**Introduction à la théorie des distributions.  
Chapitre 3. Fonctions tests  
3.1. Notations multi-indicielles**Un **multi-indice de taille d** est un -uplet d’entiers .  
La **longueur/module d’un multi-indice** est l’entier   
La **factorielle d’un multi-indice** est l’entier   
Pour , et un multi-indice de taille , on pose   
Pour deux multi-indices de même taille on définit ssi   
Pour deux multi-indices de même taille on définit le coeff binomial :   
Pour un multi-indice de module on définit le coeff multinomial : avec   
**L’opérateur différentiel pour un multi-indice**  est  
Pour E,F 2 Revns, un ouvert de , est bien définie pour un multi-indice de module   
On a   
**Binôme de Newton compact.**  avec de taille fixée   
**Formule du multinôme compacte.**  avec de taille fixée   
**Binôme de Newton multi-indiciel.**   
**Formule de Leibniz multi-indiciel.** Pour , pour un multi-indice de module  **Intégration par parties.** Pour des fonctions suffisamment régulières dont l'une au moins est à support compact.   
 **Formule de Taylor RI multidimensionnelle.** Pour   
   
 pour   
**Formule de Taylor RI unidimensionnelle.** Pour ,  
   
   
**Formule de Taylor Young multidimensionnelle.** Pour ouvert de   
   
**Formule de Taylor Young unidimensionnelle.** Pour ouvert de   
   
**Support.**Le **support d’une fonction continue d’un ouvert vers un Revn**  est l’adhérence dans des points en lesquels la fonction ne s’annule pas. C’est un fermé de   
Une fonction est de support vide ssi elle est identiquement nulle.  
Le support d’un produit fini de fonctions est inclus dans l’intersection finie des supports.  
Pour tout multi-indice de taille et de module inferieur a , et toute fonction , on a   
On veut définir le **support essentiel** **d'une fonction mesurable**  **d’un ouvert vers un Revn**  de telle façon qu'il ne dépende que de la classe d'équivalence des fonctions égales à f presque partout, c'est-à-dire sauf sur un ensemble de mesure nulle. Il suffit de poser :  
. C’est un fermé de   
Pour une fonction mesurable et continue support et support essentiels coïncident.  
Une fonction a **support compact** est une fonction dont le support est un compact de cad une partie bornée dans . Autrement dit ssi il existe un compact de telle que la fonction est nulle p.p. sur   
**Rappels calcul diff.**On supposera généralement par défaut Revns de dimension finie. est l’espace des applications linéaires de vers   
 est l’espace des applications linéaires continues de vers .  
norme sur   
 complet complet  
 est l’espace des applications -lineaires de vers   
 est l’espace des applications -lineaires continues de vers   
 complet complet  
 est isometriquement isomorphe a   
Une application d’un ouvert d’un R-evn E, vers un R-evn F est **différentiable en un point**  s’il existe une application linéaire continue de , tel que   
Une application d’un ouvert d’un Revn vers un Revn est **-fois differentiable en un point**  ssi elle l’est fois en tout point d’un voisinage ouvert de et que est différentiable en . Dans ce cas on note .  
Une application d’un ouvert d’un Revn vers un Revn est **-fois différentiable sur**  ssi elle l’est en tout point de . Dans ce cas est bien définie.  
Une application d’un ouvert d’un Revn vers un Revn est **de classe en un point** , ssi est -fois differentiable en tout point d’un voisinage ouvert de et est continue au point . Autrement dit ssi en et est en .  
Une application d’un ouvert d’un Revn vers un Revn est **de classe sur U** ssi elle est en tout point de ssi sur et est sur .  
Une application d’un ouvert d’un Revn vers un Revn est **-fois différentiable en un point**  ssi  **est de classe en**  ssi est -fois différentiableen ssi est en .  
Une application d’un ouvert d’un Revn vers un Revn est **-fois différentiable sur / sur U** ssi elle l’est en tout point de .  
**Caractérisation différentiabilité**:   
 est différentiable en existe au voisinage de   
 existe au voisinage de et continue en est différentiable en   
 en existe au voisinage de et continue en   
 k-fois différentiable en existe au voisinage de   
 k-fois différentiable en   
 existe au voisinage de et continue en k-fois différentiable en   
 de classe en existe au voisinage de et continue en   
 de classe en de classe en et de classe en   
Si , k-fois différentiable en   
Soit un compact de inclus dans   
**Espaces fonctionnels courants.** est l’ensemble des fonctions d’un ouvert d’un Revn , vers un Revn .  
 est l’ensemble des fonctions bornées d’un ouvert d’un Revn , vers un Revn .  
Pour , est l’espace des fonctions d’un ouvert d’un Revn , vers un Revn .  
Pour , est l’espace des fonctions a support un compact (de ) fixé , Pour , est l’espace des fonctions a support un compact (de )   
Pour ,   
Pour , est l’ensemble des telles que   
  
