**Déterminants**

Une **application linéaire**, d’un ev vers un ev sur un même corps est une application telle que et , càd telle que

est l’espace des applications linéaires de vers   
 est l’espace des applications linéaires continues de vers .  
norme sur   
 complet complet

Une **application -linéaire**, d’un produit de evs vers un ev sur un même corps est une application , telle que l’application est dans   
 est l’espace des applications -linéaires de vers   
 est l’espace des applications -linéaires continues de vers   
 complet complet  
 est isométriquement isomorphe a

est un sev de

est un sev de

On note

Une application -linéaire est dite **symétrique** ssi , càd ssi échanger deux arguments ne change pas le résultat.

est un sev de

Une application -linéaire est dite **antisymétrique** ssi , càd ssi échanger deux arguments change le résultat de signe.

,

est un sev de

Pour -linéaire symétrique on a

Pour -linéaire antisymétrique

Une application -linéaire est dite **alternée** ssi

Une application -linéaire alternée est antisymétrique. La réciproque est vraie pour de caractéristique .

Une forme -linéaire est une application de

Une forme -linéaire alternée/antisymétrique est une application de pour

Soit un ev de dimension finie avec de caractéristique   
   
Pour   
   
   
   
   
   
   
Pour base de   
Pour alors est une base de   
Pour si ou alors est une base de   
Pour alors est une base de

Le **déterminant d’une famille à éléments dans une base de**  est

Pour base de

Pour base de est une base de qui est donc de dimension 1.

Pour base de est l’unique tel que

Pour bases de

Une famille est libre ssi base de

Pour ,

Pour base de ,

Dans un ev sur un corps , le déterminant de la composée d’endomorphismes est le produit des déterminants.

Un endomorphisme d’un ev de dim finie est inversible ssi son déterminant est non nul.   
Dans ce cas le déterminant de l’endomorphisme inverse est l’inverse du déterminant.

Le **déterminant d’une matrice carrée de**  est . C’est aussi le déterminant de l’endomorphisme canonique de associé à la matrice.

Sur un corps , le déterminant du produit de matrices de est le produit des déterminants.

Une matrice de est inversible ssi son déterminant est non nul.   
Dans ce cas le déterminant de la matrice inverse est l’inverse du déterminant.

Une matrice de sur un anneau est inversible ssi son déterminant est inversible dans l’anneau.

Deux matrices carrées semblables ont même déterminant.

Le déterminant d’un endomorphisme est égal au déterminant de sa matrice représentative dans n’importe quelle base. base de ,

Une matrice carrée et sa transposée ont même déterminant.

Ainsi le déterminant d’une matrice carrée est aussi celui de ses lignes.

Un endomorphisme et sa transposée ont même déterminant.

Le déterminant d’une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit de ses éléments diagonaux.

Le déterminant d’une matrice triangulaire par blocs (supérieure ou inférieure) est le produit de ses matrices diagonales.

**Operations sur les lignes et les colonnes.**

Permuter deux lignes/colonnes, donne un déterminant opposé.

Dilater une ligne/colonne par , multiplie le déterminant par .

Faire une transvection ne change pas le déterminant.

Mêmes résultats pour les lignes et les colonnes.

**Développement du déterminant.**

Pour , on note le déterminant de la matrice extraite de en enlevant la ligne et la colonne .

Pour , **le cofacteur de** est

**Développement du déterminant selon la -eme colonne.**

**Développement du déterminant selon la -eme ligne.**

La **comatrice** d’une matrice est la matrice de ses cofacteurs :

**Formule de la comatrice.**

Pour ,

**Déterminants usuels.**

est solution du système

**Vandermonde.**

**Matrice circulante.**  avec

Pour que le déterminant d’une matrice par blocs se calcule comme le déterminant d’une matrice ,

* il suffit qu’au moins un bloc soit inversible et commute avec un autre bloc adjacent
* il suffit que deux blocs adjacents commutent et que le corps soit infini.

et

et infini

**Déterminants extraits.**

Le rang d’une matrice est la taille maximale d’une matrice carrée extraite de dont le déterminant est non nul.

Plus précisément : Dans une matrice , pour une sous-matrice carrée de déterminant non nul et de taille au rang de , on peut trouver une matrice carrée de taille contenant et dont le déterminant est encore non nul.

Donc si en énumérant tous les sous-matrices contenant , le déterminant fait 0 on sait que .

Une sous-matrice d’une matrice est **principale** ssi son déterminant est non nul et elle est de taille (maximale) avec   
La fonction est semi-continue inférieurement donc . Le rang ne peut localement qu’augmenter  
   
 est ouvert dense dans

**Rang de la comatrice.**

**Orientation d’un espace vectoriel.** Soit un ev de dimension .   
**Deux bases sont équivalentes** ssi . Autrement dit, l’unique telle que vérifie . Cela définit une relation d’équivalence sur les bases de .  
Il y a exactement deux classes d’équivalences. Choisir une telle classe c’est **orienter** . On désigne la classe choisie comme **la classe directe**. Remarque : Les deux classes d’équivalences sont exactement les 2 orbites pour l’action de sur l’ensemble des bases de   
**Déterminant défini comme volume.** Soit un ev euclidien de dim , muni d’une b.o.n.d.   
   
