Introduction à la théorie des distributions.
Chapitre 3. Fonctions tests
3.1. Notations multi-indicielles

Un **multi-indice de taille d** est un d-uplet d'entiers $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in N^d$.
La **longueur/module d'un multi-indice** α est l'entier $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$
La **factorielle d'un multi-indice** α est l'entier $\boldsymbol{\alpha}\,! = \alpha_1\,! \dots \alpha_d\,!$
Pour $x \in R^d$, et α un multi-indice de taille d, on pose $\boldsymbol{x^\alpha} = x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_d}$
Pour deux multi-indices de même taille on définit $\boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{\beta}$ ssi $\forall i \in \{1, \dots, d\}$ $\alpha_i \le \beta_i$
Pour deux multi-indices de même taille on définit le coeff binomial : $\binom{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\alpha\,!}{\beta\,!(\alpha-\beta)\,!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}\dots\binom{\alpha_d}{\beta_d}$
Pour un multi-indice de module $|\alpha|$ on définit le coeff multinomial : $\binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{|\alpha|\,!}{\alpha\,!} = \frac{k\,!}{\alpha_1\,!\dots\alpha_d\,!}$ avec $k = |\alpha|$
L'opérateur différentiel pour un multi-indice $\boldsymbol{\alpha}$ est $\boldsymbol{\partial^\alpha} = \frac{\boldsymbol{\partial^\alpha}}{\boldsymbol{\partial x^\alpha}} = \boldsymbol{\partial_1^{\alpha_1}} \dots \boldsymbol{\partial_d^{\alpha_d}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_d^{\alpha_d}}$
Pour E,F 2 Revns, Ω un ouvert de E, $\partial^\alpha : C^k(\Omega, \mathrm{F}) \to C^{k-|\alpha|}(\Omega, \mathrm{F})$ est bien définie pour un multi-indice α de module $\le k$
On a $\partial^i x^k = \begin{cases} \frac{k\,!}{(k-i)\,!} x^{k-i} \text{ si } i \le k \\ \quad 0 \text{ sinon} \end{cases}$
Binôme de Newton compact. $(x+y)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k\,!}{\alpha\,!} x^\alpha = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} x^\alpha$ avec α de taille fixée 2
Formule du multinôme compacte. $\left(\sum_{i=1}^d x_i\right)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k\,!}{\alpha\,!} x^\alpha = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} x^\alpha$ avec α de taille fixée d
Binôme de Newton multi-indiciel. $(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} y^\beta$
Formule de Leibniz multi-indiciel. Pour $f, g \in C^k(\Omega, \mathrm{F})$, pour un multi-indice α de module $|\alpha| \le k$,
$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f\, \partial^\beta g$
Intégration par parties. Pour des fonctions suffisamment régulières dont l'une au moins est à support compact.
$\int u(\partial^\alpha v)dx = (-1)^{|\alpha|} \int (\partial^\alpha u) v\, dx$
Formule de Taylor RI multidimensionnelle. Pour $n \ge 0, f \in C^{n+1}(\Omega, \mathrm{F}), \vec{x}, \vec{h} \in R^d$, $[\vec{x}, \vec{x} + \vec{h}] \subseteq \Omega$
$f(\vec{x} + \vec{h}) = \sum_{0 \le |\alpha| \le n} \frac{\partial^\alpha f(\vec{x})}{\alpha\,!} \vec{h}^\alpha + (n+1) \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{\vec{h}^\alpha}{\alpha\,!} \int_0^1 (1-t)^n \partial^\alpha f(\vec{x} + t\vec{h}) dt$
$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^d h_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x} + t\vec{h}) dt$ pour $n = 0$
Formule de Taylor RI unidimensionnelle. Pour $\ge 0, f \in \frac{C^{n+1}}{m([x,x+h],\mathrm{F})} \cap C^n([x, x+h], \mathrm{F})$,
$f(x+h) = \sum_{0 \le k \le n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x+th) dt$
$f(x+h) = \sum_{0 \le k \le n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \frac{1}{n!} \int_x^{x+h} (x+h-u)^n f^{(n+1)}(u) du$
Formule de Taylor Young multidimensionnelle. Pour $n \ge 0, f \in C^n(\Omega, \mathrm{F}), \vec{x} \in \Omega$ ouvert de R^d
$f(\vec{x} + \vec{h}) =_{\vec{h} \to \vec{0}} \sum_{0 \le |\alpha| \le n} \frac{\partial^\alpha f(\vec{x})}{\alpha\,!} \vec{h}^\alpha + o\left(\|\vec{h}\|^n\right)$
Formule de Taylor Young unidimensionnelle. Pour $n \ge 0, f \in C^n(\Omega, \mathrm{F}), x \in \Omega$ ouvert de R
$f(x+h) =_{h \to 0} \sum_{0 \le k \le n} \frac{f^{(k)}(x)}{k\,!} h^k + o(|h|^n)$

Support.

Le **support d'une fonction continue $\boldsymbol{f}$ d'un ouvert $\boldsymbol{\Omega} \subseteq \boldsymbol{R^d}$ vers un Revn $\boldsymbol{F}$** est l'adhérence <u>dans Ω</u> des points en lesquels la fonction ne s'annule pas. $\boldsymbol{supp(f)} = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}^{\Omega}$ C'est un fermé de Ω

Une fonction $f \in C^0(\Omega \subseteq \mathrm{R^d}, F)$ est de support vide ssi elle est identiquement nulle.

Le support d'un produit fini de fonctions $C^0(\Omega \subseteq \mathrm{R^d}, F)$ est inclus dans l'intersection finie des supports.

Pour tout multi-indice α de taille d et de module inferieur a k, et toute fonction $f \in C^k(\Omega \subseteq R^d, F)$, on a $supp(\partial^\alpha f) \subseteq supp(f)$

On veut définir le **support essentiel d'une fonction mesurable $\boldsymbol{f}$ d'un ouvert $\boldsymbol{\Omega} \subseteq \boldsymbol{R^d}$ vers un Revn $\boldsymbol{F}$** de telle façon qu'il ne dépende que de la classe d'équivalence des fonctions égales à f presque partout, c'est-à-dire sauf sur un ensemble de mesure nulle. Il suffit de poser :

$\boldsymbol{supp_{ess}(f)} = \Omega \setminus \{\omega \in \Omega \mid \exists V \in V_\omega \ f_{|V} = 0 \ p.p.\}$. C'est un fermé de Ω

Pour une fonction mesurable et continue support et support essentiels coïncident.

Une fonction a **support compact** est une fonction dont le support est un compact de Ω cad une partie bornée dans Ω. Autrement dit ssi il existe un compact K de Ω telle que la fonction est nulle p.p. sur $\Omega \setminus K$

Rappels calcul diff.

On supposera généralement par défaut E, F Revns de dimension finie.

$\boldsymbol{L(E,F)}$ est l'espace des applications linéaires de E vers F

$\boldsymbol{L_c(E,F)}$ est l'espace des applications linéaires continues de E vers F.

$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L_c}} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$ norme sur $L_c(E,F)$

$(F, \| \quad \|_F)$ complet $\Rightarrow (L_c(E,F), \| \quad \|_{L_c})$ complet

$\boldsymbol{L_k(E_1 \times \ldots \times E_k, F)}$ est l'espace des applications n-lineaires de $E_1 \times \ldots \times E_k$ vers F

$\boldsymbol{L_{k,c}(E_1 \times \ldots \times E_k, F)}$ est l'espace des applications n-lineaires continues de $E_1 \times \ldots \times E_k$ vers F

$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L_{k,c}}} = \sup_{\|x\|_u \leq 1} \|f(x)\|_F$

$(F, \| \quad \|_F)$ complet $\Rightarrow (L_c(E,F), \| \quad \|_{L_{k,c}})$ complet

$\forall k \geq 2 \ L_{c,k}(E_1 \times \ldots \times E_k, F)$ est isometriquement isomorphe a $L_c(E_1, L_c(E_2, L_c(\ldots, L_c(E_k, F)) \ldots))$

Une application f d'un ouvert U d'un R-evn E, vers un R-evn F est **différentiable en un point $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{U}$** s'il existe une application $d_a f$ <u>linéaire continue</u> de $E \to F$, tel que $f(a+h) =_{h \to 0} f(a) + d_a f(h) + o(h)$

Une application f d'un ouvert U d'un Revn E vers un Revn F est **$\boldsymbol{k}$-fois differentiable en un point $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{U}$** ssi elle l'est $k-1$ fois en tout point d'un voisinage ouvert V_a de a et que $d^{k-1}f : (V_a, \| \quad \|_E) \to (L_{c,k-1}(E^{k-1}, F), \| \quad \|_{L_{c,k-1}})$ est différentiable en a. Dans ce cas on note $d_a^k f = d_a(d^{k-1}f)$.

Une application f d'un ouvert U d'un Revn E vers un Revn F est **$\boldsymbol{k}$-fois différentiable sur $\boldsymbol{U}$** ssi elle l'est en tout point de U. Dans ce cas $d^k f : (U, \| \quad \|_E) \to (L_{c,k}(E^k, F), \| \quad \|_{L_{c,k}})$ est bien définie.

Une application f d'un ouvert U d'un Revn E vers un Revn F est **de classe $\boldsymbol{C^k}$ en un point $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{U}$**, ssi f est k-fois differentiable en tout point d'un voisinage ouvert V_a de a <u>et</u>
$d^k f : (V_a, \| \quad \|_E) \to (L_{c,k}(E^k, F), \| \quad \|_{L_{c,k}})$ est continue au point a. Autrement dit ssi f C^{k-1} en a et $d^{k-1} f : (V_a, \| \quad \|_E) \to (L_{c,k}(E^k, F), \| \quad \|_{L_{c,k}})$ est C^1 en a.