On suppose , Pour un espace mesure , on note l’ensemble des fonctions mesurables de l’espace mesure vers un Revn de dim finie F, dont le module a la puissance p est d’intégrale de Lebesgue finie.   
On suppose par défaut qu’on utilise la mesure de Lebesgue et on écrira est l’espace quotiente par le noyau de la semi-norme   
 est l’espace des fonctions mesurables localement intégrables (sur tout compact )  
On note l’ensemble des fonctions mesurables a support essentiel compact.  
On ajoute souvent un indice pour signifier qu’on a intersecté l’espace avec **.**Par exemple   
 ( injective) mais attention n’est pas inclus dans en général.   
Un **majorant essentiel** **d’une fonction d’un espace mesure vers**  est un élément de tel que l’ensemble des points dont les images sont strictement > a cet élément est negligeable.  
L’ensemble des majorants essentiels d’une fonction est un intervalle ferme de la forme dont la borne inférieure est appelée la **borne supérieure essentielle de f**.  
-   
On a toujours . Si est vide, alors clairement   
 est l’ensemble des fonctions mesurables f essentiellement bornées   
 est l’espace quotienté par le noyau de la semi-norme .   
 **Normes et distances.**Lemme. Tout ouvert admet une suite de compacts telle que et telle que tout compact est inclus dans un .  
Pour ,   
   
 **,**Pour , est une norme sur et même sur pour   
Pour , est une norme sur et même sur pour     
 est une distance sur et sur   
 est une distance sur   
Pour ,   
Pour , est une norme sur   
 est une norme sur l’espace .  
**Propriétés de densité et complétude. (**Vérifier)  
Pour , est complet.  
Pour est complet.  
 est dense dans   
 est dense dans , pour   
La complétion de est l’espace   
 est un sous-espace fermé complet de .  
 est complet.  
 est complet comme sev ferme de .  
 n’est pas complet. n’est pas métrisable ?  
 est dense dans , pour   
 est dense dans , pour   
 est dense dans , pour   
 est dense dans , pour   
Pour , est complet.  
 est complet.  
 est dense dans   
  
