**Limite et continuité dans un espace vectoriel normé.**  
Soit une fonction d’une partie d’un Kevn vers un Kevn telle que est un point d’accumulation de , et .  
On dit que  **admet pour limite en**  et on note / ssi  
   
Si la limite existe, elle est unique et on la note /   
Une limite d’une fonction appartient à l’adhérence de l’image.  
Une fonction d’une partie d’un Kevn vers un Kevn est **continue en un point** (d’accumulation de ) ssi sa limite en ce point est l’image de ce point.  
La limite se compose. Si et alors   
Une fonction qui admet une limite en un point ou elle n’est pas définie, permet de définir le **prolongement par continuité de en**  comme la fonction telle que et   
**Limites dans R.**Soit une fonction , soit , soit un point d’accumulation de .  
   
   
   
 et   
 et   
   
   
   
 et   
 et   
   
   
   
 et   
 et   
   
   
   
 et   
 et   
   
   
   
 et   
 et   
Remarques :  
   
**Notations o, O, .**  
**Une fonction est négligeable devant une fonction au voisinage d’un point**  **d’accumulation de** , et on note ssi . Dans le cas -algèbre normée, ssi  
il existe une fonction qui tend vers en et telle que sur un voisinage de , on a .  
**Une fonction est dominée par une fonction au voisinage d’un point**  **d’accumulation de** , et on note ssi . Dans le cas -algèbre normée, ssi  
il existe une fonction bornée telle que sur un voisinage de , on a .  
**Une fonction est équivalente à une fonction au voisinage d’un point**  **d’accumulation de** , et on note ssi .  
Dans le cas -algèbre normée, ssi  
il existe une fonction qui tend vers en telle que sur un voisinage de , on a .  
 est une relation d’équivalence sur les fonctions .  
Dans -algèbre normée, lorsqu’on a une expression avec des ou des , c’est un abus d’écriture, pour interpréter l’expression, on remplace tous les par une fonction . Chaque occurrence doit être remplacée par sa fonction particulière, en dépit du même symbole utilisé . Les à gauche d’une équation sont remplacés par des fonctions généralement introduites par un quantificateur universel, ceux à droite d’une équation sont remplacés par des fonctions généralement introduites par un quantificateur existentiel. Par exemple signifie   
**Dérivation selon une variable réelle.**  
La **fonction variation par rapport à un point**  est la fonction   
La **fonction variation par rapport à un point initial d’une fonction d’un intervalle vers un Kevn ,** est la fonction   
La **fonction taux de variation** d’une fonction d’un intervalle de vers un Kevn , en un point de l’intervalle, est la fonction . On la note ou pour être plus bref :   
Une fonction d’un intervalle vers un Kevn est dite **dérivable en un point** ssi sa fonction taux de variation en admet une limite finie en . Cette définition suppose donc implicitement que est un point d’accumulation de (c’est une précondition pour parler de limite) donc on a .  
La **dérivée en d’une fonction**  d’un intervalle vers un Kevn , dérivable en , est la limite de sa fonction taux de variation en . On la note   
Une fonction d’un intervalle vers un Kevn est dite **dérivable à gauche (resp. droite) en / en (resp. )** ssi sa fonction taux de variation en admet une limite finie en (resp en ). Cette définition suppose donc implicitement (resp. )  
La **dérivée à gauche (resp. droite) en / en (resp. ) d’une fonction**  d’un intervalle vers un Kevn , dérivable en (resp. en ), est (resp. est )

