**Chapitre 3. Algèbre bilinéaire**   
On suppose est un ev avec , de caractéristique . Soit trois tels evs **III. Formes sesquilinéaires et hermitiennes  
III.1. Généralités**Une **application** **linéaire** d’un ev E, vers un autre F, est une application de telle que et   
Une **application** **semilinéaire/antilinéaire** d’un ev E, vers un autre F, est une application de telle que et   
Dans , semilinéaire linéaire.  
Une application à 2 variables est **bilinéaire** ssi   
Une application à 2 variables est une **forme bilinéaire** ssi bilinéaire et   
Une application à 2 variables est **symétrique** ssi   
Une application à 2 variables est **antisymétrique** ssi   
Une forme bilinéaire est antisymétrique ssi ssi   
Une application à 2 variables est **sesquilinéaire à droite** ssi   
Une application à 2 variables est une **forme sesquilinéaire** ssi sesquilinéaire et   
L’ensemble des applications sesquilinéaires est noté   
On note et Dans , sesquilinéaire bilinéaire.  
Une application complexe à 2 variables est **hermitienne** ssi   
Une application complexe à 2 variables est **antihermitienne** ssi   
Pour une application hermitienne .  
Pour une application hermitienne   
Dans , hermitienne symétrique. Dans , antihermitienne antisymétrique.  
Pour une application complexe à 2 variables on dit que est un **vecteur -isotrope** si .  
Pour une application complexe à 2 variables le **cône isotrope de**  noté est . Le terme de cône est justifié par isotrope isotrope  
Une application complexe à 2 variables est **définie** ssi son cône isotrope est nul càd   
Une application à 2 variables est **positive** ssi ssi   
Une application à 2 variables estdéfinie positivessi   
Une **forme hermitienne** est une application forme sesquilinéaire hermitienne.  
Une application complexe est une forme hermitienne à droite ssi 2 propriétés sont vérifiées parmi les 3 : hermitienne, linéaire à gauche, semilinéaire à droite.   
Si une forme hermitienne n’est autre qu’une forme bilinéaire symétrique.  
On note l’ensemble des formes hermitiennes sur .  
Pour , on note resp. **l’application semilinéaire associée a à droite resp. à gauche.**  
Pour , on appelle **noyau à gauche (resp. à droite) de**  le noyau de son application associée à gauche (resp. à droite).  
Pour , on dit que est **dégénérée à gauche (resp. à droite)** si l’application associée à gauche (resp. à droite) n’est pas injective/càd son noyau n’est pas nul/ càd (resp. )  
 **non-dégénérée gauche (resp. droite)** ssi resp.   
 **est dégénérée** si elle est dégénérée à gauche ou à droite.  
 **est non-dégénérée** si elle n’est dégénérée ni à gauche ni à droite  
Pour une forme hermitienne, le noyau à gauche et à droite de coincident, et on peut parler simplement de **noyau de**  noté   
Pour une forme hermitienne donc une forme hermitienne définie est non-dégénérée.  
**I.1.1. Homomorphisme métrique et isométrie**Soit deux evs munis chacun d’une forme hermitienne .  
Un **morphisme métrique** de dans est une application lineaire telle que .   
Une **isométrie** de dans est un isomorphisme métrique.  
Si et non-dégénérée alors un morphisme métrique est tjrs une isométrie.  
Faux en dimension infinie.  
L’identité de est une isométrie sur lui-même par rapport à n’importe quelle forme bilinéaire sur E.  
L’inverse d’une isométrie est une isométrie. La composée d’isométries est une isométrie.  
L’ensemble des isométries de un Kev forme donc un groupe noté **.**  
Si la forme est bilinéaire symétrique on appelle le **groupe orthogonal** de E  
Si la forme est bilinéaire antisymétrique on appelle le **groupe symplectique** de E  
Si la forme est hermitienne on appelle le **groupe unitaire** de E  
**I.1.2. Les applications sesquilinéaires en dimension finie**  
On suppose dans cette section de dimensions finies respectives de bases .  
Pour une application sesquilinéaire de on a donc est entièrement déterminée par les scalaires . Donc est de dimension et une base est   
La dimension de est donc .  