Une application f d'un ouvert U d'un Revn E vers un Revn F est **de classe $\boldsymbol{C^k}$ sur U** ssi elle est C^k en

tout point de U ssi f C^{k-1} sur U et $d^{k-1}f : (U, \|\quad\|_E) \to \left(L_{c,k-1}(E^{k-1}, F), \|\quad\|_{L_{c,k-1}}\right)$ est C^1 sur U.
Une application f d'un ouvert U d'un Revn E vers un Revn F est **∞-fois différentiable en un point $a \in U$** ssi **f est de classe C^∞ en a** ssi $\forall k \in N$ f est k-fois différentiable en a ssi $\forall k \in N$ f est C^k en a.
Une application f d'un ouvert U d'un Revn E vers un Revn F est **∞-fois différentiable sur U/C^∞ sur U** ssi elle l'est en tout point de U.
Caractérisation différentiabilité: $E = E_1 \times \ldots \times E_n$
f est différentiable en $a \Rightarrow \forall i\ \ d_{i,a}f$ existe au voisinage de a
$\forall i\ \ d_{i,a}f$ existe au voisinage de a et continue en $a \Rightarrow f$ est différentiable en a
f C^1 en $a \Leftrightarrow \forall i\ \ d_{i,a}f$ existe au voisinage de a et continue en a
f k-fois différentiable en $a \Rightarrow \forall i_1, \ldots, i_k\ d^k_{i_1,\ldots,i_k,a}f$ existe au voisinage de a
f k-fois différentiable en $a \Rightarrow \forall \sigma \in S_k\ \forall i_1, \ldots, i_k\ d^k_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(k)},a}f = d^k_{i_1,\ldots,i_k,a}f$
$\forall i_1, \ldots, i_k\ d^k_{i_1,\ldots,i_k,a}f$ existe au voisinage de a et continue en $a \Rightarrow f$ k-fois différentiable en a
f de classe C^k en $a \Leftrightarrow \forall i_1, \ldots, i_k\ d^k_{i_1,\ldots,i_k,a}f$ existe au voisinage de a et continue en a
f de classe C^k en $a \Leftrightarrow f$ de classe C^1 en a et $\forall i\ d_{i,a}f$ de classe C^{k-1} en a
Si $E = R^n$, f k-fois différentiable en $a \Rightarrow \forall \sigma \in S_k\ \forall i_1, \ldots, i_k\ \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \ldots \partial x_{i_{\sigma(k)}}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(a)$
Soit K un compact de R^d inclus dans U
Espaces fonctionnels courants.
$\boldsymbol{F(U, F)}$ est l'ensemble des fonctions d'un ouvert U d'un Revn E, vers un Revn F.
$\boldsymbol{B(U, F)}$ est l'ensemble des fonctions bornées d'un ouvert U d'un Revn E, vers un Revn F.
Pour $k \in [\![0, \infty]\!]$, $\boldsymbol{C^k(U, F)}$ est l'espace des fonctions C^k d'un ouvert U d'un Revn E, vers un Revn F.
Pour $k \in [\![0, \infty]\!]$, $\boldsymbol{C^k_K \subset C^k}$ est l'espace des fonctions $f \in C^k$ a support un compact (de R^d) fixé $K \subseteq U$,
Pour $k \in [\![0, \infty]\!]$, $\boldsymbol{C^k_c \subset C^k}$ est l'espace des fonctions $f \in C^k$ a support un compact (de R^d) $\subseteq U$
Pour $k \in [\![0, \infty]\!]$, $\boldsymbol{C^k_c} = \bigcup_{K \text{ compact} \subset \Omega} C^k_K = \bigcup_{n \geq 0} C^k_{K_n}$
Pour $k \in [\![0, \infty]\!]$, $\boldsymbol{C^k_{\to 0}}$ est l'ensemble des $f \in C^k$ telles que $f(u) \to_{|u| \to \infty} 0$

On suppose $p \in R^*_+$, Pour un espace mesure (E, M, μ), on note $\boldsymbol{\mathcal{L}^p(E, M, \mu, F)}$ l'ensemble des fonctions mesurables de l'espace mesure vers un Revn de dim finie F, dont le module a la puissance p est d'intégrale de Lebesgue finie. $\int_X |f|^p < \infty$
On suppose par défaut qu'on utilise la mesure de Lebesgue et on écrira $\boldsymbol{\mathcal{L}^p(U \subseteq E, F)}$
$\boldsymbol{L^p}$ est l'espace $\mathcal{L}^p$ quotiente par le noyau de la semi-norme $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L^p}} = \left(\int_X \|f\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
$\boldsymbol{\mathcal{L}_{loc}}$ est l'espace des fonctions mesurables localement intégrables (sur tout compact $K \subseteq U$)
On note $\boldsymbol{\mathcal{L}^0_c}$ l'ensemble des fonctions mesurables a support essentiel compact.
On ajoute souvent un indice c pour signifier qu'on a intersecté l'espace avec $\boldsymbol{\mathcal{L}^0_c}$**.**
Par exemple $C^\infty_c = C^\infty \cap \mathcal{L}^0_c$
$C^k_c \subseteq L^p$ ($C^k_c \to L^p : f \mapsto [f]$ injective) mais attention C^k n'est pas inclus dans L^p en général.
Un **majorant essentiel d'une fonction d'un espace mesure vers $\overline{R}$** est un élément de $\overline{R}$ tel que l'ensemble des points dont les images sont strictement > a cet élément $\{f > m\}$ est negligeable.
L'ensemble des majorants essentiels d'une fonction est un intervalle ferme de la forme $[m_0, +\infty]$ dont

la borne inférieure est appelée la **borne supérieure essentielle de f**.
$\|\boldsymbol{f}\|_\infty = \inf \{m \in \overline{R} \,|\, \{f > m\}\ \lambda\text{-negligeable}\} = \inf_{N \subseteq R, \lambda(N)=0} \|f\|_{u, R\setminus N}$
On a toujours $\|f\|_\infty \leq \|f\|_u$. Si $\{|f| > \|f\|_\infty\}$ est vide, alors clairement $\|f\|_\infty = \|f\|_u$
$\boldsymbol{\mathcal{L}}^\infty$ est l'ensemble des fonctions mesurables f essentiellement bornées $\|f\|_\infty < \infty$
$\boldsymbol{L}^\infty$ est l'espace $\mathcal{L}^\infty$ quotienté par le noyau de la semi-norme ∞.

Normes et distances.
Lemme. Tout ouvert U $\subseteq R^d$ admet une suite de compacts $(K_n)_{n \in N}$ telle que $K_n \subset Int(K_{n+1})$ et
U $= \bigcup_{n \geq 0} K_n = \bigcup_{n \geq 1} Int(K_n)$ telle que tout compact $K \subset$ U est inclus dans un K_{n_0}.
Pour $k \in N$,
$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C^k,p,K}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{u,\mathrm{K}}\ (p = 1), \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{u,\mathrm{K}}^p\right)^{\frac{1}{p}}\ (p \in [1, \infty)), \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{u,\mathrm{K}}\ \ (p = \infty)$
$\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C^k,p}} = \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C^k,p,U}}$, $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C^k}} = \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{C^k,1}}$
Pour $k \in N$, $\| \quad \|_{C^k,p}$ est une norme sur C^k et même sur C^l pour $l \in [\![k, \infty]\!]$
Pour $k \in N$, $\| \quad \|_{C^k,p,K}$ est une norme sur C_K^k et même sur C_K^l pour $l \in [\![k, \infty]\!]$
$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{C^\infty,p,K}}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \sum_{n \in N} 2^{-n} \frac{\|g-f\|_{C^n,p,K}}{1+\|g-f\|_{C^n,p,K}}$
$\boldsymbol{d}_{\boldsymbol{C^\infty,p}}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}) = \sum_{n \in N} 2^{-n} \frac{\|g-f\|_{C^n,p,K_n}}{1+\|g-f\|_{C^n,p,K_n}}$
$d_{C^\infty,p}$ est une distance sur C^∞ et sur C_c^∞
$d_{C^\infty,p,K}$ est une distance sur C_K^∞
Pour $p \in [1, \infty)$, $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{L^p}} = \left(\int_X \|f\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
Pour $p \in [1, \infty)$, $\| \quad \|_{L^p}$ est une norme sur L^p
$\| \quad \|_\infty$ est une norme sur l'espace L^∞.
Propriétés de densité et complétude. (Vérifier)
Pour $k \in N$, $\left(C^k, \|f\|_{C^k,p}\right)$ est complet.
Pour $k \in N$, $\left(C_K^k, \|f\|_{C^k,p,K}\right)$ est complet.
C_c^k est dense dans $\left(C^k, \| \quad \|_{C^k}\right)$
C_c^0 est dense dans $(L^p, \| \quad \|_{L^p})$, pour $p \in [1, \infty)$
La complétion de $(C_c^0, \| \quad \|_{L^\infty})$ est l'espace $C_{\to 0}^0$
$(C_{\to 0}^0(R), \| \quad \|_{L^\infty})$ est un sous-espace fermé complet de $(L^\infty(R), \| \quad \|_{L^\infty})$.
$\left(C^\infty, d_{C^\infty,p}\right)$ est complet.
$\left(C_K^\infty, d_{C^\infty,p}\right)$ est complet comme sev ferme de $\left(C^\infty, d_{C^\infty,p}\right)$.
$\left(C_c^\infty, d_{C^\infty,p}\right)$ n'est pas complet. C_c^∞ n'est pas métrisable ?
C_c^∞ est dense dans $(L^p, \| \quad \|_{L^p})$, pour $p \in [1, \infty)$
C_c^∞ est dense dans $\left(L_c^p, \| \quad \|_{L^p}\right)$, pour $p \in [1, \infty)$
C_c^∞ est dense dans $\left(C^k, \| \quad \|_{C^k}\right)$, pour $k \in N$
C_c^∞ est dense dans $\left(C_c^k, \| \quad \|_{C^k}\right)$, pour $k \in N$
Pour $p \in [1, \infty)$, $(L^p, \| \quad \|_{L^p})$ est complet.
$(L^\infty, \| \quad \|_{L^\infty})$ est complet.

