**Chapitre 36. Les solutions d’une équation différentielle  
I. Equations différentielles et solutions  
I.1. Equations différentielles et solutions  
Une équation différentielle ordinaire (EDO) d’ordre sur un Kevn** , correspond à la donnée d’une fonction d’un ouvert vers . On l’écrit   
Une **solution d’une EDO**  correspond à un couple ou est un intervalle ouvert non vide de , et est une fonction -fois dérivable sur telle que et   
Cette contrainte d’intervalle ouvert est indispensable pour permettre d’énoncer les propriétés d’unicité des solutions simplement, cette contrainte implique notamment la connexité de .  
On note généralement l’ensemble des solutions d’une EDO  
On note (solutions à fixé).  
Pour on dit que  **prolonge**  et on note ssi et   
 est une relation d’ordre partiel sur .  
Une **solution maximale d’une EDO** désigne tout élément maximal de , autrement dit toute solution de l’EDO ne pouvant être strictement prolongée.  
Une **solution globale d’une EDO** désigne une solution dont l’intervalle ne peut être prolongé sans sortir de . Une solution globale est donc nécessairement maximale. **L’orbite = courbe trajectoire d’une** **solution d’une EDO**  est l’ensemble   
**Le graphe d’une** **solution d’une EDO**  est l’ensemble   
On appelle **orbite maximale,** l’orbite d’une solution maximale.  
Une **EDO est sous forme résolue** quand on peut exprimer la dérivée la plus forte en fonction de *x* et des dérivées précédentes  c’est-à-dire   
Même lorsque une EDO est sous forme implicite avec une fonction très régulière, on ne peut souvent ramener à une forme résolue que localement à l’aide du théorème des fonctions implicites.  
Une EDO d’ordre peut se reecrire comme une EDO d’ordre a valeurs dans  : En posant les équations :forment les composantes d’une EDO d’ordre a valeurs dans .  
Si l’équation d’ordre était sous forme résolue, l’équation d’ordre 1 le sera aussi. De plus, dans les deux cas (forme implicite ou forme résolue), si l'équation d'ordre *n* était autonome, celle d'ordre 1 le sera aussi. Si l'équation était linéaire, elle le reste.  
Dans la suite, l’étude se concentre donc principalement sur les EDO résolues d’ordre 1 sur un Banach.  
**L’orbite d’une** **solution d’une EDO résolue d’ordre 1**  est l’ensemble   
**Le graphe d’une** **solution d’une EDO résolue d’ordre 1**  est l’ensemble   
On peut identifier une solution et son graphe. Résoudre une équation, c’est déterminer l’ensemble de ses solutions, autrement dit c’est déterminer l’ensemble des graphes de ses solutions.  
Dans le cas , on peut faire une représentation graphique du graphe dans , avec en abscisse et en ordonnée. L’orbite d’une solution correspond a l’ensemble des ordonnées associée a cette solution, c’est un intervalle (car continue car dérivable).  
Une **donnée de Cauchy d’une EDO d’ordre**  correspond a un -uplet representant conditions initiales sur toutes les images des derivees successives sauf sur la plus haute.  
Pour une EDO résolue d’ordre 1 c’est un couple on écrit   
Un **problème de Cauchy d’ordre n sur un Kevn**  correspond a une EDO d’ordre n sur E muni d’une donnee de Cauchy d’ordre . On l’écrit   
Pour une EDO résolue d’ordre 1, on écrit (correspond à un triplet )  
Une **solution d’un problème de Cauchy**, est une solution de l’EDO satisfaisant aux données de Cauchy.  
Une donnée de Cauchy est un **point d’existence d’une EDO** ssi le problème de Cauchy formé par cette donnée et cette EDO admet au moins une solution.  
Une donnée de Cauchy est un **point d’unicité globale d’une EDO** ssi le problème de Cauchy formé par cette donnée et cette EDO admet au plus une solution maximale.  
Une donnée de Cauchy est un **point d’unicité locale d’une EDO** ssi c’est un point d’unicité globale pour la même EDO restreinte a un ouvert plus petit mais contenant toujours la donnée de Cauchy.  
**I.2. Equations autonomes et non autonomes.  
I.2.1. Equations autonomes**Un **champ de vecteur** est une fonction d’un ouvert d’un Kevn , vers ce meme Kevn .Une **EDO autonome** est une EDO telle que ne depend pas de autrement dit elle peut se remettre sous la forme .  
Une EDO autonome résolue d’ordre 1 correspond donc à un champ de vecteur.Soit une EDO autonome, résolue, d’ordre 1 sur un Banach .  
Tout vérifiant , fournit une solution définie sur de l’EDO, dont l’orbite est le singleton .  
Pour une solution et un tel que alors est un vecteur directeur de la tangente a l’orbite au point . Le graphe d’une solution d’un EDO autonome résolue est donc une courbe tracée dans qui est en chacun de ses points tangente au vecteur du champ en ce point. Il est possible qu’un même point appartienne simultanément à plusieurs orbites distinctes.  
Une solution d’une EDO autonome résolue peut être translatée : , est encore une solution, de même orbite. Cela définit donc une action du groupe sur l’ensemble des solutions.  
