**PARTIE 2. Intégration et théorie de la mesure**

**Chapitre 15. Les espaces et   
I. Espaces et pour**   
**I.1. Espaces**On suppose , Pour un espace mesuré , on note ou plus simplement l’ensemble des fonctions mesurables de l’espace mesuré vers C dont le module a la puissance p est Lebesgue-intégrable/ d’intégrale de Lebesgue finie. Une fonction est donc ssi elevee a la puissance p, elle est .  
Dans le cas de la mesure de Lebesgue on note ou   
Dans le cas de la mesure de comptage sur l’espace discret de tribu P(X), on note   
L’ensemble des fonctions est un sous-espace vectoriel des fonctions quelconques.  
Si l’espace mesuré est de mesure finie, les espaces sont décroissants avec l’exposant >0. Un exposant plus petit contient plus.   
Cette dernière propriété est donc fausse pour la mesure de Lebesgue sur , et fausse pour la mesure de comptage. Par exemple est dans mais dans aucun autre .  
Sur un ensemble quelconque d’indices , les espaces sont croissants avec l’exposant >0.  
Si , et alors .  
On définit . Cette quantité est toujours définie si la fonction est mesurable.  
Pour une fonction mesurable, équivaut donc à   
**I.2. Inégalités de convexité.**  
Un **couple d’exposants** **conjugués** est un couple tels que la somme des inverses . Cela impose que les exposants sont 1.  
**Inégalité de Hölder.** Pour tout couple d’exposants conjugués , deux fonctions mesurables d’un espace mesuré vers [0,+] vérifient toujours   
Si le second terme est fini, alors il y a égalité ssi et colineaires presque partout ssi il existe , non tous deux nuls, tels que   
On a un résultat analogue si alors avec même cas d’égalité.  
Si les deux fonctions sont à valeurs dans R ou C, il faut de plus qu’elles soient , ce qui entraine toujours que , et l’inégalité est finie. On a le même cas d’égalité.  
Si est une mesure de probabilité, alors on retrouve .  
On peut généraliser Hölder encore plus loin avec des hypothèses analogues  
Si , et , alors   
Si et , alors   
**Inégalité de Cauchy-Schwarz**. On applique l’inégalité de Hölder au couple (2,2),  
Deux fonctions mesurables d’un espace mesuré vers [0,+] vérifient   
Dans le cas complexe les deux fonctions doivent être , et on peut écrire deux inégalités :  
 ou bien .  
Il y a égalité ssi , non tous deux nuls, .  
**Inégalité de Minkowski**. On suppose , alors vérifie l’inégalité triangulaire avec hypothèses similaires. Si les deux fonctions sont mesurables d’un espace mesuré vers [0,+], alors . Si les deux fonctions sont , vers C alors .   
L’inégalité n’est pas vérifiée si donc on se restreint généralement a par la suite  
On en deduit que pour est une semi-norme sur l’espace   
**I.3. Les espaces normés**Sur , le noyau de la semi-norme est l’ensemble des fonctions nulles presque partout. On définit l’espace comme l’espace quotienté par le noyau de la semi-norme p. On identifie donc les fonctions qui coïncident mu presque partout, et est une norme sur l’espace , .  
L’intégrale de Lebesgue est bien définie sur car elle ne dépend pas du représentant de la classe.  
Pour une mesure finie et , alors est continu. Car (Par Hölder)  
**II. Complétude des espaces**On montre que les espaces pour sont tous des espaces de Banach ce qui montre un avantage des espaces de fonctions Lebesgue-intégrables car les espaces de fonctions Riemann intégrables sur un segment ne sont jamais complets.  
**Inégalité de Minkowski dénombrable.** On peut étendre l’inégalité triangulaire au cas d’une série de fonctions mesurables d’un espace mesuré vers ,   
**Lemme Riesz-Fischer.** Pour un espace mesuré vers C, toute suite de fonctions mesurables dont la série converge absolument en semi-norme p ( converge, (impose donc )) alors la série C.S. p.p., et même en semi-norme , et on a .   
**Théorème de Riesz-Fischer.** Pour , l’espace est semi-normé complet. L’espace est un espace de Banach.  
Preuve. Pour un espace mesuré vers C, on prend une suite de fonctions de Cauchy pour la semi-norme , on écrit puis on montre avec le lemme que admet une sous-suite convergente -p.p. vers une fonction , et donc converge vers en semi-norme .  
**III. Les espaces**Un **majorant essentiel** **d’une fonction d’un espace mesuré vers**  est un élément de tel que l’ensemble des points dont les images sont strictement supérieures à cet élément est négligeable.  
L’ensemble des majorants essentiels d’une fonction d’un espace mesuré vers est un intervalle fermé de la forme . La **borne supérieure essentielle de f**, est la borne inférieure .   
   