L_c^p est dense dans $(L^p, \| \quad \|_{L^p})$

3.3. Fonctions de classe C^∞ à support compact
3.3.2. Espace des fonctions test.
Une **fonction test d'un ouvert $\Omega \subseteq R^d$ vers un Revn F** est une fonction de $C^\infty(\Omega, F)$ dont le support est compact inclus dans Ω. Autrement dit c'est une fonction de C_c^∞
La **fonction test canonique** est $\boldsymbol{\phi_0}: R^d \to R: x \mapsto \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{1-\|x\|^2}\right) 1_{\|x\| \leq 1}(x)$
$\phi_0 \in C_0^\infty(R^d, R)$ et $\int_{R^d} \phi_0(x)dx > 0$
On peut aussi utiliser d'autres fonctions telles que $\exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right) 1_{\|x\| \leq 1}(x)$
3.3.3. Topologie compacte ouverte de $C_c^\infty(\Omega, F)$
Lemme. Tout ouvert $\Omega \subseteq R^d$ admet une suite de compacts $(K_n)_{n\in N}$ telle que $K_n \subset Int(K_{n+1})$ et $\Omega = \bigcup_{n\geq 0} K_n = \bigcup_{n\geq 1} Int(K_n)$ telle que tout compact $K \subset \Omega$ est inclus dans un K_{n_0}.
Remarque : $C_c^\infty(\Omega, F) = \bigcup_{n\geq 0} C_{K_n}^\infty(\Omega, F)$
La **topologie compacte ouverte** est la topologie de $\left(C_c^\infty(\Omega, F), d_{C^\infty,p}\right)$
Caractérisation convergence compacte ouverte. Une suite de fonctions tests $(f_n)_{n\in N} \in C_c^\infty(\Omega \subseteq R^d, F)$ converge vers une fonction test $f \in C_c^\infty(\Omega, F)$ pour la topologie compacte ouverte ssi pour tout multi indice α, toutes les $(\partial^\alpha f_n)_{n\in N}$ (en particulier $(f_n)_n$ pour $|\alpha| = 0$) convergent uniformément vers $\partial^\alpha f$ sur un même compact fixé K inclus dans Ω et qui contient tous les supports de tous les f_n.
Par exemple pour une fonction test réelle $\phi \in C_c^\infty(R)$, si on pose $\varphi_n(x) = \phi\left(x + \frac{1}{n+1}\right) - \phi(x)$ alors $\varphi_n \to_{n\to\infty} 0$ dans $(C_c^\infty(R), d)$.
3.3.4. Fonctions « pic » et « plateau »
Une **fonction pic sur un ouvert $O \subseteq \Omega \subseteq R^d$** est une fonction test de Ω vers R, de support inclus dans O et d'intégrale sur R^d valant 1.
Toute boule ouverte non vide $B(x_0, \varepsilon)$ d'un ouvert de R^d admet au moins une fonction pic : en normalisant la fonction test canonique : $\rho(x) = \varepsilon^{-d}\rho_0\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)$ avec $\rho_0(x) = \phi_0(x)/\int_{R^d}\phi_0(u)du$
Une **fonction plateau sur un compact K dans un ouvert O tel que $\overline{O} \subset \Omega \subseteq R^d$** est une fonction test de Ω vers $[0,1]$, de support inclus dans O (donc identiquement nulle sur $\Omega \setminus O$), qui vaut identiquement 1 sur un compact $K \subset O$.
Sur un compact non vide inclus dans un ouvert dont l'adhérence est incluse dans $\Omega \subseteq R^d$, on peut construire au moins une fonction plateau sur ce compact de support dans l'ouvert.
Idée : Pour $\varepsilon > 0$ on pose $K_\varepsilon = \{x \in R^d \mid d(x, K) \leq \varepsilon\}$, ρ_ε fonction pic sur $B(0, \varepsilon)$ et on convole $\theta_\varepsilon = \rho_\varepsilon \star 1_{K_\varepsilon}$.
3.4. Densité par troncature.
3.4.2. Produit de convolution. Dans cette section $\Omega = R^d$
Sous de bonnes hypothèses : le **produit de convolution** est $(\boldsymbol{f} \star \boldsymbol{g})(x) = \int_{R^d} f(x-y)g(y)dy$
Si f, g sont mesurables et positives le produit de convolution est bien défini.
Pour $p \in [1, \infty]$, si une fonction est L^p et l'autre est L^1 alors leur convolée est définie p.p. sur R^d, leur convolée est L^p, on a $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$ et $f \star g = g \star f$.

Si $f \in L^{\infty}$ et $g \in L^1$, alors si $f \in C^k$ avec $k \in N \cup \{\infty\}$ et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k sont toutes bornées alors $f \star g \in C^k$ et pour tout multi-indice $\alpha \in N^d$ $\partial^{\alpha}(f \star g) = \partial^{\alpha} f \star g$
Convoler une fonction L_c^p par une fonction test, donne une nouvelle fonction test.

3.4.3. Régularisation.

Intuition : On peut régulariser une fonction non régulière en la convolant avec une fonction régulière.
On considère une fonction pic de support dans $B(0,1)$ d'integrale 1 sur R^d : Pour $\varepsilon > 0$ soit $\rho_{\varepsilon} = \varepsilon^{-d}\rho(\varepsilon^{-1})$. La suite $(\rho_{\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ est une approximation de l'unite.
Pour $u \in C_c^k$ et $\alpha \in N^d \mid |\alpha| \leq k$, $\partial^{\alpha}(\rho_{\varepsilon} \star u)$ converge uniformement vers $\partial^{\alpha} u$ sur R^d quand $\varepsilon \to 0$
Pour $u \in L_c^p$ avec $p \in [1, \infty)$, alors $(\rho_{\varepsilon} \star u)$ converge vers u dans L^p quand $\varepsilon \to 0$.
L'espace des fonctions tests est dense dans $\left(C^k, \| \quad \|_{C^k}\right)$, et dans $(L^p, \| \quad \|_{L^p})$.

3.5. Lemme de Dubois-Reymond. Une fonction $f \in L_{loc}^1$ telle que $\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0$ pour toute fonction test $\varphi \in C_c^{\infty}$, est une fonction nulle presque partout.

4. Distributions sur un ouvert de $\boldsymbol{R^d}$

4.1. Définitions

4.1.1. Définition fonctionnelle

Une **distribution sur un ouvert $\boldsymbol{\Omega}$ de $\boldsymbol{R^d}$** correspond à une forme linéaire complexe sur l'espace des fonctions tests sur Ω, qui est continue en 0 cad que pour toute suite de fonctions tests qui converge vers 0, la suite des crochets de dualité $\langle T|\varphi_n\rangle = T(\varphi_n)$ converge aussi vers 0.
On note $\boldsymbol{D'(\Omega, C)}$ ou plus simplement $\boldsymbol{D'(\Omega)}$ ou plus simplement $\boldsymbol{D'}$ l'ensemble des distributions sur Ω.
En notant $D = C_c^{\infty}$ l'ensemble D' des distributions est bien le dual topologique de C_c^{∞}

4.1.2. Définition par l'ordre (utile en pratique)

Une forme linéaire complexe sur l'espace des fonctions tests sur Ω est une distribution sur Ω ssi pour tout compact $K \subseteq \Omega$, $\exists m \in N$ $\exists C_{K,m} \in R_+^*$ tels que $\forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ de support dans K, on ait $|\langle T, \varphi\rangle = T(\varphi)| \leq C_{K,m}\|f\|_{C^m,\infty,K}$

4.1.3. Ordre d'une distribution

Dans la définition par l'ordre d'une distribution, m dépend a priori du choix du compact K. Si on peut trouver un m qui convient pour tous les compacts K de Ω, on dit que la distribution est **d'ordre fini**.
Une **distribution d'ordre fini** est donc une forme linéaire complexe sur l'espace des fonctions tests sur Ω telle que $\exists m \in N$ $\forall$ compact $K \subseteq \Omega$, $\exists C_{K,m} \in R_+^*$ tels que $\forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ de support dans K, on ait $|\langle T, \varphi\rangle = T(\varphi)| \leq C_{K,m}\|f\|_{C^m,\infty,K}$
L'ordre d'une distribution, est le min de ces $n \in N$.
Pour une distribution d'ordre non fini, l'ordre est infini.

4.2. Premiers exemples

4.2.1. Distribution associée a une fonction $\boldsymbol{L_{loc}^1}$

La distribution associée à une fonction $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L_{loc}^1(\Omega)}$, est définie par $\langle \boldsymbol{T_f}, \varphi\rangle = \int_{\Omega} f\varphi$.
C'est une distribution sur Ω d'ordre 0. $f \mapsto T_f$ est une injection de $L_{loc}^1(\Omega)$ sur $D'(\Omega)$
On identifie donc une fonction L_{loc}^1 à sa distribution T_f dans $D'(\Omega)$ $L_{loc}^1 \subset D'(\Omega)$.
L'idée est qu'une distribution généralise la notion de fonction. On identifie souvent f a T_f.

4.2.2. Distribution de Dirac

Un Dirac sur $\boldsymbol{\Omega}$ en $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{\Omega}$ est la distribution sur Ω definie par $\langle \boldsymbol{\delta_a}, \varphi\rangle = \varphi(a)$.

Un dirac sur Ω est une distribution d'ordre 0. Un Dirac ne correspond pas à un $T_f, f \in L^1_{loc}$.

4.2.3. Distribution de Dirac dérivée

Un Dirac dérivé d'indice $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{N^d}$ sur $\boldsymbol{\Omega}$ en $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{\Omega}$ est la distribution sur Ω définie par $\langle \boldsymbol{\partial^\alpha \delta_a}, \varphi \rangle = \partial^\alpha \varphi(a)$.

C'est une distribution d'ordre $|\alpha|$. Dans R on la note $\boldsymbol{\delta_a^{(\alpha)}}$

4.2.4. Mesures de Radon

Pour une mesure de Radon μ sur un ouvert $\Omega \subseteq R^d$, la **distribution de Radon** est définie par $\langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi d\mu$. C'est une distribution sur Ω d'ordre 0.

