1. Equation différentielles ordinaires.

Une équation différentielle ordinaire (EDO) d'ordre $\boldsymbol{n} \in N^*$ sur un $\mathbb{K}$evn $\boldsymbol{E}$, correspond à la donnée d'une fonction f d'un ouvert $U = I_0 \times V \subseteq \mathbb{R} \times E^{n+1}$ vers E. V ouvert de E^{n+1}, I_0 intervalle.
On l'écrit $f\left(t, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$
Une **solution d'une EDO $\boldsymbol{f\left(t, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0}$** correspond à un couple (I, y) ou I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et $y : I \to E$ est une fonction n-fois dérivable sur I telle que $\forall x \in I \ \left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)\right) \in U$ et $f\left(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)\right) = 0$
Une **EDO est sous forme résolue** quand on peut exprimer la dérivée la plus forte en fonction de t et des dérivées précédentes $y^{(n)} = g\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ c'est-à-dire $\exists g \ \forall (t, y_0, \dots, y_n) \in U \ f(t, y_0, \dots, y_n) = g(t, y_0, \dots, y_{n-1}) - y_n$
On note généralement $\boldsymbol{S = S_f} = \{(I, y)\}$ l'ensemble des solutions d'une EDO
On note $\boldsymbol{S(I, E)}$ l'ensemble des solutions d'une EDO à intervalle I fixé.
L'orbite = courbe trajectoire d'une solution $\boldsymbol{(I, y)}$d'une EDO est l'ensemble $\boldsymbol{\tilde{y}} = y(I) \subseteq E$
Le graphe d'une solution $\boldsymbol{(I, y)}$ d'une EDO est l'ensemble $\boldsymbol{G(y)} = \left\{\left(t, y(t)\right) : t \in I\right\} \subseteq R \times E$

2. Equation différentielles linéaires.

Une équation différentielle linéaire vectorielle (EDL) d'ordre $\boldsymbol{n} \in N^*$ d'un intervalle fixé $\boldsymbol{I} \subseteq \mathbb{R}$, vers un $\mathbb{K}$evn $\boldsymbol{E}$ de dimension finie $\boldsymbol{N}$, s'écrit symboliquement $a_n(t) \cdot y^{(n)} + a_{n-1}(t) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1(t) \cdot y' + a_0(t) \cdot y = b(t)$ et correspond à la donnée de $n + 1$ fonctions $a_0, \dots, a_n : I \to L(E)$ continues et d'une fonction $b : I \to E$ continue.
Une EDL est donc une EDO de fonction $f(t, y_0, \dots, y_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) \cdot y_k - b(t)$, et a I fixé.
Une **solution d'une EDL** correspond à une fonction $y : I \to E$ n-fois dérivable sur I vérifiant l'équation sur I.
Une **EDL d'ordre 1** s'écrit donc $a_1(t) \cdot y' + a_0(t) \cdot y = b(t)$
Une **EDLR d'ordre $\boldsymbol{n}$** s'écrit $y^{(n)} = a_{n-1}(t) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_0(t) \cdot y + b(t)$
Une **EDLR d'ordre 1** s'écrit $y' = a(t) \cdot y + b(t)$.
Une **EDL est à coefficients constants (EDLC)** ssi les a_i sont des constantes (mais b peut varier).
Une **EDLCR d'ordre $\boldsymbol{n}$** s'écrit $y^{(n)} = a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_0 \cdot y + b(t)$
Une **EDLCR d'ordre 1** s'écrit $y' = a \cdot y + b(t)$
Une **EDL est scalaire (EDLS)** ssi $E = \mathbb{K}$.
Une **EDLCSR d'ordre $\boldsymbol{n}$** s'écrit $y^{(n)} = a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y + b(t)$
Une **EDLCSR d'ordre 1** s'écrit $y' = ay + b(t)$

Equations homogènes.

