Partie I Topologie

Chapitre 1. Espaces topologiques

I.1. Définitions et exemples

Une **topologie** sur un ensemble E est une partie T de P(E) qui contient ∅ et E, stable par intersection finie et par union quelconque. (E, T) est un **espace topologique**

Un **ouvert** d'une topologie T est un élément de T

topologie grossière = $\{\emptyset, E\}$, topologie discrète = P(E)

Une partie est **fermée** si son complémentaire est ouvert.

Une union quelconque d'ouverts est ouverte, une intersection finie d'ouverts est ouverte.

Une intersection quelconque de fermés est fermée, une union finie de fermé est fermé.

Soit $A \subseteq E$ et T une topologie sur E. La **topologie induite** sur A par T est $T_A = \{O \cap A : O \in T\}$

Un ouvert induit est donc toujours de la forme un ouvert intersecté a la partie.

Un fermé induit est donc toujours de la forme un fermé intersecté a la partie.

Une partie d'un espace topologique est **discrète** si sa topologie induite est discrète $T_A = P(A)$

T' est une **topologie plus fine** que T sur E si elle contient T : $T \subseteq T'$. ouvert de T est ouvert de T'

Une fonction a valeurs dans un espace topologique (E',T') définit un espace topologique sur son domaine E, **la topologie réciproque** par f : $f^{-1}(T') = \{f^{-1}(O') : O' \in T'\}$

L'intersection d'espaces topologiques est un espace topologique.

La **topologie engendrée** par un ensemble de parties A d'un espace E est la topologie la moins fine sur E qui contient A / l'intersection de toutes celles qui contiennent A.

I.2. Bases de topologie

Une **base de topologie d'un espace topologique** $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{T})$ est un ensemble de parties $B \subseteq T$ stable par intersection finie, de réunion l'espace entier E, et qui engendre la topologie T.

Soit un espace topologique engendré par une base de topologie. Alors une partie O vérifie :

O est ouvert ssi c'est une réunion d'éléments de base ssi tout point de O appartient à un élément de base inclus dans O. D'où l'intérêt du concept.

Un ensemble de parties stables par intersection finie, est une base de la topologie qu'elle engendre sur la réunion de ses parties.

Un ensemble générant une topologie est appelée **une prébase** de cette topologie. Une base de topologie est toujours une prébase mais pas nécessairement l'inverse. Cependant on obtient une base de topologie d'une prébase, en la clôturant par intersection finie. Un ouvert d'une topologie engendrée par une prébase s'exprime donc toujours comme union quelconque d'intersections finies de la prébase.

La **topologie usuelle des réels** est la topologie formée des réunions quelconques des $]a, b[$

Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné de cardinal ≥ 2.

La **base de topologie de l'ordre** sur E est $\{] \leftarrow, y[: y \in E\} \cup \{]x, y[: x, y \in E\} \cup \{]x, \rightarrow [: x \in E\}$ avec par exemple $(\leftarrow, \boldsymbol{y}[= \{x \in E \mid x < y\}$

La **topologie de l'ordre sur E** est la topologie engendrée par la base de topologie de l'ordre sur E.

La topologie de l'ordre sur R correspond à la topologie usuelle sur R.

I.3. Un exemple fondamental : la topologie naturelle d'un espace métrique

Une **distance** sur un ensemble E est une application de $E \times E \rightarrow E$ telle que, la distance entre deux points est nulle ssi égalité, vérifie la symétrie $d(x, y) = d(y, x)$, et l'inégalité triangulaire $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Il découle de la déf la 2$^{\text{ième}}$ inégalité triangulaire $|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$

Un **espace métrique** est un ensemble muni d'une distance sur cet ensemble.

R munit de la valeur absolue induit une distance $d(x, y) = |x - y|$

Dans un espace métrique, la **boule ouverte** $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})$ de centre a et de rayon r est l'ensemble des points dont la distance au centre est inférieure strictement au rayon. La **boule fermée** $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})$ c'est pareil

avec une inégalité large. La **sphère $S(a,r)$** est l'ensemble des points dont la distance au centre est égale au rayon. Par exemple, dans R les boules ouvertes sont de la forme $(a-r,a+r)$.
Les boules induites s'obtiennent en intersectant avec l'espace induit.
L'ensemble des boules ouvertes d'un espace métrique est une base de topologie de l'espace métrique.
La **topologie naturelle d'un espace métrique/distance**, est la topologie engendrée par l'ensemble des boules ouvertes. On peut ensuite dire qu'un ensemble est ouvert ssi en tous ses points on peut trouver une boule incluse dans l'ensemble.
La topologie associée à la distance discrète sur un ensemble est la topologie discrète sur cet ensemble.
La topologie naturelle associée à la distance induite par la valeur absolue sur R correspond à la topologie usuelle sur R.

I.4. Intérieur, adhérence, frontière

L'intérieur d'une partie d'un espace topologique est le plus grand(union) ouvert contenu dans la partie.
L'adhérence d'une partie d'un espace topologique est le plus petit(inter) fermé contenu dans la partie.
La frontière est le complémentaire de l'intérieur dans l'adhérence
Une partie est ouverte ssi elle coïncide avec son intérieur.
Une partie est fermée ssi elle coïncide avec son adhérence.
Le complémentaire de l'adhérence est l'intérieur du complémentaire.
Le complémentaire de l'intérieur est l'adhérence du complémentaire.
La frontière du complémentaire coïncide avec la frontière.
Un point est intérieur à une partie ssi il est dans un ouvert inclus dans la partie.
Un point est adhérent à une partie ssi tout ouvert contenant le point rencontre la partie.
Un point est sur la frontière d'une partie ssi tout ouvert contenant le point rencontre la partie et son complémentaire.
Pour une famille quelconque de parties d'un espace topologique on a :
L'intérieur de l'intersection est dans l'intersection des intérieurs, avec égalité si famille finie
L'union des intérieurs est dans l'intérieur de l'union.
L'adhérence de l'intersection est dans l'intersection des adhérences.
L'union des adhérences est dans l'adhérence de l'union, avec égalité si famille finie.
Pour une sous-partie B d'une partie A à topologie induite d'un espace topologique E :
L'intérieur induit contient l'intérieur intersecté a la partie.
L'adhérence intersectée a la partie égale l'adhérence induite.
La frontière intersectée a la partie contient la frontière induite.

I.5. Voisinages

Dans un espace topologique une partie est un **voisinage** d'une autre partie si la première contient un ouvert qui contient la deuxième. On note $\boldsymbol{V_A}$ l'ensemble des voisinages d'une partie A.
Une partie est ouverte ssi elle est voisinage de tous ses points.
Un point est intérieur à une partie ssi la partie est un voisinage du point.
Un point est adhérent à une partie ssi tout voisinage du point rencontre la partie.
Un point est sur la frontière d'une partie ssi tout voisinage du point rencontre la partie et son complémentaire.
Un point d'un espace topologique est **point d'accumulation** d'une partie ssi tout voisinage du point rencontre la partie en un autre point ssi le point est adhérent à la partie privée du point.
Un point d'une partie est un **point isolé** ssi il admet un voisinage dont l'intersection avec la partie est le point seul ssi le point n'est pas adhérent à la partie privée du point.
Un point d'accumulation est quelconque, alors qu'un point isolé appartient toujours à sa partie.
Les points d'accumulations et points isolés forment une partition de l'ensemble des points adhérents.
Un voisinage induit d'une topologie induite est un voisinage intersecté.
Un **système fondamental de voisinages d'une partie fixée** d'un espace topologique est un ensemble de

voisinage particuliers de la partie, tels qu'un voisinage quelconque de la partie doit contenir un de ces voisinages particuliers. Il y en a toujours un, la topologie elle-même.
Dans R tout point a admet pour système fondamental de voisinage les $\left(a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}\right)$
Dans un espace métrique l'ensemble des boules centrées en un point fixé est un système fondamental de voisinages de ce point.
L'ensemble des éléments d'une base de topologie contenant un point fixé forme un système fondamental de voisinage de ce point.

I.6. Parties denses

Une partie est **dense** dans une autre partie si l'adhérence de cette première contient la deuxième partie. Si l'espace admet une base de topologie. Une partie est dense dans une autre ssi tout élément de base rencontrant l'autre rencontre l'une.
Un sous-groupe de $(R,+)$ est soit discret de la forme , $\alpha > 0$, soit dense dans R. Un sous-groupe fermé est donc soit discret, soit R.

I.7. Espace séparés

Un espace topologique est **séparé** si deux points distincts admettent toujours deux voisinages distincts. Un espace discret est toujours séparé. Un espace grossier n'est jamais séparé.
Tout espace métrique est séparé.

II. Continuité et limite

II.1. Continuité globale et locale

Une fonction entre deux espaces topologiques est **continue** si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert ssi l'image réciproque de tout fermé est un fermé ssi l'image de l'adhérence de toute partie est incluse dans l'adhérence de l'image de la partie ssi l'image réciproque de tout élément d'une prébase est un ouvert. Dernière caractérisation utile pour montrer prop universelle de topologie initiale.
Si l'espace d'arrivée admet une base de topologie alors une fonction est continue ssi l'image réciproque de tout élément de la base est ouvert.
Une fonction est **continue en un point** si tout voisinage/tout voisinage fondamental de l'image du point contient l'image d'un voisinage du point ssi l'image réciproque de tout voisinage/tout voisinage fondamental de l'image du point est un voisinage du point.
Une fonction est continue ssi elle est continue en tout point.
Une application est **ouverte** si l'image de tout ouvert est un ouvert ssi l'image d'un intérieur est l'intérieur de l'image
Une application est **fermée** si l'image de tout fermé est un fermé ssi l'adhérence de l'image est l'image de l'adhérence.

II.2. Opérations sur la continuité

La composée de deux fonctions continue est continue. Si f continue en x et g continue en $f(x)$ alors la composée est continue en x. L'injection canonique d'une partie d'un espace topologique est continue.
La restriction d'une fonction continue est continue sur la topologie induite. Idem pour la corestriction.
La somme et le produit de fonctions scalaires est continue. L'ensemble des fonctions continues scalaires est une algèbre.

II.3. Continuité et densité, prolongements des égalités et inégalités

Une fonction continue d'un espace topologique vers un topologique séparé, nulle/constante sur une partie dense est nulle/constante partout.
Deux fonctions continues à valeurs dans un topologique séparé coïncidant sur une partie dense coïncident partout.