**Caractérisations.**Soit une fonction d’un intervalle vers un Kevn , soit   
 continue à gauche en ssi et continue en   
 continue à gauche en ssi   
 continue à droite en ssi et continue en   
 continue à droite en ssi   
 continue en ssi   
En un point intérieur à , continue en ssi continue à gauche et à droite en   
 dérivable à gauche en ssi et dérivable en .  
Dans ce cas   
 dérivable à gauche en ssi   
Dans ce cas   
 dérivable à droite en ssi et dérivable en .  
Dans ce cas   
 dérivable à droite en ssi   
Dans ce cas   
 dérivable en ssi   
Dans ce cas   
En un point intérieur à , on a dérivable en ssi dérivable en et en et   
Dans ce cas   
**Propriétés de composition.**  
Une fonction dérivable à gauche (resp. droite) en un point y est continue à gauche (resp. droite).  
Une fonction dérivable en un point y est continue.  
**Composition.** Si dérivable en et dérivable en alors est dérivable en et   
Pour et , dérivable en dérivable en et   
Une fonction d’un intervalle vers un Kevn de dimension finie est dérivable en ssi ses composantes suivant n’importe quelle base de , sont aussi dérivables en et dans ce cas   
Soit evns et et pour   
Si est -lineaire continue et dérivable en alors est derivable en et   
Pour Kevn de dimension finie et alors est derivable en et   
**Classes de régularité**Soit fonction d’un intervalle vers un Kevn , soit   
Pour une propriété locale telle que soit défini : «  est en  » on peut définir la version globale :  
 est (**sur** ) ssi est en   
 est **sur**  ssi est ssi est en   
Attention, est sur n’est pas forcement équivalent a est en .  
 **est de classe** ssi continue (sur )  
 **est de classe en** ssi continue en   
Cette définition locale est compatible avec la version globale car est ssi en   
 **est de classe** ssi dérivable sur et continue sur   
 **est de classe en**  ssi intervalle tel que , est dérivable, est continue en   
Cette définition locale est compatible avec la version globale car est ssi en   
 est **-fois dérivable en**  ssi intervalle tel que , est dérivable en et est dérivable en . Dans ce cas on note   
Remarque : Si est **-fois dérivable (sur )**, alors intervalle tel que , est -fois dérivable et   
 **est de classe** ssi -fois dérivable sur et continue sur   
 **est de classe en** ssi intervalle tel que , -fois dérivable, continue en   
Cette définition locale est compatible avec la version globale car est ssi en   
 **est de classe** ssi -fois dérivable sur ssi   
 **est de classe en** ssi -fois dérivable en ssi est en   
On note   
On note   
   
**Rappel sur les subdivisions.**Une **subdivision** de est une famille finie strictement croissante de réels dont le premier est , le dernier est . Le **pas d’une subdivision** est l’écart maximal entre deux termes consécutifs de la subdivision.   
Une **subdivision de adaptée à une propriété**  paramétrée par une partie est une subdivision telle que la propriété se vérifie en tous les intervalles ouverts de R dont les bornes sont des termes consécutifs de la subdivision càd si la propriété se vérifie sur la partie strictement « entre » chaque terme.   
Soit une propriété dépendant d’une fonction et de . se dit **«  est sur  »**  
Une **subdivision de adaptée à par morceaux** est une subdivision adaptée à la propriété : «  est (sur ) et admet un prolongement sur qui est (sur ) » qui est paramétrée par .   
Autrement dit, c’est une subdiv. telle que est etadmet un prolongement sur   
Attention ce n’est pas une subdivision adaptée à la propriété «  est  ».  
Si est un segment ,  **est par morceaux** ssi admet une subdivision adaptée à par morceaux.  
Si intervalle quelconque,  **est par morceaux** ssi elle l’est sur tout segment inclus dans .  
On note   
De façon générale, On note   
Une fonction est toujours par morceaux. Par exemple   
**Propriétés de composition.**Pour et , sur sur   
Soit evns et et   
Si est bilinéaire continue, et sur en alors est en et   
Soit evns et et pour   
Si est -linéaire continue et est sur en alors est en et   
**Composition.** Si en et en alors en   
On pourrait donner la formule de la dérivée nième avec la formule de Faà di Bruno.  
Si sur et sur alors est sur .  
Pour un intervalle et un corps , est une algebre.  
Une fonction d’un intervalle vers un corps , sur et ne s’annulant pas sur , admet un inverse bien défini et sur .

