**Rappels.** où continue, ouvert.  
où mesurable, ouvert.  
 est l’ensemble des fonctions d’un ouvert d’un Revn , vers un Revn .  
 est l’ensemble des fonctions bornées d’un ouvert d’un Revn , vers un Revn .  
Pour , est l’espace des fonctions d’un ouvert d’un Revn , vers un Revn .  
Pour , est l’espace des fonctions a support un compact (de ) fixé , Pour , est l’espace des fonctions a support un compact (de )   
Pour ,   
Pour , est l’ensemble des telles que   
est l’ensemble des telles que   
 où   
On note l’ensemble des fonctions mesurables.  
On note l’ensemble des fonctions mesurables à support essentiel compact.Par exemple   
 ( injective) mais attention n’est pas inclus dans en général.  
 est l’espace des fonctions mesurables localement intégrables (sur tout compact )  
- On a toujours   
 est l’ensemble des fonctions mesurables essentiellement bornées (quotienté par le noyau de la semi-norme ).  
Dans le cas de la mesure de comptage sur l’espace discret de tribu P(X), on note Par exemple .

**Normes et distances.**Lemme. Tout ouvert admet une suite de compacts telle que et telle que tout compact est inclus dans un . Pour ,   
   
 **,**Pour , est une norme sur et même sur pour   
Pour , est une norme sur et même sur pour     
**Propriétés de densité et complétude.**  
Pour , est complet. Pour est complet.  
 est dense dans   
 est dense dans , pour   
En particulier est dense dans pour   
La complétion de est l’espace   
 est un sous-espace fermé complet de .  
En particulier est un sous-espace fermé complet de .  
 est complet. est complet comme sev ferme de .  
 n’est pas complet.   
 est dense dans , pour   
 est dense dans , pour   
 est dense dans , pour   
 est dense dans , pour   
Pour , est complet. est complet.  
 est dense dans

**Analyse de Fourier.  
Tore.**   
 où   
 est un Banach car sev fermé de   
 où mesurable, et   
 où   
   
 où .  
 compact   
 .  
   
Attention ce n’est pas du tout vrai dans . , ,   
**Périodisée.** où   
 où .  
 est et   
**Un polynôme trigonométrique** est une application où càd une application de la forme .  
Pour un polynôme trigonométrique , on a .  
**Le ième coefficient de Fourier de** est .  
 où et   
 est un polynôme trigonométrique   
**La série de Fourier de**  correspond à la série càd à la suite où   
Question centrale : Quand est-ce que est limite de sa série de Fourier ?  
 **est développable en série de Fourier** ssi sa série de Fourier converge simplement vers elle.  
Un coefficient de Fourier d’une fonction est toujours dans , et même dans .  
 est un sous-espace fermé donc complet de   
**Lemme de Lebesgue.**  
 est linéaire continue car mais n’est pas surjective.  
**Convolution périodique.** Pour presque tout où   
Le produit de convolution est une application continue, et bilinéaire.  
 forme une algèbre de Banach.  
La convolée peut s’interpréter comme moyenner , avec une pondération donnée par g.   
La convolée d’une fonction par une est au moins .   
La convolée d’une fonction par une fonction est .  
Les espaces et les sont des sous-algèbres de Banach de   
et   
   
 est un morphisme de algèbres.  
.  
 et polynôme trigonométrique.  
La convolée d’une fonction par un polynome trigonometrique est un polynôme trigonométrique.  
**Convolée et équations différentielles.** La convolée est un outil efficace pour résoudre les équations différentielles linéaires à coefficients constants de la forme , d’inconnue avec et operateur de dérivation, et périodique raisonnablement régulière. En général il y a une unique solution périodique de la forme avec fonction périodique calculable par les données.   
L’existence de la convolution peut être établie par le th de Fubini. Une interprétation physique plus éclairante permet de construire la convolution, d’abord à partir des puis par approximation UC.  
**Opérations coefficients de Fourier** où et .  
**Dérivation coefficients de Fourier**  
 et donc où . (entraine tjs )  
 donc où .  
En particulier   
Intuitivement, plus est régulière, plus tend vite vers à l’infini.  
Cette propriété est centrale et explique l’intérêt et le succès des séries de Fourier, transformer une dérivée en une multiplication simplifie l’étude d’équations différentielles.  
**Noyau de Dirichlet.**  où .  
 tel que .   
Les ne constituent pas une approximation de l’unité.  
Une suite de fonctions de est une **approximation de l’unité périodique** si  
1. La suite des normes des fonctions est bornée.   
2. Chaque fonction est d’intégrale normalisée 1.   
3.   
 où et où .  
   
 et .  
**Théorème de Fejér.**  est une approximation de l’unité périodique.  
 est à valeurs réelles positives.  
**Corollaires de Fejér.** (désigné parfois comme le théorème de Fejér).  
   
