**Chapitre 1. Ensembles  
I. Rappels et quelques compléments** ssi ssi   
ssi ssi et   
    
   
  **I.1. Parties**On note l’ensemble des parties d’un ensemble .   
L’ensemble des parties d’un ensemble a elements, possede elements.  
   
   
**I.2. Relations**  
Une **relation binaire** d’un ensemble vers un ensemble , correspond à une partie de .  
Une **relation binaire sur un ensemble** correspond a une relation binaire de vers .  
Le **domaine d’une relation binaire de vers**  est l’ensemble   
**L’image d’une relation binaire de vers**  est l’ensemble   
Si , relation binaire de vers ,   
**I.3. Fonctions**   
Une **fonction partielle** d’un ensemble vers un ensemble correspond a une relation de vers telle que .  
Dans ce cas on peut noter   
Une **fonction (totale) = application** d’un ensemble vers un ensemble correspond à une fonction de vers de domaine , càd une relation binaire de vers telle que   
On note   
On note ou l’ensemble des fonctions d’un ensemble vers un ensemble . **La composée d’une fonction par une fonction**  est la fonction définie par   
La composition de fonctions est associative   
**Images directes et réciproques.**Soit   
   
   
   
   
   
   
   
   
   
   
 injective ssi   
   
 surjective ssi   
   
   
**Fonctions injectives.**  
Une **fonction est une injection/est injective** ssi tout image admet un unique antécédent  
 injective ssi   
 injective ssi   
 injective ssi   
 injective ssi simplifiable à gauche (monomorphisme) dans la catégorie Set.  
La composée d’injections est injective.   
Pour une composée injective, la fonction intérieure est injective.   
Une fonction de domaine non vide, est injective ssi elle admet un inverse gauche (extérieur).  
Symboliquement   
Dans ce cas l’inverse gauche est toujours surjectif, (puisque est bijective)  
**Fonctions surjectives.**  
Une **fonction est une surjection/est surjective** ssi tout élément d’arrivée est image.  
 surjective ssi   
 surjective ssi   
 surjective ssi   
 surjective ssi elle est simplifiable à droite (épimorphisme) dans la catégorie Set.  
La composée de surjections est surjective.   
Pour une composée surjective, la fonction extérieure est surjective.  
Une fonction est surjective ssi elle admet un inverse droit (intérieur).  
Symboliquement . (attention requiert axiome du choix)  
Dans ce cas l’inverse droit est toujours injectif, (puisque est bijective)  
**Fonctions inversibles.**  
Un **inverse d’une fonction** est une fonction inverse à droite et à gauche de , càd telle que et .  
Une **fonction inversible** est une fonction qui admet un inverse.   
L’inverse s’il existe est unique, càd une fonction inversible n’admet qu’un unique inverse noté .  
Une fonction qui admet un inverse gauche et qui admet un inverse droit, est inversible, et alors ces inverses droits et gauches sont égaux et ne sont autres que l’unique inverse .  
Une fonction peut donc admettre, soit plusieurs inverses gauches et 0 inverse droit, soit plusieurs inverses droits et 0 inverse gauche, soit un unique inverse gauche et droit, soit 0 inverse gauche et 0 inverse droit.  
L’inverse d’une fonction inversible , est inversible d’inverse . Autrement dit .  
**Fonctions bijectives.**  
Une **fonction est une bijection/est bijective** ssi injective et surjective  
 bijective ssi   
 bijective ssi elle est inversible. (ne requiert pas l’axiome du choix).  
 bijective ssi elle est simplifiable (isomorphisme) dans la catégorie Set.  
L’inverse d’une fonction bijective est aussi appelé **la** **bijection réciproque de** .  
L’inverse d’une fonction bijective est donc bijective d’inverse .  
La composée de bijections est bijective.   
Dans ce cas l’inverse de la composée est composée des inverses dans l’autre sens.  
   
