**Chapitre 30. La différentielle  
I. Définitions et premières propriétés  
I.1. Définition.**Une application d’un ouvert de R vers un R-evn est **dérivable** en un point de **dérivée** ssi ssi   
Une application d’un ouvert d’un R-evn E, vers un R-evn F est **différentiable** en un point s’il existe une application linéaire continue de , tel que cad   
Dans ce cas, est l’unique telle application, et on l’appelle **différentielle de en .**Une autre notation intéressante est   
Dans le cas ou , dérivabilité et différentiabilité sont synonymes et   
Dans le cas ou est une forme linéaire continue, si de plus la norme est associe à un produit scalaire, alors s’identifie a par l’isomorphisme et est représenté par un unique vecteur appelé gradient de en ,    
**Généralisation espaces affines.** Une application d’un ouvert d’un ean , vers un ean est **différentiable** en un point ssi càd   
Pour  **est directionnellement dérivable en dans la direction**  ssi admet une limite en , dans ce cas on note   
 **est Gateaux-différentiable en**  ssi est directionnellement dérivable en dans toutes les directions et est linéaire continue.  
Si est différentiable en alors elle est Gateaux différentiable en   
Réciproque fausse. n’est pas différentiable en car pas continue, mais est Gateaux différentiable en .  
Démarche fréquente pour trouver un candidat de différentielle via la définition :   
1) On cherche la dérivée différentielle pour toute direction.  
2) On montre que Est linéaire continue (ce qui montre la Gateaux différentiabilité)  
3) On montre que   
Attention à ne pas confondre et . La continuité de n’a rien à voir avec la continuité de  **I.2. Premières propriétés**Différentiabilité en un point implique continuité en un point.  
Si on remplace la norme sur E, ou celle sur F par des normes équivalentes, le caractère différentiable ne change pas, et si différentiabilité, la différentielle est inchangée. En particulier si E et F sont de dim finie, le caractère différentiable, et la différentielle ne dépendent plus des normes car toutes équivalentes.  
Sur , l’identité est linéaire, de plus est continue donc différentiable, mais pas continue, donc pas différentiable, et ne sont pas équivalentes, donc le caractère différentiable dépend des normes choisies. **I.3. Application différentielle**Si une application d’un ouvert d’un R-evn E, vers un R-evn F est continue en tout point de U, on dit que **f est de classe sur .** On note , la différentielle d’ordre 0 = identité.  
Si est differentiable sur U on note .  
Une application d’un ouvert d’un Revn vers un Revn est **de classe en un point** , ssi est différentiable en tout point d’un voisinage ouvert de et est continue au point   
Une application d’un ouvert d’un Revn vers un Revn est **de classe sur U** ssi est de classe en tout point ssi est différentiable sur U et est continue **II. Quelques exemples et théorèmes classiques  
II.1. Exemples**Une fonction constante est différentiable sur U et sa différentielle est la fonction nulle en tt point de U.  
Une application R-linéaire continue d’un R-evn E, vers R-evn F est différentiable sur E et   
Une application R n-linéaire continue de n R-evns vers un R-evn F, est differentiable sur E et on peut écrire en tout point   
   
En particulier si ,   
Lorsque l’espace de départ est de dimension finie, toute application linéaire ou n-linéaire est continue donc différentiable.   
Tout produit scalaire réel sur un R-ev, définit un evn, est bilinéaire continu, et est différentiable. **II.2. Operations sur les fonctions différentiables**Soit U, V deux ouverts d’un R-evn E, soit un Revn F, soit soit , , si sont differentiables en a, alors leur somme l’est en a et la differentielle en a de la somme est la somme des differentielles en a. Si f est différentiable en a alors l’est de différentielle .  
L’ensemble des applications de U dans F différentiable en est un sev de .  
Soit R-evns, ouvert de E, U ouvert de F, soit tel que .  
Si f différentiable en a et g différentiable en f(a) alors est differentiable en et . En prenant on retrouve la chain rule pour la dérivée.  
Si est a valeurs dans un produit fini de Revns, f est différentiable en un point de son ouvert de definition dans un Revn E ssi ses composantes le sont et dans ce cas on peut décomposer la différentielle   
Ex : , Abus d’écriture le M,N en indice sont fixes, dans les parenthèses il s’agit des variables muettes de l’expression. . Si on veut être encore plus bref, on peut omettre M,N en indice , Attention les M,N a gauche sont des variables d’expression, ceux a droites se réfèrent à des constantes fixées.  
  **III. Différentielles et dérivées partielles**Soit R-evns et F un autre Revn. Soit application d’un ouvert U de E vers F, et .  
On appelle **application partielle d’indice i élémentaire** l’application , elle est differentiable sur et .  
On appelle **application partielle d’indice i de f** l’application .  