II.4. Homéomorphismes

Un **homéomorphisme** entre deux espaces topologiques est une bijection continue de réciproque continue. Deux espaces topologiques sont **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme entre les

deux
L'identité est un homéomorphisme ssi la topologie de départ est identique à celle d'arrivée.
Une bijection est un homéomorphisme ssi elle est continue et ouverte ssi elle est continue et fermée.
Dans R, les translations, les homothéties sont des homéomorphismes. Deux intervalles ouverts de R sont homéomorphes.
Une propriété est une notion topologique si elle est conservée par homéomorphisme. Etre ouvert, fermé, voisinage d'un point, être séparé, être adhérence, intérieur, frontière sont des notions topologiques.

II.5. Limite d'une application en un point

Soit une fonction f d'une partie d'un espace topologique dans un autre espace topologique. Soit un point a adherent a la partie, et un point l de l'espace topologique d'arrivee. On dit que la **fonction admet pour limite $\boldsymbol{l}$ au point $\boldsymbol{a}$** ssi tout voisinage/tout voisinage fondamental de la limite contient l'image d'un voisinage (épointé (convention intl.)) du point (induit(intersecté) sur la partie) ssi l'image réciproque de tout voisinage/tout voisinage fondamental de la limite est un voisinage du point.
Si la limite existe et est unique on note $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x)}$
Soit une fonction f d'une partie A d'un espace métrique dans un autre espace métrique. Soit un point a adherent a la partie, et un point l de l'espace métrique d'arrivée.
f admet pour limite l en a ssi $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A \setminus \{a\}\ d(x,a)_E < \delta \Rightarrow d_F(f(x),l) < \varepsilon$
Une limite d'une fonction appartient à l'adhérence de l'image.
Si l'espace d'arrivée est séparé alors une limite si elle existe est unique.
Une fonction d'un espace topologique vers un espace topologique séparé est continue en un point ssi sa limite en ce point est l'image de ce point.
La limite se compose TODO. Prolongement par continuité TODO.

III. Construction d'espaces topologiques

III.1. Espaces produits

Un **problème de topologie initiale** correspond à la donnée d'un ensemble de départ E, et d'une famille d'applications $(\varphi_i)_{i\in I}$ de domaine cet espace, chacune à valeur dans son espace topologique (F_i, T_i). La **topologie initiale** d'un problème de topologie initiale, est la topologie la moins fine (intersection) de l'espace de départ qui rend chaque application continue vis à vis de l'espace de départ et de son espace topologique d'arrivée fixe. Autrement dit c'est la topologie engendrée par la prébase $\{\varphi_i^{-1}(V_i), V_i \in T_i, i \in I\}$.
Une suite $(x_n)_n$ de l'espace topologique de départ X converge vers un point $x \in X$ pour la topologie initiale engendrée par des $(\varphi_i)_{i\in I}$ ssi $\forall i \in I\ \ \varphi_i(x_n) \to_{n\to\infty} \varphi_i(x)$
Une application ψ à valeurs dans X est continue (relativement à la topologie initiale de X) ssi $\forall i \in I\ \varphi_i \circ \psi$ est continue.
La **topologie produit d'une famille d'espaces topologiques**, est la topologie initiale du problème dont l'espace de départ est le produit cartésien des espaces, et les applications sont les projections canoniques sur chaque espace topologique de la famille. Le produit quelconque d'espaces topologiques est donc un espace topologique pour la topologie produit.
On appelle **rectangle élémentaire topologique** d'un espace topologique produit, un produit (de même indexation) d'ouverts sur chaque espace, mais dont seul un nb fini d'entre eux n'est pas = a tout son espace. De façon équivalente c'est une intersection finie d'images réciproques d'ouverts d'espaces du produit par leur projection canonique.
L'ensemble des rectangles élémentaires est une base engendrant la topologie de l'espace produit. Un ouvert de la topologie produit est donc une réunion quelconque de rectangles élémentaires.
Une fonction f d'un espace topologique a valeur dans un espace topologique produit est continue ssi chacune de ses projections $\pi_i \circ f$ l'est aussi.
Une fonction f définie sur un espace topologique produit n'est pas forcement continue ssi ses

composantes le sont. Ex : $(x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$
Le produit d'espaces séparés est séparé pour la topologie produit.
Un espace topologique E est séparé ssi la diagonale $\{(x,y) \in E \times E | x = y\}$ est fermée dans $E \times E$
III.2. Espaces quotients
Un **problème de topologie initiale** correspond à la donnée d'un ensemble d'arrivée F, et d'une famille d'applications $(\varphi_i)_{i\in I}$ vers cet espace, chacune de domaine dans son espace topologique (E_i, T_i). On a donc une famille d'espaces topologiques de départ correspondant à cette famille d'application.
La **topologie finale** d'un problème de topologie finale, est la topologie la plus fine (union) de l'espace d'arrivée qui rend les applications continues. La **topologie finale** est donc l'ensemble des parties de l'espace d'arrivée dont l'image réciproque toute application est ouverte dans son espace de départ. Autrement dit c'est la topologie $\left\{V \subseteq F \mid \forall i \in I\ \varphi_i^{-1}(V) \in T_i\right\}$.
Topologique quotient. Pour un espace topologique E, et R relation d'équivalence quelconque sur E, **l'espace topologique quotient** est l'ensemble $\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{R}}$.
La **surjection canonique** $q\colon E \to \frac{E}{R} : v \mapsto \overline{v}$ est une application surjective.
La **topologie quotient d'un espace topologique par une relation d'équivalence** est la topologie finale sur l'espace quotient pour la surjection canonique. C'est donc la topologie la plus fine sur l'espace quotient rendant la surjection canonique continue. $T_q = \left\{O \subseteq \frac{E}{R} \mid q^{-1}(O) \in T\right\}$
Une application $f\colon E \to F$, **est factorisable/passe au quotient selon $\boldsymbol{R}$** relation d'équivalence sur E càd $\exists \overline{f}\colon \frac{E}{R} \to F$ tel que $f = \overline{f} \circ \pi$ ssi f est constante sur toute classe d'équivalence de R.
Si une fonction entre deux espaces topologiques passe au quotient du premier espace par une relation d'équivalence, alors la fonction est continue ssi sa fonction quotient l'est.
Attention, souvent un espace quotient n'est pas séparé même si l'espace l'est.
L'espace quotient par une relation est séparé ssi le graphe de la relation $\{(x,y) \in E \times E \mid \overline{x} = \overline{y}\}$ sur l'espace $E \times E$ est fermé pour la topologie produit.
Chapitre 2.
I. Espaces topologiques compacts
I.1. Définitions et premières propriétés
Un recouvrement d'une partie d'un espace topologique est une famille de parties de l'espace dont l'union contient la partie. Il est dit **ouvert** ssi toutes les parties de la famille sont ouvertes.
Un sous-recouvrement d'un recouvrement d'une partie d'un espace topologique est une sous-famille du recouvrement, qui est encore un recouvrement pour cette même partie.
Un espace topologique est **compact** ssi il est séparé et tout recouvrement ouvert de l'espace admet un sous-recouvrement fini.
Une partie d'un espace topologique est **compacte** ssi l'espace topologique qu'elle induit est compact.
Un espace topologique est **quasi-compact** ssi il est compact sans nécessairement la propriété de séparation. Un espace compact est donc un espace séparé quasi-compact.
Un partie d'un espace topologique est **relativement compacte** ssi son adhérence est compacte.
Un espace topologique discret est compact ssi il est fini.
La droite réelle R n'est pas compacte. $(]-n,n[)_{n\in N}$ n'admet pas de sous-recouvrement fini.
Une partie finie d'un espace topologique séparé est toujours compacte.
Un espace topologique séparé est compact ssi toute famille de fermés d'intersection vide admet une sous-famille finie d'intersection vide.
Tout espace topologique homéomorphe à un espace compact est aussi compact. Autrement dit la

compacité est une notion topologique.
Toute partie compacte d'un espace topologique séparé est toujours fermée.
Deux parties compactes disjointes d'un espace topologique séparé peuvent être incluses dans deux ouverts disjoints respectifs.
Toute partie fermée d'un espace topologique compact est automatiquement compacte.
Ainsi dans un espace compact, les parties compactes sont les parties fermées.
Dans un espace topologique séparé, toute union finie de parties compactes est une partie compacte.
Dans un espace topologique séparé, toute intersection non vide quelconque de parties compactes est compacte.
Théorème de Tychonov. Un produit quelconque d'espaces topologiques compacts, muni de la topologie produit, est compact.

I.2. Les compacts de R^n

Le **diamètre d'une partie A d'un espace métrique** est $\sup_{x,y\in A} d(x,y)$. On note $\boldsymbol{diam_{E,d}(A)}$
Une partie A d'un espace métrique est **bornée** ssi $\{d(x,y) : x,y \in A\} \subseteq R_+$ est majorée ssi son diamètre est fini.
Les parties compactes de $(R, |\quad|)$ sont les parties fermées bornées.
Les parties compactes de R^n muni de la topologie produit usuelle sont les parties fermées bornées.
Encore vrai sur les Rev de dimension fini, mais pas en dimension infinie (Riesz).

II. Compacité et continuité

II.1. Propriétés des applications continues définies sur un compact

Tout application continue d'un espace compact vers un espace topologique séparé a pour image une partie compacte.
Toute application continue d'un espace compact vers un espace topologique séparé est une application fermée.
En général, l'image réciproque d'un compact n'est pas nécessairement un compact même pour une application continue. En général, un ensemble dont l'image par une fonction continue est compacte, n'est pas forcément un compact.
Toute application continue et injective f d'un espace compact E vers un espace topologique séparé F est un homéomorphisme de l'espace compact E vers son image $f(E)$.

II.2. Applications : théorèmes classiques d'existence d'extrema

Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné de R vers R est bornée et atteint ses bornes.
Une fonction $f: R^n \to R$ est **coercive** ssi $\forall B \in R_+ \ \exists A \in R_+ \ \forall x \in R^n | \ \|x\|_u \geq A, \ f(x) \geq B$.
Toute fonction continue et coercive de R^n vers R, admet un minimum global.

III Espaces localement compacts

III.1. Compacité locale

Un espace topologique est **localement compact** ssi il est séparé et chacun de ses points admet un système fondamental de voisinages compacts.
Une **partie localement compacte** d'un espace topologique séparé est une partie qui muni de la topologie induite forme un espace topologique localement compact.
$(R, |\quad|)$ est localement compact. R^n est localement compact. Q n'est pas une partie localement compacte de R.
Tout espace topologique compact est localement compact.

Un espace topologique séparé est localement compact ssi chacun de ses points admet un voisinage compact.
Les ouverts et les fermés d'un espace localement compact, sont des parties localement compactes.
Toute partie compacte d'un espace localement compact, possède un voisinage ouvert relativement compact.
Un produit fini d'espaces localement compacts est un espace topologique localement compact.