**Théorèmes**Dans , intervalle, connexe/arcs, convexe sont des notions identiques. **T.V.I.**  
Pour continue, alors pour tout compris entre et , .  
L’image d’un intervalle par une fonction de continue est un intervalle.  
L’image d’un espace topologique connexe par une application continue, est une partie connexe de l’espace topologique d’arrivée.  
**Darboux.** Pour une fonction dérivable d’un intervalle de R vers R, pour un réel compris entre et alors   
L’image d’un intervalle par la dérivée d’une fonction de dans dérivable, est un intervalle.  
**T.V.E.** Une fonction continue (par morceaux) sur un segment est bornée et atteint ses bornes. **Th. Rolle.** Une fonction d’un segment de R vers R continue sur le segment dérivable sur son intérieur, d’images égales aux extrémités du segment, alors la dérivée s’annule en un point intérieur au segment.  
**T.A.F.** Une fonction d’un segment de R vers R continue, dérivable sur l’intérieur, alors il existe un point intérieur ou la dérivée égale la pente entre les extrémités de la courbe.   
Faux si l’espace d’arrivée n’est pas R, par exemple  **T.M. (Cauchy).** Pour deux fonctions d’un segment vers R continues sur le segment dérivables sur son intérieur, alors   
**Règle de l’Hôpital.** Pour un intervalle de , et point d’accumulation de , et dérivables, si alors   
**1er T.M.I. :** Pour et intégrable, alors avec , en particulier pour alors avec .  
**2er T.M.I. :** Pour et intégrable monotone, alors avec , (et  ?)  
**Lemme de Riemann-Lebesgue.** Pour ,, ,  **I.A.F.**  Une fonction d’un segment de R vers un Kevn , continue sur le segment, dérivable sur l’intérieur, et une autre fonction g continue sur le même segment, dérivable sur l’intérieur mais a valeurs dans R, Si alors   
**I.A.F. simple.** Une fonction d’un segment de R vers un Kevn , continue sur le segment, dérivable sur l’intérieur, de dérivée bornée sur l’intérieur alors Affaiblissement de l’hypothèse dérivable sur possible et utile pour certaines théories de primitives.  
**Conséquences I.A.F.**  
Une fonction dérivable d’un intervalle vers un Kevn, est constante ssi sa dérivée est identiquement nulle.  
Une fonction dérivable d’un intervalle vers un Kevn, est lipschitzienne ssi sa dérivée est bornée.  
**Premier théorème fondamental du calcul intégral.**  
Si est intégrable sur un segment , alors est primitive de sur presque partout (et même partout si continue).  
**Précisions.** Si continue en alors dérivable en et .  
Si est continue, est sur   
Si est continue par morceaux, est /m sur , et continue sur tout   
Si est continue, toutes ses primitives diffèrent d’une constante.  
Si est continue, est l’unique primitive s’annulant en . **Second théorème fondamental du calcul intégral.** Une fonction dérivable en tout point d’un segment [a,b] et de dérivée intégrable ( pour Riemann) sur vérifie   
Le théorème est faux si la fonction est seulement dérivable presque partout (Escalier de Cantor).  
La deuxième condition n’est pas requise pour l’intégrale de Henstock Kurzweil.  
Pour l’intégrale de Riemann, la fonction doit être sur  **IPP**. Pour , dérivables sur tout de dérivée intégrable ( pour Riemann), alors . Si il n’y a pas dérivabilité partout, il peut y avoir des sauts.  
**Changement de variables unidimensionnel**. Soit un intervalle réel, soit un changement de variable dérivable sur tout de dérivée intégrable ( pour Riemann), et une fonction continue alors   
Ce théorème est distinct de celui qui se généralise au cas multidimensionnel, qui nécessite difféomorphisme, mais qui ne suppose que l’intégrabilité de . Marche encore si est seulement continue/morceaux, à condition de supposer en plus que soit strictement monotone. A vérifier.   
**Changement de variables difféomorphique multidimensionnel.**  
Soit ouverts de , un diffeomorphisme, , ,   
D’un point de vue physicien, on a , on peut assimiler à , on peut voir comme fonction de partant de , ou on peut voir comme partant de en la composant avec . On suppose et reliés par , alors . On note   
D’une part , et d’autre part Pour que l’égalité soit vérifiée, l’hypothèse supplémentaire est que ( est Lebesgue-intégrable par rapport ) ou ce qui est équivalent que l’intérieur de l’autre intégrale le soit. Dans le cas à valeurs dans , seule la Lebesgue mesurabilité est requise, l’intégrale pouvant être infinie.  
**Changement de variables pour les densités de probabilité.**Soit ouverts de , un diffeomorphisme, deux vecteurs aléatoires réels tels que / , on écrit . Alors est absolument continue ssi l’est et dans ce cas : soit densité de , densité de . On note   
   