**3.3. Fonctions de classe à support compact**  
**3.3.2. Espace des fonctions test.**Une **fonction test d’un ouvert vers un evn** est une fonction de dont le support est compact inclus dans . Autrement dit c’est une fonction de   
La **fonction test canonique** est   
 et   
On peut aussi utiliser d’autres fonctions telles que   
**3.3.3. Topologie compacte ouverte de**   
Lemme. Tout ouvert admet une suite de compacts telle que et telle que tout compact est inclus dans un .  
Remarque :   
La **topologie compacte ouverte** est la topologie de   
**Caractérisation convergence compacte ouverte.** Une suite de fonctions tests converge vers une fonction test pour la topologie compacte ouverte ssi pour tout multi indice , toutes les (en particulier pour ) convergent uniformément vers sur un même compact fixé inclus dans et qui contient tous les supports de tous les .  
Par exemple pour une fonction test réelle , si on pose alors dans .  
**3.3.4. Fonctions « pic » et « plateau »**Une **fonction pic sur un ouvert**  est une fonction test de vers , de support inclus dans et d’intégrale sur valant 1.Toute boule ouverte non vide d’un ouvert de admet au moins une fonction pic : en normalisant la fonction test canonique : avec   
Une **fonction plateau sur un compact dans un ouvert tel que** est une fonction test de vers , de support inclus dans (donc identiquement nulle sur ), qui vaut identiquement sur un compact .  
Sur un compact non vide inclus dans un ouvert dont l’adhérence est incluse dans , on peut construire au moins une fonction plateau sur ce compact de support dans l’ouvert.  
Idée : Pour on pose , fonction pic sur et on convole .  
**3.4. Densité par troncature.  
3.4.2. Produit de convolution.** Dans cette section Sous de bonnes hypothèses : le **produit de convolution** est   
Si sont mesurables et positives le produit de convolution est bien défini.  
Pour , si une fonction est et l’autre est alors leur convolée est définie p.p. sur , leur convolée est , on a et .  
Si et , alors si avec et ses dérivées partielles jusqu’à l’ordre sont toutes bornées alors et pour tout multi-indice   
Convoler une fonction par une fonction test, donne une nouvelle fonction test.  
**3.4.3. Régularisation.**Intuition : On peut régulariser une fonction non régulière en la convolant avec une fonction régulière.  
On considère une fonction pic de support dans d’integrale 1 sur : Pour soit . La suite est une approximation de l’unite.  
Pour et , converge uniformement vers sur quand   
Pour avec , alors converge vers dans quand .  
L’espace des fonctions tests est dense dans , et dans .  
**3.5. Lemme de Dubois-Reymond.** Une fonction telle que pour toute fonction test , est une fonction nulle presque partout.  
**4. Distributions sur un ouvert de   
4.1. Définitions   
4.1.1. Définition fonctionnelle**Une **distribution sur un ouvert de** correspond à une forme linéaire complexe sur l’espace des fonctions tests sur , qui est continue en cad que pour toute suite de fonctions tests qui converge vers 0, la suite des crochets de dualité converge aussi vers 0.  
On note ou plus simplement ou plus simplement l’ensemble des distributions sur .  
En notant l’ensemble des distributions est bien le dual topologique de  **4.1.2. Définition par l’ordre** (utile en pratique)Une forme linéaire complexe sur l’espace des fonctions tests sur est une distribution sur ssi pour tout compact , tels que de support dans , on ait  **4.1.3. Ordre d’une distribution**Dans la définition par l’ordre d’une distribution, dépend a priori du choix du compact . Si on peut trouver un qui convient pour tous les compacts de , on dit que la distribution est **d’ordre fini**.  
Une **distribution d’ordre fini** est donc une forme linéaire complexe sur l’espace des fonctions tests sur telle que compact , tels que de support dans , on ait   
**L’ordre d’une distribution**, est le min de ces .  
Pour une distribution d’ordre non fini, l’ordre est infini. **4.2. Premiers exemples  
4.2.1. Distribution associée a une fonction   
La distribution associée à une fonction** , est définie par .   
C’est une distribution sur d’ordre 0. est une injection de sur   
On identifie donc une fonction à sa distribution dans .  
L’idée est qu’une distribution généralise la notion de fonction. On identifie souvent a . **4.2.2. Distribution de Dirac  
Un Dirac sur en**  est la distribution sur definie par .  
Un dirac sur est une distribution d’ordre . Un Dirac ne correspond pas à un . **4.2.3. Distribution de Dirac dérivée  
Un Dirac dérivé d’indice sur en**  est la distribution sur définie par .  
C’est une distribution d’ordre . Dans on la note  **4.2.4. Mesures de Radon**Pour une mesure de Radon sur un ouvert , la **distribution de Radon** est définie par . C’est une distribution sur d’ordre . **4.2.5. Distributions positives**Une distribution sur est **positive** ssi l’image d’une fonction test réelle positive est un réel positif.  **4.2.6. La valeur principale de** est la distribution sur definie par n’est pas dans .  
 est une distribution sur R positive et d’ordre 1. Elle ne dérive pas d’une  **4.2.7. Partie finie de**Pour , , **la partie finie de**  est la distribution sur definie par . C’est une distribution sur d’ordre . Vérifier.  
Les cas donnent les valeurs principales. **4.2.8. Un exemple de distribution d’ordre infini**La distribution sur definie par est une distribution d’ordre . veut dire quoi? **4.3. Convergence des suites de distribution   
Une suite de distributions sur converge dans vers une distribution sur** ssi pour toute fonction test sur , l’image par la suite converge vers l’image par la limite :   
Si une suite de distributions sur converge vers n’importe quoi, autrement dit, si pour toute fonction test sur , l’image par la suite admet une limite complexe , alors ces limites forment une distribution : est une distribution sur .  
De plus compact , de support dans , on a cad   
Corollaire : Pour une suite de distributions qui converge vers dans et une suite de fonctions tests qui converge vers pour sa topologie usuelle, alors   
Par exemple converge vers dans   
La suite de distributions converge dans vers la distribution nulle sur . (Riemann-Lebesgue)  
Pour , la convergence dans implique la convergence dans   
La convergence presque partout n’implique pas la convergence dans .   
Pour une suite de fonctions positives de dont les supports sont dans des boules centrées en 0 et de rayon tendant vers 0, alors converge vers le Dirac dans . **5. Operations sur les distributions  
5.1. Multiplication par une fonction**Pour une distribution et une fonction , la **distribution produit de par**  est la distribution autrement dit celle definie par .  
Pour on a .  
Pour et , alors :  
 dans , dans , et dans   
Pour et , on a   
Pour , et , on a . Dans on a en particulier   
   