III.2. Compactification d'Alexandroff

Intuition : Tout espace localement compact peut être vu comme une partie d'un espace compact qui peut d'ailleurs être obtenu par adjonction d'un unique point à l'espace initial.
Pour un espace topologique localement compact mais non compact (E, T), et un point $\omega \notin E$, si on pose $F = E \cup \{\omega\}, T' = \{(E \setminus K) \cup \{\omega\} : K \text{ compact de } (E, T)\},\ T_F = T \cup T',$ alors (F, T_F) est un espace topologique compact. (F, T_F) est le **compactifié d'Alexandroff** de (E, T), aussi note $\boldsymbol{Al(E)}$.
Pour tout $n \in N^*$, le compactifié d'Alexandroff de R^n est homéomorphe a la sphère euclidienne unité S^n de R^{n+1}.

Chapitre 3.

I. Espaces connexes

I.1. Définitions, premières propriétés et exemples

Un espace topologique est **connexe** ssi son seul recouvrement en deux ouverts/fermés disjoints est $\{\emptyset, E\}$ ssi il n'admet pas de recouvrement constitué de deux ouverts/fermés disjoints non vides ssi les seules parties à la fois ouvertes et fermées de l'espace sont $\emptyset$ et E.
Une partie d'un espace topologique est une **partie connexe** ssi l'espace topologique qu'elle induit est connexe.
Un espace topologique homéomorphe a un connexe est connexe. Ainsi, la connexité est une notion topologique.
Méthode utile : Pour montrer une propriété en tout point d'un connexe il peut être utile de considérer l'ensemble des points vérifiant cette propriété et de montrer que c'est ouvert, fermé, non vide.
Tout espace muni de la topologie grossière est connexe.
Tout espace topologique discret est connexe ssi c'est un singleton. Les ensembles N, Z sont des parties non connexes de $(R, |\ \ |)$
Toute partie d'un espace topologique contenue dans l'union de 2 ouverts disjoints, et rencontrant ces deux ouverts est non connexe.
Toute partie B d'un espace topologique qui contient une sous-partie A connexe et dense dedans $\left(A \subseteq B \subseteq \overline{A}\right)$, alors B est connexe. Donc tout espace topologique qui contient une partie dense connexe, est un espace connexe. L'adhérence d'une partie connexe est une partie connexe.
L'union quelconque d'une famille de parties connexes d'intersection non vide, est une partie connexe.
L'union quelconque d'une famille de parties connexes qui rencontrent toutes une même partie connexe, est une partie connexe.
Pour une suite finie ou non de parties connexes telles que 2 parties consécutives se rencontrent, l'union forme une partie connexe.
Les parties connexes de $(R, |\ \ |)$ sont les intervalles.
L'union de deux parties connexes disjointes n'est pas nécessairement connexe.

L’intersection de deux parties connexes n’est pas nécessairement connexe.
La frontière d’une partie connexe n’est pas nécessairement connexe.
Une partie d’adhérence connexe n’est pas nécessairement connexe.
Une partie d’intérieur connexe n’est pas nécessairement connexe.

I.2. Composantes connexes

Deux points d’un espace topologique sont **connectés** ssi ils appartiennent à une même partie connexe.
La relation « être connecté » est une relation d’équivalence sur un espace topologique.
Une **composante connexe d’un espace topologique** est une classe d’équivalence pour « être connecté »
La composante connexe d’un point d’un espace topologique est la plus grande partie connexe de l’espace topologique qui contient le point.
Les composantes connexes d’un espace topologique sont des parties fermées.

II. Connexité et continuité

L’image d’un espace topologique connexe par une application continue, est une partie connexe de l’espace topologique d’arrivée.
Théorème des valeurs intermédiaires. Pour une fonction continue d’un intervalle de R vers R, tous les points situés entre deux points images, sont des points images. Autrement dit, l’image d’un intervalle par une fonction de $R \to R$ continue est un intervalle.
Un espace topologique est connexe ssi les seules applications continues de l’espace vers $\{0,1\}$ sont les constantes.
L’espace produit quelconque d’espaces topologiques est connexe ssi chacun des espaces l’est.
R est connexe, R^n est connexe.
Le graphe d’une application continue d’un espace connexe E vers un espace topologique F est une partie connexe de $E \times F$.

III. Connexité par arcs

Un **arc d’un espace topologique** est une application continue de $[0,1]$ vers l’espace topologique.
L’image d’un arc d’un espace topologique est une partie connexe de cet espace.
Les courbes paramétrées sont des parties connexes de R^n.
Les surfaces paramétrées, images d’un connexe de R^2 par une application continue, sont des connexes de R^n.
Un espace topologique est **connexe par arcs** ssi tout couple de points admet un arc qui les joint.
Tout espace topologique connexe par arcs est connexe.
L’espace R n’est pas homéomorphe a l’espace R^n des que $n \geq 2$.
Un cercle de R^2 n’est pas homéomorphe a R. $[0,1[$ n’est pas homéomorphe a $]0,1[$.
Attention : la connexité n’entraine pas nécessairement la connexité par arcs.

IV. Applications pratiques de la connexité

IV.1. Résultats d’existence

Toute application ouverte et continue, d’un espace compact, vers un espace connexe et séparé, est surjective.
Th. du passage des douanes. Dans un espace topologique, un partie connexe qui rencontre l’intérieur et le complémentaire de l’adhérence d’une autre partie, doit aussi rencontrer la frontière de cette autre partie.

IV.2. Résultats d’unicité

Toute application localement constante d'un espace connexe vers un espace séparé est constante.

V. Connexité locale

Un espace topologique est **localement connexe** ssi chacun de ses points admet un système fondamental de voisinages connexes.

Un espace topologique est localement connexe ssi les composantes connexes de tout ouvert sont ouvertes.

Un espace topologique est **localement connexe par arcs** ssi chacun de ses points admet un système fondamental de voisinages connexes par arcs.

Un espace topologique connexe et localement connexe par arcs, est connexe par arcs.

R^n et S^{n-1} sont connexes par arcs.

Chapitre 4.

II. Suites à valeurs dans un espace topologique

II.1. Limites de suites

Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

Un produit fini d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

Une suite sur un ensemble E correspond à une application $x: N \to E$.

Un ensemble est dénombrable ssi c'est l'image d'une suite. R n'est pas dénombrable.

La topologie usuelle sur N est la topologie discrète sur N c'est aussi la topologie engendrée sur $N \subseteq \overline{R}$ par la topologie de l'ordre sur $\overline{R}$. $+\infty \in \overline{N}$, un voisinage de ∞ est de la forme $[\![n, \infty]\!]$.

Une suite $(x_n)_{n\in N}$ sur un espace topologique converge vers une limite $l \in E$ ssi $\forall V \in V_l\ \exists N \in N\ \forall n \geq N\ x_n \in V$.

Une suite $(x_n)_{n\in N}$ sur un espace métrique (E, d) converge vers une limite $l \in E$ ssi $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in N\ \forall n \geq N\ d(x_n, l) < \varepsilon$.

Il y a unicité de la limite si elle existe pour une suite a valeurs dans un espace séparé.

Dans un espace non séparé il n'y a a priori pas unicité de la limite.

Dans un espace topologique grossier, toute suite admet tout point comme limite.

Pour une suite convergente sur un espace topologique, l'image de la suite adjointe de sa limite forme une partie compacte.

Une **valeur d'adhérence d'une suite d'un espace topologique** est un point de l'espace dont tout voisinage contient une infinité de termes de la suite. Autrement dit c'est un point $a \in E$ tel que $\forall V \in V_a\ \forall N \in N\ \exists n > N\ x_n \in V$.

Toute limite d'une suite est une valeur d'adhérence de la suite.

$((-1)^n)_{n\in N}$ ne converge pas et a -1 et 1 pour valeurs d'adhérences.

Dans R, $(n(-1)^n)_{n\in N}$ n'a ni limite, ni valeur d'adhérence.

Une suite peut avoir une unique valeur d'adhérence et pas de limite.

Une **suite extraite d'une suite** $(x_n)_{n\in N}$ est une suite de la forme $\left(x_{n_k}\right)_{k\in N}$ avec $(n_k)_{k\in N}$ suite sur N strictement croissante. Dans ce cas il est bon de savoir que $\forall k \in N\ n_k \geq k$

Une suite sur un espace topologique converge vers une limite l ssi toutes ses suites extraites convergent vers l. Ainsi une suite dont deux suites extraites convergent vers des limites distinctes, est divergente.

Une suite à valeurs dans une partie d'un espace topologique ne peut converger que dans l'adhérence de

cette partie.
Une limite de suite extraite est toujours une valeur d'adhérence pour la suite initiale.
Soit une fonction f d'une partie d'un espace topologique vers un autre espace topologique qui admet au point a adherent a la partie, une limite l, alors pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ de la partie qui tend vers a, on a $\left(f(x_n)\right)_{n\in N}$ tend vers l.
Pour une fonction f d'une partie d'un espace topologique vers un autre espace topologique, continue en un point a de la partie, alors pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ de la partie qui tend vers a, on a $\left(f(x_n)\right)_{n\in N}$ tend vers $f(a)$.
Deux espaces métriques ou métrisables, qui ont les mêmes suites convergentes, ont la même topologie.
Deux espaces topologiques qui ont les mêmes suites convergentes, n'ont pas nécessairement la même topologie.

II.2. Suites et espace topologique compact

Dans un espace topologique compact, l'intersection d'une suite décroissante de fermés non vides est non vide.
Dans un espace topologique compact, toute suite admet une valeur d'adhérence.
Une suite dans un espace topologique compact qui admet une unique valeur d'adhérence, converge vers cette valeur d'adhérence.
La propriété de **Bolzano-Weierstrass** est la propriété « toute suite admet une valeur d'adhérence ».
Dans un espace topologique séparé, une suite décroissante de compacts non vides est d'intersection non vide.

III. Dénombrabilité et espace topologique

Pour caractériser les notions topologiques on aime utiliser les critères séquentiels, ce qui est possible sur les espaces communs $K^n, K[X]$, ici on énonce un cadre formel qui permet de généraliser cet but.

III.1. Espace topologique a base dénombrable

Un espace topologique est **à base dénombrable** ssi il admet une base de topologie dénombrable.
Un espace métrique est à base dénombrable : Muni de sa topologie naturelle, les boules ouvertes de rayon rationnels forment une base dénombrable d'ouverts.
R et $\overline{R}$ munis de leur topologie naturelle sont à base dénombrable : $\{]r,s[: r,s \in Q\}$ est une base dénombrable de R, $\{]r,s[: r,s \in Q\} \cup \{]-\infty,s[: s \in Q\} \cup \{]r,\infty[: r \in Q\}$ est une base dénombrable de $\overline{R}$. Dans ces exemples, Q joue un rôle très utile grâce à sa densité et dénombrabilité.
R^n est à base dénombrable : Muni de sa topologie naturelle, les boules ouvertes de rayon rationnels et de centres a coordonnées rationnelles forment une base dénombrable d'ouverts.
Sur R, la topologie engendrée par les $[a,b[, a<b$ n'est pas à base dénombrable.
Un produit au plus dénombrable d'espaces topologiques à base dénombrable est à base dénombrable.