On note la **matrice représentative de dans les bases .**  
On a donc   
Les bases etant fixees, l’application qui a une forme sesquilinéaire de associe sa matrice representative dans ces bases, est un isomorphisme d’ev de sur   
Formule de changement de base matrice d’une forme sesquilinéaire: . Car   
 ce qui permet d’écrire   
On peut calculer dans n’importe quel base, le resultat ne depend pas de la base.  
Une forme sesquilinéaire est hermitienne (resp. antihermitienne) ssi sa matrice représentative dans une base quelconque/toute base l’est. (resp. )  
**Orthogonalité, partie orthogonale, famille orthogonale, rang, sommes orthogonales, isotropies** sont définies de façon identique au cas bilinéaire. Les propositions et théorèmes sur ces notions en particulier la décomposition d’un espace en somme orthogonale restent vrai dans le cas sesquilinéaire.  
**I.2. Dualité**  
Le crochet de dualité sur un Kev est une forme bilinéaire non dégénérée (par Zorn en dim sur   
**I.2.5. La dualité en dimension finie**En dimension finie on peut décomposer une forme linéaire sur une base duale   
Un Kev de dimension finie et son espace dual son isomorphes donc de même dimension.  
Cet isomorphisme dépend du choix de la base donc ne peut pas être qualifié de canonique.  
En dimension finie, l’application linéaire canonique de est un isomorphisme.  
L’application qui à toute base de E associe sa base duale est une bijection de l’ensemble de base de E vers l’ensemble des bases duales. En dimension finie on peut écrire  **I.3. Orthogonalité (espace quadratique complexe)**Pour une forme bilinéaire, la relation « être -orthogonal a » est symétrique ssi ( est symétrique ou antisymétrique).  
Autrement dit est symétrique ou antisymétrique  
Cela justifie que l’on s’intéresse surtout aux formes symétriques ou antisymétriques dans le cas bilinéaire.  
Dans le cas sesquilinéaire je ne crois pas qu’il y ait un résultat analogue. On s’intéressera surtout aux formes hermitiennes dans la suite.On appelle aussi **espace quadratique** un ev muni d’une forme hermitienne.  
Soit un espace quadratique. est **-orthogonal /**  à ssi ssi   
est **-orthogonale/** à si   
L’orthogonal d’une partie pour est l’ensemble   
 ssi ssi . L’orthogonal d’une partie est un sev de l’autre espace.  
   
Une **famille de vecteurs de E est -orthogonale** si les vecteurs de la famille sont 2 a 2  
Une **famille de vecteurs de E est -orthonormale** si elle est orthogonale et  **I.3.1. Rang.** Soit un espace quadratique.  
L’orthogonal de E est le noyau de   
Par conséquent est non-dégénérée ssi .  
La bilinéarité implique donc on peut passer au quotient et rendre non dégénérée :   
On appelle **rang de**  la dimension de .   
En dimension finie, non-dégénérée ssi ssi ssi ssi bijective ssi bijective.  
Le rang de est également identique au rang de (ou de ) en tant qu’applications semilinéaires.  
Le rang de est égal au rang de n’importe quelle matrice représentative.  
Pour non-dégénérée, un sev de E est de dim finie ssi son orthogonal est de codimension finie, et dans ce cas on a et .  
Dans un espace quadratique de dimension finie, en considérant une base orthogonale, alors le rang de est égal au nombre d’éléments de bases non isotropes, les éléments de base isotropes engendrent le noyau de la forme.  
Le nombre d’élément de bases non-isotropes ne dépend pas de la base orthogonale choisie. **I.3.3. Somme de sous-espaces orthogonaux.** Soit un espace quadratique.Une somme directe interne est une **somme directe interne orthogonale** si de plus les sevs sont orthogonaux deux a deux, ce qu’on notera .   
La notation est identique à l’orthogonalité car en fait, des espaces orthogonaux deux a deux, sont toujours en somme directe interne orthogonale.  
Si E admet une décomposition somme directe orthogonale alors est non-dégénérée ssi ses restrictions à chaque sous-espace de la somme sont toutes également non-dégénérées. Dans ce cas on peut alors décomposer le noyau de en somme directe orthogonale des noyaux des restrictions . **I.4. Isotropie**. Soit un espace quadratique.  