**f admet en a une différentielle partielle d’indice i** si son application partielle d’indice i est différentiable au point . Dans ce cas on la note   
Si  **la** **dérivée partielle en a d’indice i de f** est et on a   
Une fonction différentiable en un point a, admet en ce point des différentielles partielles pour tout indice, autrement dit existe existe. Dans ce cas   
Une fonction qui admet en un point des différentielles partielles pour tout indice, n’est pas forcement différentiable en ce point. Par exemple en   
Une fonction différentiable en un point, qui donc y admet des différentielles partielles pour tout indice, n’a pas forcément ses différentielles partielles continues au point : en 0.  
Si toutes les différentielles partielles d’une fonction sont définies au voisinage d’un point et continues en ce point , alors la fonction est différentiable (et même ) en ce point.   
Dans le cas particulier on peut écrire , cad  **IV. Matrice Jacobienne**Si est différentiable en   
Alors la matrice jacobienne de en est la matrice de dans les bases canoniques.  
   
Si différentiable en et différentiable en   
Alors La chain-rule physicienne s’applique avec cette notation.   
Formule pour l’inverse.

**Chapitre 31. Le théorème des accroissements finis  
I. Théorème des accroissements finis  
I.1. Théorème des accroissements finis, cas réel  
Th. Rolle.** Une fonction d’un segment de R vers R continue sur le segment dérivable sur son intérieur, d’images égales aux extrémités du segment, alors la dérivée s’annule en un point intérieur au segment.  
**T.A.F.** Une fonction d’un segment de R vers R continue, dérivable sur l’intérieur, alors il existe un point intérieur ou la dérivée égale la pente entre les extrémités de la courbe.   
Faux si l’espace d’arrivée n’est pas R,  **I.2. Théorème des accroissements finis, cas général  
T.A.F. (Cauchy)**Pour deux fonctions d’un segment vers R continues sur le segment dérivables sur son intérieur, alors  **I.A.F.**  Une fonction d’un segment de R vers un Kevn , continue sur le segment, dérivable sur l’intérieur, et une autre fonction g continue sur le même segment, dérivable sur l’intérieur mais a valeurs dans R, Si alors   
Une fonction f d’un segment de R vers un evn F, continue sur le segment, dérivable sur l’intérieur, dont la dérivée est bornée alors   
L’I.A.F. s’applique encore si la fonction part d’un ouvert U d’un Revn E, sur un segment fixe ,  
Si est continue sur le segment, différentiablesur son intérieur, de différentielle bornée en norme d’op () alors   
De plus si l’ouvert est supposé convexe, et differentiable sur U de différentielle bornée sur U, alors on peut en déduire que est k-lipschitzienne avec . Faux si juste connexe.  
 **est localement lipschitzienne**  sur ssi telle que lipschitzienne. Si , Cela revient à dire compact , est lipschitzienne. **I.3. Une forme forte du théorème des accroissements finis**Affaiblissement de l’hypothèse dérivable sur possible et utile pour certaines théories de primitives.Soit f une fonction d’un segment de R vers un Banach E, continue sur le segment. Soit une autre fonction g continue sur le même segment, a valeurs réelles, mais cette fois on suppose seulement que les dérivées de ces deux fonctions sont définies sur ou D est fini ou denombrable (avant on supposait ). Si alors   
On peut encore affaiblir, et supposer seulement la dérivabilité à droite et . A vérifier. **II. Applications du théorème des accroissements finis  
II.1. Fonctions a dérivées nulles**Si une fonction d’un ouvert U d’un Revn E, vers un Revn F, est différentiable sur U de différentielle nulle partout sur U () alors cette fonction est constante sur les composantes connexes de U. **II.2. Différentielles partielles et différentiabilité**Une application d’un ouvert dans un produit fini de Revns vers un Revn supposée différentiable en un point de l’ouvert, est de classe en ce point ssi les différentielles partielles existent au voisinage de ce point et sont continues en ce point.   
Différentiabilité seule n’entraine pas continuité de la différentielle  **II.3. Gateaux-différentiabilité**Soit une application f d’un ouvert U d’un Revn E, vers un Revn F. On dit que f est **Gateaux-différentiable** en un point s’il existe une application linéaire continue telle que  
 .  
est la **Gateaux-différentielle** de f en a.  
Si f est différentiable en un point a, alors elle est Gâteaux-différentiable en a et sa différentielle coïncident avec la Gateaux-différentielle.  
Si f est Gateaux-différentiable en tout point et continue sur U, alors f est sur U. **II.4. Théorèmes d’interversion :** voir fiche interversions

**Chapitre 32. Les différentielles d’ordre supérieur  
I. Dérivées successives et différentielles successives** est isométriquement isomorphe a   
 est isometriquement isomorphe a   
Une application d’un ouvert d’un Revn vers un Revn est **-fois differentiable en un point**  ssi elle l’est fois en tout point d’un voisinage ouvert de et que est différentiable en . Dans ce cas on note .  