Une **EDL est homogène (EDLH) ssi $\boldsymbol{b = 0}$**
L'EDLH associée à une EDL, est l'EDL dans laquelle on remplace b par la fonction nulle.
Une **solution homogène d'une EDL**, est une solution de l'EDLH associée.
On note $\boldsymbol{S_H(I, E)}$ l'ensemble des solutions homogènes d'une EDL.
Pour une EDLH, on a donc $S_H(I, E) = S(I, E)$.

Etude des EDLR d'ordre 1.

Une EDLR d'ordre 1 s'écrit $y' = a(t) \cdot y + b(t)$ avec $a \in C\left(I, L(E)\right), b \in C(I, E)$
L'EDLRH associée est $y' = a(t) \cdot y$
Une solution d'une EDLR (de tout ordre) est de classe C^1. (car les fonctions paramètres sont C^0)
Une solution d'une EDLR dont les fonctions paramètres $a_0, \dots, a_{n-1}, b$ sont C^k, est de classe C^{k+1}.
Pour une EDLR d'ordre 1, $S_H(I, E)$ est $\mathbb{K}$ sev de $C^1(I, E)$ de dimension $N = \dim E$

Pour une EDLR d'ordre 1, $S(I,E)$ est $\mathbb{K}$ se affine de $C^1(I,E)$ de direction $S_H(I,E)$ de dimension N
Une **donnée de Cauchy d'une EDL d'ordre n** correspond à $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in I \times E^n$ représentant n conditions initiales $y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$ sur toutes les images des dérivées successives sauf sur la plus haute.
Pour une EDLR d'ordre 1 c'est un couple $(t_0, y_0) \in I \times E$ symbolisant la condition $y(t_0) = y_0$.
Un **problème de Cauchy d'une EDL d'ordre n** correspond à une EDL d'ordre n muni d'une donnée de Cauchy d'ordre n.
Un **problème de Cauchy d'une EDLR d'ordre 1** s'écrit $\begin{cases} y' = a(t) \cdot y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$
Une **solution d'un problème de Cauchy**, est une solution de l'ED satisfaisant la donnée de Cauchy.
Théorème de Cauchy. Un problème de Cauchy d'une EDLR d'ordre 1, admet une unique solution.
Autrement dit $\forall t_0 \in I\ \forall y_0 \in E\ \ \exists!\, y \in S(I,E)\ \ y(t_0) = y_0$
Equation intégrale. Une fonction $y: I \to E$ satisfait un problème de Cauchy d'une EDLR d'ordre 1
$\begin{cases} y' = a(t) \cdot y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} y \text{ continue sur } I \\ \forall t \in I\ \ y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} a(s) \cdot y(s) + b(s) ds \end{cases}$
Wronskien.
Soit une EDLR d'ordre 1 de I vers un $\mathbb{K}$evn E de dimension N,
Le wronskien d'une famille $y_1, \dots, y_N$ de $N = \dim E$ solutions homogènes, dans une base B de E, correspond à l'application $w_B: I \to \mathbb{K}: t \mapsto \det_B\big(y_1(t), \dots, y_N(t)\big)$
Une famille $y_1, \dots, y_N$ de N solutions homogènes est une base de $S_H(I,E)$ ssi son wronskien (dans une base fixée) ne s'annule jamais sur I ssi son wronskien ne s'annule pas en certain point de I.
Le wronskien en deux points de I est lié par la formule : $w_B(t) = w_B(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} tr\big(a(s)\big) ds\right)$
$\forall u \in L(E)\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n\ \sum_{k=1}^{n} \det_B(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n) = tr(u) \det_B(x_1, \dots, x_n)$
La dérivée du wronskien est $\forall t \in I\ \ w_B'(t) = tr\big(a(t)\big) \cdot w_B(t)$
Variation des constantes.
Soit $(y_1, \dots, y_N)$ une base de solutions homogènes de l'EDLR d'ordre 1.
Pour une fonction $y \in C^1(I,E)$, $\exists!\,(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in C^1(I,K)^N$ telles que $y = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k y_k$, autrement dit telles que $\forall t \in I\ \ [y(t)]^B = [y_1(t) \dots y_N(t)]^B \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_N(t) \end{bmatrix}$ dans une base B fixée de E.
On a alors $y \in S(I,E) \Leftrightarrow \forall t \in I\ \ [y_1(t) \dots y_N(t)]^B \begin{bmatrix} \lambda_1'(t) \\ \vdots \\ \lambda_N'(t) \end{bmatrix} = [b(t)]^B$
Pour résoudre un EDLR d'ordre 1, on cherche d'abord une base de solutions homogènes (le wronskien peut aider) puis on peut appliquer la variation des constantes.
Une autre méthode est de trouver une solution particulière $y \in S$, et une base $(y_1, \dots, y_N)$ de S_H ce qui permet d'écrire $S = y + Vect\,(y_1, \dots, y_N)$.
Méthodes pour trouver des solutions particulières : On cherche des solutions polynômes ou sommes de séries entières ou de séries trigonométriques, on cherche s'il existe un changement de variables ramenant l'équation homogène a une EDLC.
3. Etude des EDLSR d'ordre 1.
Une EDLSR d'ordre 1 s'écrit $y' = a(t) \cdot y + b(t)$ avec $a \in C(I, L(\mathbb{K}) \approx \mathbb{K}), b \in C(I,\mathbb{K})$
Une solution d'une EDLSR dont les fonctions paramètres $a_0, \dots, a_{n-1}, b$ sont C^k, est de classe C^{k+1}.
Pour une EDLSR d'ordre 1, $S_H(I,\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$ sev de $C^1(I,\mathbb{K})$ de dimension 1
Pour une EDLSR d'ordre 1, $S(I,\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$ se affine de $C^1(I,\mathbb{K})$ de direction $S_H(I,\mathbb{K})$ de dimension 1