Un **sous-espace H de E est -isotrope** ssi il est lui-même orthogonal a un de ses vecteurs non nuls ssi ssi la restriction de a est dégénérée  
Un **sous-espace H de E est -totalement isotrope** ssi la restriction de à est nulle, càd ssi tous ses vecteurs sont orthogonaux entre eux càd ssi il est inclus dans son orthogonal   
Si admet un sous-espace de dimension finie, et non isotrope, alors . Faux si dim(H)  
Si H est un sous-espace de dim finie de E, est non-isotrope ssi est non-isotrope ssi   
Toute famille orthogonale de vecteurs non-isotropes, est une famille libre.  
L’espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs isotropes et orthogonaux deux à deux, est un espace totalement isotrope.  
Ces notions permettent de formaliser des propriétés naturelles de la géométrie euclidienne.  
L’orthogonal d’une droite (d) du plan est une autre droite (d’), et forment une decomposition en somme orthogonale du plan euclidien. En règle générale c’est faux à cause des éléments isotropes, si l’orthogonal de la droite est elle-même.  
**I.5. Sous-espaces totalement isotropes maximaux**. Soit un espace quadratique.On appelle **sous-espace totalement isotrope maximal** tout sous-espace de E totalement isotrope, maximal pour l’inclusion.  
Tout sous-espace totalement isotrope est inclus dans un sous-espace totalement isotrope maximal. (Vient du lemme de Zorn en dim infinie).  
En dim finie on appelle **indice de la forme :**  le max des dim des sev de E totalement isotropes.   
Si est non-dégénérée alors l’indice de la forme vérifie  **I.6. Adjoint d’un endomorphisme.** Soit un espace quadratique non-dégénéré.Un **endomorphisme -adjoint à un endomorphisme** est un endomorphisme verifiant   
Si l’adjoint existe il est unique, (par non-dégénérescence) et on le note .   
L’adjoint n’existe pas toujours en dimension infinie. L’existence de l’adjoint est un problème important.  
Si admet un adjoint, alors son adjoint en admet un aussi qui est .   
Si et admettent des adjoints alors :   
La somme admet pour adjoint la somme des adjoints.   
Pour tout scalaire alors admet aussi un adjoint et   
L’ensemble des endomorphismes admettant un adjoint est un sous-espace de   
La composée admet aussi pour adjoint la composée des adjoints dans l’autre sens.   
Si est inversible et si et admettent des adjoints alors on peut affirmer   
Si u endomorphisme de E admet un adjoint alors et   
Si H sev stable par u endomorphisme de E admettant un adjoint, alors est stable par l’adjoint .Un endomorphisme est **hermitien** s’il admet lui-même pour adjoint . (**symétrique** si )  
Un endomorphisme est **antihermitien** s’il admet pour adjoint . (**antisymétrique** si )  
Un endomorphisme est dit **unitaire** s’il admet un adjoint et . (**orthogonal** si )  
Un endomorphisme est dit **normal** s’il admet un adjoint et .  
Un endomorphisme hermitien/antihermitien/orthogonal est normal.  
**Notations usuelles.**On note l’ensemble des isomorphismes de . .  
On note . .  
On note l’ensemble des endomorphismes hermitiens de .  
On note ,   
On note l’ensemble des endomorphismes antihermitiens de .  
On note l’ensemble des endomorphismes unitaires de . (On note si )  
On note   
On note l’ensemble des matrices sur   
On note l’ensemble des matrices inversibles sur .   
On note l’ensemble des matrices diagonales de   
On note l’ensemble des matrices hermitiennes de On note , ,   
On note l’ensemble des matrices antihermitiennes de   
On note l’ensemble des matrices unitaires de (On note si )  
On note   
, sont des sevs de   
L’espace des endomorphismes admettant un adjoint se decompose en somme directe :   
**I.6.1. Adjoint en dimension finie.** Soit un espace quadratique non-dégénéré de dimension finie.Cela implique automatiquement bijectives. (TODO vérifier)  
Tout endomorphisme u de E admet un adjoint donné par la formule :   
On a .   
Dans un b.o.n. d’un espace euclidien on a   
   
   
   
   
   
 et   
   
   
   
   
Pour un sous-espace , est stable par ssi est stable par   
Lorsque , un endomorphisme et son adjoint ont même rang, même déterminant, même trace, même polynôme caractéristique, même valeurs propres.  