Une application d’un ouvert d’un Revn vers un Revn est **-fois différentiable sur**  ssi elle l’est en tout point de . Dans ce cas est bien définie.  
Une application d’un ouvert d’un Revn vers un Revn est **de classe en un point** , ssi est -fois differentiable en tout point d’un voisinage ouvert de et est continue au point . Autrement dit ssi en et est en .  
Une application d’un ouvert d’un Revn vers un Revn est **de classe sur U** ssi elle est en tout point de ssi sur et est sur .  
Une application d’un ouvert d’un Revn vers un Revn est **-fois différentiable en un point**  ssi  **est de classe en**  ssi est -fois différentiableen ssi est en .  
Une application d’un ouvert d’un Revn vers un Revn est **-fois différentiable sur / sur U** ssi elle l’est en tout point de .  
Par exemple pour une fonction en , on peut voir comme une application bilineaire continue de ou comme une application linéaire continue .  
Pour une fonction en on privilégie point de vue -lineaire continue :   
On écrira donc pour son image en un point.  
On appellera la **différentielle d’ordre linéaire au point .**  
On appellera la **fonction différentielle globale d’ordre**  (pas forcement linéaire).  
En pratique on évoque assez rarement la fonction différentielle globale, on manipule généralement mais avec l’habitude de ne pas mentionner explicitement, donc en écrivant ce qui peut créer confusion. Quand on écrit en physique et même en maths, il s’agit bien souvent de la différentielle linéaire ponctuelle en un point fixé sous-entendu.  
Soit R-evns et F un autre Revn. Soit application d’un ouvert U de E vers F, et .  
On appelle **application partielle d’indice elementaire**: , elle est differentiable sur et .  
On appelle **application partielle d’indice de f** l’application .  
**f admet en a une différentielle partielle d’indice i** ssi son application partielle d’indice i est différentiable au point . Dans ce cas on la note  **f admet en a une différentielle partielle d’ordre d’indice** ssi sa différentielle partielle d’ordre d’indice est différentiable au point . Dans ce cas on la note   
Si la **dérivée partielle en d’indice de** est et on a   
la **dérivée partielle en d’ordre d’indice de** est  est différentiable en existe au voisinage de (mais pas forcément continue en )  
 en existe au voisinage de et continue en est différentiable en et continue en   
**Formules utiles différentielles.**  
Dans ce cas   
Dans ce cas si de plus, on a :   
 alors avec   
 alors   
Si , et  **II. Premiers exemples et résultats classiques**Soit Revns, soit ouvert de Une fonction constante de , est de classe sur , et sa fonction différentielle globale est nulle a tout ordre.  
Une fonction linéaire continue est sur , , et donc .  
Une fonction -lineaire continue est sur .  
Une fonction est -fois differentiable (resp /) en un point ssi ses composantes le sont, et dans ce cas   
**Th. composition.** Soit -evns, ouvert, , , ouvert tel que , . Si -fois differentiable (resp , resp ) en et -fois differentiable (resp , resp ) en alors -fois differentiable (resp , resp ) en   
On a a l’ordre 1. Qu’a-t-on à l’ordre (une formule compliquée?)  
Soit -evns, ouvert, , , soit . Si et -fois differentiables (resp resp ) en , alors  
 -fois differentiable (resp resp ) en et   
 -fois differentiable (resp resp ) en et   
si , -fois differentiable (resp resp ) en   
si , et , -fois différentiable (resp resp ) en   
Exemple :   
Pour un espace de Banach, l’ensemble des automorphismes continus est ouvert dans l’application de cet ensemble qui a un automorphisme associe son inverse est sur et  **III. Théorème de Schwartz  
Théorème de Schwartz.** Une fonction d’un ouvert d’un -evn , vers un -evn , 2-fois differentiable en un point , a une differentielle ponctuelle d’ordre 2 qui en plus d’être bilinéaire continue, est symétrique : Dans le cas produit ,  
 existe au voisinage de et continue en 2-fois différentiable en cad existe.   
 2-fois différentiable en existe au voisinage de , mais pas forcément continues en .  
 2-fois différentiable en   
 existe au voisinage de n’implique pas 2-fois différentiable en ni   
 existe au voisinage de et continue en de classe en   
Dans , mêmes résultats en prenant   
**Contre-exemple Peano.**   
**Théorème de Schwartz (k).** Une fonction d’un ouvert d’un -evn , vers un -evn , -fois differentiable en un point , a une différentielle d’ordre k qui en + d’être k-linéaire continue, est symétrique :   
Dans le cas produit ,  
 k-fois différentiable en existe au voisinage de   
 k-fois différentiable en   
 existe au voisinage de et continue en k-fois différentiable en   
 de classe en existe au voisinage de et continue en   
 de classe en de classe en et de classe en   
Si , k-fois différentiable en  **IV. Matrice hessienne**Une fonction d’un ouvert de , vers R, 2-fois différentiable en un point , a pour différentielle ponctuelle d’ordre 2 en une forme bilinéaire continue symétrique.  