Exemples :   
Pour une EDO de Cauchy-Lipschitz autonome, deux solutions ont même orbite ssi elles déduisent l’une de l’autre par translation d’un réel .  
**I.2.2. Equations non autonomes**Dans ce cas, la propriété d’invariance par translation n’est plus vraie.  
Une EDO non autonome résolue avec peut être vue comme restriction d’une EDO autonome résolue dans E. On pose **l’extension naturelle de** : , c’est un champ de vecteur sur , qui définit une EDO autonome .  
Une solution de l’EDO non autonome donne une solution de son extension naturelle autonome. Réciproquement une solution de son extension naturelle donne une solution de l’EDO non autonome : en fixant un , on pose en résolvant , on a on repose , ainsi , et par la propriété d’invariance est encore solution de l’extension, est solution de l’EDO non autonome.  
Dans le cas , **l’isocline de pente , d’une EDO résolue ,** est l’ensemble . C’est l’ensemble de niveau de l’application .   
Tout point du graphe d’une solution situe sur l’isocline de pente , est un point dont la pente vaut .  
Les isoclines forment une partition de l’ouvert .  
**I.3. Solutions maximales, points d’existence, points d’unicité**Toute solution d’une EDO est majorée dans par une solution maximale (Zorn).  
Pour résoudre une EDO, il suffit donc de donner l’ensemble de ses solutions maximales, les autres solutions ne sont que des restrictions.  
Si tout point de l’ouvert de définition d’une EDO, est un point d’unicité locale pour cette EDO, alors tous ces points sont en fait des points d’unicité globaux pour cette EDO. (vérifier si vrai pour tout ordre)  
Une EDO autonome/un champ de vecteur est dit **complet** ssi toutes ses solutions maximales sont définies sur .  
**I.4. Ensembles et limites, bouts d’une solution**On note l’ensemble des valeurs d’adhérence d’une fonction d’un intervalle vers un Kevn , en un point .  
En général   
Si on définit   
Si on définit   
Il n’y a a priori pas de raison pour que ces ensembles et limites soient non vides, mais c’est souvent le cas.  
Si il existe , (resp. ) est relativement compact dans E, alors ( resp. ) est non vide, compact et convexe. Remarque : peut etre remplace par dans le si, c’est équivalent.  
On appelle **bout gauche d’une solution d’une EDO résolue d’ordre 1**  l’ensemble si , si   
On appelle **bout droit d’une solution d’une EDO résolue d’ordre 1**  l’ensemble si , si   
En général un bout se résume à un simple couple. Je pense la technicité de cette définition est requise pour traiter certaines fonctions bizarres comme dont un bout en 0 occuperait un segment.  
**II. Les théorèmes d’existence et d’unicité  
II.1. Les théorèmes**Soit une EDO d’ordre 1 résolue, et continue d’ouvert vers un Banach quelconque, on note   
On peut définir pour , , grâce à l’intégrale de Riemann. (On a pas étudié l’intégrale de Lebesgue sur un Banach quelconque).  
**Mise sous forme intégrale.** Soit un intervalle , et , alors est solution de l’EDO ssi .  
**Intuition des théorèmes** : On cherche à résoudre l’équation intégrale, on construit d’abord un espace fonctionnel tel que , puis on cherche a resoudre un problème de point fixe .  
**II.1.2 Théorème d’Ascoli Péano et méthode d’Euler  
Th.** Si ou ev de dim finie, et continue alors tout point de l’ouvert est un point d’existence pour l’EDO .  
**II.1.3 Théorème de Cauchy Lipschitz.** **lipschitzienne par rapport à sa seconde variable** ssi  **localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable** ssi tout point de possede un voisinage sur lequel est lipschitzienne par rapport à sa secondevariable.   
On dit qu’une **EDO est de Cauchy Lipschitz** ssi elle vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz c’est-à-dire : Banach sur R, continue et localement lipschitzienne par rapport a la 2nde variable.  
Un **problème de Cauchy Lipschitz** correspond à un problème de Cauchy vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy Lipschitz, c’est-à-dire dont l’EDO est de Cauchy-Lipschitz.  
**Th C.L.** Pour une EDO de Cauchy Lipschitz tout point de l’ouvert est un point d’existence et d’unicité locale (donc global car ).  
Autrement dit, tout problème de Cauchy-Lipschitz admet exactement une solution maximale .   
Corollaire : Toute autre solution du problème est forcément restriction de cette solution maximale.   
Corollaire : Les graphes des solutions maximales forment une partition de l’ouvert .   
Deux solutions d’une EDO de Cauchy-Lipschitz dont les orbites se coupent, représentent la même solution maximale, et donc coïncident sur l’intersection de leurs intervalles.  
Pour une EDO de Cauchy-Lipschitz autonome, deux solutions ont même orbite ssi elles déduisent l’une de l’autre par translation d’un réel .  
Pour un problème de Cauchy-Lipschitz autonome, une solution non injective, donne une solution maximale définie sur et périodique.  