Pour une composée bijective, l’extérieur est surjectif, et l’intérieur injectif.  
Pour une fonction bijective, l’image directe de la réciproque d’une partie d’arrivée est l’image réciproque de cette partie, donc pas de risque de confusion de notation.  
**I.4. Familles et produits**  
Une **famille**  correspond à une application   
**L’union d’une famille** correspond à   
**L’intersection d’une famille** correspond à   
**Le produit d’une famille** correspond à   
**I.5. Peut-on tout faire avec des ensembles**  
**Paradoxe de Russel**: ne peut pas être un ensemble.  
**I.6. Propriétés remarquables des relations binaires**Soit une relation binaire sur une classe   
Une relation est **réflexive** si tout élément est en relation avec lui-même :   
Une relation est **irréflexive** si aucun élément n’est en relation avec lui-même:   
Une relation est **transitive** si la relation s’hérite linéairement : et   
Une relation est **symétrique** si la relation ne dépend pas de l’ordre:   
Une relation est **antisymétrique** si la relation dans les deux sens implique l’égalité : et   
Une relation est **asymétrique** si la relation n’est possible que dans un sens : / ssi la relation est irréflexive et antisymétrique.  
Sous irréflexivité, les notions antisymétrie et asymétrie coïncident.  
Une **relation d’équivalence** est une relation réflexive, transitive, symétrique.  
Deux éléments sont **comparables** pour la relation, s’il y a au moins une relation entre les deux : ou   
Une relation est **totale** si tout couple est comparable : ou   
Une relation est **trichotomique large** si tout couple est comparable ou égal : ou ou   
Une relation est **trichotomique stricte** si tout couple vérifie exactement une des 3 propositions , , ou .   
Alternativement, une relation est **trichotomique stricte** ssi elle est trichotomique large et asymétrique.  
Pour une relation binaire notée on peut appelle une **relation stricte induite** notée définie par et   
Pour une relation binaire notée on peut appelle une **relation large induite** notée définie par ou   
Une relation stricte induite est toujours irréflexive.  
Une relation large induite est toujours réflexive.  
Une relation binaire est réflexive ssi elle coïncide avec la relation large induite de sa relation stricte induite.  
Une relation binaire est irréflexive ssi elle coïncide avec la relation stricte induite de sa relation large induite.  
Ces propriétés montrent qu’il y a une dualité entre relation binaire réflexive et irréflexive. Une telle relation peut être vue dans son sens large (version réflexive) ou dans son sens strict (version irréflexive). Fixer l’une revient à fixer l’autre.

Soit une relation binaire dans sa version réflexive et irréflexive sur une classe .   
 asymétrique antisymétrique totale trichotomique faible  
trichotomique a(nti)symétrique et trichotomique faible  
 **préordre = quasi-ordre / préordre strict**: transitive / transitive.  
 **ordre (partiel) / ordonné (partiellement) / ordre strict / ordonné strictement** ssi :  
 /   
 **ordre total / ordonné totalement / ordre total strict / ordonné strict totalement** :

**La relation d’équivalence induite par un préordre**  est definie par

Un préordre sur un ensemble, devient un ordre si on quotiente par la relation d’équivalence qu’il induit.

Une relation d’équivalence sur un ensemble, est un préordre dont la relation d’équivalence induite est justement la relation en question.  
Une **chaine sur un ensemble ordonné** correspond à une sous-partie totalement ordonnée.  
Une chaine dénombrable sur un ensemble ordonné correspond à une suite finie ou infinie   
Pour une relation qui n’est pas tout à fait un ordre partiel, une chaine est supposée dénombrable par défaut, la définition est plus restrictive.  
Une **chaine pour une relation binaire** correspond à une suite finie ou infinie   
Une **chaine stricte pour une relation réflexive/un préordre**  correspond à une suite finie ou infinie , pour la relation stricte associée.  
**Une relation est noethérienne** ssi elle n’admet pas de chaine infinie .