Une fonction d’un espace mesuré vers C, est **essentiellement bornée** si .  
L’ensemble est l’ensemble des fonctions mesurables f essentiellement bornées   
En résumé  est une semi-norme sur On note .  
Sur les fonctions bornées , est une norme, **la norme uniforme.**On a toujours , l’inégalité peut être stricte ex .  
Si est vide, alors clairement   
L’inégalité de Hölder marche encore avec q=. (si , )  
Sur , le noyau de la semi-norme est l’ensemble des fonctions nulles presque partout. On définit l’espace comme l’espace quotienté par le noyau de la semi-norme . On identifie donc les fonctions qui coïncident mu presque partout, et est une norme sur l’espace .  
L’intégrale de Lebesgue est bien définie sur car elle ne dépend pas du représentant de la classe.  
Le théorème de Riesz-Fischer marche encore l’espace est semi-normé complet. L’espace est un espace de Banach.  
**IV. Parties denses des espaces**Sur un espace mesuré sigma fini, l’ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans ()  
L’ensemble des combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques, d’ouverts de mesures finies, est dense dans , pour   
L’espace des **fonctions continues à support compact** est dense dans , pour   
L’espace des **fonctions à support compact** est dense dans , pour   
 est une complétion des fonctions continues à support compact muni de la norme p, mais pas vrai pour . La complétion des fonctions continues à support compact muni de la norme est l’espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l’infini.  
**V. Un premier résultat de dualité**  
Soit un couple d’exposants conjugués finis dans ,   
pour tout fonction intégrable fixée , l’application est une forme lineaire continue sur dont la norme est égale à la norme q de l’application fixée   
L’application est isométrie linéaire bijective (par Radon Nikodym) de vers .   
Dans le cas est encore une forme linéaire continue sur et avec égalité si l’espace mesuré est sigma-fini.  
Dans le cas , est une forme lineaire continue sur et   
**Plus de propriétés** [Brezis]  
Pour d’une suite de qui converge en norme , on peut extraire une sous-suite convergeant presque surement vers la même limite, et la sous-suite est dominée presque partout par une fonction .  
**4.3. Réflexivité. Séparabilité. Dual de**   
On notera l’exposant conjugué de , autrement dit Pour , est réflexif.  
**Représentation de Riesz.** , de plus   
En conséquence, l’application est une isométrie linéaire surjective ce qui permet d’identifier le dual topologique avec l’espace conjugué .  
Un **espace topologique** **séparable** est un espace topologique ssi il contient une partie dénombrable et dense.  
Un **espace mesuré séparable** est un espace mesurédont la tribu est engendrée par une famille dénombrable de mesurables.  
L’espace mesuré est séparable.  
Un espace métrique séparable topologiquement, définit un espace mesuré de Borel séparable.  
Sur un espace mesuré séparable, l’espace mesuré est aussi séparable pour   
**Représentation de Riesz .** , de plus   
On peut identifier par l’isométrie linéaire surjective ainsi définie.  
L’espace n’est en général jamais réflexif, sauf dans le cas où l’espace mesuré est un ensemble fini.  
L’espace n’est en général jamais ni réflexif, ni séparable, sauf dans le cas où l’espace mesuré est un ensemble fini. Le dual de est plus compliqué, mais strictement plus grand que

**Compléments.**

**Support.**Le **support d’une fonction continue d’un ouvert vers un Revn**  est l’adhérence dans des points en lesquels la fonction ne s’annule pas. C’est un fermé de   
Une fonction est de support vide ssi elle est identiquement nulle.  
Le support d’un produit fini de fonctions est inclus dans l’intersection finie des supports.  
Pour tout multi-indice de taille et de module inferieur a , et toute fonction , on a   
On veut définir le **support essentiel** **d'une fonction mesurable**  **d’un ouvert vers un Revn**  de telle façon qu'il ne dépende que de la classe d'équivalence des fonctions égales à f presque partout, c'est-à-dire sauf sur un ensemble de mesure nulle. Il suffit de poser :  
. C’est un fermé de   
Pour une fonction mesurable et continue support et support essentiels coïncident.  
Une fonction a **support compact** est une fonction dont le support est un compact de cad une partie bornée dans . Autrement dit ssi il existe un compact de telle que la fonction est nulle p.p. sur   
Soit un compact de inclus dans   
**Espaces fonctionnels courants.** est l’ensemble des fonctions d’un ouvert d’un Revn , vers un Revn .  
 est l’ensemble des fonctions bornées d’un ouvert d’un Revn , vers un Revn .  
Pour , est l’espace des fonctions d’un ouvert d’un Revn , vers un Revn .  
Pour , est l’espace des fonctions a support un compact (de ) fixé , Pour , est l’espace des fonctions a support un compact (de )   
Pour ,   
Pour , est l’ensemble des telles que   
 est l’espace des fonctions mesurables localement intégrables (sur tout compact )  
On note l’ensemble des fonctions mesurables a support essentiel compact.  
On ajoute souvent un indice pour signifier qu’on a intersecté l’espace avec **.**Par exemple   
 ( injective) mais attention n’est pas inclus dans en général.   
Un **majorant essentiel** **d’une fonction d’un espace mesure vers**  est un élément de tel que l’ensemble des points dont les images sont strictement > a cet élément est negligeable.  
L’ensemble des majorants essentiels d’une fonction est un intervalle ferme de la forme dont la borne inférieure est appelée la **borne supérieure essentielle de f**.  
-   
On a toujours . Si est vide, alors clairement  **Normes et distances.**Lemme. Tout ouvert admet une suite de compacts telle que et telle que tout compact est inclus dans un .  
Pour ,   
   