Pour ,   
On ne peut pas généralement définir un produit entre deux distributions. n’est même pas une forme linéaire. On ne peut pas définir un Dirac au carré. On ne peut pas définir un produit entre deux distributions qui soit commutatif et associatif. Une définition d’un produit de deux distributions reste possible à condition d’utiliser la transformée de Fourier, ce qui conduit à la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Toutefois, sans aller jusque-là, nous verrons que l’on peut définir un produit de convolution entre deux distributions (moyennant des hypothèses sur leurs supports respectifs), ce produit ayant alors une interprétation physique naturelle. **5.2. Les équations**Pour une distribution sur , on a   
Pour une distribution sur , on a   
On retrouve ici le principe de résolution des équations linéaires : l’ensemble des solutions est un espace affine dirigé par le noyau de l’application linéaire qui définit l’équation considérée (soit l’ensemble des solutions de l’équation homogène associée) et passant par une solution particulière de l’équation.  
Pour 2 distributions sur , si on a alors est uniquement déterminé par .  
Pour une distribution sur , on a . A vérifier. **5.3. Dérivation d’une distribution**On peut dériver à n’importe quel ordre une distribution quelconque et que cette dérivation est une opération continue. La situation est donc totalement différente du cadre des fonctions dérivables classiques. Il faut se dire que si une fonction classique n’est pas dérivable, cela signifie simplement que sa dérivée est une distribution qui n’est pas une fonction.  
La **distribution dérivée d’une distribution**  est la distribution sur définie par .La **distribution -ieme derivee partielle d’une distribution**  est la distribution sur définie par . Elle est d’ordre si est d’ordre .  
Plus généralement la **distribution dérivée de multi indice d’une distribution**  est la distribution sur définie par . Elle est d’ordre si est d’ordre .  
Pour une suite de distributions sur qui converge vers une distribution dans , alors pour tout multi indice fixe , la suite de distributions dérivées par ce multi-indice converge vers la même distribution dérivée par ce multi-indice dans .   
Pour et alors   
La dérivée d’une distribution avec n’est autre que La-ieme dérivée partielle d’une distribution avec n’est autre que   
**La fonction de Heaviside** est la fonction qui vaut 0 pour , en 0, et pour .  
Alors .  
La fonction si , et , est et on a   
Pour et alors et (au sens des distributions) (dans )  
Pour une mesure de Radon sur un ouvert , la distribution de Radon dérivée par un multi-indice est . **5.4. Les équations et**Pour une distribution sur , on a est constante  
Pour une distribution sur , on a  **5.5. Formule des sauts en dimension 1.**Pour de subdivision adaptée on a la formule des sauts :  
 avec les conventions   
Pour de subdivision adaptée on a la formule des sauts :  
   