**Un préordre est bien-fondé** ssi il n’admet pas de chaine stricte infinie, ssi sa relation stricte induite sur le quotient est noethérienne.  
Un **ordre est bien-fondé** ssi il n’admet pas de chaine stricte infinie ssi noethérien ssi toute partie non vide de admet un élément minimal.  
 **bon-ordre / bien-ordonné / bon-ordre strict / bien-ordonné strictement** ssi  
 est un ordre total bien-fondé ssi est un ordre total strict noethérien.  
Toute partie non vide d’un ensemble bien-ordonné admet un (unique) élément minimum.

Une **antichaine** **sur un ensemble préordonné** correspond à un ensemble d’éléments incomparables deux à deux.

Un **idéal d’ordre sur un ensemble préordonné** correspond à une partie dont tout élément n’admet pas de supérieur en dehors de la partie.

Une **base d’un idéal d’ordre sur un ensemble préordonné** correspond à une sous-partie de l’idéal tel que tout élément de l’idéal admet au moins un inférieur ou égal dans cette sous-partie.

On dit que **l’idéal est engendré par** une partie, ssi c’est une base de cet idéal.

**Higman (cf Carton).** Etant donné un préordre sur un ensemble , on a les équivalences :

1. Tout idéal d’ordre admet une base finie

2. Toute chaine croissante (pour d’idéaux est stationnaire.

3. Toute suite infinie d’éléments de contient une sous-suite infinie croissante.

4. Toute suite infinie d’éléments de contient une sous-suite croissante de longueur 2.

5. Toute chaine stricte est finie, et toute antichaine est finie.

6. Tout préordre qui prolonge le préordre considéré est bien fondé

Un **bon-préordre** est un préordre satisfaisant les conditions précédentes.