III.2. Espace topologique a base dénombrable de voisinages

Un espace topologique est **à base dénombrable de voisinages** ssi chacun de ses points admet un système fondamental de voisinages qui est au plus dénombrable.
Un espace topologique à base dénombrable est à base dénombrable de voisinages. Réciproque fausse.
Dans un espace topologique à base dénombrable de voisinages, tout point admet un système fondamental dénombrable décroissant de voisinages $(V_n)_n \ \forall n\, V_{n+1} \subseteq V_n$
Un espace métrique est à base dénombrable de voisinages.

III.3. Espace séparable

Un espace topologique est **séparable** ssi il contient une partie dénombrable et dense. (Attention ne pas confondre avec espace séparé).

Un espace discret est séparable ssi il est dénombrable.

La tribu discrète de R est séparée et non séparable. La tribu grossière de R est séparable et non séparée.

Un espace topologique à base dénombrable est séparable. R et $\overline{R}$ sont séparables.

Sur R, la topologie engendrée par les $[a, b[, a < b$ est séparable.

Un produit au plus dénombrable d'espaces séparables est séparable.

Tout ouvert de R, est réunion d'une famille au plus dénombrable d'intervalles ouverts 2 à 2 disjoints.

Attention la propriété analogue pour les fermés est généralement fausse : $\bigcup_{n\in N}\left\{\frac{1}{n}\right\}$

IV. Suites à valeurs dans un espace topologique à base dénombrable de voisinages.

Un espace métrique est à base dénombrable de voisinages, donc les résultats s'appliquent en particulier sur les espaces métriques. Le but est d'avoir des caractérisations séquentielles de notions topologiques.

Caractérisation adhérence. Dans un espace topologique à base dénombrable de voisinages, un point appartient à l'adhérence d'une partie ssi il existe une suite à valeurs dans la partie qui converge vers le point.

Caractérisation VA. Dans un espace topologique à base dénombrable de voisinages, un point est une valeur d'adhérence d'une suite ssi c'est une limite d'une suite extraite de cette suite.

Dans un tel espace, la limite d'une suite convergente, est donc l'unique valeur d'adhérence de cette suite.

L'ensemble A des VA d'une suite $(x_n)_{n\in N}$ d'un espace métrique (et dans un topo a base dénombrable de voisinages ?) s'exprime comme $A = \bigcap_{n\in N}\overline{\{x_k : k \geq n\}}$ et est donc toujours un fermé, et est borné si la suite l'est.

Caractérisation limite. Toute fonction f d'une partie d'un espace topologique à base dénombrable de voisinages vers un autre espace topologique, admet au point a adherent a la partie, une limite l, <u>ssi</u> pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ de la partie qui tend vers a, on a $\left(f(x_n)\right)_{n\in N}$ tend vers l.

Chapitre 5.

I. Distances et espaces métriques

I.1. Rappels et exemples

Une **distance** sur un ensemble E est une application de $E \times E \to E$ telle que, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, vérifie la symétrie $d(x, y) = d(y, x)$, et l'inégalité triangulaire $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Il découle de la 1ere inégalité triangulaire, la 2$^{\text{ième}}$ inégalité triangulaire : $|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$

Un **espace métrique** est un ensemble muni d'une distance sur cet ensemble.

La restriction d'une distance a une partie de son espace métrique, forme un nouvel espace métrique appelé **espace métrique induit** sur la partie.

I.2. Isométries et transport de distances

Avec une application <u>injective</u> f entre 2 ensembles non vides, on peut définir à partir d'une distance sur l'ensemble d'arrivée d_F, une distance sur l'ensemble de départ $d_E(x, y) = d_F\left(f(x), f(y)\right)$ appelée **distance image réciproque de $\boldsymbol{d_F}$ par $\boldsymbol{f}$**.

Une application f entre 2 espaces métriques est une **isométrie** ssi elle conserve les distances ssi

$\forall x, y \in E \ d_E(x,y) = d_F\big(f(x), f(y)\big)$ ssi d_E est la distance image réciproque de d_F par f.
Une isométrie est automatiquement injective, et donc bijective sur son image.
$f: R \to]-1,1[: x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est bijective et se prolonge en un bijection de $\overline{R} \to [-1,1]$ avec $f(-\infty) = -1, f(\infty) = 1$. Permet de définir une distance $\overline{d}$ sur $\overline{R}$, $\overline{d}(u,v) = \left|\frac{u}{1+|u|} - \frac{v}{1+|v|}\right|$ comme distance image réciproque de la valeur absolue par l'application injective f. $\overline{d}(u,\infty) = 1 - \frac{u}{1+|u|}, d(-\infty,\infty) = 2$

I.3. Espaces vectoriels normés

Soit $K = R$ ou C.
Une **norme** sur un K espace vectoriel E est une application $E \to R_+$ telle que
$\forall x, y \in E \ \forall \lambda \in K$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, et $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
Dans ce cas on a une 2nde inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E \ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\|$
Un **K espace vectoriel normé** est un Kev muni d'une norme sur ce Kev.
$(R, |\ \ |), (C, |\ \ |)$ sont des Kevn. K^n est un Kevn pour les normes suivantes :
$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, $\forall p \in [1,\infty)$ $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, $\|x\|_u = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$
La **distance induite par une norme sur un Kevn** $(E, \|\ \ \|)$ est l'application $d : E^2 \to R_+ : (x,y) \mapsto \|x-y\|$. C'est une distance. Ainsi tout Kevn peut être vu comme un espace métrique.
Il existe des distances qui ne peuvent pas être définies par une norme. $d(x,y) = \min(1, |x-y|)$
Une distance induite par une norme est invariante par translation. $d(x+c, y+c) = d(x,y)$.
Une distance induite par une norme vérifie $\forall \lambda \in K \ \forall x, y \in E \ d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$
Un espace métrique peut être borné, mais pas un espace vectoriel normé sur R ou C.

II. Topologie d'un espace métrique

II.1. Topologie naturelle d'un espace métrique

Dans un espace métrique, la **boule ouverte $B(a,r)$** de centre a et de rayon r est l'ensemble des points dont la distance au centre est inférieure strictement au rayon. La **boule fermée $B_f(a,r)$** c'est pareil avec une inégalité large. La **sphère $S(a,r)$** est l'ensemble des points dont la distance au centre est égale au rayon. Par exemple, dans R les boules ouvertes sont de la forme $(a-r, a+r)$.
La **topologie naturelle d'un espace métrique/distance**, est la topologie engendrée par l'ensemble des boules ouvertes.
L'ensemble des boules ouvertes d'un espace métrique est une prébase mais pas une base.
Cependant O ouvert $\Leftrightarrow \forall x \in O \ \exists r > 0 \ B(x,r) \subseteq O \Leftrightarrow \exists \big(B(x_i, r_i)\big)_{i \in I} \ O = \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i)$
Un point x est intérieur a une partie A d'un espace métrique (E,d) ssi $\exists r > 0 \ B(x,r) \subseteq A$
Un point x est adhérent a une partie A d'un espace métrique (E,d) ssi $\exists r > 0 \ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$
Une partie V est un voisinage de x ssi V contient une boule ouverte de rayon $r > 0$ contenant x.
Dans un espace métrique quelconque, $\overline{B(a,r)} \subseteq B_f(a,r)$ et $B(a,r) \subseteq Int\left(B_f(a,r)\right)$
Dans un Kevn, $\overline{B(a,r)} = B_f(a,r)$ et $B(a,r) = Int\left(B_f(a,r)\right)$ et $Fr\big(B(a,r)\big) = S(a,r)$

II.2. Diamètre d'une partie, distance entre deux parties

Le **diamètre d'une partie A d'un espace métrique** est $\sup_{(x,y) \in A^2} d(x,y) \in [0,\infty]$. On note $\boldsymbol{diam_{E,d}(A)}$
Une partie A d'un espace métrique est **bornée** ssi $\{d(x,y) : x, y \in A\} \subseteq R_+$ est majorée ssi son diamètre est fini ssi elle est incluse dans une boule de rayon fini.

Dans un espace métrique, la **distance d'un point x a une partie A** est $d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y) \in [0,\infty]$
On a la 2nde inégalité triangulaire : $\forall x,y \in E\ |d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$
Dans un espace métrique, la **distance entre 2 parties A, B** est $d(A,B) = \inf_{(x,y)\in A\times B} d(x,y) \in [0,\infty]$
L'adhérence d'une partie d'un espace métrique est l'ensemble des points à une distance 0 de la partie.
L'intérieur d'une partie d'un métrique est l'ensemble des points à distance > 0 du complémentaire.

III. Espaces semi-métriques, espaces vectoriels semi-normés

Un **écart** sur un ensemble E est une application $E^2 \to [0,\infty]$ telle que
$\forall x,y,z \in E\ , d(x,x) = 0,\ d(x,y) = d(y,x),\ d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z).$
Dans ce cas on a une 2nde inégalité triangulaire : $\forall x,y \in E\ |d(x,y) - d(y,z)| \le d(x,z).$
Un écart est donc un affaiblissement de la notion de distance : On impose pas $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$, et l'écart peut être infini. Un **espace semi-métrique** est un ensemble muni d'un écart.
Avec une application quelconque f entre 2 ensembles non vides, on peut définir à partir d'un écart sur l'ensemble d'arrivée e_F, un écart sur l'ensemble de départ $e_E(x,y) = e_F(f(x),f(y))$ appelée **écart image réciproque de e_F par f**.
On peut toujours transformer un espace semi-métrique en espace métrique en le quotientant par la relation d'équivalence $xRy \Leftrightarrow e(x,y) = 0$.
Une **semi-norme** sur un K espace vectoriel E est une application $E \to R_+$ telle que
$\forall x,y \in E\ \forall\lambda \in K$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, et $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$
Dans ce cas on a une 2nde inégalité triangulaire : $\forall x,y \in E\ |\|x\| - \|y\|| \le \|x+y\|$
Une semi-norme définit un écart associé : $e(x,y) = \|x-y\|$
Le **noyau d'une semi-norme** est le Ksev des vecteurs de semi-norme nul.
On peut transformer un Kev semi-normé en un Kevn en le quotientant par le noyau de la semi-norme.