Pour une fonction nulle partout sauf sur un segment ou sa restriction est , il peut a priori y avoir des discontinuités en , alors .  
Soit dont la dérivée au sens des distributions vérifie , alors  **6. Support d’une distribution  
6.1. Partitions de l’unité.**Le lemme des partitions de l’unité est un outil très utile permettant de passer du local au global.  
Pour compact inclus dans l’union d’une famille finie de ouverts inclus dans un ouvert , alors pour chacun des ouverts, il existe une fonction test de support inclus dans , a valeurs dans et ces fonctions tests verifient  **6.2. Restriction a un ouvert**Pour un ouvert inclus dans un ouvert de , et une distribution sur , la **restriction de la distribution a l’ouvert**  est la distribution definie par   
Une distribution est **nulle sur un ouvert**  ssi sa restriction à l’ouvert est nulle.  
Une distribution nulle sur tout ouvert d’une famille quelconque, est nulle sur la réunion de cette famille.  
Pour un prédicat , une distribution sur est **localement**  ssi tout point de admet un voisinage ouvert sur lequel la restriction de la distribution vérifie . **6.3. Support d’une distribution**Le **support d’une distribution sur**  est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel est nulle. Autrement dit le support d’une distribution est le complémentaire des points de aux voisinages desquels est nulle. Autrement dit le support d’une distribution est l’ensemble des points dont chacun de ses voisinages contient une fonction test d’image non nulle par la distribution.  
Le support d’une distribution est donc toujours une partie fermée.  
Une partie contient le support d’une distribution ssi la distribution est nulle sur le complémentaire de cette partie.  
Pour une distribution et une fonction test sur dont les supports respectifs sont disjoints, .  
Le support d’une distribution est nulle ssi cette distribution est la distribution nulle.  
Une distribution sur qui localement dérive d’une fonction , est une distribution qui dérive globalement d’une fonction .   
Pour et , alors   
Pour et , alors   
Exemple fondamental : pour une fonction continue sur , on a   
Pour   
On a  **6.4. Distributions à support compact**Une distribution est à **support compact** ssi son support est compact. On note l’ensemble des distributions sur un ouvert a support compact.   
Une distribution à support compact peut être prolongée de a et donc vue comme une forme linéaire complexe définie sur . En fait on peut montrer tout comme (par définition d’une distribution)  
Une distribution à support compact est d’ordre fini. **6.5. Distributions à support ponctuel**On sait déjà que le support d’un Dirac est un point : son origine. On montre de même que le support des dérivées d’un Dirac est aussi un singleton. La réciproque est vraie au sens du théorème suivant.  
Une distribution sur de support avec peut s’écrire et on a  **II. Notions avancées  
7. Convolution des distributions  
7.1. Produit de convolution de 2 distributions** Dans cette section Sous de bonnes hypothèses : le **produit de convolution** est   
Si sont mesurables et positives le produit de convolution est bien défini.  
Pour , si une fonction est et l’autre est alors leur convolée est définie p.p. sur , leur convolée est , on a et .  
Si et , alors si avec et ses dérivées partielles jusqu’à l’ordre sont toutes bornées alors et pour tout multi-indice   
Convoler une fonction par une fonction test, donne une nouvelle fonction test.  
Une fonction test de est toujours associée à une distribution.   
Sur , Pour toute distribution et toute fonction test le produit de convolution est bien défini.  
Convoler une distribution sur par une fonction test, donne une nouvelle fonction test.  
Pour une distribution, une fonction test, et tout multi-indice ,   
De plus si , alors   
Pour une distribution, une fonction test, on a avec .  
Pour une distribution , et 2 fonctions tests , on a   
Pour une distribution , et 2 fonctions tests , on a   
Pour et , alors Pour et , alors   
Toute distribution sur un ouvert est limite (dans ) d’une suite de fonctions tests sur   
**Convolution de 2 distributions a supports compacts.** Pour deux distributions a support compact, on approche l’une par des fonctions tests . La **convolée** se définit alors par  **7.2. Propriétés de la convolution de distributions a supports compacts**Elle est associative, commutative, et le Dirac en 0 est un élément neutre.  
pour tout multi-indice . En particulier   
Le produit de convolution est continu. **7.3. Interprétation physique de la convolution. (théorie des SLI)**En considérant un système physique vu comme une boite noire, un signal produit une réponse . On fait les hypothèses suivantes :  
Principe de superposition : si et sont les réponses respectives de 2 signaux , , alors la réponse au signal est pour tout réels , .  
Principe d’homogénéité temporelle : La réponse au signal decale de secondes est la réponse decalee de secondes  
Stabilité : Des signaux très voisins ne produisent pas des réponses très différentes.  
Alors l’application de vers qui a associe , est linéaire, commute avec les translations et continue en un certain sens. On peut montrer sous ces hypothèses qu’il existe une distribution sur telle que . Ce résultat est très général et explique en partie pourquoi la convolution intervient si souvent en physique. **7.4. Comment calculer un produit de convolution  