Théorème de Cauchy. Un problème de Cauchy d'une EDLSR d'ordre 1, admet une unique solution. Autrement dit $\forall t_0 \in I\ \forall y_0 \in \mathbb{K}\ \exists!\, y \in S(I,\mathbb{K})\ \ y(t_0) = y_0$

Solution explicite. Un problème de Cauchy EDLSR d'ordre 1 $\begin{cases} y' = a(t)\cdot y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet comme unique solution $y: I \to \mathbb{K}: t \mapsto y(t) = e^{A(t)} \cdot y_0 + e^{A(t)} \cdot \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} \cdot b(s)ds$ avec $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$

Pour une EDLSR d'ordre 1, $t \mapsto y_1(t) = e^{A(t)} \cdot y_0$ avec $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$, est une base de $S_H(I,\mathbb{K})$

$S_H(I,\mathbb{K}) = \{\lambda y_1 : \lambda \in \mathbb{K}\}$

4. Etude des EDLCR d'ordre 1.

Une EDLCR d'ordre 1 s'écrit $y' = a \cdot y + b(t)$ avec $a \in L(E), b \in C(I,E)$

L'EDLCRH associée est $y' = a \cdot y$ avec $a \in L(E)$

Une solution d'une EDLCR dont b est C^k, est de classe C^{k+1}.

Pour une EDLCR d'ordre 1, $S_H(I,E)$ est $\mathbb{K}$ sev de $C^1(I,E)$ de dimension $N = \dim E$

Pour une EDLCR d'ordre 1, $S(I,E)$ est $\mathbb{K}$ se affine de $C^1(I,E)$ de direction $S_H(I,E)$ de dimension N

Théorème de Cauchy. Un problème de Cauchy d'une EDLCR d'ordre 1, admet une unique solution. Autrement dit $\forall t_0 \in I\ \forall y_0 \in E\ \ \exists!\, y \in S(I,E)\ \ y(t_0) = y_0$