**II.1.3. Formes quadratiques**Dans un ev En dimension finie , l’espace des formes hermitiennes est de dimension (TODO vérifier)  
En dimension finie , l’espace des formes antihermitiennes est de dimension   
Dans un ev , l’application est une application -linéaire de noyau   
On note son image.  
On a , donc est un ev même si .  
 induit un -isomorphisme de sur son image . Donc .  
Fixer revient à fixer donc revient à fixer un couple associés.  
Si un E est de dim finie alors l’espace de formes quadratiques est de dimension   
Un **espace quadratique** est un espace muni de / de . On note   
Une **forme quadratique** sur un ev E, est un élément de càd un   
A chaque forme hermitienne correspond donc une unique forme quadratique.  
Le noyau, la dégénérescence, l’orthogonalité, l’isotropie, le rang d’une formequadratique se définissent comme celles de sa forme hermitienne associée. Attention le noyau d’une forme quadratique n’est pas l’ensemble des éléments pour lesquels elle s’annule, c’est le cône isotrope.  
Soit un espace quadratique.  
Dans une base fixée d’un ev de dimension finie, la **matrice représentative d’une forme quadratique** est celle de sa forme hermitienne associée.   
On a .  
En dimension finie , il y a isomorphisme entre l’espace des formes quadratiques, et l’espace des polynômes 2-homogenes a indéterminées. L’isomorphisme dépend de la base choisie.  
Souvent on aime regrouper sous la forme :   
 s’écrit sous la forme ssi sa matrice est diagonale , on peut alors réécrire , et est combinaison linéaire de module-carrés de formes linéaires indépendantes.   
La **méthode de Gauss** est un algorithme pour décomposer n’importe quelle forme quadratique en combinaison linéaires de module-carrés de formes linéaires indépendantes. L’idée est que si un , par ex , on factorise tous les termes dépendant de sous forme canonique, ce qui reste ne dépend que de , ensuite, lorsque tous les , s’il reste par ex , on factorise les termes en en produit puis on utilise   
Quelle que soit la décomposition (même obtenu sans la méthode de Gauss) en combinaison linéaire de module-carrés de formes linéaires indépendantes, le nombre de coefficients non nuls de cette somme est constant et vaut le rang de la forme quadratique .  
**Théorème d’inertie de Sylvester.** Toute forme quadratique q de rang r sur un ev E de dim finie n, admet un unique couple tel que pour toute base -orthogonale de E, la matrice de q dans cette base a exactement coeffs et exactement coeffs .  
Ce couple est appelle **signature de la forme quadratique** .  
La signature peut également s’interpréter comme les dimensions maximales des sous-espaces de E sur lesquels la restriction de est définie positive (pour ) ou définie négative (pour ).Dans un espace hermitien ou euclidien, la signature peut s’interpréter comme le nombre de valeurs propres positives, muni du nombre de valeurs propres négatives de l’endomorphisme auto-adjoint associé à la forme quadratique.  
**II. Formes hermitiennes**   
**II.1. Identités dans un espace quadratique.** Soit un espace quadratique.  
Attention à la convention choisie pour le côté semilinéaire de on a les identités suivantes :  
**Polarisation complexe droite 1.**   
**Polarisation complexe droite 2.**   
**Polarisation complexe droite 3.**   
**Polarisation réelle () 1.**   
**Polarisation réelle () 2.**   
**Polarisation réelle () 3.**   
La partie réelle d’une identité de polarisation complexe, donne la polarisation réelle correspondante.  
Pour la convention droite , pour la gauche .  
**Homogénéité.** , en particulier   
Ces 3 derniers faits montrent comment retrouver la forme polaire complexe à partir de la forme réelle.  
L’homogénéité montre que ne change pas de signe lorsque l’on multiplie par une constante. Cela motive la définition sesquilinéaire, en ce qu’elle permet de définir un produit scalaire sur un ev .  
**Pythagore.** . La réciproque est vraie si   
La réciproque est fausse en général si   
**Identité du parallélogramme** :   
En géométrie euclidienne, cela traduit que pour un parallélogramme, la somme des carrés des cotés = somme des carrés des diagonales. Cette formule est vraie dans le cas complexe. (Re (pol1 – pol2)=0)  
**Identité de la médiane simple:**   
**Identité de la médiane positionnelle:**   
Une application sur un ev est une forme quadratique réelle sur ssi   
1. sa forme polaire est bilinéaire symétrique  
2.   