   
.  
**Conséquences.**  
 est injective car presque partout.  
**Weierstrass trigonométrique.** L’ensemble des polynômes trigo est dense dans et dans où . (car est un polynôme trigo ).  
**Cesàro.**    
, Si converge dans , elle a même limite que càd   
, Si converge dans , elle a même limite que càd

**Convergence ponctuelle.**  
   
**Test de Dini.** intégrable sur alors .  
Si est lipschitzienne, alors est d.s.f. (à vérifier)  
**Dirichlet.**   
 tel que est continue en .  
 est d.s.f.  
On peut généraliser Dirichlet en supposant seulement et tel que existe, existe et .  
**Carleson 1966, Hunt 1968 (difficile).** P.p.t. ,   
**Kolmogorov 1926.** diverge quand .

**Convergence normale.** (CVN entraine toujours CVU qui entraine toujours CS (d.s.f.)) La s.d.f. de CVN sur   
Si alors . Car   
Si alors . Car (ICS car car (voir cadre ) )  
 telle que la s.d.f. de CVN donc CVU vers . .  
**Version prépa.** la s.d.f. de CVN donc CVU vers . .

**Séries de Fourier, cadre**   
On peut munir d’un produit scalaire complexe dont dérive.  
 est un espace de Hilbert.   
 est orthonormée dans donc libre, donc base algébrique de .  
Pour est le projecteur orthogonal de sur   
 est le polynôme trigonométrique de degré le plus proche de pour càd :  
 (car )  
**Parseval. Convergence .** (en particulier pour (prépa))  
 est une isométrie surjective (donc bijective car il y a toujours injectivité).  
   
donc et puisque .  
**Egalité de Parseval.**  càd   
**Inégalité de Bessel.**    
.  
Remarque : le th de Parseval marche aussi pour où est un semi p.s.  
Parseval permet de montrer   
 et   
Donc   
On peut munir d’un produit scalaire complexe dont dérive. est un espace de Hilbert.   
**Parseval produit scalaire.**

**Séries de Fourier et équations différentielles [Marco]**On étudie les équations différentielles de variable sur le tore de la forme  
 avec , , et de classe .   
   
Une **solution généralisée** de est une fonction dont la dérivée nième est absolument continue (condition la plus faible connue dans notre contexte pour donner un sens a ), et vérifiant l’équation presque partout sur le tore. Elle est donc fois dérivable p.p.  
La solution de est bien connue dans le cas homogène , ou si par variation des constantes. On se pose la question pour les fonctions un peu moins régulières, si .  
L’ensemble des solutions généralisées de l’équation homogène (H) est exactement le sous-espace avec donc de dim et   
Si , cad si alors l’équation admet une unique solution de la forme avec une fonction indépendante de . (Marche pour tout f). De plus cette fonction E est caractérisée par   
Pour resoudre on écrit , on vérifie   
alors converge uniformement et la solution généralisée est et appartient a car les sommes partielles aussi car finies et CV uniforme.

**Transformation de Fourier dans le cadre .**  
**La transformée de Fourier de est**  où .  
, càd est continue et tend vers en .   
 est un sous-espace fermé donc complet de .  
Donc bien remarquer que   
 est bien définie linéaire continue car   
Remarque : Deux représentant d’une même classe ont bien même image .  
**Inversion.** Si et alors .  
**Transformée inverse** .   
   
 est un opérateur injectif mais pas bijectif vers . Attention à la notation .  
 n’est pas un espace simple, n’est pas stable par .  
La gaussienne a pour transformée de Fourier elle-même.  
**Opérations.**  
En notant et .  
 . Autrement dit   
 . Autrement dit   
. Autrement dit   
. Autrement dit   
 et . La T.F. transforme les convolutions en produits.  
 paire paire .  
 réelle et paire réelle et paire   
**Dérivation.**  
 et donc pour telle que .  
 pour telle que .   
 pour telle que . (entraine que )  
 pour telle que . (attention )  
 pour telle que . (entraine , )  
En notant et . Les propriétés de dérivations se réécrivent symboliquement :  
 et moyennant leur hypothèses.  
Intuitivement, plus est régulière, plus tend vite vers à l’infini.  
Intuitivement, plus est régulière, plus tend vite vers à l’infini. (par inversion)  
Par exemple .   
Par exemple .  
Par exemple est analytique sur .