La **matrice hessienne de en** est la matrice représentative de cette forme bilinéaire dans la base canonique de .  
On a donc on peut écrire  **V. Formules de Taylor**En notant n fois,   
Si , on a   
Si n’est pas R, ne se simplifie pas mais avec . Donc en appliquant TL a entre et , on obtient les formes générales pour le calcul diff. **Formule de Taylor-Lagrange, reste intégral.** Si est d’un ouvert d’un -evn , vers un Banach , alors   
 **Inégalité de Taylor-Lagrange.** Si est fois différentiable d’un ouvert d’un -evn , vers un Banach , telle que alors   
 En particulier  
En particulier. Mais hypothèse plus forte que TY. **Formule de Taylor-Young.** Si est fois différentiable d’un ouvert d’un -evn , vers un Banach ,   
 **Unicité de Taylor-Young.** Si de plus est et alors une certaine matièrecours, bles (s.upe).es donc ne pouveant avoir cours en meme temps)   
**VI. Formes différentielles**Une **1-forme différentielle de classe d’un ouvert d’un espace euclidien** , est un champ de formes linéaires . On note l’image d’un point .  
Pour un espace euclidien de base on définit , on peut aussi voir comme une 1-forme différentielle constante   
Une 1-forme différentielle s’écrit donc avec .  
Donc et   
La différentielle globale d’une fonction scalaire (vers ) définie sur un ouvert d’un espace euclidien, est toujours une 1-forme différentielle sur , de classe . (donc exacte)  
**Une 1-forme différentielle sur un ouvert d’un euclidien est exacte** ssi c’est la différentielle globale d’une fonction scalaire , càd , càd admet une primitive sur .  
**Une fonction scalaire est primitive d’une 1-forme différentielle sur**  ssi .  
**Un champ de vecteurs d’un espace euclidien dérive d’une fonction scalaire** ssi .  
**Une fonction scalaire est un potentiel d’un champ de vecteurs**  ssi le champ de vecteurs en dérive.  
Une **1-forme différentielle sur un ouvert d’un euclidien est fermée** ssi   
Une 1-forme différentielle exacte sur un ouvert est fermée sur . (Par Schwartz)  
**Un ouvert est étoilé par rapport à un de ses point**  ssi pour tout autre point de l’ouvert, le segment  **Poincaré.** Une 1-forme différentielle fermée sur un ouvert étoilé , est exacte sur .  
**L’intégrale curviligne d’une 1-forme différentielle sur ouvert d’un euclidien , le long d’un arc géométrique orienté de paramétrage direct d’image incluse dans l’ouvert**  est en notation physicienne :   
L’intégrale curviligne est indépendante du paramétrage direct choisi de .  
Si on prend un paramétrage indirect l’intégrale change de signe.   
**Linéarité de l’intégrale curviligne pour un même arc.**   
**Chasles pour l’intégrale curviligne.** Si la fin de est le début de dans :   
**Intégrale curviligne d’une 1-forme différentielle exacte.** en notant le début, et la fin de l’arc dans , pour n’importe quelle primitive de sur .  
L’intégrale curviligne d’une 1-forme différentielle exacte le long d’un lacet de est nulle :   
**Green-Riemann.** TODO  
Aire d’un domaine délimité par un arc orienté =   
Aire d’un domaine délimité par un arc en coordonnées polaires :

**Chapitre 33 Théorème d’inversion locale des fonctions implicites et du rang  
I. Difféomorphisme**Pour , un  **difféomorphisme (global)** est une application d’un ouvert d’un Revn, vers un autre ouvert d’un autre Revn, qui est bijective, de classe et dont la réciproque est également de classe .  
Deux ouverts de Revn possiblement distincts, sont **-difféomorphes** ssi il y a un difféomorphisme entre les deux.  
La composée de difféomorphismes est un difféomorphisme.  
R est difféomorphe a chacun de ses intervalles ouverts.  
 n’est pas un difféomorphisme.  
Pour , une application d’un ouvert d’un Revn, vers un autre Revn, est un  **difféomorphisme local en un point** de son domaine ouvertssi en restreignant son domaine a un voisinage ouvert de , et son codomaine a un voisinage ouvert de , on obtient un difféomorphisme.  
Pour , une application d’un ouvert d’un Revn, vers un autre Revn, est un  **difféomorphisme local sur son ouvert** ssi elle l’est en tout point de son domaine ouvert.  
Les précédentes définitions de cette section se généralisent au cas - différentiable, en remplaçant le terme par -différentiable.  
 n’est pas un difféomorphisme, mais c’est un difféomorphisme local sur .  
Pour un -différentiable difféomorphisme , alors et . Reciproque fausse en général ()  
Un difféomorphisme local sur tout un -evn , et bijectif vers tout un -evn , est un difféomorphisme global de .   
