**Espaces vectoriels**

Une **loi de­ composition interne (l.c.i)** sur un ensemble quelconque est une fonction de dans

Une l.c.i. est **associative** si la priorité des opérations n’a pas d’importance dans un produit, càd .

Une l.c.i. est **commutative** si l’ordre des opérations n’a pas d’importance dans un produit, càd

Un élément de est **neutre** pour la l.c.i. si composer un terme de par l’élement à gauche ou à droite, ne change pas le terme. Si une l.c.i. admet un neutre, celui-ci est unique.

Si une l.c.i. admet neutre, **symétrique à gauche** de / **symétrique à droite** de signifie que le produit est égal au neutre. **Symétrique =** symétrique à gauche ET à droite. **Symétrisable =**  symétrique. Parler de symétrique suppose l’existence d’un neutre.

Un **groupe** est un ensemble muni d’une l.c.i. sur tel que la l.c.i est associative, la l.c.i admet un neutre, tout élément est symétrisable par la l.c.i.

Un groupe est dit **commutatif/abélien** si sa loi est commutative

Un **anneau** **non-unitaire** correspond à un la donnée de tels que groupe commutatif de neutre et l.c.i. associative sur et distributive a gauche et a droite par rapport a .

Un **anneau = anneau unitaire** correspond à un la donnée de tel que anneau et élément neutre pour la multiplication.

Un **anneau commutatif** est un anneau dans lequel est commutatif

On note l’ensemble des éléments inversibles d’un anneau. On note

L’ensemble des éléments inversibles d’un anneau unitaire est un groupe pour d’element neutre .

Un **corps** est un anneau unitaire commutatif dans lequel tout élément non nul est inversible .

Une **l.c.e.** sur un ensemble muni d’un ensemble est une application de vers .

**Définition d’un espace vectoriel.**

On dit que  **est un espace vectoriel** ssi est un corps, est un groupe abélien, est une l.c.e. sur , et pour tous on a

Il est d’usage de ne pas expliciter et et d’utiliser le même symbole pour et .

Définition explicite complète : **est un espace vectoriel** ssi

Pour tous et tous

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

Toute extension d’un corps peut etre vue comme un espace vectoriel sur .  
En particulier tout corps est un espace vectoriel sur lui-même.

Un produit quelconque de espaces vectoriels muni des **lois produits** et est un espace vectoriel appelé **espace produit externe**.

Un  **sous-espace vectoriel** d’un espace vectoriel est une partie de non vide stable par et et qui est encore un espace vectoriel pour les lois induites. Autrement dit K sev de ssi , , , et K ev.

**Caractérisation sous-espace vectoriel.** Une partie d’un ev est un sous-espace vectoriel de ssi est non vide (càd ) et

Un sous-espace contient toujours

L’intersection quelconque de sevs d’un même ev est toujours un sev de ce ev.

Si sont deux sevs de et alors est aussi un Ksev de .

**Familles.**

On note l’ensemble des familles quelconques d’un ensemble indicées par un ensemble   
Une définition donnée relativement à une famille quelconque, et qui ne dépend pas de l’ordre de cette famille pourrait être donnée relativement à un ensemble quelconque, mais il est d’usage de privilégier l’écriture familiale dans la théorie des espaces vectoriels.

Le **support d’une famille quelconque d’un ev**  est l’ensemble des indices d’image non nulle.

On note l’ensemble des familles de indicées par a support fini.

Si est un ev, et ensemble quelconque d’indices, alors est un ev, et est un sev de

La somme d’une famille quelconque sur un Kev n’est pas forcement définie.

La **somme d’une famille**  **a support fini** sur un Kev est bien définie uniquement et notée . Elle a un nombre fini de termes, est un groupe abélien, donc l’ordre n’importe pas.

Pour et pour on a et donc est bien définie.

Une **combinaison linéaire d’une famille quelconque** sur un Kev est un élément tel que

Pour une famille quelconque sur un Kev on note l’ensemble des combinaisons linéaires de cette famille.