4.2.5. Distributions positives

Une distribution sur Ω est **positive** ssi l'image d'une fonction test réelle positive est un réel positif.
$\varphi \geq 0 \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle \geq 0$

4.2.6. La valeur principale de $\boldsymbol{\frac{1}{x}}$ est la distribution sur R definie par $\langle \boldsymbol{vp\frac{1}{x}}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$

$x \mapsto 1/x$ n'est pas dans $L^1_{loc}(R)$.

$vp\frac{1}{x}$ est une distribution sur R positive et d'ordre 1. Elle ne dérive pas d'une $L^1_{loc}(R)$

4.2.7. Partie finie de $\boldsymbol{x^\alpha}$

Pour $\in N^*$, $\alpha \in (-n-1, -n)$, **la partie finie de $\boldsymbol{x^\alpha}$** est la distribution sur R definie par $\langle \boldsymbol{Pf(x^\alpha)} | \varphi \rangle = (-1)^n \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+n}}{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)} \varphi^{(n)}(x) dx$. C'est une distribution sur R d'ordre n. Vérifier.

Les cas $\alpha = -n$ donnent les valeurs principales.

4.2.8. Un exemple de distribution d'ordre infini

La distribution sur R definie par $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^\infty \varphi^{(k)}(k)$ est une distribution d'ordre ∞. veut dire quoi?

4.3. Convergence des suites de distribution

Une suite de distributions $\boldsymbol{(T_n)_n}$ sur $\boldsymbol{\Omega}$ converge dans $\boldsymbol{D'(\Omega)}$ vers une distribution $\boldsymbol{T}$ sur $\boldsymbol{\Omega}$ ssi pour toute fonction test sur Ω, l'image par la suite converge vers l'image par la limite : $\langle T_n, \varphi \rangle \to_{n\to\infty} \langle T, \varphi \rangle$

<u>Si</u> une suite de distributions $(T_n)_n$ sur Ω converge vers n'importe quoi, autrement dit, <u>si</u> pour toute fonction test sur Ω, l'image par la suite admet une limite complexe $\langle T_n, \varphi \rangle \to_{n\to\infty} l_\varphi \in C$, <u>alors</u> ces limites forment une distribution : $\langle T, \varphi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi \rangle$ est une distribution sur Ω.

De plus $\forall$ compact $K \subseteq \Omega$, $\exists m \in N\ \exists C_{K,m} \in R_+^*\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ de support dans K, on a $\sup_{n\in N} |\langle T_n, \varphi \rangle| \leq C_{K,m} \|f\|_{C^m,\infty,K}$ cad $\forall n \in N\ |\langle T_n, \varphi \rangle| \leq C_{K,m} \|f\|_{C^m,\infty,K}$

Corollaire : Pour une suite $(T_n)_n$ de distributions qui converge vers T dans D' et une suite $(\varphi_n)_n$ de fonctions tests qui converge vers $\varphi \in C_c^\infty$ pour sa topologie usuelle, alors $\langle T_n, \varphi_n \rangle \to_{n\to\infty} \langle T, \varphi \rangle$

Par exemple $n\left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\right)$ converge vers $-2\delta_0'$ dans $D'(R)$

La suite de distributions $T_{e^{in\cdot}}$ converge dans $D'(\Omega)$ vers la distribution nulle sur Ω. (Riemann-Lebesgue)

Pour $p \in [1, \infty]$, la convergence dans L^p_{loc} implique la convergence dans $D'(\Omega)$

La convergence presque partout n'implique pas la convergence dans $D'(\Omega)$. $x \mapsto \sqrt{n} e^{-nx^2}$

Pour une suite f_n de fonctions <u>positives</u> de $L^1(R^d)$ dont les supports sont dans des boules centrées en 0 et de rayon tendant vers 0, alors $\frac{f_n}{\int_{R^d} f_n}$ converge vers le Dirac δ_0 dans $D'(R^d)$.

5. Operations sur les distributions

5.1. Multiplication par une fonction $\boldsymbol{C^\infty}$

Pour une distribution $T \in D'(\Omega)$ et une fonction $a \in C^{\infty}(\Omega)$, la **distribution produit de $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{T}$** est la distribution aT autrement dit celle definie par $\langle aT, \varphi\rangle = \langle T, a\varphi\rangle$.
Pour $a, b \in C^{\infty},\ T, S \in D'$ on a $(a+b)T = aT + bT,\ (ab)T = a(bT),\ a(S+T) = aS + aT$.
Pour $T_n \in D' \to_{n\to\infty} T \in D'$ et $a_n \in C^{\infty} \to_{n\to\infty} a$, alors :
$a_nT \to_{n\to\infty} aT$ dans D', $aT_n \to_{n\to\infty} aT$ dans D', et $a_nT_n \to_{n\to\infty} aT$ dans D'
Pour $a \in C^{\infty}$ et $f \in L^1_{loc}$, on a $aT_f = T_{af}$
Pour $a \in C^{\infty}$, et $x_0 \in \Omega$, on a $a\delta_{x_0} = a(x_0)\delta_{x_0}$. Dans R on a en particulier $x\delta_0 = 0$
$x\ vp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$
Pour $-2 < \alpha < -1,\ xPf(x^{\alpha}) = x^{\alpha+1}$
On ne peut pas généralement définir un produit entre deux distributions. $\langle TS, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle\langle S, \varphi\rangle$ n'est même pas une forme linéaire. On ne peut pas définir un Dirac au carré. On ne peut pas définir un produit entre deux distributions qui soit commutatif et associatif. Une définition d'un produit de deux distributions reste possible à condition d'utiliser la transformée de Fourier, ce qui conduit à la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Toutefois, sans aller jusque-là, nous verrons que l'on peut définir un produit de convolution entre deux distributions (moyennant des hypothèses sur leurs supports respectifs), ce produit ayant alors une interprétation physique naturelle.

5.2. Les équations $\boldsymbol{xT = 0, xT = 1, xT = S}$

Pour une distribution $T \in D'$ sur R, on a $xT = 0 \Leftrightarrow \exists c \in C\ \ T = c\delta_0$
Pour une distribution $T \in D'$ sur R, on a $xT = 1 \Leftrightarrow \exists c \in C\ \ T = vp\left(\frac{1}{x}\right) + c\delta_0$
On retrouve ici le principe de résolution des équations linéaires : l'ensemble des solutions est un espace affine dirigé par le noyau de l'application linéaire qui définit l'équation considérée (soit l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée) et passant par une solution particulière de l'équation.
Pour 2 distributions $T, S \in D'$ sur R, si on a $xT = S$ alors T est uniquement déterminé par S.
Pour une distribution $T \in D'$ sur $\Omega \subseteq R^d$, on a $\forall i \in \{1, \dots, d\}\ x_iT = 0 \Leftrightarrow \exists c \in C\ \ T = c\delta_0$. A vérifier.

5.3. Dérivation d'une distribution

On peut dériver à n'importe quel ordre une distribution quelconque et que cette dérivation est une opération continue. La situation est donc totalement différente du cadre des fonctions dérivables classiques. Il faut se dire que si une fonction classique n'est pas dérivable, cela signifie simplement que sa dérivée est une distribution qui n'est pas une fonction.
La **distribution dérivée d'une distribution $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{D'}(\boldsymbol{\Omega} \subseteq \boldsymbol{R})$** est la distribution sur Ω définie par $\langle \boldsymbol{T'}, \varphi\rangle = -\langle T, \varphi'\rangle$.
La **distribution $\boldsymbol{k}$-ieme derivee partielle d'une distribution $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{D'}\left(\boldsymbol{\Omega} \subseteq \boldsymbol{R^d}\right)$** est la distribution sur Ω définie par $\langle \frac{\boldsymbol{\partial T}}{\boldsymbol{\partial x_k}}, \varphi\rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\rangle$. Elle est d'ordre $m+1$ si T est d'ordre m.
Plus généralement la **distribution dérivée de multi indice $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{N^d}$ d'une distribution $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{D'}\left(\boldsymbol{\Omega} \subseteq \boldsymbol{R^d}\right)$** est la distribution sur Ω définie par $\langle \boldsymbol{\partial^{\alpha} T}, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^{\alpha}\varphi\rangle$. Elle est d'ordre $m + |\alpha|$ si T est d'ordre m.
Pour une suite de distributions sur Ω qui converge vers une distribution dans D', alors pour tout multi indice fixe $\alpha \in N^d$, la suite de distributions dérivées par ce multi-indice converge vers la même distribution dérivée par ce multi-indice dans D'. $T_n \to T \Rightarrow \partial^{\alpha}T_n \to \partial^{\alpha}T$

Pour $a \in C^{\infty}$ et $T \in D'$ alors $\frac{\partial}{\partial x_k}(aT) = \left(\frac{\partial a}{\partial x_k}\right)T + a\ \frac{\partial T}{\partial x_k}$
La dérivée d'une distribution T_f avec $f \in C^1(R)$ n'est autre que $T_{f'}$
La k-ieme dérivée partielle d'une distribution T_f avec $f \in C^1(R^d)$ n'est autre que $T_{\frac{\partial f}{\partial x_k}}$

La fonction de Heaviside est la fonction $\boldsymbol{H}: R \to R$ qui vaut 0 pour $x < 0, \frac{1}{2}$ en 0, et 1 pour $x > 0$.
Alors $H' = \delta_0$.
La fonction $f: R \to R: x \mapsto \log|x|$ si $x \neq 0$, et $f(0) = a \in R$, est $L^1_{loc}(R)$ et on a $(T_f)' = vp\left(\frac{1}{x}\right)$
Pour $u \in L^1_{loc}(R)$ et $v: R \to R: x \mapsto \int_0^x u$ alors $v \in C^0(R)$ et $v' = u$ (au sens des distributions) (dans D')
Pour une mesure de Radon μ sur un ouvert $\Omega \subseteq R^d$, la distribution de Radon dérivée par un multi-indice α est $\langle \partial^\alpha \mu, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \partial^\alpha \varphi d\mu$.