Un homéomorphisme n’est pas forcément un difféomorphisme   
Un ouvert de ne peut être difféomorphe a un ouvert de si (  
Un ouvert de ne peut être homéomorphe a un ouvert de avec . (Th. Brower)  
Soient 4 ouverts dans 4 Revns, deux applications sont **-conjuguées** s’il existe deux difféomorphismes tels que , autrement dit tels que le diagramme commute.  
Distordre l’input de puis appliquer revient a appliquer puis distordre son output.  
Soient 4 ouverts dans 4 Revns,  **est localement conjuguée a au voisinage d’un point**  ssi en restreignant le domaine de a un voisinage ouvert de , et le codomaine de a un voisinage ouvert de , est conjuguée à une restriction de , notee telle que ouvert inclus dans , ouvert inclus dans .  
 tout diffeomorphisme est conjugue a l’identité par le diagramme   
**II. Théorème d’inversion locale  
II.1. Enonce et exemples  
Théorème d’inversion locale.\*** Pour , une application de classe sur ouvert d’un Banach , vers un autre Banach , dont la différentielle en est inversible cad isomorphisme d’ev cad , alors est difféomorphisme local en . N’implique pas bijective de E sur F  
Pour pouvoir appliquer ce théorème il est implicite que et doivent être isomorphes. En dimension finie, cela suppose , dans ce cas via le choix de bases on identifie, et a et on a inversible   
 est un difféomorphisme local sur mais pas un diffeomorphisme global sur   
L’hypothèse est indispensable dans le th inversion locale : au voisinage 0.  
**Théorème d’inversion globale.** Pour , une application de classe sur ouvert d’un Banach , vers un autre Banach , injective et dont la différentielle est inversible en tout point de alors est un ouvert (ce point-là n’a pas besoin d’injectivité de ) et est un difféomorphisme de sur .  
**II.2. Lemmes du théorème d’inversion locale**Dans un espace de Banach , la boule ouverte (de ) de centre l’identité de rayon 1, ne contient que des automorphismes. . De plus   
L’ensemble des automorphismes continus d’un Banach E, est un ouvert de .  
Soit avec -lipschitzienne, avec Banach, ouvert de alors est un homeomorphisme de sur , est un ouvert de , et l’application est -lipschitzienne. **II.3. Applications du théorème d’inversion locale  
II.3.1. Perturbation de l’identité**Pour une application d’un Banach dans lui-même dont la différentielle en tout point du Banach, est uniformément bornée en norme d’opérateur par un cad , alors on a pour tout l’application est diffeomorphisme du Banach dans lui-même. **II.3.2. Isométries de**Une application de vers isométrique, dont la différentielle est inversible en tout point de , est surjective. **III. Théorème des fonctions implicites\***Soit une application avec 3 Banachs et ouvert, et soit un point d’image .  
Si la différentielle partielle pour la 2-ieme variable, est inversible cad , alors d’un voisinage ouvert de vers un voisinage ouvert de telle que on a   
En particulier et   
De plus   
Remarque : Les 2 precedents th permettent de résoudre des équations. Le th inversion locale donne existence d’une unique solution, alors que le th. fonctions implicites en donne une infinité (un graphe). On peut faire une analogie avec résolution système linéaires. Lorsqu’il y a autant d’inconnues que d’équations, la méthode de Cramer permet d’obtenir une unique solution, s’il y a plus d’inconnues que d’équations, on exprime certaines inconnues en fonction des autres.  
Exemples : TODO

**Chapitre 34 Problèmes d’extrema  
I. Extrema libres  
I.1. Définitions générales sur les extrema**Soit d’un espace topologique vers R, et  est un **point de minimum (resp. maximum) de**  ssi (resp. )  
 est un **point de minimum (resp. maximum) strict de**  ssi c’est un point de minimum de , qui est l’unique antécédent de son image, ssi   
 est un **point de minimum (resp. maximum, resp. strict) local de**  ssi c’est un point de minimum de restreinte a un certain voisinage de ssi   
Un **minimum (resp. maximum (strict ou non) (local ou non))** est l’image d’un point de minimum (resp…)  
Un **extremum** est un minimum ou un maximum. Pluriel : minima, maxima, extrema  
est un point de minimum de ssi est un point de maximum de .  
Un **point critique** d’une application d’un ouvert d’un R-evn vers R, est un point de l’ouvert en lequel, l’application est différentiable de différentielle nulle .  
Une **valeur critique** d’une application d’un ouvert d’un R-evn vers R, est un l’image d’un point critique.  
Un **point selle = point col** d’une application d’un ouvert d’un R-evn vers R, est un point critique pour lequel . Autrement dit, c’est un point critique qui n’est pas un extremum local. **I.2. Préliminaires sur les formes bilinéaires continues**Sur un Revn , une forme bilinéaire continue est **-coercive**avec ssi   
Il existe des formes bilinéaires ni positives ni négatives. Par ex   
Une forme bilinéaire continue coercive est définie positive. Réciproque vrai en dim. finie.  