7.4.1. Convolution de deux fonctions dans**  Dans cette section Pour on a  **7.4.2. Convolution d’une distribution et d’une fonction dans**Pour et  **7.4.3. Utilisation des propriétés de la convolution**On peut par exemple utiliser l’approximation d’une des deux distributions par des fonctions tests et se ramener pour chaque terme de la suite au cas précèdent. Parfois la suite approchante est suffisamment explicite pour permettre cette approche. On passe ensuite à la limite pour trouver la convolution des 2 distributions. On peut aussi utiliser les propriétés de dérivation.  
Exemple :  **8. Transformation de Fourier des distributions tempérées  
8.1. La transformation de Fourier dans**  Dans cette section  **8.1.1. L’espace de Schwartz**La **transformée de Fourier** est définie sur par   
Elle est linéaire.  
Toutefois ni ni n’est pas un espace invariant par . On cherche un espace qui le soit pour rendre l’étude plus élégante. Les opérations définies sur le sont par dualité avec et il était important que soit invariant par ces transformations. Pour obtenir par dualité l’espace le plus grand possible, on cherche l’espace invariant le plus petit possible.  
**L’espace de Schwarz sur**  est l’espace   
Autrement dit   
L’espace de Schwarz sur contient l’espace des fonctions tests sur .   
Pour tout complexe de partie reelle la fonction est dans   
Toute fonction de la forme avec complexe de partie réelle , et fonction polynomiale, est dans .  
On définit  sont des semi normes sur l’espace de Schwarz qui le rende métrisable complet. TODO clarifie  
Pour tout multi-indice , est continue de dans . (Pour quelle métrique ?)  
L’espace de Schwarz est stable par produit.  
L’espace est dense dans    
Pour , on a  **8.1.2. Transformation de Fourier dans**Pour , est . La transformée de Fourier d’une fonction est bien définie.  
Pour un complexe de partie réelle ,   
La transformée de Fourier laisse l’espace de Schwarz invariant, et est même un homéomorphisme sur cet espace. Son inverse est avec la convention prise.  
**Formule d’inversion.**  **8.1.3 Propriétés de la transformation de Fourier dans**Pour , et pour tout ,   
Pour   
La transformée de Fourier échange donc dérivation et multiplication par . Par conséquent, echange régularité et décroissance à l’infini : Plus une fonction est dérivable, plus vite sa transformée de Fourier décroit à l’infini. On retrouve en particulier l’invariance de la classe de Schwartz par .  
**Théorème de Plancherel.** Cette propriété hilbertienne énonce un principe de conservation de l’énergie lorsque l’on passe dans le domaine de Fourier.  
Pour , , , donc pour ,   
Pour et , on a et . TODO vérifier signe  
Pour , et et avec (varie) **8.2. L’espace des distributions tempérées**Une **distribution tempérée** est une forme linéaire continue sur l’espace de Schwarz. Autrement dit c’est une forme linéaire complexe telle que   
On note l’espace des distributions tempérées.  
Toute distribution tempérée est une distribution.   
Pour   
Toute fonction continue à croissance polynomiale définit une distribution tempérée sur   
Pour une suite a croissance polynomiale (i.e. ) alors la distribution sur R définie par est tempérée.  
La distribution sur R définie par l’exponentielle sur R qui est n’est pas tempérée.  
De même pour tout ,   
Toutefois pour appartenir a il n’est pas nécessaire d’être majoré par un polynôme.   
Pour une distribution tempérée et la -ieme derivee partielle l’est aussi .  
Pour une distribution temperee et on a .  
Pour une distribution tempérée , un polynôme , et un multi-indice on a   
Pour une distribution temperee une fonction a croissance polynomiale ainsi que toutes ses derivees alors   
**Une suite de distributions tempérées sur converge dans vers une distribution tempérée sur** ssi pour toute fonction de , l’image par la suite converge vers l’image par la limite : .  
Tout comme dans la convergence est compatible avec les opérations de dérivation et de multiplication par une fonction à croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées. **8.3. Transformée de Fourier dans   
8.3.1. Définition et propriétés**Pour , on sait que , donc par analogie :La **transformée de Fourier d’une distribution tempérée** est la distribution tempérée sur définie par   
On note . On a   
La transformée de Fourier d’une distribution tempérée peut alternativement se définir comme la distribution associée à la fonction . Verifier.  
La transformée de Fourier laisse l’espace invariant, et est même un homéomorphisme sur cet espace. Son inverse est définie par .  
**Formule d’inversion.**   
Pour , et pour tout ,   
Pour   
Pour et , on a et . Avec   
Pour et , on a   
 ,   
 ,   
 et avec la distribution d’Heaviside  
 et  **8.3.2. Transformée de Fourier des distributions a support compact**On note . On a   
On a toujours . On cherche à voir ce qu’on obtient en appliquant sur . La décroissance à l’infini est maximale pour , on s’attend à obtenir une régularité maximale pour .  
Pour , alors est et est a croissance polynomiale ainsi que toutes ses dérivées. **8.3.3. Convolution et transformée de Fourier**Pour , alors et   
Pour , alors et  **8.3.4. Transformée de Fourier partielle et applications**On se place dans on note une variable avec et .  
On définit la **transformée de Fourier partielle en de ,** par la formule   
Alors est un homéomorphisme de dans lui-même avec   
Par dualité on peut définir la **transformée de Fourier partielle d’une distribution tempérée** est la distribution tempérée sur définie par   
Alors est un homéomorphisme de dans lui-même. Son inverse est définie par   
   