5.4. Les équations $\boldsymbol{T' = 0}$ et $\boldsymbol{\partial_{x_i} T = 0}$

Pour une distribution $T \in D'$ sur R, on a $T' = 0 \Leftrightarrow T$ est constante
Pour une distribution $T \in D'$ sur $\Omega \subseteq R^d$, on a $\forall i \in \{1, \dots, d\}\ \frac{\partial T}{\partial x_k} \in C^0(\Omega) \Rightarrow T \in C^1(\Omega)$

5.5. Formule des sauts en dimension 1.

Pour $f \in C^1_m([a,b])$ de subdivision adaptée $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ on a la formule des sauts :
$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=0}^n \big(f(a_i^+) - f(a_i^-)\big)\delta_{a_i}$ avec les conventions $f(a_0^-) = f(a_n^+) = 0$
Pour $f \in C^1_m([a,b])$ de subdivision adaptée $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ on a la formule des sauts :
$(T_f)'' = T_{f''} + \sum_{i=0}^n \big(f(a_i^+) - f(a_i^-)\big)\delta'_{a_i} + \sum_{i=0}^n \big(f'(a_i^+) - f'(a_i^-)\big)\delta_{a_i}$
Pour une fonction $u: R \to R$ nulle partout sauf sur un segment $[a,b]$ ou sa restriction $u_{|[a,b]}$ est C^1, il peut a priori y avoir des discontinuités en a, b, alors $(T_u)' = T_{u'} + u(a)\delta_a - u(b)\delta_b$.
Soit $g \in C^0(I)$ dont la dérivée au sens des distributions vérifie $g' \in L^1_{loc}(I)$, alors $\forall a, b \in I\ \left(T_{g 1_{[a,b]}}\right)' = T_{g' 1_{[a,b]}} + g(a)\delta_a - g(b)\delta_b$

6. Support d'une distribution

6.1. Partitions de l'unité.

Le lemme des partitions de l'unité est un outil très utile permettant de passer du local au global.
Pour K compact inclus dans l'union d'une famille finie de p ouverts $\bigcup_{k=1}^p \Omega_k$ inclus dans un ouvert $\Omega \subseteq R^d$, alors pour chacun des p ouverts, il existe une fonction test $\chi_k \in C_c^\infty(\Omega)$ de support inclus dans Ω_k, a valeurs dans $[0,1]$ et ces p fonctions tests verifient $\forall x \in K\ \sum_{k=1}^p \chi_k(x) = 1$

6.2. Restriction a un ouvert

Pour un ouvert ω inclus dans un ouvert Ω de R^d, et une distribution T sur Ω, la **restriction de la distribution $\boldsymbol{T}$ a l'ouvert $\boldsymbol{\omega}$** est la distribution definie par $\langle \boldsymbol{T_{|\omega}}, \varphi\rangle = \langle T, \varphi \cdot 1_\omega\rangle$
Une distribution est **nulle sur un ouvert $\boldsymbol{\omega \subseteq \Omega \subseteq R^d}$** ssi sa restriction à l'ouvert ω est nulle.
Une distribution nulle sur tout ouvert d'une famille quelconque, est nulle sur la réunion de cette famille.
Pour un prédicat $P(T)$, une distribution sur Ω est **localement $\boldsymbol{P}$** ssi tout point de Ω admet un voisinage ouvert sur lequel la restriction de la distribution vérifie P.

6.3. Support d'une distribution

Le **support d'une distribution sur $\boldsymbol{\Omega \subseteq R^d}$** est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel T est nulle. Autrement dit le support d'une distribution est le complémentaire des points de Ω aux voisinages

desquels T est nulle. Autrement dit le support d'une distribution est l'ensemble des points dont chacun de ses voisinages contient une fonction test d'image non nulle par la distribution.
Le support d'une distribution est donc toujours une partie fermée.
Une partie contient le support d'une distribution ssi la distribution est nulle sur le complémentaire de cette partie.
Pour une distribution et une fonction test sur Ω dont les supports respectifs sont disjoints, $\langle T, \varphi \rangle = 0$.
Le support d'une distribution est nulle ssi cette distribution est la distribution nulle.
Une distribution sur Ω qui localement dérive d'une fonction C^k, est une distribution qui dérive globalement d'une fonction C^k. $\exists f \in C^k(\Omega)\ T = T_f$
Pour $T \in D'$ et $a \in C^\infty$, alors $supp(aT) \subseteq supp(a) \cap supp(T)$
Pour $T \in D'$ et $\alpha \in N^d$, alors $supp(\partial^\alpha T) \subseteq supp(T)$
Exemple fondamental : pour une fonction continue sur Ω, on a $supp\ T_f = supp\ f$
Pour $a \in \Omega$, $supp(\delta_a) = \{a\}$
On a $supp\left(vp\left(\frac{1}{x}\right)\right) = R$

6.4. Distributions à support compact

Une distribution est à **support compact** ssi son support est compact. On note $\boldsymbol{E(\Omega)}$ l'ensemble des distributions sur un ouvert $\Omega \subseteq R^d$ a support compact.
Une distribution à support compact peut être prolongée de $C_c^\infty(\Omega)$ a $C^\infty(\Omega)$ et donc vue comme une forme linéaire complexe définie sur C^∞. En fait on peut montrer $E(\Omega) = (C^\infty(\Omega))'$ tout comme $D'(\Omega) = (C_c^\infty(\Omega))'$ (par définition d'une distribution)
Une distribution à support compact est d'ordre fini.

6.5. Distributions à support ponctuel

On sait déjà que le support d'un Dirac est un point : son origine. On montre de même que le support des dérivées d'un Dirac est aussi un singleton. La réciproque est vraie au sens du théorème suivant.
Une distribution sur Ω de support $\{x_0\}$ avec $x_0 \in \Omega$ peut s'écrire $T = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha \delta_{x_0}$ et on a $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\ \langle T, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(x_0)$

II. Notions avancées

7. Convolution des distributions

7.1. Produit de convolution de 2 distributions Dans cette section $\Omega = R^d$
Sous de bonnes hypothèses : le **produit de convolution** est $(\boldsymbol{f} \star \boldsymbol{g})(x) = \int_{R^d} f(x-y) g(y) dy$
Si f, g sont mesurables et positives le produit de convolution est bien défini.
Pour $p \in [1, \infty]$, si une fonction est L^p et l'autre est L^1 alors leur convolée est définie p.p. sur R^d, leur convolée est L^p, on a $\|f \star g\|_p \le \|f\|_p \|g\|_1$ et $f \star g = g \star f$.
Si $f \in L^\infty$ et $g \in L^1$, alors si $f \in C^k$ avec $k \in N \cup \{\infty\}$ et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k sont toutes bornées alors $f \star g \in C^k$ et pour tout multi-indice $\alpha \in N^d$ $\partial^\alpha (f \star g) = \partial^\alpha f \star g$
Convoler une fonction L_c^p par une fonction test, donne une nouvelle fonction test.
Une fonction test de C_c^∞ est toujours associée à une distribution. $C_c^\infty \subset L_{loc}^1$
Sur R^d, Pour toute distribution et toute fonction test le produit de convolution $T \star \varphi$ est bien défini.
Convoler une distribution sur R^d par une fonction test, donne une nouvelle fonction test.
Pour une distribution, une fonction test, et tout multi-indice $\alpha \in N^d$, $\partial^\alpha (T \star \varphi) = \partial^\alpha T \star \varphi$

De plus si $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, alors $\partial^\alpha(T \star \varphi) = \partial^{\alpha_1}T \star \partial^{\alpha_2}\varphi$
Pour une distribution, une fonction test, on a $\langle T, \varphi\rangle = (T \star \check{\varphi})(0)$ avec $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.
Pour une distribution T, et 2 fonctions tests φ, ψ, on a $(T \star \varphi) \star \psi = T \star (\varphi \star \psi)$
Pour une distribution T, et 2 fonctions tests φ, ψ, on a $\langle T \star \varphi, \psi\rangle = \langle T, \check{\varphi} \star \psi\rangle$
Pour $T_n \in D' \to_{n\to\infty} T \in D'$ et $\varphi \in C_c^\infty$, alors $T_n \star \varphi \in D' \to_{n\to\infty} T \star \varphi \in D'$
Pour $T \in D'$ et $\varphi_n \in C_c^\infty \to_{n\to\infty} \varphi \in C_c^\infty$, alors $T \star \varphi_n \in D' \to_{n\to\infty} T \star \varphi \in D'$
Toute distribution sur un ouvert $\Omega \subseteq R^d$ est limite (dans D') d'une suite de fonctions tests sur Ω
Convolution de 2 distributions a supports compacts. Pour deux distributions S, T a support compact, on approche l'une par des fonctions tests $\varphi_n \to T$. La **convolée $S \star T$** se définit alors par $\boldsymbol{S \star T} = \lim_{n\to\infty} S \star \varphi_n$

7.2. Propriétés de la convolution de distributions <u>a supports compacts</u>

Elle est associative, commutative, et le Dirac en 0 est un élément neutre.
pour tout multi-indice $\alpha \in N^d$ $\partial^\alpha(S \star T) = \partial^\alpha T \star S$. En particulier $\partial^\alpha \delta_0 \star T = \partial^\alpha T$
Le produit de convolution est continu.

7.3. Interprétation physique de la convolution. (théorie des SLI)

En considérant un système physique vu comme une boite noire, un signal $s(t)$ produit une réponse $r(t)$. On fait les hypothèses suivantes :
Principe de superposition : si r_1 et r_2 sont les réponses respectives de 2 signaux s_1, s_2, alors la réponse au signal $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2$ est $\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2$ pour tout réels λ_1, λ_2.
Principe d'homogénéité temporelle : La réponse au signal s decale de T secondes est la réponse r decalee de T secondes
Stabilité : Des signaux très voisins ne produisent pas des réponses très différentes.
Alors l'application de $C_c^\infty(R)$ vers $C^\infty(R)$ qui a s associe r, est linéaire, commute avec les translations et continue en un certain sens. On peut montrer sous ces hypothèses qu'il existe une distribution T sur R telle que $r = T \star s$. Ce résultat est très général et explique en partie pourquoi la convolution intervient si souvent en physique.