Cet ensemble est un sev de , en fait c’est le plus petit sev qui contient la famille

est aussi appelé  **sous-espace vectoriel engendré** par la famille .  
Pour on note Pour et tout tel que alors   
Pour sev de ,   
Pour sevs de , Pour sevs de ,   
Pour définir un produit catégorique on peut utiliser la construction classique comme ensemble produit.  
**Produit externe.**    
Le produit externe muni des projections canoniques est un produit pour la catégorie espaces vectoriels.   
Pour définir une somme catégorique on ne peut pas utiliser la construction classique comme somme disjointe car ce n’est même pas un espace vectoriel. Mais possible de définir une somme autrement.  
**Somme externe.**    
La somme externe munie des injections canoniques est une somme pour la catégorie espaces vectoriels.  
Dans le cas fini, somme et produit coïncident   
**Somme interne.** Pour sevs de ,   
Une somme interne n’est a priori pas toujours une somme pour la catégorie des espaces vectoriels.

Une famille quelconque sur un Kev est une **famille génératrice**, ssi tout élément de s’exprime comme une combinaison linéaire de cette famille, càd ssi càd ssi la famille engendre l’espace vectoriel ssi morphisme surjectif.

Une famille quelconque sur un Kev est une **famille libre** ssi la seule combinaison linéaire de cette famille donnant est la combinaison nulle ssi ssi aucun élément de la famille ne s’exprime comme combinaison linéaire des autres ssi ssi toute combinaison linéaire sur la famille admet une écriture unique, ssi morphisme injectif.

Une famille quelconque sur un Kev est une **famille liée** ssi ce n’est pas une famille libre ssi càd ssi

Une famille quelconque sur un Kev est une **base** ssi c’est une famille libre et génératrice, ssi isomorphisme d’ev.

est une base de

est une famille libre de

est une base de

**Operations avec invariant sur une famille.**

Soit une famille quelconque sur un Kev .

**Remplacer un générateur.** Si s’écrit comme combinaison linéaire des , avec un alors on peut échanger par sans changer l’espace engendré.

**Additionner à un générateur une combinaison linéaire des autres.** Si on additionne à une combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille, ça ne change pas le sous-espace engendré.

**Supprimer un générateur.** S’il existe une équation linéaire entre les telle que alors on peut enlever de la famille sans changer l’espace engendré.

**Enrichir une famille libre.** Si on ajoute à une famille libre, un vecteur qui ne s’exprime pas comme combinaison linéaire des autres, alors la famille reste libre.

Un espace vectoriel est dit **de dimension finie** ssi il admet une famille génératrice finie.

Une famille libre d’un Kev a toujours un cardinal à celui d’une famille génératrice de ce Kev.

Un Kev est de dimension infinie ssi il admet une famille libre infinie.

Tout Ksev d’un Kev de dimension finie, est un Kev de dimension finie.

sont de dimension infinie.

Une base d’un Kev est une famille libre de cardinal maximal.

Une base d’un Kev est une famille génératrice de cardinal minimal.

Si un Kev admet des bases, elles ont donc toutes même cardinal.

Avec une base d’un Kev , on a que , tout élément de l’espace s’écrit comme combinaison linéaire unique de cette base.

**Théorème de la base incomplète.**

Toute famille libre d’un Kev peut être complétée en une base.

Toute famille génératrice d’un Kev contient une base

Tout K espace vectoriel admet au moins une base.

La **dimension d’un K espace vectoriel de dimension finie**, notée est le cardinal de n’importe laquelle de ses bases. En dimension infinie on note

Une famille libre d’un Kev de dimension finie, a un cardinal , et c’est une base ssi son cardinal est

Une famille génératrice d’un Kev de dimension finie, a un cardinal , et c’est une base ssi son cardinal est

Un sev a toujours une dimension inférieure à celle de son Kev. sev de

Un sev de dimension finie égale à celle de son Kev, coïncide avec son ev.

Un ev de dimension infinie peut admettre un Ksev propre de dimension infinie.