 **,**Pour , est une norme sur et même sur pour   
Pour , est une norme sur et même sur pour     
 est une distance sur et sur   
 est une distance sur

**VI. Produit de convolution**  
On se place dans   
**VI.1. Cas des fonctions positives**  
Le **produit de convolution** de deux fonctions mesurables de dans [0, +], est donné par la formule   
alors le produit de convolution est mesurable et   
Le produit de convolution est commutatif sur les fonctions mesurables positives.  
Si , on a   
**VI.2. Cas des fonctions de**Soit une fonction et une fonction , telles que l’intérieur du produit de convolution intégrable, alors le produit de convolution est bien défini et dans , de plus on a encore l’inégalité .  
**VI.3.** **Dérivabilité**Si de classe de dérivées partielles d’ordre 1 bornées, et , alors le produit de convolution est de classe ses dérivées partielles sont bornées et

**VI.4. Approximation de l’unité\***Une famille de fonctions de dans est **approximation positive de l’unité sur**  ssi   
1. Chaque fonction est mesurable d’intégrale valant 1 :   
2.   
Une famille de fonctions de dans est **approximation de l’unité sur**  ssi   
1. Chaque fonction est et d’intégrale valant 1 :   
2. La famille des intégrales des modules est majorée. 3.   
3 (alt pour les suites). Dans le cas où est une suite on trouve parfois la condition plus forte : tendant vers 0, .  
Pour une application , on a toujours converge vers en norme p.   
Une application peut être approchée par n’importe quelle approximation de l’unité convolée avec elle.\*  
Une suite de fonctions de est une **approximation de l’unité sur le tore** si  
1. La suite des normes des fonctions est bornée.   
2. Chaque fonction est d’intégrale normalisée 1.   
3.   
\*Pour toute fonction dans un Banach homogène, si on convole la fonction par tout élément d’un approximation de l’unité, alors on obtient une suite dans le Banach homogène, qui converge vers la fonction dans B. .  
Une famille de fonctions continues est une **approximation de l’unité en**  si  
1.   
2. Chaque fonction est d’intégrale 1.   
3.   
En général et ou R.  
Si d’integrale non nulle sur R, alors pour definit une approximation de l’unité.

**Espace des fonctions test.**Une **fonction test d’un ouvert vers un evn** est une fonction de dont le support est compact inclus dans . Autrement dit c’est une fonction de   
La **fonction test canonique** est   
 et   
On peut aussi utiliser d’autres fonctions telles que   
**Topologie compacte ouverte de**   
Lemme. Tout ouvert admet une suite de compacts telle que et telle que tout compact est inclus dans un .  
Remarque :   
La **topologie compacte ouverte** est la topologie de   
**Caractérisation convergence compacte ouverte.** Une suite de fonctions tests converge vers une fonction test pour la topologie compacte ouverte ssi pour tout multi indice , toutes les (en particulier pour ) convergent uniformément vers sur un même compact fixé inclus dans et qui contient tous les supports de tous les .  
Par exemple pour une fonction test réelle , si on pose alors dans .  
**Fonctions « pic » et « plateau »**Une **fonction pic sur un ouvert**  est une fonction test de vers , de support inclus dans et d’intégrale sur valant 1.Toute boule ouverte non vide d’un ouvert de admet au moins une fonction pic : en normalisant la fonction test canonique : avec   
Une **fonction plateau sur un compact dans un ouvert tel que** est une fonction test de vers , de support inclus dans (donc identiquement nulle sur ), qui vaut identiquement sur un compact .  
Sur un compact non vide inclus dans un ouvert dont l’adhérence est incluse dans , on peut construire au moins une fonction plateau sur ce compact de support dans l’ouvert.  
Idée : Pour on pose , fonction pic sur et on convole .  
**Densité par troncature.  
Produit de convolution.** Dans cette section Sous de bonnes hypothèses : le **produit de convolution** est   
Si sont mesurables et positives le produit de convolution est bien défini.  
Pour , si une fonction est et l’autre est alors leur convolée est définie p.p. sur , leur convolée est , on a et .  
Si et , alors si avec et ses dérivées partielles jusqu’à l’ordre sont toutes bornées alors et pour tout multi-indice   
Convoler une fonction par une fonction test, donne une nouvelle fonction test.  
**Régularisation.**Intuition : On peut régulariser une fonction non régulière en la convolant avec une fonction régulière.  
On considère une fonction pic de support dans d’integrale 1 sur : Pour soit .  
La suite est une approximation de l’unité.  
En particulier et   
Pour et , converge uniformement vers sur quand   
En particulier   
   
L’espace des fonctions tests est dense dans , et dans .  
.   
.  
**Lemme de Dubois-Reymond.** Une fonction telle que pour toute fonction test , est une fonction nulle presque partout.  
 𝑢𝑏𝑙𝑒𝑅 𝑛 ttion de l'p.p. sur