Sur un Revn de dimension finie, une forme bilinéaire continue est coercive ssi elle est définie positive.  
En dimension finie réciproque fausse : , ,  **I.3. Conditions nécessaires à l’existence d’un extremum  
1er ordre.** Une fonction d’un ouvert d’un Revn vers R, qui admet un extremum local en un point où elle est supposée différentiable, alors ce point est un point critique pour cette fonction.   
En dimension finie   
**2nd ordre.** Une fonction d’un ouvert d’un Revn vers R, qui admet un minimum (resp. max) local en un point où elle est supposée 2x différentiable, alors la forme bilinéaire est positive (resp. négative).  
En dimension finie positive positive, et négative négative.  
Attention les réciproques de ces 2 conditions nécessaires sont fausses. Ex : en 0.  
Ces deux conditions nécessaires ne permettent pas de trouver directement les extrema mais sont quand même très utiles car permettent de restreindre très fortement l’ensemble des candidats possibles.  
Pour une application convexe et différentiable sur un ouvert convexe d’un Banach, tout point critique est un point de minimum. **I.4. Condition suffisante à l’existence d’un extremum**Une fonction d’un ouvert d’un Revn vers R, qui admet un point critique où existe et est coercive, alors admet un minimum local strict en ce point critique.L’hypothèse coercive est indispensable, et en dim finie équivaut a def positive.  
On retrouve la version et implique min local strict de .  
Une fonction convexe coercive d’un convexe fermé dans un Banach séparable vers R, admet un minimum. (difficile, utilise la topologie faible). **II. Extrema liés**Les résultats précédents ne s’appliquent plus forcément sur des parties non ouvertes du domaine de la fonction, en particulier lorsque ces parties sont définies par des contraintes sous forme d’égalités ou d’inégalités non strictes. Ex : n’a pas de min sur mais a un min en 0 sur   
Un point d’extrema sur une partie non ouverte n’est pas forcément un point critique. **II.1. Enonce du théorème des multiplicateurs de Lagrange et exemples**Soit une fonction (qu’on cherche à optimiser) d’un ouvert d’un Banach vers , Soit une fonction représentant les contraintes, et .  
Si admet un extremum local en un point où elle est différentiable, et où la différentielle de est surjective alors tels que , c’est-à-dire que la différentielle en de doit être une combinaison linéaire réelle des différentielles ponctuelles des contraintes composantes. Les réels s’appellent les **multiplicateurs de Lagrange**. Un tel extremum vérifiant ces conditions est un **extremum lié.**  
 surjective signifie est de rang , si , cela se simplifie en .  
Sous , la combinaison linéaire se traduit par   
Si la combinaison linéaire est impossible cela permet de conclure qu’il n’y a pas d’extremum de sur   
On peut utiliser d’autre raisonnements pour montrer l’existence d’un extremum sur , par exemple, si est compact, on sait qu’il y en a au moins un.  
**Applications convexes.**La stricte convexité permet de montrer l’unicité dans un problème d’optimisation.  
Une fonction strictement convexe d’un convexe vers alors il existe au plus un tel que .   
La convexité n’assure pas en général l’existenced’un problème d’optimisation.  
Une fonction différentiable d’un ouvert convexe de vers , est convexe  
ssi la fonction est au-dessus de ses tangentes.  
ssi .  
Une fonction 2x différentiable d’un ouvert convexe de vers est convexe ssi .  
Une fonction 2x différentiable d’un ouvert convexe de vers dont est définie positive, est strictement convexe, mais réciproque fausse ( ).

**Chapitre 35 La notion de sous-variété.   
I. Difféomorphisme**Pour , un  **difféomorphisme (global)** est une application d’un ouvert d’un Revn, vers un autre ouvert d’un autre Revn, qui est bijective, de classe et dont la réciproque est également de classe .  
La composée de difféomorphismes est un difféomorphisme.  
R est difféomorphe a chacun de ses intervalles ouverts.  
Pour , une application d’un ouvert d’un Revn, vers un autre Revn, est un  **difféomorphisme local en un point** de son domaine ouvertssi en restreignant son domaine a un voisinage ouvert de , et son codomaine a un voisinage ouvert de , on obtient un difféomorphisme.  
Pour , une application d’un ouvert d’un Revn, vers un autre Revn, est un  **difféomorphisme local sur son ouvert** ssi elle l’est en tout point de son domaine ouvert.  
Les précédentes définitions de cette section se généralisent au cas - différentiable, en remplaçant le terme par -différentiable.  
Pour un -différentiable difféomorphisme , alors et .  
Un difféomorphisme local sur tout un -evn , et bijectif vers tout un -evn , est un difféomorphisme global de .   