Solution explicite. Un problème de Cauchy EDLCR d'ordre 1 $\begin{cases} y' = a \cdot y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet comme unique solution $y: I \to E: t \mapsto y(t) = e^{(t-t_0)a} \cdot y_0 + e^{ta} \cdot \int_{t_0}^{t} e^{-sa} \cdot b(s)ds$

Pour une EDLCR d'ordre 1, $t \mapsto y_1(t) = e^{(t-t_0)a} \cdot y_0$ solution homogène mais pas base de $S_H(I,E)$

$S_H(I,E) = \left\{t \mapsto e^{(t-t_0)a} \cdot y_0 : y_0 \in E\right\}$

Si le polynôme caractéristique de $a \in L(E)$ est scindé $P_a(X) = (-1)^r \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de a de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$, alors

toute solution homogène d'une EDLCR d'ordre 1, $y_H(t) = e^{(t-t_0)a} \cdot y_0$ avec $y_0 \in E$, peut se réécrire sous la forme $y_H(t) = \sum_{k=1}^{r} e^{\lambda_k t Id_{E_k}} \cdot P_k(t)$ avec pour tout k, $P_k \in E_k[X], \deg P_k < m_k, E_k = \ker(a - \lambda_k Id_E)^{m_k} = N_{\lambda_k}(a)$.

5. Etude des EDLCSR d'ordre n.

Une **EDLCSR d'ordre n** s'écrit $y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y + b(t),\ a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}, b \in C(I,\mathbb{K})$

Une solution d'une EDLCSR dont b est C^k, est de classe C^{k+1}.

Pour une EDLCSR d'ordre n, $S_H(I,\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$ sev de $C^1(I,\mathbb{K})$ de <u>dimension n</u> (l'ordre)

Pour une EDLCSR d'ordre n, $S(I,\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$ se affine de $C^1(I,\mathbb{K})$ de direction $S_H(I,\mathbb{K})$ de dimension n

$y: I \to K$ solution de (E) ssi $\begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$ solution de $Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$

Etudier une EDLCSR d'ordre n dans $\mathbb{K}$ se ramène donc à étudier une EDLCR d'ordre 1 dans $E = \mathbb{K}^n$

Théorème de Cauchy. Un problème de Cauchy d'une EDLCSR d'ordre n, admet une unique solution.

$\forall t_0 \in I\ \forall (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n\ \exists!\, y \in S(I,\mathbb{K})\ \ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$

Le wronskien d'une famille $y_1, \dots, y_n$ de n solutions homogènes d'une EDLCSR d'ordre n, est le wronskien dans la base canonique B_0 de $E = \mathbb{K}^n$ de la famille associée de l'EDLCR vectorielle d'ordre 1 associée, donc correspond à l'application $w: I \to \mathbb{K}: t \mapsto \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}(t)$

Une famille $y_1, \dots, y_N$ de N solutions homogènes est une base de $S_H(I, \mathbb{K})$ ssi son wronskien ne s'annule jamais sur I ssi son wronskien ne s'annule pas en certain point de I.
Le wronskien en deux points de I est lié par la formule : $w(t) = w(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(s)ds\right)$
La dérivée du wronskien est $\forall t \in I \;\; w'(t) = a_{n-1}(t)w(t)$
Si pour une EDLCSR d'ordre n le polynôme caractéristique est scindé $P_A(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1X - a_0 = (-1)^r \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_r$, alors toute solution homogène peut se réécrire sous la forme $y_H(t) = \sum_{k=1}^{r} e^{\lambda_k t} P_k(t)$ avec pour tout k, $P_k \in \mathbb{K}[X], \deg P_k < m_k$.