7.4. Comment calculer un produit de convolution

7.4.1. Convolution de deux fonctions dans $\boldsymbol{L^1_{loc}}$ Dans cette section $\Omega = R^d$

Pour $f, g \in L^1_{loc}$ on a $T_f \star T_g = T_{f\star g}$

7.4.2. Convolution d'une distribution et d'une fonction dans $\boldsymbol{C_c^\infty}$

Pour $T \in D'$ et $\varphi \in C_c^\infty$

7.4.3. Utilisation des propriétés de la convolution

On peut par exemple utiliser l'approximation d'une des deux distributions par des fonctions tests et se ramener pour chaque terme de la suite au cas précèdent. Parfois la suite approchante est suffisamment explicite pour permettre cette approche. On passe ensuite à la limite pour trouver la convolution des 2 distributions. On peut aussi utiliser les propriétés de dérivation.
Exemple : $\delta_0' \star \delta_0' = \delta_0''$

8. Transformation de Fourier des distributions tempérées

8.1. La transformation de Fourier dans $\boldsymbol{S}$ Dans cette section $\Omega = R^d$

8.1.1. L'espace de Schwartz

La **transformée de Fourier** est définie sur $L^1(R^d)$ par $\boldsymbol{\hat{f}(u) = F(f)(u)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi(x|u)}dx$

Elle est linéaire.
Toutefois ni L^1 ni C_c^∞ n'est pas un espace invariant par F. On cherche un espace qui le soit pour rendre l'étude plus élégante. Les opérations définies sur D' le sont par dualité avec C_c^∞ et il était important que C_c^∞ soit invariant par ces transformations. Pour obtenir par dualité l'espace le plus grand possible, on cherche l'espace invariant le plus petit possible.
L'espace de Schwarz sur $\boldsymbol{R^d}$ est l'espace $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R^d}) = \{f \in C^\infty(R^d) \mid \forall\alpha,\beta \in N^d\ \exists C_{\alpha,\beta} \in R_+^*\ \forall x \in R^d\ |x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq C_{\alpha,\beta}\}$
Autrement dit $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{R^d}) = \{f \in C^\infty(R^d) \mid \forall\alpha,\beta \in N^d\ x^\alpha \partial^\beta f(x) \to_{|x|\to\infty} 0\}$
L'espace de Schwarz sur R^d contient l'espace des fonctions tests sur R^d. $C_c^\infty \subset S$
Pour tout complexe z de partie reelle > 0 la fonction $x \mapsto e^{-z|x|^2}$ est dans S
Toute fonction de la forme $x \mapsto P(x)e^{-z|x|^2}$ avec z complexe de partie réelle > 0, et P fonction polynomiale, est dans S.
On définit $\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{S},\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} = \|x^\alpha \partial^\beta f(x)\|_{u,R^d} = \sup_{x\in R^d}|x^\alpha \partial^\beta f(x)|$
$\|\ \ \|_{S,\alpha,\beta}$ sont des semi normes sur l'espace de Schwarz S qui le rende métrisable complet. TODO clarifie
Pour tout multi-indice $\alpha \in N^d$, $f \mapsto x^\alpha f$ est continue de S dans S. (Pour quelle métrique ?)
L'espace de Schwarz est stable par produit.
L'espace $(C_c^\infty(R^d),)$ est dense dans $(S,)$
Pour $p \in [1,\infty]$, on a $S \subset L^p(R^d)$
8.1.2. Transformation de Fourier dans $\boldsymbol{S}$
Pour $f \in S$, $x \mapsto e^{-i(x|u)}f(x)$ est L^1. La transformée de Fourier d'une fonction $f \in S$ est bien définie.
Pour z un complexe de partie réelle > 0, $\widehat{e^{-z|x|^2}}(u) = \left(\frac{\pi}{z}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{|u|^2}{4z}}$
La transformée de Fourier F laisse l'espace de Schwarz invariant, et est même un homéomorphisme sur cet espace. Son inverse est $\boldsymbol{F^{-1}}(f)(x) = KF(f)(-x)$ avec la convention prise. $K = \frac{1}{(2\pi)^d}$
Formule d'inversion. $K\ FFf = \check{f}$
8.1.3 Propriétés de la transformation de Fourier dans $\boldsymbol{S}$
Pour $f \in S$, $F(f) \in C^1$ et pour tout k, $\frac{\partial}{\partial x_k}F(f) = F(-ix_k f)$
Pour $k \in \{1,\dots,d\}$ $F\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) = iu_k F(f)$
La transformée de Fourier échange donc dérivation et multiplication par x. Par conséquent, F echange régularité et décroissance à l'infini : Plus une fonction est dérivable, plus vite sa transformée de Fourier décroit à l'infini. On retrouve en particulier l'invariance de la classe de Schwartz par F.
Théorème de Plancherel. Cette propriété hilbertienne énonce un principe de conservation de l'énergie lorsque l'on passe dans le domaine de Fourier.
Pour $f,g \in S$, $\int_{R^d} \hat{f} g = \int_{R^d} f\hat{g}$, $\int_{R^d} f\overline{g} = K\int_{R^d} \hat{f}\overline{\hat{g}}$, donc pour $f = g$, $\int_{R^d}|f|^2 = K\int |\hat{f}|^2$
Pour $a \in R^d$ et $f \in S$, on a $\tau_a f \in S$ et $F(\tau_a f) = e^{-i(u|a)}F(f)$. TODO vérifier signe
Pour $f,g \in S$, $f \star g \in S$ et $F(f \star g) = F(f)F(g)$ et $F(fg) = K\ F(f) \star F(g)$ avec $K = \frac{1}{(2\pi)^d}$ (varie)
8.2. L'espace $\boldsymbol{S'}$ des distributions tempérées
Une **distribution tempérée** est une forme linéaire continue sur l'espace de Schwarz. Autrement dit c'est

une forme linéaire complexe telle que $\exists k, l \in N\ \exists C \in R_+^*\ \forall \varphi \in S\ |\langle T, \varphi \rangle| = \sum_{|\alpha| \leq k, |\beta| \leq l} \|\varphi\|_{S,\alpha,\beta}$
On note $\boldsymbol{S'} = \boldsymbol{S'}(\boldsymbol{R^d})$ l'espace des distributions tempérées.
Toute distribution tempérée est une distribution. $S' \subset D'$
Pour $p \in [1, \infty]$ $L^p \subset S'$
Toute fonction continue à croissance polynomiale définit une distribution tempérée sur R^d
Pour une suite $(a_k)_{k \in Z}$ a croissance polynomiale (i.e. $\exists p \in N\ \ a_k =_{k \to \infty} O(|k|^p)$) alors la distribution sur R définie par $T = \sum_{k \in Z} a_k \delta_k$ est tempérée.
La distribution sur R définie par l'exponentielle sur R qui est L_{loc}^1 n'est pas tempérée.
De même pour tout $\varepsilon > 0$, $x \mapsto e^{\varepsilon |x|} \notin S'(R^d)$
Toutefois pour appartenir a S' il n'est pas nécessaire d'être majoré par un polynôme. $e^x e^{ie^x} \in S'(R^d)$
Pour une distribution tempérée $T \in S'(R^d)$ et $k \in \{1, \dots, d\}$ la k-ieme derivee partielle l'est aussi $\frac{\partial T}{\partial x_k} \in S'(R^d)$.
Pour une distribution temperee $T \in S'(R^d)$ et $k \in \{1, \dots, d\}$ on a $x_k T \in S'(R^d)$.
Pour une distribution tempérée $T \in S'(R^d)$, un polynôme P, et un multi-indice $\alpha \in N^d$ on a $P \partial^\alpha T \in S'$
Pour une distribution temperee $T \in S'(R^d)$, une fonction f a croissance polynomiale ainsi que toutes ses derivees alors $fT \in S'(R^d)$
Une suite de distributions tempérées $(\boldsymbol{T_n})_{\boldsymbol{n}}$ sur $\boldsymbol{\Omega}$ converge dans $\boldsymbol{S'}(\boldsymbol{\Omega})$ vers une distribution tempérée $\boldsymbol{S}$ sur $\boldsymbol{\Omega}$ ssi pour toute fonction de $S(\Omega)$, l'image par la suite converge vers l'image par la limite : $\langle T_n, \varphi \rangle \to_{n \to \infty} \langle T, \varphi \rangle$.
Tout comme dans D' la convergence est compatible avec les opérations de dérivation et de multiplication par une fonction C^∞ à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées.