IV. Espaces métrisables

IV.1. Espaces métrisables

Un espace topologique est **métrisable** ssi il existe une distance sur l'espace dont la topologie associée n'est autre que la topologie de l'espace. Un espace métrique est donc métrisable.
Tout espace discret est métrisable par la distance discrète.
Tout sous-espace topologique d'un espace métrisable est métrisable.
Il n'y a pas unicité des distances d'un espace métrisable, quitte a remultiplier une distance par un c >0.
2 distances sur un ensemble E sont **topologiquement équivalentes** ssi elles donnent la même topologie, autrement dit ssi $\forall x \in E\ \forall r > 0\ \exists r_1 > 0\ \ \exists r_2 > 0\ B_1(x,r_1) \subseteq B_2(x,r)$ et $B_2(x,r_2) \subseteq B_1(x,r)$
Cela forme une relation d'équivalence sur l'ensemble des distances.
Une distance d est toujours topologiquement équivalente à la distance $d' = \min(1,d)$ qui en plus est toujours bornée, alors que d ne l'est pas forcément.
Deux distances sont **équivalentes** sur un ensemble non vide E ssi $\exists \lambda,\mu \in R_+^*\ \lambda d_2 \le d_1 \le \mu d_2$.
Cela est une relation d'équivalence sur l'ensemble des distances sur E. L'une est bornée ssi l'autre l'est.
Si pour deux distances sur E, $\exists\mu\ d_1 \le \mu d_2$ alors T_2 est plus fine que T_1.
Deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes. Mais réciproque fausse.
Sur K^n, les distances d_1, d_2, d_∞ sont équivalentes. On a mieux en dimension finie sur K=R ou C.
Un produit dénombrable d'espaces métrisables est un espace métrisable.
Dans le cas fini, la **distance produit** est $d_u(x,y) = \max_{1\le i\le n} d_i(x_i,y_i)$.

Dans le cas infini dénombrable, la **distance produit** est $\boldsymbol{d_u(x,y)} = sup_{n\in N}\, d_n(x_n, y_n)$.
La distance uniforme définit la topologie produit usuelle.

IV.2. Propriétés de séparation des espaces métrisables

Tout espace métrisable est séparé. Si un espace n'est pas séparé alors il ne peut être métrisable.
Un espace topologique est **régulier** ssi il est séparé et pour tout fermé et tout point en dehors du fermé, il existe un voisinage ouvert du point et un voisinage ouvert du fermé qui sont disjoints.
Un espace topologique est **normal** ssi il est séparé et pour tout couple de fermés disjoints, il existe deux voisinages ouverts respectifs contenant chaque fermé, qui sont disjoints.
Un espace topologique normal est régulier.
Un espace topologique compact est normal, donc régulier, séparé.
Un espace topologique est régulier ssi il est séparé et tout point admet un système fondamental de voisinages fermés.
Un espace topologique métrisable est régulier.

IV.3. Propriétés de dénombrabilités des espaces métrisables

Un espace métrisable et séparable est à base dénombrable d'ouverts.
Toute partie d'un espace métrisable et séparable est séparable.

V. Continuité uniforme dans les espaces métriques

Une application entre 2 espaces métriques $(E, d_E), (F, d_F)$ est **uniformément continue** ssi $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x, y \in E\ d_E(x,y) < \delta \Rightarrow d_F\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$ ssi $\forall (x_n)_{n\in N}, (y_n)_{n\in N} \in E^N\ d_E(x_n, y_n) \to_{n\to\infty} 0 \Rightarrow d_F\big(f(x_n), f(y_n)\big) \to_{n\to\infty} 0$
$R_+ \to R: x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue. $R \to R: x \mapsto x^p$ est continue mais pas uniformément continue des que $p \geq 2$.
La composée d'applications uniformément continues est uniformément continue.
Une combinaison linéaire d'applications uniformément continues est uniformément continue.
Le produit d'applications uniformément continues n'est pas forcement uniformément continue. (x^2)
Une application entre 2 espaces métriques $(E, d_E), (F, d_F)$ est **hölderienne d'exposant $\boldsymbol{\alpha > 0}$, de constante $\boldsymbol{c > 0}$** ssi $\forall x, y \in E\ d_F\big(f(x), f(y)\big) \leq c d_E(x,y)^\alpha$
Une application entre 2 espaces métriques $(E, d_E), (F, d_F)$ est **lipschitzienne de constante $\boldsymbol{c > 0}$** ssi elle est hölderienne d'exposant 1 de constante c ssi $\forall x, y \in E\ d_F\big(f(x), f(y)\big) \leq c d_E(x,y)$
Sur un espace métrique la distance a une partie $d(.,A)$ est 1-lipschitzienne.
Il existe des applications uniformément continues et non lipschitziennes : $R_+ \to R: x \mapsto \sqrt{x}$
Les fonctions de $R \to R$ hölderiennes d'exposant $\alpha > 1$ sont les constantes.
Toute application hölderienne est uniformément continue. Réciproque généralement fausse.
Toute application uniformément continue est continue. Réciproque généralement fausse.
Un espace topologique métrisable est normal.

VI. Limites dans les espaces métriques

VI.1. Limites d'applications, limites de suites

Soit une fonction f d'une partie A d'un espace métrique dans un autre espace métrique. Soit un point a adhérent à la partie, et un point l de l'espace métrique d'arrivée.
f admet pour limite l en a ssi $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in A\ d(x,a)_E < \delta \Rightarrow d_F(f(x), l) < \varepsilon$
Dans un espace métrisable, être dans l'adhérence c'est être limite d'une suite de points de la partie.

Dans un espace métrisable, un point est une valeur d'adhérence d'une suite ssi c'est une limite d'une suite extraite de cette suite.
Toute fonction f d'une partie d'un espace métrisable, vers un autre espace topologique, admet au point a adherent a la partie, une limite l, ssi pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ de la partie qui tend vers a, on a $\left(f(x_n)\right)_{n\in N}$ tend vers l.

VI.2. Convergence simple et uniforme d'une suite d'applications

L'espace des applications de $E \to F$ note $\boldsymbol{F^E} = \boldsymbol{F(E,F)}$ peut être vu comme l'ensemble produit $\prod_{x\in E} F$ et peut être muni d'une topologie produit si F possède une topologie. On appelle **topologie de la convergence simple** cette topologie produit sur $\prod_{x\in E} F$.
Une suite d'applications $(f_n)_{n\in N}$ d'un ensemble E vers un espace topologique (F, T_F) **converge simplement** vers une application $f: E \to F$ ssi $\forall x \in E\ f_n(x) \to_{n\to\infty} f(x)$. Autrement dit ssi la suite $(f_n)_{n\in N}$ converge vers f dans l'espace topologique produit F^E.
Une suite d'applications $(f_n)_{n\in N}$ d'un ensemble E vers un espace métrique (F, d_F) **converge uniformément** vers une application $f: E \to F$ ssi $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in E\ d\left(f_n(x), f(x)\right) < \varepsilon$
La convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque est fausse $[0,1] \to R: x \mapsto x^n$
La limite uniforme d'une suite d'applications continues en un point d'un espace topologique vers un espace métrique, est une application continue en ce point.
La limite uniforme d'une suite d'applications continues sur un espace topologique, vers un espace métrique, est une application continue.
Pour un ensemble E et un espace métrique F, on note $\boldsymbol{B(E,F)}$ l'ensemble des fonctions bornées de F^E.
$B(E,F)$ est aussi un espace métrique pour la **distance uniforme** : $\boldsymbol{d_u(f,g)} = \sup_{x\in E} d(f(x), g(x))$
Si de plus F est un Kevn, alors $B(E,F)$ est un Kevn pour la **norme uniforme** : $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{u}} = \sup_{x\in E}\|f(x)\|$
Converger dans $B(E,F)$ pour la distance/norme uniforme, c'est converger uniformément. Donc la topologie associée a d_u est appelée **la topologie de la convergence uniforme**.

VII. Compacité dans les espaces métriques

VII.1. Suites et espaces métriques compacts

De toute suite d'un espace métrique compact, on peut extraire une sous-suite convergente dans cet espace.
Caractérisation compact. Un espace métrique est compact ssi toutes ses suites admettent une valeur d'adhérence dans l'espace ssi toutes ses suites admettent une sous-suite convergente dans l'espace.
Méthode pour montrer qu'un espace n'est pas compact, on peut montrer qu'une certaine suite, à partir d'un certain rang, $\forall i \neq j, d\left(x_i, x_j\right) > \varepsilon_0$ donc aucune sous-suite n'est de Cauchy donc converge.

VII.2. Espaces métriques précompacts

Un espace métrique est **précompact** ssi $\forall \varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de l'espace au moyen de boules ouvertes de rayon ε.
Une **partie précompacte d'un espace métrique** est une partie qui muni de la distance induite forme un espace métrique précompact.
Tout espace métrique compact est précompact.
Tout espace métrique précompact est borné.
Dans un espace métrique, tout compact est fermé borné. Réciproque fausse en général.
$(R, \min(1, |\quad|))$ n'est pas compact mais est fermé borné.

Dans un espace métrique, la distance a une partie compacte non vide est atteinte.
Dans un espace métrique, une partie compacte non vide a son diamètre atteint en au moins un couple de ses points.

VII.3. Continuité et espace métriques compacts

Heine. Une application continue d'un métrique compact vers un métrique est uniformément continue.
Une application continue d'un espace topologique compact vers un métrique est bornée d'image un compact puisque un métrique est séparé.
Une application continue d'un espace topologique compact vers R est bornée et atteint ses bornes.
L'ensemble des fonctions continues d'un espace topologique compact vers un métrique $C^0(E,F)$ est une partie fermée de l'espace métrique des fonctions bornées muni de la distance uniforme $(B(E,F), d_u)$

Chapitre 6.

I. Espaces métriques complets

I.1. Oscillation d'une fonction

Soit une fonction d'une partie d'un espace topologique a valeurs dans un espace métrique. Soit un point adhérent à la partie. **L'oscillation de la fonction au point** fixé est l'infimum des diamètres des images de tout voisinage du point induit (intersecté) sur la partie. $osc_a(f) = \inf_{V \in V_a} f(A \cap V)$
On dit que la fonction vérifie **le critère de Cauchy** au point fixé si son oscillation est nulle, ssi $\forall \varepsilon > 0\ \exists V \in V_a\ \forall x, y \in V \cap A\ \ d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$
Si la fonction admet une limite (finie) en ce point alors l'oscillation est nulle. (réciproque fausse en général)
L'oscillation de $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0 pour la partie R_+^* est 2.