Attention et sont des densités et ne jouent pas le même rôle dans ce théorème que dans le théorème de changement de variables multidimensionnel pour les intégrales. Ici on a pas   
**Théorèmes de prolongement.**   
**Version light.** Une fonction d’un intervalle vers un Banach , dérivable de dérivée bornée sur , admet une limite finie en , càd peut être prolongée en en une application continue sur .  
Une fonction d’un intervalle vers un Banach , sur telle que admet une limite finie en , alors admet une limite finie en et peut ainsi être prolongée en en une application continue sur qui s’avère en fait être sur et de plus   
**Version utile.** Une fonction d’un intervalle vers un Banach , supposée sur , telle que admet une limite finie en , et telle que est continue sur (on la suppose déjà prolongée par continuité), alors est de classe sur et   
Exemple : est de classe sur   
Exemple : est de classe sur   
**Extrema.** Soit d’une partie vers R, et  est un **point de minimum (resp. maximum) de**  ssi (resp. )  
 est un **point de minimum (resp. maximum) strict de**  ssi c’est un point de minimum de , qui est l’unique antécédent de son image, ssi   
 est un **point de minimum (resp. maximum, resp. strict) local de**  ssi c’est un point de minimum de restreinte a un certain voisinage de ssi   
Un **minimum (resp. maximum (strict ou non) (local ou non))** est l’image d’un point de minimum (resp…)  
Un **extremum** est un minimum ou un maximum. Pluriel : minima, maxima, extrema  
est un point de minimum de ssi est un point de maximum de .  
Un **point critique** d’une application d’un intervalle vers R, est un point de l’intervalle en lequel, l’application est dérivable de dérivée nulle   
Un **point selle = point col** d’une application d’un intervalle vers R, est un point critique pour lequel . Autrement dit, c’est un point critique qui n’est pas un extremum local. **Conditions nécessaires à l’existence d’un extremum  
1er ordre.** Une fonction d’un intervalle vers R, qui admet un extremum local en un point intérieur a où elle est supposée dérivable, alors ce point est un point critique pour cette fonction.   
**2nd ordre.** Une fonction d’un intervalle vers R, qui admet un minimum (resp. max) local en un point intérieur a où elle est supposée 2-fois dérivable, alors (resp. ).  
Attention les réciproques de ces 2 conditions nécessaires sont fausses. Ex : en 0.  
Ces deux conditions nécessaires ne permettent pas de trouver directement les extrema mais sont quand même très utiles car permettent de restreindre très fortement l’ensemble des candidats possibles. **Condition suffisante.** Soit une fonction d’un intervalle vers R, et point intérieur a où est 2-fois dérivable. Si et , alors admet un minimum local strict en ce point critique.  
Pour une fonction d’un intervalle vers R, convexe et dérivable sur , un point critique est un point de minimum global de .  
La stricte convexité permet de montrer l’unicité dans un problème d’optimisation.  
Une fonction strictement convexe d’un convexe vers alors il existe au plus un tel que .   
La convexité n’assure pas en général l’existenced’un problème d’optimisation.  
**Inversion.** Une fonction d’un intervalle vers un intervalle est un  **difféomorphisme** ssi est bijective de classe et de réciproque également de classe .  
**Caractérisation difféomorphisme.** Une fonction d’un intervalle vers , est un difféomorphisme de sur ssi et ne s’annule pas sur .  
**Dérivée réciproque.** Dans ce cas . En physicien :   
Plus généralement la formule s’applique encore dans les cas suivants :  
Si est dérivable en avec , et bijective avec continue en   
Si est dérivable en avec , et bijective avec continue. (th. bijection continue)  
**Monotonie et signe de la dérivée.**  
Une fonction dérivable d’un intervalle vers verifie :   
 dérivable, est strictement croissante ssi et   
**Formule de Taylor R.I.** Pour avec Banach.  
Soit   
   
**T.R.I.** Alors   
**I.T.L.**   
Ainsi et donc   
**F.T.L.** Pour avec Banach,   
alors   
   
   
   