Une relation d’équivalence est un bon préordre ssi elle a un nombre fini de classes.  
**I.7. Relations d’équivalence**Une **relation d’équivalence sur** est une relation binaire réflexive, transitive, symétrique sur . Soit une relation d’équivalence sur .  
**Deux éléments sont en relation (pour )** ssi   
La classe d’équivalence d’un élément est la classe des éléments qui lui sont en relation.  
Pour , on a   
**Le quotient de par une relation d’équivalence sur**  correspond à l’ensemble des classes d’équivalences.   
**Une partition d’une classe** , est un ensemble de parties disjointes, non vides, de réunion .  
Le quotient de par une relation d’équivalence est une partition de .  
**Une relation d’équivalence sur est compatible avec une l.c.i. sur**  ssi   
**La loi quotient d’une l.c.i. sur compatible avec une relation d’équivalence sur** , est la loi . Elle est bien définie grâce à la compatibilité. **II. Ensembles ordonnés  
II.1. Relations d’ordre**Une **relation d’ordre** sur est une relation binaire sur , réflexive, antisymétrique, transitive.  
Une **relation d’ordre total** sur E est une relation d’ordre sur telle que tout élément de E peut être comparé à tout autre élément de E.  
L’ordre naturel sur les nombres réels est une relation d’ordre total.  
Si est un ensemble ordonne, on définit   
**II.2. Ordres sur**Si est un ensemble ordonne, alors est ordonné par **l’ordre produit**  defini par ssi et .  
Si est un ensemble ordonne, alors est ordonné par **l’ordre lexicographique** défini par ssi   
L’ordre produit est une relation d’ordre non totale, sauf si contient 1 ou 0 éléments  
L’ordre lexicographique dérivant d’une relation d’ordre total, est une relation d’ordre total.  
La relation induite par une relation d’ordre, est une relation d’ordre.  
**II.3. Bornes et éléments maximaux.**Soit un ordre partiel sur une classe , et une partie de .  
Pour , **majorant** de dans ssi   
Un **majorant** est un élément supérieur ou égal à toute la partie.Un **minorant** est un élément inférieur ou égal à toute la partie.  
Un **élément maximal**, est un élément de la partie qui n’admet pas d’élément strictement supérieur.   
Un **élément minimal**, est un élément de la partie qui n’admet pas d’élément strictement inférieur.  
Un **élément maximum**, est un majorant de la partie qui appartient à la partie.  
Un **élément minimum**, est un minorant de la partie qui appartient à la partie.  
Un **supremum** est un minimum de l’ensemble des majorants de la partie.  
Un **infimum** est un maximum de l’ensemble des minorants de la partie.  
maximum maximal  
minimum minimal  
Pour un ordre total, maximum maximal, minimum minimal.  
Le maximum/minimum/supremum/infimum s’il existe est unique.  
S’il existe, le maximum est unique et est aussi l’unique maximal, et l’unique supremum de la partie.  
S’il existe, le minimum est unique et est aussi l’unique minimal, et l’unique infimum de la partie.  
A priori, quand l’ordre n’est pas total, il peut y avoir plusieurs maximaux / resp. minimaux. Si c’est le cas il n’y pas de maximum/ resp. minimum.  
Si le maximum /resp. minimum/resp. supremum/resp. infimum existe on le note  
 resp. resp. resp.  
**II.4. Segments**Un **segment d’une classe ordonnée**  est une partie de dont aucun élément n’admet un inferieur hors de la partie.  
 segment de ssi et   
 segment de ssi et   
 segment de ssi   
Un **segment propre d’une classe ordonnée**  est un segment de distinct de .  
**Le segment ouvert d’un élément d’une classe ordonnée**  est   
**Le segment fermé d’un élément d’une classe ordonnée**  est   
Dans une classe ordonnée , pour tout , , et sont des segments.  
Dans une classe ordonnée , est toujours un segment, mais n’est jamais le segment ouvert ni ferme d’un de ses elements.  
On note l’ensemble des segments de   
On note . Attention car ,   
On note  **II.5. Homomorphisme d’ensembles ordonnées**  
Un **morphisme d’ordre** est une application entre deux classes ordonnées telle que   
Un **isomorphisme d’ordre** est un morphisme d’ordre bijectif.  
Un **endomorphisme d’ordre** est un morphisme d’ordre d’une classe ordonnée dans elle-même.  
Un **automorphisme d’ordre** est un isomorphisme d’ordre qui est aussi un endomorphisme d’ordre.  
Un morphisme d’ordre est toujours injectif.  
Dans une classe ordonnée , l’application est un morphisme d’ordre, donc injectif, mais pas surjectif dans .  
**II.6. Bon ordre**Un **bon-ordre** sur un ensemble est un ordre tel que toute partie non vide de admet un minimum.  
Un bon-ordre est toujours un ordre total.  
L’ordre induit par un bon-ordre, est un bon-ordre.  
 est bien ordonné par l’ordre lexicographique.  
L’ordre produit n’est pas un bon ordre sur .  
Pour un ensemble bien-ordonné l’ensemble des segments est   
Un endomorphisme d’ordre pour un bon-ordre, vérifie   
Un automorphisme d’ordre pour un bon-ordre, est nécessairement l’identité.  
Entre deux ensembles biens-ordonnés, il n’existe qu’au plus 1 isomorphisme d’ordre.  
**Principe de Zermelo.** Tout ensemble admet un bon-ordre.  
**II.7. Récurrence transfinie.**  
Soit une partie d’un ensemble bien-ordonné ,   
Si pour tout segment ouvert inclus dans la partie, son générateur provient de la partie, alors c’est E.  
Si , alors .  
Soit un propriété s’appliquant aux éléments d’un ensemble bien-ordonné ,  
Si alors .