**Le parallélotope engendré par la famille**  est   
Si extension (finie) d’un corps infini et , si dans alors dans .

**Système d’équations linéaires**

Une **équation matricielle linéaire ,**  correspond au couple avec

Une **solution de**  est un tel que

Une **équation linéaire de taille**  correspond à un uplet càd correspond à un couple avec

Une **solution de** est un satisfaisant

Un **système d’équations linéaires**  correspond à un ensemble ordonné fini de équations linéaires de taille . Càd .

Une **solution d’un système d’équations linéaires** est un satisfaisant toutes les équations linéaires du système.

Un système d’équations linéaires correspond à une équation matricielle linéaire ,en posant et .

On identifie les deux concepts sous le nom de **système d’équations linéaires** , en adoptant le point de vue que l’on préfère selon les situations.

Le **système homogène associé à un SLE** est le même SLE avec .

Une **solution homogène d’un SLE** est une solution du système homogène associé.

**Deux SLE sont équivalents** ssi ils ont les mêmes solutions.

Un **SLE est compatible** ssi il admet au moins une solution.

Pour un SLE sur un corps infini, on a 3 cas possibles : 1) pas de solution, 2) une unique solution, 3) une infinité de solution.

Pour un SLE homogène on a toujours au moins la solution nulle.

L’ensemble des solutions homogènes d’un SLE est un sev de de dimension

S’il est non vide, l’ensemble des solutions d’un SLE est un sev affine de de direction , ainsi pour un , on peut écrire . Dans ce cas SLE a une solution unique ssi

**Théorème de Rouché-Fontené**. Un SLE admet une solution ssi , dans ce cas le résultat précèdent s’applique et

Un **SLE est de Cramer** ssi il est carré et admet exactement une solution, càd ssi

**Formule de Cramer.** Pour un SLE de Cramer, on a

**Pivot de Gauss.** L'élimination de Gauss-Jordan peut résoudre un système d'équations , où est une matrice de rang , est un vecteur fixé, et le vecteur inconnu. On crée un tableau à lignes et colonnes en bordant la matrice par le vecteur . On applique des opérations sur les lignes (on multiplie à gauche par les matrices élémentaires) pour obtenir la matrice sous forme **échelonnée réduite** : le nombre de précédant le pivot (la première valeur non nulle) d'une ligne augmente ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste en fin de compte plus que des zéros, et les pivots valent tous .

Si les pivots de la matrice échelonnée réduite associée à sont situés uniquement dans les m premières colonnes (ce qui est toujours le cas si  ) et ont pour indice de colonnes  , alors la dernière colonne fournit une solution particulière, obtenue en prenant tous ses termes nuls sauf ceux situés à la ligne d'indice et à qui on donne la valeur du terme situé à la ligne de la dernière colonne, variant de à .

On obtient la solution générale du système en ajoutant à cette solution particulière un élément quelconque du noyau de . Celle-ci s'obtient en donnant des valeurs quelconques aux coefficients de situés à un indice de ligne autre que les , et en déterminant les coefficients situés aux lignes d'indice de façon à satisfaire le système (ce qui est facile compte tenu de la forme échelonnée de la matrice).

Si le dernier pivot de la matrice échelonnée réduite associée à se situe dans la dernière colonne, alors il n'y a pas de solution.

Si la matrice est carrée inversible (autrement dit, le système est de Cramer), alors on obtient dans la dernière colonne l'unique solution du système.

Variante : dans l'algorithme précédent, si on se borne à obtenir une matrice échelonnée (non réduite), on obtient une matrice triangulaire supérieure. Il ne reste plus qu'à « remonter » pour retrouver les valeurs des coefficients de .

**Calcul de l’inverse d’une matrice.** L'élimination de Gauss-Jordan peut être utilisée pour inverser une matrice carrée si celle-ci est inversible. Pour cela, on crée une matrice à lignes et colonnes en bordant la matrice par la matrice identité , ce qui génère une matrice augmentée (en) notée . Si la matrice d'entrée est inversible, on applique l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice augmentée. La matrice finale est de la forme et contient l'inverse de la matrice initiale dans sa section de droite.

**Calcul du déterminant d’une matrice carrée.** La façon dont change le déterminant par une opération élémentaire est connue, donc on peut appliquer le pivot de Gauss en observant comment le déterminant change à chaque opération, jusqu’à ce que la matrice soit triangulaire, où le déterminant est simplement le produit de la diagonale. En fait on peut faire ça qu’avec des transvections donc le det ne change jamais, on le calcul simplement à la fin en multipliant les coefficients diagonaux.