Pour une extension d’un corps de -dimension finie de base , et un espace vectoriel de -dimension finie de base alors, est aussi un espace vectoriel de -dimension finie dont est une base.

**Définition des application linéaires.**

Une **application linéaire = morphisme d’espace vectoriels**, d’un ev vers un ev sur le même corps est une application telle que et , càd telle que

Une application linéaire vérifie aussi quel que soit le corps .

On note ou juste l’ensemble des applications linéaires d’un ev vers un ev .

Le **noyau d’une application linéaire** est

L’**image d’une application linéaire** est

Le noyau d’une application linéaire est un sev de

L’image d’une application linéaire est un sev de

Une application linéaire est injective ssi

Une application linéaire est surjective ssi

La composée de 2 applications linéaires et est une application linéaire

Un **endomorphisme** d’ev est une application linéaire d’un Kev dans lui-même. On note les endomorphismes d’ev de .

Un **isomorphisme** d’ev est une application linéaire bijective. On note les isomorphismes d’evs de vers .

Un **automorphisme** d’ev est une application linéaire qui est à la fois un endomorphisme d’ev et un isomorphisme d’ev. On note les automorphisme d’ev de .

L’inverse d’un isomorphisme d’ev est aussi une application linéaire, et donc aussi un isomorphisme d’ev. Càd .

**Espace vectoriel quotient.**Pour un Kev, et un Ksev de , l’espace vectoriel quotient est l’ensemble identique à celui du groupe quotient, muni des lois et .

L’espace vectoriel quotient est bien un espace vectoriel.

La **surjection canonique**  est une application linéaire surjective de noyau .

**Th. factorisation.** Un morphisme d’ev , **est factorisable** sur un Ksev de càd tel que ssi ssi .

Dans ce cas est unique, est un morphisme d’ev et on a ,

De plus est surjective ssi l’est et est injective ssi .

**Th. isomorphisme.** Un morphisme d’ev , est toujours factorisable sur son noyau en une application injective telle que . Donc   
Ce résultat peut se comprendre comme une généralisation du théorème du rang.

**Caractérisation** **somme directe.** Pour sevs d’un même ev  :  
 est toujours un morphisme surjectif, mais pas toujours bijectif.  
 muni des injections canoniques est toujours une somme catégorique. Càd ev   
Mais muni de ses injections n’est pas toujours une somme catégorique.  
**La famille est en somme directe**  
 muni de ses injections canoniques est une somme dans la catégorie des espaces vectoriels.  
 isomorphisme   
   
   
   
 base de   
 base de   
Dans ce cas, et

**Caractérisation E =** **somme directe.** Pour sevs d’un même ev  :  
 est un morphisme, mais ni forcément surjectif ni injectif.Alors  **est somme directe des** La famille des est en somme directe et   
 isomorphisme   
   
 et (surjectivité)  
 et   
 base de   
 base de   
Dans ce cas : on peut écrire et

**Caractérisation** **somme directe à 2 objets.** Pour sevs d’un même ev  :  
 est toujours un morphisme surjectif, mais pas toujours bijectif.  
 est toujours une somme catégorique (et un produit), mais pas forcément .  
 **est en somme directe**  
 est une somme catégorique.  
 isomorphisme   
   
   
   
 base de , base de , base de   
 base de , base de , base de   
  
Dans ce cas : on peut écrire et

**Caractérisation** **supplémentaire.** Pour sevs d’un même ev  :  
 est un morphisme, mais ni forcément surjectif ni injectif.  
 est toujours une somme catégorique, mais pas forcément .  
 **sont supplémentaires dans**    
 isomorphisme   
   
 et (surjectivité)  
 et   
 base de , base de , base de   
 base de , base de , base de   
 muni de ses injections est une somme catégorique.  
 La restriction de la [surjection](https://fr.wikipedia.org/wiki/Surjection) [canonique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Canonique_(math%C3%A9matiques)) est un isomorphisme.  
 La restriction de la [surjection](https://fr.wikipedia.org/wiki/Surjection) [canonique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Canonique_(math%C3%A9matiques)) est un isomorphisme.  
Dans ce cas : on peut écrire , ,

**Propriétés des applications linéaires.**

**Théorème.** Soit une base d’un ev , et une famille quelconque d’un ev , alors il existe une unique application linéaire de qui envoie la base fixée sur la famille fixée, càd

Une application linéaire de est un isomorphisme d’ev ssi l’image d’une base quelconque de , est une base de ssi l’image de toute base de est une base de .