**Chapitre 2. Axiomes, Cardinaux.  
I. Théorie axiomatique – Zermelo-Fraenkel  
I.1. Les axiomes (presque) simples  
Axiome d’extensionalité.** Deux ensembles contenant les mêmes éléments sont égaux.  
 **Axiome de l’ensemble vide.** Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément.   
 Dans ce cas est unique  
**Axiome de la paire.** Pour tous ensembles il existe un ensemble contenant et rien d’autre  
 Dans ce cas est unique et on le note   
**Axiome de la réunion.** Pour tout ensemble , il existe un ensemble dont les éléments, sont les éléments des éléments de .  
 Dans ce cas est unique et on note   
**Axiome de l’ensemble des parties.** Pour tout ensemble , il existe un ensemble dont les elements dont les ensembles contenus dans   
 Dans ce cas est unique et on note   
**Axiome de l’infini.** Il existe un ensemble infini.  
 **I.2. Axiomes techniques  
Axiome de séparation.** Si est un prédicat utilisant les symboles , on a :  
 Dans ce cas est unique et on le note   
**Axiome de substitution.** Soit des ensembles, Soit un prédicat fonctionnel de cad tel que . Alors on a  
 Dans ce cas est unique et on le note   
On peut pas écrire cette forme avec l’axiome de séparation a priori, car n’est pas défini. A posteriori c’est possible. On a avec   
**Axiome de fondation.** Tout ensemble non vide admet un élément tel que   
**I.3. Conséquences**Il n’y a qu’un seul ensemble vide  
Le singleton existe et est unique. Pour , existe et est unique.  
**I.4. Entiers naturels**On utilise l’axiome de l’infini en posant   
**I.5. Classes ou ensembles**Il n’y a pas d’ensemble de tous les ensembles. (On peut cependant définir une classe de tous les ensembles)  
**I.6. Axiomes facultatifs  
Axiome de choix.** Formulations équivalentes :  
 **I.7. Hypothèses équivalentes à l’axiome du choix.  
Lemme de Zorn.** Un ensemble non vide ordonné, dans lequel toute partie totalement ordonnée admet un majorant, contient un élément maximal.   
**Principe de Zermelo.** Tout ensemble admet un bon ordre.  
Lemme de Zorn Principe de Zermelo axiome du choix, sous les autres axiomes de ZF.  
**Relations et**   
Soit la classe de tous les ensembles (existe dans la théorie NBG extension conservative de ZFC).  
L’appartenance est une relation binaire sur .  
 est irréflexive et asymétrique (par axiome de fondation).  
 est noethérienne (axiome de fondation).  
Sur une classe , est un ordre strict ssi est une relation transitive sur .  
L’inclusion est une relation binaire sur .  
L’inclusion est un ordre partiel sur .  
Pour une classe , l’inclusion est un ordre partiel sur .  
 est le minimum de dans   
 est le maximum de dans   
 est le minimum de dans   
 est le maximum de dans   
**II. Cardinaux  
Un ensemble domine un ensemble**  ssi il existe une injection de vers .  
La relation de dominance est réflexive et transitive.  
**II.1. Théorème de comparabilité.  
Lemme.** Soit deux ensembles bien ordonnes , soient , soit isomorphisme d’ordre de sur , soit isomorphisme d’ordre de sur , alors et coincident sur .  
Pour un ensemble bien-ordonné , un segment propre est toujours de la forme .  
Deux ensembles bien-ordonnés tels que tout segment propre du premier est isomorphe à un segment propre du deuxième, alors le premier ensemble est isomorphe à un segment du deuxième ensemble.  
Pour deux ensembles bien-ordonnés, alors l’un des deux est isomorphe à un segment de l’autre.  
**Théorème de comparabilité.** Pour deux ensembles quelconques, l’un domine l’autre. Autrement dit la relation de dominance est totale.  
**Th de Schröder-Bernstein.** Si un ensemble domine, et est dominé par un autre ensemble, alors **ils sont équipotents** (il existe une bijection entre les deux).   
La relation d’équipotente est une relation d’équivalence sur les ensembles.  
Le **cardinal** d’un ensemble, correspond à sa classe d’équipotente.  
La relation de dominance, correspond à une relation d’ordre sur les cardinaux. Le théorème de Schröder-Bernstein en exprime sa propriété de symétrie.  
Donc on peut écrire que domine ssi .  
   