   
   
   
**Operateur de la chaleur.** . On peut résoudre (TODO) **8.3.5. Retour à la transformée de Fourier dans et**Pour on pose , on a pas nécessairement   
Pour et   
Pour et   
Si et sa transformee de Fourier sont toutes deux alors la formule d’inversion s’applique.   
Pour on pose également   
Pour alors   
 est dense dans   
On a et est même surjective , c’est un automorphisme -lineaire de .  
Le théorème de Plancherel s’applique dans . Pour , .  
 est une isométrie de dans lui-même. **9. Solutions élémentaires d’EDPs  
9.1. Théorèmes d’existence  
9.1.1. Définitions et premières propriétés**Un polynôme de s’ecrit avec   
On appelle **operateur différentiel a coefficients constants sur**  et on note   
Une **EDP linéaire a coefficients constants d’ordre** est une équation de la forme avec d’ordre , ,   
 est le **second membre de l’EDP**, est **l’inconnue de l’EDP**.  
l’EDP est **homogène** ssi . **L’EDP homogène associée** est   
**Equation de Laplace/Poisson.**  dans avec   
**Equation des ondes.**  dans avec  **Equation de la chaleur.**  dans avec  **Equation de Schrodinger.**  dans avec L’ensemble des solutions de l’EDPLC est soit l’ensemble vide, soit le sous-espace affine de avec une solution particulière de l’EDP.  
Une **solution élémentaire/fondamentale/de Green** **d’une EDPLC**  est une distribution telle que . Comme ça ne dépend pas de on définit parfois la notion seulement pour  **9.1.2. Existence de solutions  
Malgrange-Ehrenpreis 1955.** Toute EDPLC à coefficients non nuls admet une solution élémentaire. De plus si le degré de l’EDPLC est ou plus, la solution élémentaire ne peut être à support compact.  
Etant donne une EDPLC avec a support compact, et une solution élémentaire , on peut construire une solution particulière . En fait est aussi l’unique solution a support compact. **9.2. Théorème de régularité**Si une EDPLC admet une solution elementaire sur alors pour tout ouvert , toute fonction , alors toute solution de l’EDPLC s’ecrit avec . **9.3. Exemples de solutions élémentaires  
9.3.1. Problème du Laplacien  
Le laplacien** correspond à l’opérateur différentiel associe au polynôme .  
Pour , une solution elementaire du Laplacien est   
Pour , une solution elementaire du Laplacien est   
Pour , une solution elementaire du Laplacien est ou est l’aire de la sphere unite de . Dans chaque cas, la solution élémentaire est .  
Toute solution de avec est .  
Une **distribution harmonique** est une distribution de laplacien nul , est donc toujours  **9.3.2. L’équation des ondes en dimension 1  
L’opérateur des ondes est**  associe au polynôme .  
 est une solution elementaire de l’operateur des ondes.  
Pour a support compact, une solution de l’equation d’ondes est donnee par . **10. Formule des sauts  
10.1. Formule des sauts en dimension 1**Pour de subdivision adaptée on a la formule des sauts :  
 avec les conventions   
Pour de subdivision adaptée on a la formule des sauts :  
   