I.2. Suites de Cauchy

Une suite d'un espace métrique est une **suite de Cauchy**
ssi $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in N\ \forall n \geq m \geq N\ d(x_n, x_m) < \varepsilon$
ssi $(diam\{x_k : k \geq n\})_{n \in N}$ est une suite convergente vers 0 dans R
ssi l'oscillation de $n \mapsto x_n$ est nulle en $+\infty$
La suite $(n)_{n \in N}$ est de Cauchy sur la droite achevee muni d'une distance sigmoïdale (Arctan/x/(1+|x|)) mais évidemment pas sur R muni de la topologie usuelle.
Toute suite de Cauchy d'un espace métrique est bornée.
Toute suite convergente d'un espace métrique est de Cauchy
Une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence converge vers cette valeur qui est alors unique.

I.3. Espaces complets

Un espace métrique est un **espace complet** ssi toute ses suites de Cauchy convergent.
Tout espace métrique discret est complet car toute suite de Cauchy y est stationnaire.
Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé complet.
Un espace métrique est complet ssi toute suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0 a pour intersection un singleton.
Soit une fonction d'une partie d'un espace métrique a valeur dans un espace métrique d'arrivée complet. Soit un point adhérent à la partie. La fonction admet une limite finie au point ssi elle vérifie le

critère de Cauchy au point (ssi son oscillation=0).

I.4. Premières propriétés des espaces complets

Une partie complète est fermée. Toute partie fermée d'un espace complet est complète.

Donc dans un complet, être complet c'est être fermé.

Le caractère complet est conservé par distances équivalentes, et isométrie.

Le produit fini d'espaces métriques complets est complet pour la distance produit.

Le produit dénombrable d'espaces métriques complets dont le diamètre tend vers 0 est complet pour la distance produit.

I.5. Exemples

L'espace R muni de la distance associe à la valeur absolue est complet.

R^n muni de la distance associée à la norme infinie d_∞ est complet.

La droite réelle achevée muni d'une distance sigmoïdale est complet.

I.6. Espaces semi-métriques complets

On peut définir **suite de Cauchy d'un espace semi-métrique** de façon analogue au cas métrique.

Un espace semi métrique est **semi-complet** si toute suite de Cauchy converge.

L'espace métrique quotient associé à un espace semi métrique est complet si l'espace semi métrique est semi complet. Donc on peut toujours ramener l'étude au cas métrique.

II. Précompacte, complétude et compacité

Un espace métrique compact est complet.

Dans un complet, être complet c'est être fermé. Dans un compact, être compact c'est être fermé.

Donc dans un compact, partie compacte = fermé = complet.

Un espace métrique est compact ssi il est précompact et complet.

Le produit dénombrable de métrisables compacts muni de la topo produit est un métrisable compact.

III. Applications aux problèmes de convergence

III.1. Interversion de limites

Soit une fonction a deux variables dans 2 espace métriques X,Y et a valeurs dans un espace métrique F.
On suppose que la fonction n'est définie que sur une partie AxB du produit des deux espaces de départ.
On considère un point fixé $\left(a \in \overline{A}, b \in \overline{B}\right)$. Si

1. L'espace d'arrivée est complet
2. Quand on fait tendre une variable vers son point, et on fixe l'autre, la fonction converge.
3. Quand on fait tendre l'autre variable, il y a convergence uniforme de la fonction selon l'une.

Alors, on peut faire tendre une variable puis l'autre ou l'inverse indistinctement, toutes les limites existent et on peut intervertir.

Valable pour les suites de fonctions lorsque l'autre variable est un indice n qui tend vers l'infini.

III.2. Applications uniformément continues

Théorème d'existence fondamental en analyse/intégration. Une application <u>uniformément continue</u> d'une partie <u>dense</u> d'un espace métrique/ou semi-métrique, à valeurs dans un espace métrique <u>complet</u> peut être prolongée sur tout l'espace de départ en une application continue de façon unique. De plus ce prolongement est encore uniformément continu. Il est défini en tout point de l'espace donc adhérent à la partie dense, comme la limite de la fonction initiale en ce point dont l'existence découle du théorème.

IV. Approximations successives et point fixe

IV.1. Dynamique liée à une application

On appelle **orbite d'un point d'un ensemble suivant une fonction de l'ensemble dans lui-même,** l'ensemble des points obtenus en appliquant la fonction a elle-même itérativement un nombre quelconque de fois. Un **point fixe d'une fonction d'un ensemble dans lui-même** est un point dont l'image par la fonction est lui-même, càd un point dont l'orbite est le singleton le contenant.

Dans un espace topologique <u>séparé</u>, si la suite définie par une orbite d'une fonction <u>continue</u> converge alors la limite est un point fixe de cette fonction.

IV.2. Le théorème du point fixe

Une application d'un espace métrique dans un autre est **$\boldsymbol{\alpha}$-contractante** si elle est α-lipschitzienne avec $0 \leq \alpha < 1$, cad $\forall x, y \in E \;\; d_F\big(f(x), f(y)\big) \leq \alpha d_E(x, y)$. Une telle fonction est en particulier continue.

Le théorème des accroissements finis (TAF) est souvent utile pour montrer éventuellement cette prop.

Théorème du point fixe. Une fonction f <u>contractante</u> d'un espace métrique <u>complet</u> dans lui-même admet un unique point fixe. De plus les orbites suivant la fonction convergent toutes vers cet unique point fixe. Attention la condition $d_F\big(f(x), f(y)\big) < d_E(x, y)$ n'est generalement pas suffisante pour le theoreme ($\sqrt{1+x^2}$) cependant elle suffit si l'espace est compact.

On obtient la même conclusion sur f, si f n'est contractante qu'après l'avoir composé par elle-même un nombre suffisant (quelconque) de fois (si on remplace par f^p dans l'hypothèse).

Exemple surjectivité des perturbations de l'identité.

V. La propriété de Baire

V.1. Définition et premières propriétés

Un **espace de Baire** est un espace topologique dans lequel toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide / toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

La propriété de Baire est topologique (se conserve par homéomorphisme entre espaces topologiques)

Tout ouvert d'un espace de Baire, est de Baire pour la topologie induite.

Une condition suffisante pour qu'un espace topologique soit de Baire, est que tout point de l'espace admette un voisinage ayant la propriété de Baire.

Dans un espace de Baire couvert par une suite de fermés, la réunion des intérieurs de ces fermés est dense dans l'espace. $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_i \Rightarrow \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Int(F_i)} = E$

V.2. Théorème de Baire

Tout espace métrique complet est un espace de Baire.

Si tout point d'un espace topologique est homéomorphe à un espace complet, alors l'espace topologique est de Baire

V.3. Espace maigre, espace résiduel, exemples

Un $\boldsymbol{G_\delta}$ est une intersection dénombrable d'ouverts d'un espace topologique

Un $\boldsymbol{F_\sigma}$ est une réunion dénombrable de fermes d'un espace topologique.

Une partie <u>d'un espace de Baire</u> est **maigre** ssi elle est contenue dans une union dénombrable de fermés tous d'intérieurs vides ssi elle est contenue dans un F_σ d'intérieur vide. (sans l'hypothèse le ssi est faux)

Une partie <u>d'un espace de Baire</u> est **résiduelle** ssi elle est contient une intersection dénombrable d'ouverts tous denses ssi elle contient un G_δ dense.

Une propriété $P(x \in E)$ definie sur un espace de Baire est dite **générique** si elle est vérifiée sur une partie résiduelle (intersection dénombrable d'ouvert denses ou mieux). Elle est dite **significative** si elle

est vérifiée sur un ouvert dense (ou intersection finie d'ouvert denses).
$x \in R$ est **diophantien d'exposant $\boldsymbol{\tau > 0}$** si $\exists c > 0\ \forall p \in Z\ \forall q \in N^*\ \left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^\tau}$
Les diophantiens sont des irrationnels « mal approchés par les rationnels ». Un réel diophantien pour un certain exposant, l'est aussi pour tout exposant supérieur. Il n'y a pas de diophantiens d'exposant < 2 ?
Un réel est un **nombre liouvillien** s'il est irrationnel non diophantien. Un irrationnel est donc soit diophantien, soit liouvillien.
L'ensemble des nombres diophantiens est maigre.
L'ensemble des nombres liouvillien est résiduel.
L'ensemble des points de continuité d'une fonction limite simple d'une suite de fonctions d'un espace de Baire vers R, est une partie résiduelle de l'espace.

VI. Le complété d'un espace métrique

Un complété d'un espace métrique, est un autre espace métrique complet, tel qu'il existe une isométrie de domaine, le premier espace, et d'image une partie dense de l'espace complet. En pratique on identifie souvent le premier espace à son image dense dans l'espace complet, en considérant sa métrique comme induite, car une isométrie est injective.
Soit donc un espace métrique, un complété de cet espace, et l'isométrie i sur la partie dense.
Pour toute application f uniformément continue, définie sur le premier espace métrique dans un nouvel espace complet, il existe une unique application g uniformément continue, définie sur le complété, vers le nouvel espace complet telle que $f = g \circ i$
Pour un espace métrique, et deux complétés de cet espace d'isométries i, j, on peut construire une isométrie ϕ bijective entre les complétés telle que $j = \phi \circ i$, donc on considère qu'il y a unicité du complété à isomorphisme métrique près.
Un espace métrique admet toujours un complété. (ex : construction de R via les suites de Cauchy de Q).

Chapitre 7.

I. Espaces vectoriels normés

I.1. Rappels et définitions

Soit $K = R$ ou C.
Deux normes sur un Kev sont équivalentes ssi $\exists \lambda, \mu \in R_+^*\ \forall x \in E\ \lambda\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \mu\|x\|_1$
Cela définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.
pour montrer que 2 normes ne sont pas équivalentes il suffit que $\exists (x_n)_{n\in N} \in E^N\ \frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_2}$ non borné.
Deux normes sont équivalentes ssi elles définissent la même topologie. Donc il n'y a pas besoin d'avoir deux concepts distincts comme pour les distances.
Deux normes sur un Kev sont équivalentes ssi une suite converge vers 0 pour l'une ssi elle converge vers 0 pour l'autre.
Un Kevn est connexe/arcs et même localement connexe.
Une partie convexe d'un Kevn est connexe/arcs. Une boule est convexe et donc connexe/arcs.
Un **espace de Banach** est un Kevn complet pour la distance associée à la norme.