   
   
**II.3. Ensembles dénombrables**  
Un ensemble **fini** est un ensemble équipotent a pour un certain .  
Dans ce cas son cardinal correspond à .  
Un ensemble **infini dénombrable** est un ensemble équipotent à .  
Un ensemble **dénombrable** est un ensemble fini ou infini dénombrable.  
L’ensemble est infini dénombrable.  
Le produit fini d’ensembles infinis dénombrables est infini dénombrable.  
Tout sous-ensemble d’un ensemble dénombrable est dénombrable.  
Il existe une surjection d’un ensemble infini dénombrable, vers un autre ensemble, ssi l’autre ensemble est également infini dénombrable.  
Une réunion dénombrable d’ensembles dénombrables est dénombrable.  
**II.4. Ensembles non dénombrables**  
Pour tout ensemble , domine strictement , cad   
Par exemple n’est pas dénombrable.  
**Axiome de l’hypothèse du continu.** Il n’y a pas de cardinal compris strictement entre et   
L’hypothèse du continu est un axiome indépendant de .  
**II.5. Arithmétique cardinale.**La **somme de 2 cardinaux** est le cardinal de leur union.  
Le **produit de 2 cardinaux** est le cardinal de leur produit cartésien.  
L’addition de cardinaux est commutative et associative.  
Le produit de cardinaux est commutatif, associatif, et distributif par rapport à l’addition.  
Dans le cas des cardinaux finis, la somme et le produit correspondent à la somme et au produit sur N.  
Soient 4 cardinaux, si et alors   
Pour deux cardinaux on note le **cardinal puissance** qui est le cardinal de l’ensemble des applications de avec .  
Si , alors , càd   
 est equipotent a donc   
Pour deux cardinaux tel que fini, fois.  
On a les identités suivantes pour les cardinaux   
**Complément Ordinaux.**  
Une classe est transitive ssi   
Une classe est transitive ssi   
Une classe est transitive ssi   
Une classe est transitive ssi   
 est transitif, est transitif.  
 transitive transitive  
 transitive transitive  
 transitive transitive  
 transitive, transitive transitive  
   
 est irréflexive, asymétrique, noethérienne (par axiome de fondation).  
Sur une classe, l’appartenance est un ordre strict ssi l’appartenance est transitive.  
Sur une classe transitive, l’appartenance est transitive ssi tous les éléments sont transitifs.  
 **est un ordinal** ssi est transitif et est ordre strict total (noethérien) (donc un bon-ordre strict) sur   
Un ordinal est donc toujours transitif.  
Un ordinal vérifie la trichotomie pour , donc pour , soit , soit , soit .   
Pour un ordinal , l’inclusion est totale :   
Pour un ordinal   
Pour un ordinal , donc   
 et sont des ordinaux.  
L’ensemble vide est élément de tout ordinal non vide.  
Tout élément d’un ordinal est un ordinal.   
On note la classe de tous les ensembles ordinaux.  
 est un ordinal.  
**Burali-Forti.** est une classe propre car sinon on aurait .  
Donc les propriétés vraies à l’intérieur des ordinaux, sont vraies pour les ordinaux eux-mêmes.  
On note l’appartenance dans , et l’inclusion. et   
Pour ordinaux, soit , soit , soit .   
Pour ordinaux, ou   
   
Pour ordinal, alors est un ordinal. est **le successeur de l’ordinal**   
On définit **la fonction successeur** est   
On note ,   
L’ensemble des segments d’un ordinal se trouve être   
Le successeur d’un ordinal est le plus petit ordinal (pour ) qui contient .  
L’union quelconque d’ordinaux est un ordinal.  
Une intersection finie d’ordinaux est un ordinal.   
Un ensemble bien-ordonné est ordre-isomorphe a un unique ordinal . De plus cet ordre-isomorphisme est unique.  
Le lemme de Zorn admet une preuve plus courte via les ordinaux.  
**Récurrence transfinie pour les ordinaux.**  
Un **ordinal est limite** ssi ce n’est ni , ni le successeur d’aucun ordinal, càd .  
Un ordinal est donc soit , soit un ordinal successeur, soit un ordinal limite.  
Soit une propriété paramétrée par un ordinal .  
Si /   
Alors est vrai pour tout ordinal.