Soient 4 ouverts dans 4 Revns, deux applications sont **-conjuguées** s’il existe deux difféomorphismes tels que . Distordre l’input de l’une puis appliquer l’autre revient à appliquer l’une puis distordre son output. Autrement dit . Intuitivement est une version distordue de .  
Soient 4 ouverts dans 4 Revns,  **est localement conjuguée a au voisinage d’un point**  ssi en restreignant le domaine de a un voisinage ouvert de , et le codomaine de a un voisinage ouvert de , est conjuguée à une restriction de , notee telle que ouvert inclus dans , ouvert inclus dans . **Théorème d’inversion locale.** Pour , une application de classe sur ouvert d’un Banach , vers un autre Banach , dont , alors est difféomorphisme local en .   
**Théorème d’inversion globale.** Pour , une application de classe sur ouvert d’un Banach , vers un autre Banach , injective et dont la différentielle est inversible en tout point de alors est un ouvert et est un difféomorphisme de sur .Le **rang** **d’une application linéaire entre 2 Rev de dimension finie** est la dimension de son image.  
Le **rang d’une application différentiable entre 2 Rev de dimension finie en un point**  est le rang de sa différentielle en ce point .   
Pour une application linéaire, ces deux dernières définitions coïncident.  
Le rang d’une application différentiable en un point est invariant par conjugaison.  
Soit une fonction différentiable d’un ouvert d’un Revn dim finie , vers un autre Revn dim finie ,  
 est une **immersion en un point**  ssi injective ssi   
 est une **immersion** (sur U) ssi est une immersion en tout point de   
 est une **submersion** **en un point**  ssi surjective ssi   
 est une **submersion** (sur U) ssi est une submersion en tout point de   
 est un **plongement** (sur U) ssi est une immersion et un homéomorphisme de vers .  
Les immersions et les submersions sont donc des applications dont le rang est maximum.  
S’il existe une immersion de alors   
S’il existe une submersion de alors   
Soit Revns de dim finie , et soit .  
Une submersion en un point est localement conjuguée au voisinage de a la projection canonique . (dans ce cas ).  
Une submersion correspond intuitivement à une projection canonique distordue.  
Une immersion en un point est localement conjuguée au voisinage de a l’injection canonique . (dans ce cas )  
Une immersion correspond intuitivement à une injection canonique distordue.  
En fait pour être plus précis l’une des deux distorsions s’avère être l’identité. **Forme normale locale submersion.** Une submersion en un point , alors difféomorphisme local en , tel que au voisinage de ,   
**Forme normale locale immersion.** Une immersion en un point , alors difféomorphisme local en , tel que au voisinage de ,   
Une submersion est une application ouverte.  
Une submersion d’un compact non vide vers une partie connexe est surjective.  
Une forme linéaire est une submersion ssi elle est non nulle.  
Si , une forme linéaire n’est jamais une immersion. Si une forme linéaire est une immersion ssi elle est non nulle.  
Soit une fonction avec Revns de dim finie , et soit .  
Si est de rang (resp. ) en , alors il existe un voisinage ouvert de , sur lequel le rang de est constant egal a (resp. ). Autrement dit, l’ensemble des points de ou est de rang (resp. ) est une partie ouverte de . **Théorème du rang constant.** Soit une fonction avec Revns de dim finie , et soit . Alors est de rang constant sur un voisinage de ssi est conjuguée localement en a une application linéaire de vers .  
**Cartes, atlas, variétés différentielles.**Une **carte locale** d’un espace topologique , vers un evn correspond à un couple où est un ouvert de et est un homéomorphisme de sur . La réciproque est appelée **paramétrisation de**  relativement à la carte . Les **coordonnées locales** d’un point relativement à la carte sont données par l’image . Définition analogue pour les autres classes de régularité.  
Pour 2 cartes locales , l’application de **changement de cartes de a**  est   
Un **atlas**  correspond à une famille de cartes locales dont les ouverts recouvrent l’espace de départ telle que tous les changement de cartes sur cette famille sont des difféomorphismes.  
Deux atlas sont dit **compatibles** ssi leur réunion donne encore un atlas . C’est une relation d’eq.  
Tout atlas est contenu dans un atlas maximal.  
Une **variété différentielle de classe de dimension**  est un espace topologique séparé à base dénombrable d’ouverts, muni d’un atlas maximal a valeurs dans .  
On peut remplacer « séparé à base dénombrable d’ouverts » par « métrisable séparable (admet une partie dénombrable dense) » ou par « séparé et dénombrable à l’infini càd : avec et compact »  
Une variété différentielle est une variété topologique. Une variété est une variété pour   
Si on parle de variété **lisse**, si on parle de variété **analytique** **réelle**. En pratique les termes « lisse » et « différentielle » sont omis, l’ordre de régularité n’est précisé qu’au besoin.  
Dans le cas complexe avec changements de cartes holomorphes on parle de variétés (analytiques) complexes ou holomorphes.  