I.2. Exemples

$\forall p \in [1, \infty]$, l'application $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur K^n

Toutes les normes sur un Kevn de dimension finie, sont équivalentes et définissent la même topologie.
Pour un ensemble E et un Kevn F, l'ensemble des fonctions bornées $(\boldsymbol{B(E,F)}, \boldsymbol{N_u})$ est aussi un Kevn, qui est complet si F est complet.
Pour un ensemble E et un Kevn F, l'ensemble des fonctions continues bornées $(\boldsymbol{C_b(E,F)}, \boldsymbol{N_u})$ est aussi un Kevn comme sous Kev de $B(E,F)$, qui est complet si F est complet.
Pour $a, b \in R, a < b$ l'ensemble des fonctions continues de $[a,b]$ dans K, $C^0([a,b],K)$ est aussi un Kevn admettant pour normes par ex : $\| \quad \|_p$ $\forall p > 0$, et $\| \quad \|_u$.
Les normes $\| \quad \|_u, \| \quad \|_1, \| \quad \|_2$ ne sont pas 2 à 2 équivalentes sur $C^0([a,b],K)$. En revanche $\forall f, \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2, \|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_u, \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_u$ donc $T_1 \subset T_2 \subset T_u$.
Pour tout $p \in [1, \infty]$ l'espace $\boldsymbol{l^p(K)}$ des suites sur K de norme p finie, est un Kevn pour la norme p.
L'espace des suites sur K de limite nulle $\boldsymbol{C_0(K)}$ est un Kevn pour la norme uniforme.
L'espace des suites sur K nulles à partir d'un certain rang $\boldsymbol{C_{00}(K)}$ est un Kevn pour la norme uniforme.
On a les inclusions strictes $C_{00}(K) \subset l^1(K) \subset l^2(K) \subset C_0(K) \subset l^\infty(K)$

I.3. Sous-espaces produits et quotients

Soit un produit fini ou dénombrable de Kevns $(E_i, \| \quad \|_i)$
Dans le cas fini, la **norme produit** est $\boldsymbol{N_u(x)} = \max_{1\leq i\leq n}\|x_i\|_i$.
Dans le cas infini dénombrable, la **norme produit** est $\boldsymbol{N_u(x)} = max_{n\in N}\|x_n\|_n$
La norme uniforme définit la topologie produit usuelle.
L'application somme sur un Kevn est 2-lipschitzienne, donc UC et continue.
L'application produit par un scalaire sur un Kevn est continue.
Dans un Kevn, l'adhérence d'un sev est un sev.
Tout sev strict d'un Kevn de dimension finie, est d'intérieur vide.
Le complété d'un Kevn est canoniquement muni d'une structure d'espace de Banach.
Le **noyau d'une semi-norme** est le Ksev des vecteurs de semi-norme nul.
On peut transformer un Kev semi-normé en un Kevn en le quotientant par le noyau de la semi-norme.

I.4. Parties denses et parties totales

Une **partie totale d'un Kevn** est une partie dont le sev engendré est dense dans le Kevn. $\overline{Vect(A)} = E$
Caractérisation séparabilité. Un Kevn est séparable ssi il a une partie totale au plus dénombrable.

II. Applications linéaires continues

II.1. Espaces d'applications linéaires continues

Entre deux Kevns E, F on note $\boldsymbol{L(E,F)}$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F
Entre deux Kevns E, F on note $\boldsymbol{L_c(E,F)}$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F
$L_c(E,F)$ est un Ksev de $L(E,F)$
Une application linéaire f d'un Kevn E vers un Kevn F vérifie les équivalences :
f continue ssi f continue en 0 ssi f bornée sur $B_f(0,1)$ ssi f bornée sur $S(0,1)$ ssi $\exists M \in R_+ \ \forall x \in E \ \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$ ssi f lipschitzienne ssi f uniformément continue.
Pour montrer qu'une application linéaire n'est pas continue il suffit de montrer $\exists (x_n)_{n\in N} \in E^N$ telle que $\frac{\|f(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E}$ non bornée.
$Id_{u1}: (C^0([a,b],R), \| \quad \|_u) \to (C^0([a,b],R), \| \quad \|_1)$ est linéaire continue.
$Id_{1u}: (C^0([a,b],R), \| \quad \|_1) \to (C^0([a,b],R), \| \quad \|_u)$ est linéaire mais pas continue.
La norme d'opérateur /subordonnée/triple à $\boldsymbol{f \in L_c(E,F)}$ est $\|f\|_{L_c(E,F)} = \sup_{\|x\|_E\leq 1}\|f(x)\|_F =$

$\sup_{\|x\|_E=1}\|f(x)\|_F = \sup_{x\neq 0}\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$
Caracterisation norme triple : $\|f\|_{L_c(E,F)} = \inf\{M \in R_+ \mid \forall x \in E\ \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E\}$
$\left(L_c(E,F), \|\quad\|_{L_c(E,F)}\right)$ est un Kevn complet si $(F, \|\quad\|_F)$ l'est.
$\|Id_{u1}\|_{L_c\left((C^0([a,b],R),\|\quad\|_u),(C^0([a,b],R),\|\quad\|_1)\right)} = b - a$
Pour $a \in l^\infty(R), u_a: l^1(R) \to R: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ est linéaire continue de norme triple $\|a\|_u$
Pour $a \in l^2(R), u_a: l^2(R) \to R: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ est linéaire continue de norme triple $\|a\|_2$
Pour 3 Kevn $E, F, G,\ \forall f \in L_c(E,F)\ \forall g \in L_c(F,G)$ alors $g \circ f \in L_c(E,G)$ et $\|g \circ f\| \leq \|g\|\|f\|$
Une application linéaire n'est jamais bornée au sens premier.
$\forall u \in GL_c(E)\ \|u^{-1}\| \geq \|u\|^{-1}$
Pour A une K algèbre de Banach, $\forall x \in A\ \ \|x\| < 1 \Rightarrow 1_A - x$ inversible et $(1_A - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$
Pour A une K algèbre de Banach, le groupe des inversibles G_A est un ouvert de A.
Pour A une K algèbre de Banach, $G_A \to G_A: x \mapsto x^{-1}$ est un homéomorphisme.
Théorème de l'isomorphisme de Banach. Si $f \in L_c(E,F)$ et bijective alors $f^{-1} \in L_c(F,E)$.

II.2. Formes linéaires continues et dual topologique

Rappel : La codimension d'un sev d'un Kev est la dimension d'un sev supplémentaire quelconque.
Un hyperplan d'un Kev est un sev de codimension 1.
Pour un Kev E, on note $\boldsymbol{E}^\star = L(E,R)$ **le dual algébrique de E.**
Pour un Kevn E, on note $\boldsymbol{E}' = L_c(E,R)$ **le dual topologique de E.**
Un sev d'un Kev E est un hyperplan ssi c'est le noyau d'un forme linéaire non nulle.
Une forme linéaire non nulle est complètement déterminée par la donnée de l'image d'un vecteur n'appartenant pas à son noyau.
Deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles ssi elles ont même noyau hyperplan.
Dans un Kevn, un hyperplan est fermé ssi une forme linéaire de noyau cet hyperplan est continue.
Dans ce cas si $K = R$, le complémentaire de l'hyperplan possède deux composantes connexes
$C_+ = \{x \in E \mid \phi(x) > 0\}$ et $C_- = \{x \in E \mid \phi(x) < 0\}$

III. Espaces d'applications multilinéaires continues

$\boldsymbol{L_n(E_1 \times \ldots \times E_n, F)}$ est l'ensemble des applications n-linéaires d'un produit de Kevns vers un Kevn.
$\boldsymbol{L_{c,n}(E_1 \times \ldots \times E_n, F)}$ est l'ensemble des applications n- linéaires continues d'un produit fini de Kevns vers un Kevn.
Une application linéaire f d'un produit de Kevn $E_1 \times \ldots \times E_n$ vers un Kevn F vérifie les équivalences :
f continue ssi f continue en 0 ssi f bornée sur $\prod_{i=1}^{n} B_{f_i}(0,1)$ ssi f bornée sur $\prod_{i=1}^{n} S_i(0,1)$ ssi
$\exists M \in R_+\ \forall x \in \prod_{i=1}^{n} E_i\ \ \|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leq M\|x_1\|_{E_1} \ldots \|x_n\|_{E_n}$
La norme d'opérateur/subordonnée/triple a $\boldsymbol{f \in L_{n,c}(\prod_{i=1}^{n} E_i\,, F)}$ est $\|f\|_{L_{n,c}} = \sup_{\|x\|_u \leq 1}\|f(x)\|_F$
Caractérisation. $\|f\|_{L_{n,c}} = \inf\left\{M \in R_+ \mid \forall x \in E\ \|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leq M\|x_1\|_{E_1} \ldots \|x_n\|_{E_n}\right\}$
Exemple : $b: (C^0([a,b],R)^2, \|\quad\|_u) \to R: (f,g) \mapsto \int_a^b fg$ est bilinéaire continue.
Si F est un Kevn complet alors $\left(L_{n,c}(\prod_{i=1}^{n} E_i\,, F), \|\quad\|_u\right)$ est complet

IV. Espaces normés de dimension finie

IV.1. Propriétés générales

Sur un Kev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
Toute application linéaire d'un Kevn de dimension finie vers un Kevn quelconque est continue.

Toute application n-linéaire d'un produit fini de Kevn <u>de dimensions finies</u> vers un Kevn <u>quelconque</u> est continue.
Dans un Kevn, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est complet et donc fermé.
Un Kevn complet de dimension infinie ne possède pas de base algébrique <u>dénombrable</u>.

IV.2. Le théorème de Riesz

Un Kevn est de dimension finie ssi il est localement compact.
Un Kevn est de dimension finie ssi la boule unité fermée est compacte.
Les parties compactes d'un Kevn de dimension finie sont exactement les fermés bornés.

Chapitre 8. Exemples d'espaces topologiques

I.1. Fonctions polynômes

Une **fonction polynôme** est une fonction $f: K^n \to K$ de la forme $f(x) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in I} a_{k_1,\dots,k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ avec $I \subseteq N^n$, I finie, $a_{k_1,\dots,k_n} \in K^I$. Si $n = 1$, $f(x) = \sum_{k\in I} a_k x^k$
Une fonction polynôme est continue.
Soit fonction polynôme non constante sur K^n. $\{x \in K^n | f(x) = \alpha\}$ est fermé, d'intérieur vide.
Un hyperplan de K^n est un fermé d'intérieur vide puisque noyau d'une forme linéaire $\neq 0$
Une fonction **polynôme trigonométrique** est une fonction $f: K^n \to C$ de la forme
$f(x) = \sum_{(k_1,\dots,k_n)\in I} a_{k_1,\dots,k_n} e^{ik'x}$ avec $I \subseteq N^n$, I finie, $a_{k_1,\dots,k_n} \in K^I$. Si $n = 1$, $f(x) = \sum_{k\in I} a_k e^{ikx}$

I.2. Polynômes et matrices

$det: M_n(K) \to K$ est une fonction polynôme donc continue.
$M \to M^T$ continue car linéaire et $(M,N) \to MN$ continue car composantes polynômiales.