L’image d’une application linéaire est engendrée par l’image d’une base de l’espace de départ .

Deux evs de dimension finie, sont de même dimension ssi ils sont isomorphes.  
Deux evs isomorphes sont de même dimension (finie ou infinie).

Tout ev de dimension finie est isomorphe au ev

Deux ev sont tous 2 de dimension finie ssi l’espace des morphismes entre eux, est de dimension finie. Dans ce cas on a

Soit un ev somme directe finie de evs, et un ev, alors une application linéaire de vers est déterminée par ses restrictions sur chaque , et réciproquement.

**Projecteur.**

Etant donné , **le projecteur de de base de direction**  est l’unique fonction . Il est bien défini car l’écriture est unique par hypothèse.

Un projecteur est donc caractérisé uniquement par son couple (base, direction) càd

Un projecteur est toujours un endomorphisme sur son espace .

Le projecteur de sur de direction , est d’image , et de noyau

Un projecteur est donc caractérisé par son couple (noyau, image). C’est l’unique projecteur de noyau et d’image . Un projecteur vérifie donc toujours

Un endomorphisme est un projecteur ssi il est idempotent càd ssi

Si , il existe toujours un [projecteur](https://fr.wikipedia.org/wiki/Projecteur_(math%C3%A9matiques)) de de base de direction , et un autre de base et de direction , donc il existe toujours deux projecteurs et de dont la somme vaut l'identité et dont les images respectives sont et .

ssi est un isomorphisme, et dans ce cas le projecteur de base de direction factorisé sur son noyau : est en fait l’isomorphisme réciproque.

**Affinités vectorielles.**

Etant donné , on appelle **affinité vectorielle** sur (de **base** ), de **direction** , de **rapport** , l’unique endomorphisme de E, qui se restreint a l’identité sur et a l’homothétie de rapport sur . Autrement dit .

Pour une affinité vectorielle on a donc toujours , donc toujours

L’identité de E est une affinité vectorielle de direction donc le rapport n’importe pas.

Une **homothétie de rapport**  est une affinité vectorielle de rapport avec cad .

Un **projecteur** est une affinité vectorielle de rapport . Dans ce cas mais en fait et donc .

Une **symétrie** est une affinité vectorielle de rapport . Dans ce cas ,

Une **dilatation** est une affinité vectorielle sur un hyperplan càd de direction une droite et de rapport . Dans ce cas hyperplan et droite.

Une dilatation **fixe son hyperplan** : ssi ssi

Une **réflexion** est une dilatation de rapport , autrement dit c’est une symétrie sur un hyperplan.

Soient un endomorphisme d'un espace vectoriel *E*, l'ensemble des vecteurs invariants, et

On dit que est une **transvection** si est l'identité, ou si est un hyperplan (**base** de la transvection) (ce qui revient à dire que , **direction** de la transvection, est une droite) et est inclus dans (càd que pour tout *x* de *E*, ).

Une transvection appartient , n’est jamais l’identité, fixe toujours un hyperplan.

**Codimension et rang.**

Tout supplémentaire du noyau d’un morphisme d’ev est un espace isomorphe à l’image du morphisme.

Deux supplémentaires d’un même sev d’un ev, sont isomorphes.

Un sev d’un ev (de dimension quelconque) admet toujours un supplémentaire dans ce ev.  
Deux evs isomorphes sont de même dimension (finie ou infinie). Réciproque vraie en dimension finie.