6. Etude des EDLCSR d'ordre 2.

Une **EDLCSR d'ordre 2** s'écrit $y'' = a_1y' + a_0y + b(t),\;\; a_0 \in \mathbb{K}, a_1 \in \mathbb{K}, b \in C(I, \mathbb{K})$
l'EDLCSRH associée s'écrit $y'' = a_1y' + a_0y$ ou encore $y'' - a_1y' - a_0y = 0$
Pour une EDLCSR d'ordre 2, $S_H(I, \mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$ sev de $C^1(I, \mathbb{K})$ de dimension 2
Pour une EDLCSR d'ordre 2, $S(I, \mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$ se affine de $C^1(I, \mathbb{K})$ de direction $S_H(I, \mathbb{K})$ de dimension 2
$y: I \to K$ solution de (E) ssi $\begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$ solution de $Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix} = AY + B$

Théorème de Cauchy. Un problème de Cauchy d'une EDLCSR d'ordre 2, admet une unique solution.
$\forall t_0 \in I\; \forall (y_0, y_1) \in E^2\; \exists!\, y \in S(I, E)\;\; y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1$
Le wronskien d'une famille homogène $(y_1, y_2) \in S_H$ est $w(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}(t)$.
Le polynôme caractéristique de l'ED $y'' - a_1y' - a_0y = 0$ est donc $P_A = X^2 - a_1X - a_0$
Soit λ_1, λ_2 les racines de P_A, et soit $\Delta = a_1^2 - 4a_0$ le discriminant.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\Delta \in \mathbb{C}$,
Si $\Delta = 0$: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ et $\left(t \mapsto e^{\lambda t}, t \mapsto te^{\lambda t}\right)$ est une base de $S_H(I, \mathbb{C})$
Si $\Delta \neq 0$: $\left(t \mapsto e^{\lambda_1 t}, t \mapsto e^{\lambda_2 t}\right)$ est une base de $S_H(I, \mathbb{C})$,
Dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $\Delta \in \mathbb{R}$ donc on discrimine suivant le signe de Δ.
Si $\Delta = 0$: $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on prend en général $\left(t \mapsto e^{\lambda t}, t \mapsto te^{\lambda t}\right)$ comme base de $S_H(I, \mathbb{R})$
Si $\Delta < 0$: alors on écrit $\lambda_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$,
puis on prend en général $(t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t), t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t))$ comme base de $S_H(I, \mathbb{R})$.
L'avantage de cette base est que α et β sont réels.
Si $\Delta > 0$: alors $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, on prend en général $\left(t \mapsto e^{\lambda_1 t}, t \mapsto e^{\lambda_2 t}\right)$ comme base de $S_H(I, \mathbb{R})$,
Pour résoudre l'ED non homogène, on cherche une solution particulière y de S, ce qui permet d'écrire $S = y + vect(y_1, y_2)$, ou alors on applique la variation des constantes.

7. Etude des EDLCSR d'ordre 1.

Une **EDLCSR d'ordre 1** s'écrit $y' = ay + b(t),\;\; a \in \mathbb{K}, b \in C(I, \mathbb{K})$
l'EDLCSRH associée s'écrit $y' = ay$ ou encore $y' - ay = 0$
Pour une EDLCSR d'ordre 1, $S_H(I, \mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$ sev de $C^1(I, \mathbb{K})$ de dimension 1
Pour une EDLCSR d'ordre 1, $S(I, \mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$ se affine de $C^1(I, \mathbb{K})$ de direction $S_H(I, \mathbb{K})$ de dimension 1
Théorème de Cauchy. Un problème de Cauchy d'une EDLCSR d'ordre 1, admet une unique solution.
Autrement dit $\forall t_0 \in I\; \forall y_0 \in E\;\; \exists!\, y \in S(I, \mathbb{K})\;\; y(t_0) = y_0$
Solution explicite. Un problème de Cauchy EDLCSR d'ordre 1 $\begin{cases} y' = ay + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ admet comme unique solution $y: I \to \mathbb{K}: t \mapsto e^{(t-t_0)a}y_0 + e^{ta}\int_{t_0}^{t} e^{-sa}b(s)ds$
Pour une EDLCSR d'ordre 1, $t \mapsto e^{at}$ est une base de $S_H(I, \mathbb{K})$