8.3. Transformée de Fourier dans $\boldsymbol{S'}$

8.3.1. Définition et propriétés

Pour $f, g \in S$, on sait que $\int_{R^d} F(f) g = \int_{R^d} f F(g)$, donc par analogie :
La **transformée de Fourier d'une distribution tempérée** $T \in S'(R^d)$ est la distribution tempérée sur R^d définie par $\forall \varphi \in S\ \langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}), \varphi \rangle = \langle T, F(\varphi) \rangle$
On note $\boldsymbol{e_u}: R^d \to R^d : x \mapsto e^{i(u|x)}$. On a $\forall u \in R^d\ e_u \in C^\infty$
La transformée de Fourier d'une distribution tempérée $T \in S'$ peut alternativement se définir comme la distribution associée à la fonction $f: u \mapsto \langle T, e_{-u} \rangle$. Verifier.
La transformée de Fourier F laisse l'espace S' invariant, et est même un homéomorphisme sur cet espace. Son inverse est définie par $\langle \boldsymbol{F^{-1}}(\boldsymbol{T}), \varphi \rangle = \langle T, F^{-1}(\varphi) \rangle$.
Formule d'inversion. $KFF(T) = \check{T}$
Pour $T \in S'$, $F(T) \in C^1$ et pour tout k, $\frac{\partial}{\partial x_k} F(T) = F(-i x_k T)$
Pour $k \in \{1, \dots, d\}$ $F\left(\frac{\partial T}{\partial x_k}\right) = i u_k F(f)$
Pour $a \in R^d$ et $T \in S'$, on a $T \tau_a \in T$ et $F(T \tau_a) = e^{-i(u|a)} F(T)$. Avec $\tau_a : x \mapsto x - a$
Pour $a \in R^d$ et $T \in S'$, on a $F\left(e^{-i(u|a)} T\right) = (FT) \circ \tau_a$
$F \delta_0 = 1$, $F(\partial^\alpha \delta_0)(u) = (iu)^\alpha$
$F \delta_a = e^{-i(u|a)}$, $F(\partial^\alpha \delta_a)(u) = (iu)^\alpha e^{-i(u|a)}$

$F1 = \frac{\delta_0}{K}$

$vp\left(\frac{1}{x}\right) \in S'(R)$ et $Fvp\left(\frac{1}{x}\right) = -2i\pi H + i\pi$ avec H la distribution d'Heaviside

$H \in S'(R)$ et $FH = -ivp\left(\frac{1}{x}\right) + \pi\delta_0$

8.3.2. Transformée de Fourier des distributions a support compact

On note $\boldsymbol{e_u}: R^d \to R^d: x \mapsto e^{i(u|x)}$. On a $\forall u \in R^d\ e_u \in C^\infty$

On a toujours $E'(R^d) \subset S'(R^d)$. On cherche à voir ce qu'on obtient en appliquant F sur E'. La décroissance à l'infini est maximale pour $T \in E'$, on s'attend à obtenir une régularité maximale pour FT.

Pour $T \in E'$, alors $FT \in S'$ est $C^\infty(R^d)$ et est a croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées.

8.3.3. Convolution et transformée de Fourier

Pour $T \in S', S \in E'$, alors $T \star S \in S'$ et $F(T \star S) = FT\ FS$

Pour $T \in S', \varphi \in S$, alors $T \star \varphi \in C^\infty \cap S'$ et $F(T \star \varphi) = \hat{\varphi}FT = F\varphi\ FT$

8.3.4. Transformée de Fourier partielle et applications

On se place dans $R^p \times R^d$ on note (t, x) une variable avec $t \in R^p$ et $x \in R^d$.

On définit la **transformée de Fourier partielle en $\boldsymbol{x \in R^d}$ de $\boldsymbol{\varphi \in S = S(R^p \times R^d)}$,** par la formule

$\tilde{F}(\varphi)(t, u) = \int_{R^d} e^{-i(x|u)}\varphi(t, x)dx$

Alors $\tilde{F}$ est un homéomorphisme de $S(R^p \times R^d)$ dans lui-même avec

$\tilde{F}^{-1}(\psi)(t, x) = K\int_{R^d} e^{-i(x|u)}\psi(t, u)du$

Par dualité on peut définir la **transformée de Fourier partielle d'une distribution tempérée** $T \in S'(R^p \times R^d)$ est la distribution tempérée sur R^d définie par $\forall\varphi \in S\ \langle\boldsymbol{\tilde{F}(T)}, \varphi\rangle = \langle T, \tilde{F}(\varphi)\rangle$

Alors $\tilde{F}$ est un homéomorphisme de $S'(R^p \times R^d)$ dans lui-même. Son inverse est définie par

$\langle\boldsymbol{\tilde{F}^{-1}(T)}, \varphi\rangle = \langle T, \tilde{F}^{-1}(\varphi)\rangle$

$\tilde{F}(\partial_x^\alpha T) = (iu)^\alpha \tilde{F}T$

$\tilde{F}(x^\alpha T) = (-i\partial)^\alpha \tilde{F}T$

$\tilde{F}\left(\partial_t^\beta u\right) = \partial_t^\beta \tilde{F}u$

$\tilde{F}\delta_{0,0} = \delta_{t=0} \otimes 1_u$

Operateur de la chaleur. $P = \partial_t - \Delta_x: S'(R \times R^d) \to S'(R \times R^d)$. On peut résoudre $PE = \delta_0$ (TODO)

8.3.5. Retour à la transformée de Fourier dans $\boldsymbol{L^1}$ et $\boldsymbol{L^2}$

Pour $f \in L^1(R^d)$ on pose $\boldsymbol{Ff = \hat{f}} = \int_{R^d} e^{-i(u|x)}f(x)dx$, on a pas nécessairement $\hat{f} \in L^1$

Pour $f \in L^1\ Ff \in C^0_{\to\infty 0}(R^d)$ et $\|Ff\|_u \leq \|f\|_{L^1}$

Pour $f \in L^1\ T_f \in S'$ et $FT_f = T_{Ff}$

Si f et sa transformee de Fourier sont toutes deux L^1 alors la formule d'inversion s'applique. $K\ FFf = \check{f}$

Pour $f \in L^2(R^d)$ on pose également $\boldsymbol{Ff = \hat{f}} = \int_{R^d} e^{-i(u|x)}f(x)dx$

Pour $f \in L^2$ alors $FT_f \in L^2$

S est dense dans L^2

On a $F: L^2 \to L^2$ et est même surjective $F(L^2) = L^2$, c'est un automorphisme C-lineaire de L^2.

Le théorème de Plancherel s'applique dans L^2. Pour $f \in L^2$, $\int_{R^d}|f|^2 = K\int \left|\hat{f}\right|^2$.

F est une isométrie de L^2 dans lui-même.

9. Solutions élémentaires d'EDPs

9.1. Théorèmes d'existence

9.1.1. Définitions et premières propriétés

Un polynôme de $C[X_1, \dots, X_d]$ s'ecrit $P = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha X^\alpha$ avec $(a_\alpha)_\alpha \in C^{N^d}$

On appelle **operateur différentiel a coefficients constants sur $\boldsymbol{D'(\Omega)}$** et on note $\boldsymbol{P(\partial)}$: $D'(\Omega) \to D'(\Omega)$: $T \mapsto P(\partial)T = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha T$

Une **EDP linéaire a coefficients constants d'ordre $\boldsymbol{m}$** est une équation de la forme $P(\partial)T = F$ avec $P \in C[X_1, \dots, X_n]$ d'ordre m, $T \in D'$, $F \in D'$

F est le **second membre de l'EDP**, T est **l'inconnue de l'EDP**.

l'EDP est **homogène** ssi $F = 0$. **L'EDP homogène associée** est $P(\partial)T = 0$

Equation de Laplace/Poisson. $\Delta T = F$ dans $D'(R^d)$ avec $P = X_1^2 + \dots + X_d^2$

Equation des ondes. $\partial_t^2 T - \Delta T = F$ dans $D'(R^{1+d})$ avec $P = X_0^2 - X_1^2 - \dots - X_d^2$

Equation de la chaleur. $\partial_t T - \Delta T = F$ dans $D'(R^{1+d})$ avec $P = X_0 - X_1^2 - \dots - X_d^2$

Equation de Schrodinger. $i\partial_t T - \Delta T = F$ dans $D'(R^{1+d})$ avec $P = iX_0 - X_1^2 - \dots - X_d^2$

L'ensemble des solutions de l'EDPLC $P(\partial)T = F$ est soit l'ensemble vide, soit le sous-espace affine $T_0 + \ker(P(\partial))$ de $D'(\Omega)$ avec T_0 une solution particulière de l'EDP.

Une **solution élémentaire/fondamentale/de Green d'une EDPLC** $P(\partial)T = F$ est une distribution E telle que $P(\partial)T = \delta_0$. Comme ça ne dépend pas de F on définit parfois la notion seulement pour P

9.1.2. Existence de solutions

Malgrange-Ehrenpreis 1955. Toute EDPLC à coefficients non nuls admet une solution élémentaire. De plus si le degré de l'EDPLC est 1 ou plus, la solution élémentaire ne peut être à support compact.

Etant donne une EDPLC $P(\partial)T = F$ avec <u>F a support compact</u>, et une solution élémentaire E, on peut construire une solution particulière $T_0 = E \star F$. En fait T_0 est aussi l'unique solution a support compact.

9.2. Théorème de régularité

Si une EDPLC $P(\partial)$ admet une solution elementaire sur $R^d \setminus \{0\}$ alors pour tout ouvert $\Omega \subseteq R^d$, toute fonction $f \in C^\infty(\Omega)$, alors toute solution T de l'EDPLC $P(\partial)T = T_f$ s'ecrit $T = T_u$ avec $u \in C^\infty(\Omega)$.

9.3. Exemples de solutions élémentaires

9.3.1. Problème du Laplacien

Le laplacien correspond à l'opérateur différentiel $\boldsymbol{\Delta} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ associe au polynôme $P = \sum_{i=1}^d X_i^2$.

Pour $d = 1$, une solution elementaire du Laplacien est $E = xH$

Pour $d = 2$, une solution elementaire du Laplacien est $E = \frac{1}{2\pi} \ln|x|$

Pour $d = 3$, une solution elementaire du Laplacien est $E = -\frac{1}{(d-2)S_{d-1}} \cdot \frac{1}{|x|^{d-2}}$ ou S_{d-1}est l'aire de la sphere unite de R^d. Dans chaque cas, la solution élémentaire est C^∞.

Toute solution de $\Delta u = f$ avec $f \in C^\infty$ est C^∞.

Une **distribution harmonique** est une distribution $T \in D'$ de laplacien nul $\Delta T = 0$, est donc toujours C^∞

9.3.2. L'équation des ondes en dimension 1

L'opérateur des ondes est $P(\partial) = \partial_t^2 - \partial_x^2$ associe au polynôme $P = X_1^2 - X_2^2$.

$E(x,t) = \frac{1}{2} I(|x| < t)$ est une solution elementaire de l'operateur des ondes.

Pour $F \in D'(R^2)$ a support compact, une solution de l'equation d'ondes $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f$ est donnee par $u = E \star F$.