La **codimension d’un Ksev** d’un Kev, est la dimension d’un supplémentaire quelconque de ce sev.

Pour sev de un ev, on peut donc inconditionnellement écrire :

En explicitant le supplémentaire , on peut toujours écrire

Ainsi, (car est un isomorphisme)

Pour sev de ev, on a donc toujours

Pour sev de ev de dimension finie, on a

Un **hyperplan** d’un ev , est un K sous-espace vectoriel de codimension 1. En dimension finie c’est donc un Ksev de dimension .

Le degré d’un polynôme sur un corps , est égal à la codimension de l’idéal qu’il engendre dans . .  
Le **rang** d’une application linéaire est la dimension de son image. On le note

Le **rang d’une famille quelconque** sur un Kev est la dimension de l’espace qu’elle engendre.

L’image d’une application linéaire est engendrée par l’image d’une base de l’espace de départ .

Autrement dit base de

Le rang d’une application linéaire est égal au rang de la famille image d’une base de l’espace de départ . Autrement dit base de

**Théorème du rang.** Le rang d’une application linéaire est toujours égal à la codimension de son noyau. . On a donc toujours

Si est de dimension finie, est toujours de rang fini et

Pour scalaires distincts d’un corps , est linéaire surjective de rang .

Pour linéaire injective, on a

Pour linéaire surjective, on a

Pour isomorphisme d’ev, on a

Pour linéaire, et , alors ( injectif ssi surjectif ssi isomorphisme)

Dans ev de dim finie,

Dans ev de dim finie, ,

Pour deux sevs d’un ev ,

**Grassmann.** Pour deux sevs d’un ev ,

En dimension finie on peut donc écrire

Pour sevs d’un ev ,

**Caractérisation somme directe 2.** Pour deux sevs d’un ev de dimension finie,

**Caractérisation somme directe n.** Pour deux sevs d’un ev de dimension finie,

**K-Algèbre.**

On dit que  **est une -algèbre (unitaire)** ssi est un -espace vectoriel, est un anneau (unitaire), et pour tous

Toute extension d’un corps peut être vue comme une algèbre sur .  
En particulier tout corps est une algèbre sur lui-même.

sont des -algèbres. est une -algèbre.

est une - algèbre.

Une **-sous-algèbre** d’une -algèbre est une partie non vide de , telle que / , et qui munie des lois induites est encore une -algèbre.  
**Caractérisation sous-algèbre.** Une partie d’une -algèbre , est une **-sous-algèbre** de

ssi est un sous-anneau unitaire de et -sev de

ssi et

On a donc (dans le cas unitaire toujours supposé par défaut) .

et sont des sous-algèbres de

Le centre d’une -algèbre est l’ensemble des éléments qui commutent avec tous les autres pour .

Le centre d’une -algèbre en est une sous-algèbre.

Le centre des endomorphismes sur un ev de dimension finie, s’avère être l’ensemble des homothéties vectorielles . C’est une sous-algèbre de   
Le centre du groupe linéaire est , c’est un sous-groupe de

**Morphisme de -algèbres.**

Un **morphisme d’algèbres**, d’une -algèbre vers une-algèbre sur le même corps est à la fois un morphisme d’anneau et un morphisme d’espaces vectoriels de vers càd que c’est une application telle que .

**Dualité.**

**Rappels topologiques.** On suppose K = R ou C

Entre deux Kevs on note l’ensemble des applications linéaires de dans

Entre deux Kevns on note l’ensemble des applications linéaires continues de dans

Une application linéaire d’un Kevn E vers un Kevn F vérifie les équivalences :

continue ssi continue en 0 ssi bornée sur ssi bornée sur ssi ssi lipschitzienne ssi uniformément continue.

Un **opérateur borné entre deux evn** désigne une application linéaire continue.

Une application linéaire n’est jamais bornée au sens strict.

Pour un Kev , on note **le dual algébrique de E.**

Pour un Kevn , on note **le dual topologique de E.**

Sur un Kev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Toute application linéaire d’un Kevn de dimension finie vers un Kevn quelconque est continue.