**Utilisations Transformation de Fourier**On part d’un problème (disons une équation fonctionnelle) dont l’inconnue est une fonction , que l’on cherche dans un espace fonctionnel qu’on note . On fait opérer la tranformation de Fourier sur le problème , et on obtient un autre problème dont l’inconnue est .  
On utilise à cette étape les opérations de la transformation de Fourier pour voir le comportement de vis-à-vis des opérations qui interviennent dans (P). On espère bien sûr que ce nouveau problème est plus simple à résoudre que le précédent, et on le résout quand cela est possible.  
 difficile à identifier en général mais n’empêche pas de résoudre , mais il faut alors vérifier si les solutions obtenues correspondent à des solutions de .   
En général on peut résoudre dans un espace plus gros que donc il se peut que la solution trouvée de ne soit pas dans . De ce fait on utilise rarement les équivalences.  
Exemple : il n’existe pas d’élément neutre pour la convolution.

**Généralisation de la transformation de Fourier à .  
La transformée de Fourier de est**  où .Les opérations sur se généralisent à ce cadre…

**Transformation de Fourier dans le cadre .  
Lemme.** Pour telle que alors et   
Si on suppose juste alors n’est ni garanti ni équivalent à . Exemple ?  
**Plancherel.** tel que 1)2)3)4).  
1) est linéaire.  
2) est un prolongement de la restriction de à càd   
3) est une isométrie càd .  
4) est surjective. (donc bijective)  
   
.  
 linéaire isométrique égal à sur et   
En pratique comme souvent pour des prolongements on écrit souvent juste au lieu de .  
Et on note encore quand est dans ou dans .  
Pour , sans avoir besoins des conditions du lemme.   
Attention si est défini mais on ne peut pas écrire   
Si on veut faire des calculs sur on doit dans ce cas raisonner par densité pour qui converge vers en norme puis voir si les formules passent à la limite. On prend svt , alors . extraction telle que CS vers , donc par TCD on peut écrire que pour presque tout .  
Condition suffisante pour inverser. Si et alors .  
Certaines propriétés du cadre sont valables dans le cadre   
Certaines propriétés du cadre ne sont plus valables dans le cadre  : par exemple on a pas toujours car est bijective et .

**Espaces de Sobolev.**  
 où et .  
**L’espace de Sobolev d’ordre est**  où   
 pour est un espace de Hilbert et dérive de .  
Les sont une famille décroissante d’espaces.  
 alors et   
On peut montrer au sens des distributions que où . :ur inversertive)adre ersion. e limiteté;ments on

**Transformation de Fourier dans le cadre espace de Schwarz .**La transformée de Fourier d’une fonction même n’est pas nécessairement partout dérivable.  
**Une fonction est à décroissance rapide**ssi et est bornée.ssi et   
ssi et   
On posera pour   
On note l’ensemble des fonctions à décroissance rapide.  
 L’étude de permet de mieux comprendre le lien entre série de Fourier et transformée de Fourier.  
 est une semi norme sur   
 définit une distance sur .  
 ssi   
 est complet.  
 . Donc est dense dans .  
𝑜𝑟𝑎𝑙𝑙 𝑞 ance sur que d'  
 est stable par dérivation et par multiplication par un polynôme complexe.  
.  
 est stable par la transformation de Fourier .  
 est bijective d’inverse . est un isomorphisme  
 est continue, et son inverse aussi.

**Transformation de Fourier dans le cadre mesures finies (dont les mesures de proba).**Soit une mesure réelle borélienne (définie sur ) finie (càd )  
On note l’ensemble des mesures réelles boréliennes positives finies.  
**La transformée de Fourier de la mesure borélienne finie**  est   
 et   
**La transformation de Fourier** est   
Elle n’est pas à proprement parler linéaire car les mesures sont supposées positives.  
Attention car on a changé la convention, il n’y a plus le facteur devant, et le signe dans l’exponentielle est positif.  
Si admet une densité par rapport à Lebesgue càd , alors   
La fonction caractéristique d’une v.a.r. sur un espace probabilisé n’est autre que la transformée de Fourier de sa loi . . (Par le th de transfert)  
cf poly analyse