

3.4. Topologie faible⋆ duale $\boldsymbol{\sigma(E', E)}$

La **topologie faible duale $\boldsymbol{\sigma(E', E)}$ sur le dual $\boldsymbol{E'}$ d'un Banach $\boldsymbol{E}$** est la plus topologie initiale engendrée par les $\left(\varphi_x : f \mapsto \langle f, x\rangle = f(x)\right)_{x\in E}$. L'espace topologique dual muni de sa topologie étoile-faible est séparé.
Tout point $f_0 \in E'$ admet $(\{f \in E' \mid \forall i \ |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon\})_{k\in N, \varepsilon>0, (x_i\in E)_{1\leq i\leq k}}$ comme système fondamental de voisinages pour la topologie étoile-faible.
Attention car le dual topologique admet aussi la topologie faible $\sigma(E', E'')$.
Une suite $(f_n)_n$ d'un dual topologique E' d'un Banach **converge étoile-faiblement** vers $f \in E'$ ssi elle converge pour la topologie étoile-faible ssi $\forall x \in E \ \langle f_n, x\rangle \to_{n\to\infty} \langle f, x\rangle$ ssi $\forall x \in E \ f_n(x) \to_{n\to\infty} f(x)$
Une suite $(f_n)_n$ d'un dual topologique E' d'un Banach **converge fortement** vers $f \in E'$ ssi elle converge vers x pour la topologie usuelle de la norme subordonnée du Banach.
Dans le dual, convergence forte entraine convergence faible entraine convergence étoile-faible.
Autrement dit $f_n \to^{\| \quad \|_{E'}} f \Rightarrow f_n \to^{\sigma(E', E'')} f \Rightarrow f_n \to^{\sigma(E', E)} f$
Une suite $(f_n)_n$ d'un dual topologique E' d'un Banach qui converge étoile-faiblement est bornée et $\|\lim_{n\to\infty} f_n\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$
Si $(f_n)_n$ d'un dual topologique E' d'un Banach converge étoile-faiblement vers f et (x_n) converge fortement vers x dans le Banach E, alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$
Pour le dual d'un Kevn de dimension finie, les 3 topologies forte, faible, et étoile-faible, coïncident.
Riesz dual. Une forme linéaire φ du bidual d'un Banach réel, continue relativement à la topologie étoile-faible, on a $\exists x_0 \in E \ \ \forall f \in E' \ \ \varphi(f) = \langle f, x_0\rangle$
Un hyperplan du dual topologique d'un Banach réel, fermé pour la topologie étoile-faible, est alors de la forme $H = \{f \in E' \mid \langle f, x_0\rangle = \alpha\}$

Dans le dual topologique d'un Banach non réflexif, la topologie faible est strictement plus fine que la topologie étoile-faible.
Dans le dual topologique d'un Banach, une partie convexe est fermée pour la topologie faible ssi elle l'est pour la topologie forte, en revanche une partie convexe fermée pour la topologie faible/forte n'est pas nécessairement fermée pour la topologie étoile-faible. On a donc 2 types de convexes fermés de E'.
Th. Banach-Alaoglu-Bourbaki. La boule unité fermée usuelle du dual topologique d'un Banach, est compacte pour la topologie étoile-faible. Cette propriété est essentielle de la topologie étoile-faible.
3.5. Espaces réflexifs.
Un Kevn de dimension finie est toujours réflexif. $\dim E = \dim E' = \dim E''$
L^p et l^p sont réflexifs pour $p \in]1, \infty[$. Un Hilbert est réflexif. L^1,L^∞,l^1,l^∞ ne sont pas réflexifs.
Th. Kakutani.* Un Banach est réflexif ssi la boule unité fermée usuelle de E est compact pour la topologie faible.
Th. Eberlein-Smulian. Un Banach est réflexif ssi toute suite bornée admet une sous-suite faiblement convergente. (le th Eberlein-Smulian est le sens réciproque).
Un sous-espace vectoriel fermé d'un Banach réflexif, est réflexif.
Un Banach est réflexif ssi son dual topologique l'est.
Une partie convexe fermée bornée d'un Banach réflexif, est compacte pour la topologie faible.
Soit une partie convexe fermée non vide d'un Banach réflexif, et $\varphi: A \to]-\infty, \infty]$ une fonction convexe s.c.i. de domaine non vide $\varphi \neq \infty$.
Si $\varphi(x) \underset{\substack{x\in A \\ \|x\|\to\infty}}{\to} \infty$ / si A est bornée, alors φ atteint son minimum sur A.
Cette dernière propriété est la raison principale pour laquelle les espaces réflexifs et les fonctions convexes sont si importantes dans de nombreux problèmes d'optimisation et de calcul des variations.
Pour un opérateur T fermé et a domaine dense, de Banachs réflexifs, l'adjoint est aussi a domaine dense, on peut définir l'adjoint de l'adjoint T^{**} sur les biduals qu'on peut identifier aux Banachs initiaux, de plus $T^{**} = T$.
3.6. Espaces séparables.
Un espace métrique est **séparable** s'il a une partie dénombrable et dense.
Dans un espace métrique séparable, toute partie est séparable.
Un Banach dont le dual topologique est séparable, est lui-même séparable. Réciproque fausse.
Un Banach est (réflexif et séparable) ssi son dual topologique est (réflexif et séparable).
Les propriétés de séparabilité sont en général assez liées à la métrisabilité des topologies faibles.
Un Banach est séparable ssi la boule unité fermée usuelle du dual topologique est métrisable pour la topologie étoile-faible.
Le dual topologique d'un Banach, est séparable ssi la boule unité fermée usuelle du Banach est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.
Dans un Banach réflexif séparable, toute suite du dual bornée admet une sous-suite étoile-faiblement convergente (pour $\sigma(E', E)$).
3.7. Espaces convexes uniformes.
Un Banach est **uniformément convexe** ssi $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in E \begin{cases} \|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1 \\ \|x - y\| \geq \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta$

La norme L^p avec $p \in]1, \infty[$ rend L^p uniformément convexe. Un Hilbert est donc uniformément convexe
Les norme L^1 et L^∞ ne sont pas uniformément convexes.
Milman-Pettis. Tout Banach uniformément convexe est réflexif.
Ce fait est remarquable car la convexité uniforme est une propriété géométrique alors que la réflexivité est une propriété topologique. Une norme uniformément convexe peut être équivalente à une autre norme qui ne l'est pas, pourtant elles définissent la même topologie. Donc utile pour prouver la réflexivité d'essayer de trouver une norme équivalente uniformément convexe.
Il existe des Banach réflexifs qui n'ont pas de norme uniformément convexe.
Dans un Banach uniformément convexe, une suite qui converge faiblement et telle que $\limsup_n \|x_n\| \leq \|\lim_n x_n\|$, converge fortement.