II. Propriétés topologiques des groupes classiques

$GL_n(R)$ ouvert dense de $M_n(R)$ non fermé donc non compact, non complet, mais localement compact.
$GL_n(C)$ ouvert dense de $M_n(C)$ non fermé donc non compact, non complet, mais localement compact.
$O_n(R)$ compact de $M_n(R)$, $SO_n(R)$ compact de $M_n(R)$
$U_n(C)$ compact d'intérieur vide de $M_n(C)$, $SU_n(C)$ compact de $M_n(C)$

III. Groupes topologiques

III.1. Défs

$(\boldsymbol{G},\cdot,\boldsymbol{T})$ **groupe topologique** si $(G,\cdot)$ groupe, (G,T) espace topologique, et de plus la fonction produit est continue, et la fonction inverse est continue.
$(K^n,+), (C^*,\times), (U,\times), GL_n(R), GL_n(C), O_n(R), SO_n(R), U_n(C), SU_n(C)$ groupes topologiques.
Dans un groupe topologique, la fonction inverse, les translations à gauche/droites, et les automorphismes intérieurs sont des homéomorphismes de G dans G.
Si le neutre admet un voisinage, alors il en admet un égal à son inverse.
Si le neutre admet un voisinage U alors il en admet un V tel que $V \cdot V^{-1} \subseteq U$
Un groupe topologique est séparé ssi le singleton neutre est fermé
Un morphisme entre groupes topologiques est continu ssi il l'est au neutre.

III.2. Sous-groupes d'un groupe topologique

Tout sous-groupe d'intérieur vide est ouvert et fermé.
Un groupe topologique est séparé ssi tout sous-groupe discret est fermé ssi singleton neutre fermé.

IV. Groupes opérant sur des espaces topologiques

IV.I. Définitions et premières propriétés.

Un groupe G opère sur un ensemble E s'il y a une opération $\cdot: G \times E \to E$ tel que $1 \cdot x = x$ et telle que $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x$

Soit $x \in E$, l'**orbite de x** est $O_x = \{g \cdot x : g \in G\} \subseteq E$.

Le **stabilisateur** de x est $S_x = \{g \in G | g \cdot x = x\} \subseteq G$. C'est un sous-groupe de G

Un groupe G **opère transitivement** sur E si G opère sur E et l'orbite de tt point est E (une seule orbite).

Un groupe topologique G **opère continument** sur un espace topologique E s'il opère sur E et l'opération est continue sur $G \times E$.

Contexte : On suppose G opère continument sur un espace topologique E.

Si E est séparé, le stabilisateur d'un élément est un fermé de G.

L'ensemble des orbites est une partition de l'espace quotient E/G par la relation être sur la même orbite. La projection canonique est continue et ouverte. Tout application de E, à valeur dans un autre espace topologique est continue ssi son application factorisée sur le quotient E/G est continue.

L'espace quotient E/G est séparé ssi $\{(x,y) \in E \times E | \overline{x} = \overline{y}\} =$ ensemble des couples sur même orbite est un fermé de $E \times E$.

Le quotient d'un groupe avec un sous-groupe pour la relation usuelle est séparé ssi le sous-groupe est fermé.

Si G opère transitivement sur E, alors l'opération à x fixé, factorisée donne une bijection continue de G/S_x sur E qui de plus est un homéomorphisme sous les conditions : E espace de Baire, G est localement compact et réunion dénombrable de compacts.

IV.2. Connexité et groupes classiques

Si G groupe admet un sous-groupe H tel que H est connexe et G/H est connexe alors G est connexe.

$GL_n(R)$ a deux composantes connexes homéomorphes : Les matrices de dét strict positif/négatif.

$O_n(R)$ a deux composantes connexes homéomorphes : $SO_n(R)$ et l'ensemble des isométries indirectes.

$SO_n(R)$ est connexe.

$GL_n(C), U_n(C), SU_n(C)$ dont connexes.

V. Les tores

Soit $f: R^n \to R$, $P = \{T \in R^n | f(x+T) = f(x)\ \forall x \in R^n\}$ l'ensemble de périodes de f est un sous-groupe de $(R^n, +)$. Soit $\overline{f}: \frac{R^n}{P} \to R$ la fonction factorisée dans l'espace quotient.

Le **tore** de dimension n est $T^{(n)} = R^n/Z^n$. C'est le domaine d'une fonction factorisée de périodes Z^n.

Le tore est muni de la topologie quotient.

Le tore $T^{(n)}$ est séparé, connexe et compact.

Le tore de dimension n est homéomorphe à l'espace produit U^n.

VI. L'espace projectif réel

$(R^*, \cdot)$ opère continument sur $(R^{n+1})^*$ d'opération λx. On note $P^n(R) = (R^{n+1})^*/R^*$ l'**espace projectif** de dimension n.

$P^n(R)$ ensemble quotient topologique est l'ensemble des droites vectorielles de R^{n+1}.

L'espace projectif $P^n(R)$ est aussi l'image de la projection canonique de la sphère S^n de R^{n+1}

L'espace projectif est connexe par arc, et compact car la sphère l'est.

L'espace projectif est séparé et métrisable.

L'espace projectif de dimension 1 $P^1(R)$ est homéomorphe au cercle S^1 de R^2

L'espace projectif de dimension n est homéomorphe à S^n/G où $G = \{id: S^n \to S^n, -id\}$ est le groupe opérant continument par application $(f, x) \mapsto f(x)$

VII. La structure des ouverts de $\boldsymbol{R^n}$

Un ouvert de R est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints définis de manière unique en tant que composantes connexes.

Tout ouvert de R^n est réunion d'une famille dénombrable de cellules disjointes de sommets dans $\bigcup_{k\in Z} \frac{1}{2^k} Z^n$ et de côté de longueur dans l'ensemble $\{\frac{1}{2^k} : k \in Z\}$

Chapitre 9 Espaces de fonctions continues

I. Espaces de fonctions continues

I.1. Espaces de fonctions continues

On note $C(E,F)$ les fonctions continues, $B(E,F)$ les fonctions bornées, $C_b(E,F) = C(E,F) \cap B(E,F)$

Si l'espace d'arrivée est métrique on peut munir les fonctions bornées dans cet espace d'une distance.

La **distance uniforme entre deux fonctions bornées** étant $\boldsymbol{\delta_\infty(f,g)} = \sup_{x\in E} d_F\big(f(x), g(x)\big)$

Si l'espace d'arrivée est complet, l'espace des fonctions bornées (muni de la distance uniforme induite) dans cet espace est complet.

L'espace des fonctions continues bornées d'un espace topologique vers un espace métrique est un fermé de l'espace des fonctions bornées muni de la distance uniforme. $C_b(E,F)$ fermé de $B(E,F)$

1^er^ théorème de Dini. D'un espace métrique compact vers R, toute suite croissante (ou décroissante) de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction continue, est uniformément convergente.

2^e^ théorème de Dini. D'un segment de R vers R, toute suite de fonctions croissantes (pas forcement continues) qui converge simplement vers une fonction continue, est uniformément convergente.

I.2. Théorème de prolongement de Tietze-Urysohn.

Soit une fonction f réelle continue bornée, de domaine un fermé non vide d'un espace métrique. Alors on peut prolonger continument f à tout l'espace métrique en conservant l'inf et le sup. Autrement dit le prolongement g est continu, $g_{|F} = f$, $\inf_{x\in E} g(x) = \inf_{x\in F} f(x)$, $\sup_{x\in E} g(x) = \sup_{x\in F} f(x)$

II. Théorème de Stone-Weierstrass

Théorème de Stone-Weierstrass forme réelle

On cherche une condition suffisante pour qu'un partie $A \subseteq C(E,R)$ des fonctions continues d'un espace topologique compact vers R) y soit dense $\overline{A} = C(E,R)$ pour la norme uniforme. Il suffit :

1. La partie A est une sous-algèbre de $(C(E,R), +, \cdot, \times)$
2. Tout couple de point distincts de E peut être séparé par une certaine fonction de A.
3. La partie A contient les fonctions constantes.

Théorème de Stone-Weierstrass forme complexe

On cherche une condition suffisante pour qu'un partie $A \subseteq C(E,C)$ des fonctions continues d'un espace topologique compact vers R y soit dense $\overline{A} = C(E,C)$ pour la norme uniforme. Il suffit de :

1. La partie A est une sous-algèbre de $(C(E,C), +, \cdot, \times)$
2. Tout couple de point distincts de E peut être séparé par une certaine fonction de A.
3. La partie A contient les fonctions constantes.
4. La partie A est stable par conjugaison de fonctions. (Seule condition à rajouter par rapport à forme R).

Théorème de Stone-Weierstrass polynôme

L'ensemble des polynômes est dense dans l'espace des fonctions continues d'un compact de R^n vers R pour la norme uniforme.

L'ensemble des polynômes trigonométriques complexes unidimensionnels de variable réelle $T(R, C)$ est dense dans l'espace des fonctions continues 2pi périodiques à variable réelles et à valeurs complexes pour la norme uniforme.

III. Théorème d'Ascoli*

III.1. La notion d'équicontinuité

Une partie A de l'espace des fonctions continues entre deux espaces métriques $C(E, F)$ est **équicontinue en un point** $x \in E$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in B(x, \delta)\ \forall f \in A\ f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ ou encore $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall f \in A\ f\big(B(x, \delta)\big) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$. Le delta ne dépend pas de f.

Une partie est **équicontinue** sur E si elle l'est en tout point de E. Toute partie finie, est équicontinue sur E. Toute union finie de parties équicontinues en un point l'est aussi au même point.

Dans l'espace des fonctions continues bornées muni de la distance uniforme, toute partie équicontinue en un point à son adhérence équicontinue au même point, de plus toute partie précompacte est équicontinue.

Dans l'espace des fonctions continues d'un compact vers un métrique, soit une partie équicontinue de cet espace, de plus soit une fonction quelconque du compact vers le métrique. La fonction est limite uniforme d'une suite de fonctions de la partie équicontinue ssi elle est limite simple de cette même suite. Dans ce cas il y a évidemment continuité de la fonction.

III.2. Le théorème d'Ascoli.*

Lemme. Soit une partie F d'un espace d'applications d'un ensemble X vers un autre Y. On veut un moyen de construire un recouvrement fini de F à partir d'un recouvrement fini de X et un de Y. Il suffit d'avoir que par toute fonction de la partie, l'image de tout recouvrant de X soit incluse dans un recouvrant de Y. $(\{f \in F | \forall C \text{ recouvrant de X},\ f(C) \subseteq \phi(C)\})_{\phi \in F}$ recouvrement fini de F.

Théorème d'Ascoli.

Dans l'espace des fonctions continues d'un compact vers un métrique complet, une partie de cet espace est relativement compacte ssi elle est équicontinue et $\forall x \in E\ A_x = \big\{f(x) : f \in A\big\}$ relativement compact.