**Théorème des bouts.** Les bouts de l’unique solution maximale d’un problème de Cauchy-Lipschitz, sont contenus dans la frontière de l’ouvert de definition de l’EDO.  
**Corollaire** : Si l’ouvert de définition est de la forme avec intervalle ouvert de , alors l’unique solution maximale d’un problème de Cauchy-Lipschitz est globale, c’est-à-dire .   
Dans le contexte d’un problème de Cauchy-Lipschitz autonome, , on note la solution vérifiant , et on l’appelle **flot du champ de vecteur .**  
Un **point d’équilibre** d’une EDO de Cauchy-Lipschitz autonome, est un point tel que .

**Chapitre 37. Exemples explicites et études quantitatives.  
I. Equations linéaires autonomes et exponentielles**Tout endomorphisme sur un Banach admet une **exponentielle** :   
On a   
Une définition alternative est   
Pour , on a   
Pour , on a inversible d’inverse   
Dans un Kev de dim finie et oriente, pour on a   
Pour une matrice   
Un vecteur propre associe à la valeur propre d’un endomorphisme sur un Banach complexe, est un vecteur propre associe à la valeur propre de .  
Dans un R/Cev de dim. finie , pour un base , et on a   
Dans un Banach, un problème de Cauchy d’ordre 1 résolu autonome défini par un endomorphisme continu est un probleme de Cauchy-Lipschitz et admet donc une unique solution maximale, qui s’avère être la fonction définie par   
**II. Les équations à variables séparées**Grace au théorème de Cauchy Lipschitz on peut souvent se contenter de deviner les solutions, et vérifier qu’elles satisfont bien une EDO donnée.  
Une **EDO a variables séparées** est de la forme avec continue d’un intervalle vers R et localement lipschitzienne d’un intervalle vers , on suppose donc et .  
En général la méthode est de séparer les variables (si existe) et d’intégrer pour deviner les solutions.  
On prend primitive de , primitive de   
Les solutions de l’EDO sont définies implicitement par constante.  
Les graphes des solutions de l’EDO sont les composantes connexes non vides des niveaux pour . A vérifier.  
**III. Intégrabilité.  
III.1. Intégrales premières et conséquences.**Une **intégrale première d’une EDO autonome / d’un champ de vecteur sur** est une fonction qui est constante sur toute orbite de l’EDO cad solution de l’EDO constante sur . En pratique, seul le cas derivable, ou meme est intéressant.  
Une fonction dérivable est une integrale premiere d’un champ ssi   
Si et est et alors defini implicitement une courbe appelée **courbe de niveau de** .  
Pour et est une intégrale première d’un champ de vecteur , alors si on restreint et à l’ouvert , alors les orbites de sont les composantes connexes des courbes de niveau de .  
Exemples : TODO  
généralisation dimension avec sous-variétés : TODO.  
**III.2. Système de Lotka-Volterra : TODO**  
**IV. Quelques inéquations différentielles et intégrales  
IV.1. Inéquations intégrales**  
**Lemme de Gronwall.** Soit 3 fonctions réglées (continues par ex) sur un intervalle , à valeurs positives vérifiant , alors,  
   
**Cas particulier 1.** Si une fonction continue d’un intervalle () vers vérifie  
 alors   
**Cas particulier 2.** Si une fonction continue d’un intervalle () vers vérifie  
 alors   
**IV.2. Application : comparaison des solutions d’une équation différentielle**Soit une ODE sur Banach sur R, continue et -lipschitzienne par rapport à la 2nde variable, et on suppose ouvert avec intervalle ouvert de R et ouvert de .  
Deux solutions definies sur un meme intervalle , vérifient .  
Explication effet papillon très vite même si faible.  
On peut généraliser a des solutions approchées :  
Deux fonctions definies sur un meme intervalle telles que , vérifient alors :   
**V. Equations non autonomes sur la droite  
VI. Introduction à l’étude qualitative des champs plans  
VI.1. Esquisse d’une méthode d’étude  
VI.2. Le système de Van der Pol.**

**Chapitre 38. Le flot d’un champ de vecteurs  
I. Le flot : Définition et exemples  
I.1. Première approche de la notion de flot : le cas autonome.  
I.2. Le cas non autonome  
I.3. Les changements de variables et le flot  
II. Le flot des équations linéaires  
II.1. Retour sur la résolution d’une équation linéaire  
II.2. Flot et résolvante  
II.3. Dépendance du flot relative aux paramètres  
II.4. Retour sur l’exponentielle  
III. Propriétés de régularité  
III.1. Topologie du domaine et continuité du flot  
III.2. La régularité du flot  
III.2.1. La dérivabilité du flot**

**Chapitre 39. Etude locale d’un champ de vecteurs.  
I. Le théorème de redressement du flot.  
II. Quelques questions de stabilité  
III. Le théorème de conjugaison de Grobman-Hartman   
III.1. Endomorphismes hyperboliques  
III.2. Un théorème de point fixe hyperbolique  
III.3. Le théorème de conjugaison pour les difféomorphismes  
III.4. Le théorème de conjugaison pour les champs  
IV. Le théorème de la variété invariante  
V. Le système de Van der Pol**