**Relèvement complexe.** Pour tout , une fonction d’un intervalle vers , de classe et ne s’annulant pas sur admet un relèvement exponentiel càd sur tel que   
**Relèvement sur le cercle unité.** Pour tout , une fonction d’un intervalle vers , de classe et admet un relèvement imaginaire pur : sur tel que   
La démonstration est différente dans le cas .  
**Une fonction admet un DL d’ordre en un point**  **d’accumulation de** , ssi ssi   
**Une fonction admet un DL d’ordre en**  **point d’accumulation de** , ssi ssi   
Même définition en   
Si admet un DL d’ordre en alors ce DL est unique (les  / sont uniques).  
**Formule de Taylor Young.** Pour , intervalle de , ou ,  
   
La condition est plus faible que dans ITL donc une démonstration spécifique est bien requise ici.  
Pour on peut donc dire que admet toujours un DL d’ordre en tout .  
Exemple :   
Une **échelle asymptotique d’une partie d’un Kevn vers une K algèbre normée en un point**  d’accumulation de correspond à un ensemble de fonctions , tel que pour deux fonctions distinctes de l’échelle asymptotique, alors l’une est négligeable devant l’autre au voisinage de . ou .  
Une échelle asymptotique peut etre muni de la relation d’ordre définie pour par ou . Cette relation d’ordre est totale.  
Une fonction admet un **développement asymptotique (DA) en dans l’échelle asymptotique**  **à la précision**  ssi (presque tous nuls)   
 est une échelle asymptotique en , et ssi   
 EA en , et  
 ssi   
Dans cette EA, est un DA à la précision   
   
**Stirling.** donc

**Etude des variations.**Soit une fonction d’un intervalle vers   
Si est croissante, alors en tout point approchable à gauche càd tel que , admet une limite finie ou en   
Si est croissante, alors en tout point approchable à droite càd tel que , admet une limite finie ou en   
Si est croissante, alors en tout point intérieur a , admet une limite finie en et finie en , et on a   
On a 3 théorèmes analogues dans le cas décroissante.  
L’ensemble des points de discontinuité d’une fonction monotone d’un intervalle vers est fini ou dénombrable.  
Une fonction monotone d’un intervalle vers , est continue ssi son image est un intervalle.  
**Théorème de la bijection.** Pour une fonction d’un intervalle vers ,   
 continue et injective continue et strictement monotone homéomorphisme de sur   
Dans ce cas : La réciproque est strictement monotone de même sens que et est un intervalle dont les bornes sont les limites de aux bornes de .  
Pour on a et   
Pour on a et   
**Convexité.**Soit fonction d’un intervalle vers Le **graphe de**  est   
Le **graphe+ de**  est   
Le **graphe- de**  est  est **convexe** ssi   
 est **concave** ssi ssi est convexe  
 est **strictement convexe** ssi   
 est convexe ssi est convexe  
 est concave ssi est convexe  
 est convexe ssi ,   
 est concave ssi ,   
Les résultats pour les fonction concaves sont analogues aux résultats pour les fonctions convexes puisqu’il suffit de s’y ramener quitte à prendre l’opposée.  
**Lemme des 3 cordes.** Si est convexe, alors   
 est convexe ssi pour tout la fonction taux d’accroissement de relativement a est croissante.  
Si est convexe, alors en tout point intérieur a , est dérivable en et finie en , et on a   
 convexe continue sur l’intérieur de   
 convexe et sont croissantes sur l’intérieur de   
L’ensemble des points de non dérivabilité d’une fonction convexe d’un intervalle vers est fini ou dénombrable.  
**Caractérisation.** Pour dérivable sur on a   
 convexe croissante au-dessus de ses tangentes càd   
Pour 2-fois dérivable sur on a convexe ssi   
   
   
**Inégalités.** Soit , , ,   
**Inégalité de convexité.**   
**Inégalité arithmético-géométrique.**   
Hölder et Minkowski. (Voir espaces ).

**Compléments**  
Une fonction d’un intervalle vers est **affine** ssi   
Une fonction d’un segment vers est affine ssi   
L’ensemble des fonctions continues et affines par morceaux de vers est dense dans   
**Théorème de Weierstrass.**  
L’ensemble des fonctions polynômes complexes définis sur est dense dans   
L’ensemble des fonctions polynômes réels définis sur est dense dans