10. Formule des sauts

10.1. Formule des sauts en dimension 1

Pour $f \in C_m^1([a,b])$ de subdivision adaptée $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ on a la formule des sauts :
$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=0}^{n} \big(f(a_i^+) - f(a_i^-)\big)\delta_{a_i}$ avec les conventions $f(a_0^-) = f(a_n^+) = 0$

Pour $f \in C_m^1([a,b])$ de subdivision adaptée $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ on a la formule des sauts :
$(T_f)'' = T_{f''} + \sum_{i=0}^{n} \big(f(a_i^+) - f(a_i^-)\big)\delta'_{a_i} + \sum_{i=0}^{n} \big(f'(a_i^+) - f'(a_i^-)\big)\delta_{a_i}$

Pour une fonction $u: R \to R$ nulle partout sauf sur un segment $[a,b]$ ou sa restriction $u_{|[a,b]}$ est C^1, il peut a priori y avoir des discontinuités en a, b, alors $(T_u)' = T_{u'} + u(a)\delta_a - u(b)\delta_b$.

Soit $g \in C^0(I)$ dont la dérivée au sens des distributions vérifie $g' \in L^1_{loc}(I)$, alors $\forall a, b \in I$ $\left(T_{g1_{[a,b]}}\right)' = T_{g'1_{[a,b]}} + g(a)\delta_a - g(b)\delta_b$

10.2. Formule des sauts pour un demi-espace

Soit une distribution $\underline{u}$ sur R^d dont la restriction a $R^{d-1} \times R_+$ est $u \in C^1\big(R^{d-1} \times R_+\big)$ et qui vaut 0 sur $R^{d-1} \times R_-$, alors $\forall j \in \{1, \dots, d-1\}$ $\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_j} = 1_{x_d \geq 0} \frac{\partial u}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_d} = 1_{x_d \geq 0} \frac{\partial u}{\partial x_d} + u(x', 0) \oplus \delta_{x_d = 0}$ ou

$u(x', 0) \oplus \delta_{x_d = 0}$ est la **distribution de simple couche** définie par
$\langle u(x', 0) \oplus \delta_{x_d = 0}, \varphi \rangle = \int_{R^{d-1}} u(x', 0)\varphi(x', 0)dx'$

10.3. Ouverts réguliers dans $\boldsymbol{R^d}$

10.3.1. Définition

Un ouvert $\Omega \subseteq R^d$ est dit **de classe $\boldsymbol{C^k}$ avec $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{N} \cup \{\infty\}$** ssi $\Omega = \{x \in R^d \mid \rho(x) < 0\}$ avec $\rho \in C^k(R^d, R)$ <u>et</u> $\partial\Omega = \big\{x \in R \mid \rho(x) = 0 \text{ et } \overrightarrow{grad}\, \rho\,(x) \neq 0\big\}$. A priori il n'y a pas unicité de ρ.

Cette définition assure en particulier que Ω est localement du même cote de sa frontière, ce qui est utile pour définir la normale extérieure en chaque point de sa frontière.

Un **ouvert régulier de $\boldsymbol{R^d}$** est un ouvert de classe C^∞

Les boules ouvertes de R^d sont des ouverts reguliers.

10.3.2. Vecteur normal unitaire sortant

Pour un ouvert régulier de R^d la direction du gradient de ρ ne depend pas du choix de ρ satisfaisant la regularite. On peut donc definir **le vecteur normal sortant de Ω en $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\partial\Omega}$** par $\vec{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\nabla\rho(x)}{\|\nabla\rho(x)\|}$.

La dérivée normale sortante extérieure de Ω en $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\partial\Omega}$ est $\frac{\boldsymbol{\partial}}{\boldsymbol{\partial\vec{n}}} = \langle \vec{n}(x), \frac{\partial}{\partial x} \rangle = \sum_{i=1}^{d} n_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$

Pour $\Omega = B(0,r)$, pour $x \in S(0,1)$ on a $\vec{n}(x) = \left(\frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_d}{r}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial\vec{n}} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{d} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

Pour $\psi \in C^\infty(R^{d-1}, R)$, $\Omega = \{x \in R^d \mid x_d > \psi(x_1, \dots, x_{d-1})\}$ est un ouvert regulier de R^d dont la frontiere est $\partial\Omega = \{x \in R^d \mid \psi(x_1, \dots, x_{d-1}) = x_d\}$, et en tout point de cette frontiere on a $\vec{n}(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla'\psi(x')|^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_{d-1}} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial}{\partial\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla'\psi(x')|^2}} \left(\sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_d}\right)$

10.3.3. Mesure de surface, exemples

Pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ le support de la i-eme derivee partielle de l'indicatrice sur un ouvert regulier est inclus dans la frontiere de cet ouvert. supp $\frac{\partial 1_\Omega}{\partial x_i} \subseteq \partial\Omega$

On appelle **mesure de surface sur $\partial\Omega$** la mesure de Radon positive definie sur $\partial\Omega$ par $\boldsymbol{d\sigma} = -\frac{\partial}{\partial \vec{n}} 1_\Omega$

On alors pour toute fonction test sur Ω, $\langle \boldsymbol{d\sigma}, \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega} \varphi(x) d\sigma(x)$

Plus generalement, pour g sommable par rapport a $d\sigma$ sur $\partial\Omega$, on definit la distribution de simple couche $\boldsymbol{gd\sigma}$ par $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ $\langle \boldsymbol{gd\sigma}, \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega} \varphi(x) g(x) d\sigma(x)$

Pour $\Omega =]0,1[$, on a $d\sigma = \delta_0 + \delta_1$.

Pour $\Omega = B(0,r)$, on a $\forall \varphi \in C_c^\infty(R^d)$ $\langle d\sigma, \varphi \rangle = \int_{S^{d-1}} \varphi(r\theta) r^{d-1} d\theta$

Pour $\Omega = \{x \in R^d \mid x_d > \psi(x_1, \dots, x_{d-1})\}$ avec $\psi \in C^\infty(R^{d-1}, R)$,

$\langle d\sigma, \varphi \rangle = \int_{R^{d-1}} \varphi(x', \psi(x')) \sqrt{1 + |\nabla\psi(x')|^2} dx'$

10.4. Formule de Stokes

10.4.1. Formule

Soit un ouvert régulier de R^d de champ de vecteur normal sortant $\vec{n}$, et de mesure de surface $d\sigma$ sur $\partial\Omega$. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ $n_i d\sigma = -\frac{\partial 1_\Omega}{\partial x_i}$

Pour une fonction continue sur l'adhérence d'un ouvert borné et régulier de R^d, alors dire que f est C^k sur l'ouvert Ω de dérivées jusqu'à l'ordre k se prolongeant a l'adhérence $\overline{\Omega}$ est équivalent a dire qu'il existe une fonction C^k definie sur tout R^d, qui coincide avec la fonction f sur l'adhérence de l'ouvert. On dit dans ces conditions que $\boldsymbol{f}$ **est** $\boldsymbol{C^k}$ **sur** $\boldsymbol{\overline{\Omega}}$ et on note $f \in C^k(\overline{\Omega})$, (a priori les classes de regularites n'ont été definies que sur des ouverts, on generalise ici la def).

La divergence d'un champ de vecteur $\vec{X} \in C^1(\overline{\Omega})$ est $div(\vec{X}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{X} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$

Stokes/Green Ostrogradski. Pour un ouvert borné régulier de R^d, et un champ de vecteur $\vec{X} \in C^1(\overline{\Omega})$, alors $\oiint_{\partial\Omega} \vec{X} \cdot d\vec{S} = \iiint_\Omega (\vec{\nabla} \cdot \vec{X}) dV$ avec $d\vec{S} = \vec{n} d\sigma$, intégrale triple=dimension d, double=$d-1$

10.4.2. Intégration par parties multidimensionnelle

Pour $u \in C^1(\overline{\Omega}, R)$, et $\vec{X} \in C^1(\overline{\Omega})$

$\iiint_V \vec{X} \cdot \vec{\nabla} u \, dV = \oiint_{\partial V} u \vec{X} \cdot d\vec{S} - \iiint_V u \vec{\nabla} \cdot \vec{X} \, dV$

Pour $i \in \{1, \dots, d\}$ et pour $u, v \in C^1(\overline{\Omega}, R)$, avec $\vec{A} = v\vec{e_i}$ on a

$\int_\Omega v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) dS(x) - \int_\Omega u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \, dx$

10.4.3. Formules de Green pour le Laplacien

Pour $\psi, \varphi \in C^2(\overline{\Omega}, R)$ sur un ouvert régulier Ω de R^d,

$\oiint_{\partial\Omega} \psi \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{S} = \iiint_\Omega (\psi \vec{\nabla}^2 \varphi + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi) \, dV$

$\oiint_{\partial\Omega} (\psi \vec{\nabla} \varphi - \varphi \vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{S} = \oiint_{\partial\Omega} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}\right) dS = \iiint_\Omega (\psi \vec{\nabla}^2 \varphi - \varphi \vec{\nabla}^2 \psi) \, dV$

10.4.4. Formule des sauts multidimensionnelle

Soit un ouvert borné régulier Ω dont Ω^c est le complementaire de $\overline{\Omega}$. Soit $\underline{u}$ une fonction definie dans R^d telle que ses restrictions u et u^c a Ω et Ω^c se prolongent par continuité en des éléments de $C^1(\overline{\Omega}), C^1(\overline{\Omega^c})$. Pour $x \in \partial\Omega$, on note $u_{int}(x)$ et $u_{ext}(x)$ les valeurs respectives de ces prolongements.

Formule des sauts multidimensionnelle. Pour $i \in \{1, \dots, d\}$ on a $\frac{\partial T_{\underline{u}}}{\partial x_i} = T_{\frac{\partial u}{\partial x_i}} + T_{\frac{\partial u^c}{\partial x_i}} + (u_{ext} - u_{int})(\vec{n}(.)|\vec{e_i}) d\sigma$ ou $(u_{ext} - u_{int})(\vec{n}(.)|\vec{e_i}) d\sigma$ est la mesure de Radon dont la densite par rapport a $d\sigma$ est $x \mapsto (u_{ext}(x) - u_{int}(x))(\vec{n}(x)|\vec{e_i})$. TODO verifier formule.