On peut lire dans les cartes les propriétés relatives au calcul différentiel.  
Une application entre deux variétés , est une application **de classe en**  avec , ssi il existe des cartes , telles que l’application retranscrite dans les cartes càd est une application en   
Une application entre deux variétés , est **de classe** ssi elle l’est en tout point .  
Ainsi définie, la () différentiabilité est indépendante du choix des cartes, car conservée par changement de cartes supposés par définition d’une variété. (Motive ce choix dans la définition).  
Pour cela n’a pas toujours de sens, des atlas compatible pouvant ne pas être compatibles.  
La sphère de munie de la topologie induite par celle de est une variété analytique lisse réelle de dimension en prenant comme atlas les projection stéréographiques Nord et Sud definies respectivement sur et . Le changement de carte est un difféomorphisme lisse et même analytique. **I. Sous-variétés de**On note pour ,  **I.1. Définitions**   
Soit , et   
**1. Définition locale par redressement.**  
En un point , on dit que  **est un redressement en au point** **, de classe , de dimension**  ssi est difféomorphisme d’un voisinage ouvert de sur un voisinage ouvert de (par ex ), tel que et   
 est une **sous-variété de de classe de dimension** , ssi admet en chacun de ses points un redressement de classe et de dimension .  
En termes vagues : chaque point d’une sous-variété admet un voisinage induit sur qui est une distorsion d’un ouvert/d’une boule unité de contenant 0 (ou un point fixé). **2. Définition locale par équation/fonction implicite.** est une **sous-variété de de classe de dimension** , ssi admet en chaque , un voisinage de , et une submersion en telle que   
En termes vagues : sous-variété de dim. ssi chacun de ses points admet un voisinage induit sur qui peut se voir comme l’image réciproque de (un point fixé) par une projection canonique distordue sur  **3. Définition locale par paramétrage.** est une **sous-variété de de classe de dimension** , ssi admet en chaque , un voisinage de , un voisinage de , et une immersion en , telle que et homéomorphisme de sur .  
En termes vagues : sous-variété de dim. ssi chacun de ses points admet un voisinage induit sur qui peut se voir comme l’image directe d’une injection canonique distordue d’un voisinage de de vers  **4. Définition locale par graphe.** est une **sous-variété de de classe de dimension** , ssi admet en chaque , un voisinage de , un ouvert et de classe telle que soit le graphe de cad   
Exemples : , sont des sous-variétés de dimension . **Lien avec les variétés différentielles.**Une sous-variété de est une variété : notant , la définition par redressement donne pour tout sur un voisinage , un difféomorphisme tel que . Notant la projection , alors est un atlas de de régularité celle de comme sous-variété de .  
On s’intéresse à formuler une réciproque.  
Une application entre deux variétés , est un **plongement**  ssi est un homeomorphisme de sur et est une immersion (lue dans les cartes, est en tout point une immersion ).  
Une application avec variete est un plongement ssi est une sous-variété de et est un difféomorphisme de sur   
**Théorème de Whitney.** Pour et une variété de dimension non nécessairement compacte, alors il existe un plongement de dans   
Intuitivement toute variété différentielle peut être vue comme sous-variété de pour suffisamment grand.  
**Propriétés.**Une partie finie ou dénombrable de est une sous-variété de de classe et de dimension 0.  
Toute sous-variété connexe de dimension 1 est difféomorphe soit a soit a .  
**Espace Tangent.**Soit une sous-variété de de classe de dimension   
est un **vecteur tangent à la sous-variété en**  ssi , et et , autrement dit ssi est le vecteur tangent en d’une courbe sur la variété passant par .  
L’ **espace** **vectoriel tangent à la sous-variété en**  est l’espace vectoriel des vecteurs tangents a en .   
**L’espace** **affine tangent à la sous-variété en**  est l’espace affine correspondant   
Suivant la façon dont est définie la sous-variété, on peut donner la valeur de   
Définition implicite : si est un voisinage de dans et une -submersion en tels que , alors   
Définition par paramétrage : si est un voisinage de dans et est un voisinage de dans , une -immersion en envoyant sur tels que est un homéomorphisme de sur , alors   
Définition par redressement : si et sont des voisinages respectifs de dans et de dans , si un -difféomorphisme envoyant sur et tel que , alors . **Exemples de sous-variétés.**Tout ouvert de  sous-variété analytique réelle.  
Les espaces projectifs peuvent être vu comme sous-variétés, mais pas une sous- variété de .  
Les groupes (ouvert de ), sous-variétés analytiques  
 sous-variétés analytique réelles mais pas complexes. **Contre-exemples (pas des sous-variétés).**   
 replie sur lui-même, replie sur lui-même en oscillant, les géodésiques irrationnelles du tore . **I.2. Niveaux de fonctions et sous-variétés  
I.3. Images de fonctions et sous-variétés  
II. L’espace tangent a une sous-variété de**