Pour une fonction nulle partout sauf sur un segment ou sa restriction est , il peut a priori y avoir des discontinuités en , alors .  
Soit dont la dérivée au sens des distributions vérifie , alors  **10.2. Formule des sauts pour un demi-espace**Soit une distribution sur dont la restriction a est et qui vaut sur , alors et ou est la **distribution de simple couche** définie par  **10.3. Ouverts réguliers dans   
10.3.1. Définition**Un ouvert est dit **de classe avec**  ssi avec et . A priori il n’y a pas unicité de .  
Cette définition assure en particulier que est localement du même cote de sa frontière, ce qui est utile pour définir la normale extérieure en chaque point de sa frontière.  
Un **ouvert régulier de**  est un ouvert de classe   
Les boules ouvertes de sont des ouverts reguliers. **10.3.2. Vecteur normal unitaire sortant**Pour un ouvert régulier de la direction du gradient de ne depend pas du choix de satisfaisant la regularite. On peut donc definir **le vecteur normal sortant de en**  par .  
**La dérivée normale sortante extérieure de en**  est   
Pour , pour on a et   
Pour , est un ouvert regulier de dont la frontiere est , et en tout point de cette frontiere on a et  **10.3.3. Mesure de surface, exemples**Pour tout le support de la -eme derivee partielle de l’indicatrice sur un ouvert regulier est inclus dans la frontiere de cet ouvert.   
On appelle **mesure de surface sur**  la mesure de Radon positive definie sur par   
On alors pour toute fonction test sur ,   
Plus generalement, pour sommable par rapport a sur , on definit la distribution de simple couche par   
Pour , on a .  
Pour on a   
Pour avec ,   
**10.4. Formule de Stokes  
10.4.1. Formule**Soit un ouvert régulier de de champ de vecteur normal sortant , et de mesure de surface sur . Alors pour tout   
Pour une fonction continue sur l’adhérence d’un ouvert borné et régulier de , alors dire que est sur l’ouvert de dérivées jusqu’à l’ordre se prolongeant a l’adhérence est équivalent a dire qu’il existe une fonction definie sur tout , qui coincide avec la fonction sur l’adhérence de l’ouvert.  
On dit dans ces conditions que  **est sur**  et on note , (a priori les classes de regularites n’ont été definies que sur des ouverts, on generalise ici la def).  
**La divergence d’un champ de vecteur** est   
**Stokes/Green Ostrogradski.** Pour un ouvert borné régulier de , et un champ de vecteur , alors avec , intégrale triple=dimension , double= **10.4.2. Intégration par parties multidimensionnelle**Pour , et   
   
Pour et pour , avec on a  
  **10.4.3. Formules de Green pour le Laplacien**Pour sur un ouvert régulier de ,   
   
   
**10.4.4. Formule des sauts multidimensionnelle**Soit un ouvert borné régulier dont est le complementaire de . Soit une fonction definie dans telle que ses restrictions et a et se prolongent par continuité en des éléments de . Pour , on note et les valeurs respectives de ces prolongements.  
**Formule des sauts multidimensionnelle.** Pour on a ou est la mesure de Radon dont la densite par rapport a est . TODO verifier formule. **10.5. Applications   
10.5.1. Les relations de Rankine-Hugoniot  
  
10.5.2. Equations d’ondes en dimension 3  
11. Espaces de Sobolev  
11.1. Les espaces de Sobolev   
11.1.1. Definitions et premiers exemples  
11.1.2. Densite des fonctions regulieres  
11.1.3. Operations sur   
11.2. Theoreme d’injection de Sobolev  
11.3. Théorème de trace dans   
11.4. Theoreme de trace dans   
11.4.1. Espaces   
11.4.2. Caractérisation de   
11.4.3. Les espaces**