Toute application n-linéaire d’un produit fini de Kevn de dimensions finies vers un Kevn quelconque est continue.

Dans un Kevn, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est complet et donc fermé.

Un Kevn complet de dimension infinie ne possède pas de base algébrique dénombrable.

**Riesz.** Un Kevn est de dim finie ssi il est localement compact ssi la boule unité fermée est compacte.

Les parties compactes d’un Kevn de dimension finie sont exactement les fermés bornés.

**La norme d’opérateur/subordonnée/triple/duale a**  est

**Caractérisation**:

est un Kevn complet si l’est.

Le dual topologique d’un Revn est donc toujours complet car l’est.

En dimension finie tout opérateur est borné.

Pour 3 Kevn , alors et

est **le crochet de dualité**.

**Théorèmes**

Un sev d’un Kev E est un hyperplan ssi c’est le noyau d’un forme linéaire non nulle.

Une forme linéaire non nulle est complètement déterminée par la donnée de l’image d’un vecteur n’appartenant pas à son noyau.

Pour un hyperplan vectoriel d’un ev , on peut obtenir un supplémentaire algébrique en prenant la droite vectorielle dirigée par n’importe quel vecteur n’appartenant pas à l’hyperplan.  
Deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles ssi elles ont même noyau hyperplan ssi le noyau de l’un est inclus dans le noyau de l’autre.

Dans un Kevn, un hyperplan est fermé ssi une forme linéaire de noyau cet hyperplan est continue.

Dans ce cas si , le complémentaire de l’hyperplan possède deux composantes connexes

et

**Bidual.**

**Le bidual d’un Kev E** est l’espace dual de c’est-à-dire l’espace

Ayant fixe un , l’application qui a une forme linéaire associe son crochet de dualité par cet élément, est un élément du bidual de E. Autrement dit . On le note .

L’application est linéaire. **C’est l’application linéaire canonique de E dans**

L’application linéaire canonique de est injective (AC) mais pas forcément surjective.

Elle n’est pas surjective dans muni de

Le bidual topologique peut être muni de la norme

L’application linéaire canonique est une isométrie,

Un Kev est **réflexif** ssi le morphisme canonique injectif dans son bidual est aussi surjectif.

Un Kevn réflexif est donc isométriquement isomorphe et peut être identifié à son bidual topologique,

Un Kevn non réflexif est isométriquement isomorphe a un sous espace de son bidual topologique.

Quoi qu’il en soit, on peut toujours plonger un Kevn dans son bidual topologique.  
**Orthogonalité version dualité.**

On peut définir un concept d’orthogonalité pour la dualité algébrique ou topologique.

On suppose K = R ou C, donc en particulier K est complet et donc le dual topologique est complet.

L’**orthogonal dual algébrique (resp. topologique) d’une partie non vide d’un Kev (resp. Kevn)**, est l’ensemble des formes linéaires quelconques (resp. continues) s’annulant sur la partie.

L’**orthogonal vectoriel algébrique (resp. topologique) d’une partie non vide du dual d’un Kev (resp. Kevn)**, est l’ensemble des vecteurs annulant toutes les formes linéaires quelconques (resp. continues) de la partie.

**Propriétés générales s’appliquant au cas algébrique et topologique.** (à vérifier)

L’orthogonal dual/vectoriel est toujours un K-sous-espace vectoriel.

L’orthogonal dual du singleton nul, est l’espace dual entier.

L’orthogonal dual de l’espace entier, est le singleton de la forme linéaire nulle.

L’orthogonal vectoriel du singleton de la forme linéaire nulle, est l’espace vectoriel entier.

L’orthogonal vectoriel de l’espace dual, contient mais n’est pas toujours le singleton nul.

En dimension finie, l’orthogonal vectoriel de l’espace dual, est le singleton nul.

L’orthogonal dual (resp. vec) d’une partie non vide est aussi l’orthogonal dual (resp. vec) du sous-espace engendré par la partie.