L’application est une forme quadratique sur   
**II.2. Produit scalaire complexe.**Un espace quadratique de dimension finie, admet une base -orthogonale.  
 n’induit pas forcement de norme, on ne peut pas tjrs normaliser la base si non algébriquement clos.  
Un **produit scalaire complexe** sur un ev , est une forme hermitienne définie positive sur E.  
Un **semi** **produit scalaire complexe** sur un ev , est une forme hermitienne positive sur E.  
Si est un produit scalaire complexe sur un ev , induit la norme sur E  
Si est un semi-produit scalaire complexe sur un ev , induit la semi-norme sur E  
Une **norme sur un ev dérive d’un produit scalaire** ssi c’est la norme induite par lui.  
Pour un semi-produit scalaire, la forme quadratique associée est donc   
**Fréchet-Von Neumann-Jordan réel.** Une norme sur un ev dérive d’un produit scalaire ssi vérifie l’identité du parallélogramme.  
**Fréchet-Von Neumann-Jordan complexe.** Une norme sur un ev dérive d’un produit scalaire hermitien ssi vérifie l’identité du parallélogramme.Une norme sur un ev vérifie l’identité du parallélogramme ssi elle vérifie l’identité de la médiane.  
Un ev muni d’un produit scalaire, ou d’un semi-produit scalaire est en particulier un espace quadratique.  
Un **espace préhilbertien**, est un ev , muni d’un produit scalaire. (**réel** si )  
Un **espace hermitien**, est un espace préhilbertien de dimension finie. (**Euclidien** si )  
Un **espace de Hilbert**, est un ev , muni d’un produit scalaire, complet pour la norme induite par le produit scalaire. (**réel** si ).  
On a donc ev espace quadratique préhilbertien Hilbert hermitien/euclidien.  
**Inégalité de Cauchy Schwartz.** Pour un semi-produit scalaire (forme hermitienne positive) sur un ev , alors on a ou encore   
Il y a égalité ssi non tous deux nuls tels que   
Dans le cas définie positive, càd est un produit scalaire, il y a égalité dans l’ICS ssi est une famille liée de càd ssi . Dans le cas non définie, liée suffisant mais pas nécessaire.  
**Gram-Schmidt.** Tout espace hermitien admet des bases orthonormales  
Plus généralement, pour une famille libre d’un préhilbertien, il existe une unique famille orthonormale telle que et .  
**Représentation de Riesz hermitien.** Toute forme linéaire sur un espace hermitien, correspond à un unique vecteur et .  
En d’autre termes l’application semilinéaire injective, isométrique, est même bijective.  
Riesz est encore vrai dans un Hilbert de dimension quelconque, respectivement au dual topologique .  
L’isomorphisme ainsi construit ne dépend pas de la base, mais dépend du produit scalaire choisi.  
Dans un espace hermitien l’adjoint existe   
Les propriétés de l’adjoint sont valables dans un espace hermitien.  
L’application est une involution semilinéaire.  
Pour un sous-espace d’un espace hermitien, est stable par ssi est stable par   
Pour un espace hermitien   
On peut munir du produit scalaire donc est aussi euclidien, de plus pour ce produit scalaire, on a   
**II.3. Endomorphismes particuliers  
II.3.1. Endomorphismes auto-adjoints**Dans un espace hermitien, un endomorphisme est hermitien ssi   
Dans un espace hermitien, les valeurs propres d’un endomorphisme hermitien sont réelles.   
Dans un espace hermitien, les sous-espaces propres d’un endomorphisme hermitien sont deux à deux orthogonaux.   
Tout endomorphisme d’un espace hermitien possède au moins un vecteur propre non nul. (par D’Alembert Gauss)  
Dans un espace hermitien, un sev stable par un endomorphisme hermitien , a son orthogonal aussi stable par . **Théorème spectral réel.** Tout endomorphisme auto-adjoint d’un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres, càd est diagonalisable dans une base orthonormale de .  
Toute matrice symétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.   
   
Le polynôme caractéristique d’une matrice symétrique réelle est scindé sur R.  
**Théorème spectral complexe.** Tout endomorphisme hermitien d’un espace hermitien admet une base orthonormale de vecteurs propres, càd est diagonalisable dans une base orthonormale.  
Toute matrice hermitienne est unitairement semblable à une matrice diagonale.   
   
Toute matrice antisymétrique réelle est diagonalisable dans et ses valeurs propres sont toutes imaginaires pures.  
**Orthogonalisation simultanée de deux formes quadratiques.**  
Soit une autre forme quadratique sur un ev déjà euclidien pour une première forme quadratique . Alors il existe une base de à la fois -orthonormale et -orthogonale.  
   
Soit une autre forme quadratique sur un ev déjà hermitien pour une première forme quadratique . Alors il existe une base de à la fois -orthonormale et -orthogonale.  
 (TODO vérifier la forme matricielle)  
**Endomorphisme auto-adjoint associé dans un espace hermitien.** Dans un espace hermitien L’application est linéaire de noyau d’image , donc induit un isomorphisme de   
Autrement dit sont isomorphes, fixer un élément revient à fixer un triplet d’associés. On peut choisir l’un des 3 points de vue, et définir les notions abusivement sur les 3 points de vue, par exemple la signature de ou est celle de associé.  
Dans une b.o.n. de , . Si diagonalise , alors   
Dans un espace euclidien, la signature peut s’interpréter comme le nombre de valeurs propres positives, muni du nombre de valeurs propres négatives de l’endomorphisme auto-adjoint associé.  
// non dégénérée  
// positive   
// négative   
// définie positive et   
// définie négative et   
Toute matrice symétrique réelle (étant la matrice d’une forme quadratique) est congruente à une matrice diagonale n’ayant que des , ou sur la diagonale. **II.3.2. Automorphismes unitaires**Soit un espace quadratique.  
Un automorphisme est unitaire ssi c’est une isométrie ssi il conserve la forme quadratique , ssi il conserve la forme bilinéaire ssi il admet son inverse comme adjoint ssi il admet un adjoint et   
L’ensemble des automorphismes unitaires est un sous-groupe de   
 est un morphisme de groupes.   
 est un morphisme de groupes.  
Le spectre d’un automorphisme unitaire est dans . Dans un espace quadratique de dimension finie , un automorphisme est unitaire ssi dans une/toute base de , avec et   
Dans un espace hermitien dimension finie , un automorphisme est unitaire ssi dans une/toute base orthonormale de E càd ssi (avec )  
Un automorphisme est unitaire ssi l’image de toute base orthonormale de E est une base orthonormale de E.  
Soit une base orthonormale, et une base de . Alors orthonormale ssi ()  
Une base de départ étant fixée orthonormale, une base d’arrivée est orthonormale ssi la matrice de passage est une matrice unitaire.  
Une matrice de passage entre bases orthonormales est donc unitaire et réciproquement.  
Une matrice est unitaire ssi ses vecteurs colonnes forment une famille libre et pour chacun d’eux, la somme des carrés des modules des coefficients vaut 1.  
Dans , une matrice est orthogonale ssi ses vecteurs colonnes forment une famille libre et pour chacun d’eux, la somme des carrés des coefficients vaut 1.  
Les sous-espaces propres d’un automorphisme unitaire sont 2 à 2 orthogonaux.   
Dans un espace hermitien, un sev stable par un automorphisme unitaire , a son orthogonal aussi stable par , il y a même invariance , et les endomorphismes induits dessus sont aussi unitaires   
**Théorème spectral unitaire.** Tout automorphisme unitaire d’un espace hermitien est diagonalisable dans une base orthonormale.  
Toute matrice unitaire est unitairement semblable à une matrice diagonale.  
   
   
Dans , est unitairement semblable à   
**II.3.3. Endomorphismes normaux [Gourdon]**Dans un espace quadratique, un sous-espace stable par un endomorphisme admettant un adjoint, a son orthogonal stable par l’adjoint .Un endomorphisme d’un espace quadratique est dit **normal** ssi il admet un adjoint et commute avec.  
Un endomorphisme normal induit sur un sous-espace stable est encore normal.Pour un sous-espace propre d’un endomorphisme normal , alors l’orthogonal est encore stable par .  