Pour l’orthogonal dual (resp. vectoriel) on a

L’orthogonal dual (resp. vec) de l’orthogonal d’une partie d’un Kev, contient la partie.

**Propriétés topologiques.** (à vérifier)

L’orthogonal dual topologique d’une partie est un Ksev fermé donc complet du dual topologique.

L’orthogonal vectoriel topologique d’une partie duale est un Ksev fermé du Kevn. (complet si banach)

On peut écrire

On a

Pour un sous-espace vectoriel du Kevn on a et donc

Pour un sous-espace vectoriel du dual topologique on a juste

Cependant si le Kevn est réflexif, on a également et donc   
Pour deux sev fermés d’un Kevn , on a  
   
   
Pour deux sev fermés d’un Banach , on a  
 fermé dans ssi fermé dans ssi ssi   
**En dimension finie.**

L’orthogonal dual/vectoriel est toujours un K-sous-espace vectoriel fermé complet.

, , ,

,

Pour un sous-espace vectoriel on a ,

**Base duale et antéduale.**

Etant donnée une base d’un ev de dimension finie , il existe une unique famille de forme linéaires vérifiant . Cette famille est appelée **base duale de** , et notée **.**  
La base duale d’une base d’un ev , est bien une base du dual

Etant donnée une base du dual d’un ev de dimension finie , il existe une unique famille de vecteurs vérifiant . Cette famille est appelée **base antéduale de** , et notée **B.**

La base antéduale d’une base du dual d’un ev , est bien une base de

La base antéduale de la base duale redonne la base initiale, ce qui justifie les notations prises.

En dimension finie, fixer une base revient donc à fixer sa version vectorielle et sa version duale

Dans une base fixée, un vecteur peut toujours s’écrire

Dans une base fixée, une forme linéaire peut toujours s’écrire

**Systèmes d’équations linéaires d’un sous-espace**

Un sev d’un ev de dimension finie , est de dimension ssi il existe une famille libre de formes linéaires telles que càd ssi s’exprime comme l’intersection des noyaux de formes linéaires indépendantes.

L’intersection des noyaux d’une famille quelconque de formes linéaires de rang sur un ev de dimension finie , est un Ksev de dimension

**Transposée.**

La **transposée d’une application linéaire** est l’application .

La transposée d’une application linéaire est elle-même linéaire

On a

En dimension finie ,   
Pour sev de , alors (car est surjective de noyau )

Corollaire :

**Exercices.**Deux sev d’un de même dimension d’un même ev de dimension finie, admettent un supplémentaire commun.  
Pour avec de dim finie,   
Pour avec de dim finie, et   
Pour projecteurs sur de dim finie de carac 2, projecteur ssi   
Dans ce cas et   
Deux sev de même codimension d’un ev, dont l’un contient l’autre, alors ils sont égaux.  
Dans une suite exacte finie de evs (dont injective, surjective) alors   
Grassmann pour la codimension.   
 ssi pair et semblable a une matrice diagonale par bloc, dont tous les blocs diagonaux sont   
L’indice de nilpotence d’un endomorphisme d’un ev de dimension finie est   
Une famille libre de fonctions d’un ensemble vers un corps (ev) alors il existe tels que   
Identités de Jacobi et de Sylvester. (TODO)  
Une matrice n’est pas inversible ssi   
   
Si a pour coefficients avec , alors   
Si nombre de diviseurs communs a et ,   
Si somme des diviseurs communs a et ,   
Si , avec indicatrice d’Euler.  
Tout hyperplan de avec corps commutatif et , contient au moins une matrice inversible.  
La dimension maximale d’un sous-espace de ne contenant aucune matrice inversible est .  
Une application tel que est soit nulle, soit une norme sur   
Une matrice de transvection est inversible, d’inverse une matrice de transvection.  
Finir l’exo TODO.  
Deux matrices carrées semblables dans le sont dans   
Deux matrices carrées semblables sur une extension d’un corps infini, sont aussi semblables dans .  
C’est encore vrai dans le cas fini.