Un endomorphisme normal d’un espace euclidien de dimension 2, sans valeur propre réelle, s’écrit dans une base orthonormale avec   
**Théorème spectral normal.** Pour un endomorphisme normal dans un espace euclidien, il existe une base orthogonale telle que avec   
La fonction est surjective. est l’algèbre de Lie associée a  **II.4. Classification des formes quadratiques**Deux formes quadratiques sur un Kev E sont **équivalentes** si .  
Autrement dit, elles sont équivalentes ssi   
Cette def induit une relation d’equivalence sur l’ensemble des formes quadratiques . (et sur )  
En dimension finie, deux formes quadratiques sont équivalentes ssi leurs matrices sont congruentes.  
Deux matrices sont congruentes ssi   
Comme dans le cas réel pour la classification des formes quadratiques, deux formes quadratiques hermitiennes sur un même Cev E, sont équivalentes ssi elles partagent la même signature.  
Dans un Kev de dim finie avec algébriquement clos (ex :C) alors il existe classes d’équivalence décrites par les matrices carrées avec   
Dans un Kev de dim finie ou est algébriquement clos, une forme quadratique admet une base orthonormale ssi elle est non-dégénérée et dans ce cas l’indice de la forme vaut   
Dans un Rev de dim finie , il existe classes d’équivalence décrites par les matrices avec . Dans ce cas la signature de la classe est .  
Dans un Rev de dim finie n, il y a classes d’équivalence pour les formes non-dégénérées. ()  
Dans un Rev de dim finie n, une forme quadratique admet une base orthonormale ssi elle est définie positive.  
Dans un Rev de dim finie n, une forme quadratique non-dégénérée de signature a pour indice   
On se place dans un corps fini de caractéristique   
Dans un corps fini le produit de non-carrés est un carré.  
Dans un corps fini si , l’equation admet au - 1 sol.   
Dans un -ev de dim finie n avec corps fini, il existe classes d’équivalences pour les formes quadratiques décrites par les matrices et   
avec un non-carré de .  
Dans un ev de dim finie n avec corps fini, il existe 2 classes d’équivalences pour les formes quadratiques non-dégénérées.  
**Normes matricielles.**  
Dans un espace Hilbert   
Dans un espace Hilbert   
Dans un espace Hilbert   
Dans un espace hermitien   
Dans un espace Hilbert   
Dans un espace Hilbert   
Dans un espace Hilbert   
Dans un espace hermitien   
Dans un espace hermitien car   
**Compléments.**  
Un opérateur borné d’un Hilbert est dit **positif**  ssi et   
On note pour dire   
Une puissance naturelle d’un opérateur borné positif est un opérateur borné positif   
Pour un opérateur borné auto adjoint d’un Hilbert, on a.   
Attention si , entraine , mais pas vrai si .  
Pour tout opérateur borné T, alors est un opérateur borné auto-adjoint positif.  
**Racine carrée d’un opérateur positif\*.** Pour tout operateur borné T positif , il existe un unique operateur borné positif tel que . On note . De plus l’operateur racine carrée commute avec tout operateur borné qui commute avec T.  
En dimension finie se montre facilement en codiagonalisant et .  
La composée de deux operateurs bornés positifs qui commutent est un opérateur positif.  
On appelle **module d’un opérateur borné**, l’opérateur positif   
Le module d’un opérateur borné est homogène   
En général les propriétés et sont fausses. L’inégalité triangulaire est fausse.  
 est continue pour la topologie uniforme des opérateurs.   
   
La norme d’opérateur d’un opérateur borné et de son module sont égales   
Le noyau d’un opérateur borné = celui de son module.   
Un opérateur borné sur un Hilbert est une **isométrie** ssi il conserve les normes.  
**Décomposition polaire.** Pour tout operateur borné sur un Hilbert, il existe telle que est unique si on rajoute la condition . De plus on a   
Pour ou , est surjective mais pas injective.  
Pour ou , est un homéomorphisme et même difféo.  
Résultats identique en changeant l’ordre en .  
 est convexe.  
**Décomposition de Schur.**

**Complément 1. Théorème de Witt.  
Complément 2. Formes antisymétriques – Matrices symplectiques**