**Caractères d’un groupe abélien fini (Serre Cours d’arithmétique)**  
**Un caractère d’un groupe abélien fini** , correspond à un morphisme du groupe vers le groupe multiplicatif des complexes.  
**Le dual d’un groupe abélien fini**, est l’ensemble des caractères de ce groupe.  
Pour faire l’analogie avec les formes linéaires, on pourrait noter   
L’image d’un élément d’un groupe abélien fini, par un caractère du groupe, est une racine -ième de l’unité avec   
Dans un groupe cyclique d’ordre engendré par , pour une racine -ième de l’unité fixée , alors il existe un unique caractère de ce groupe tel que .   
Ainsi, pour un groupe cyclique d’ordre , est un isomorphisme de groupes, et on sait dans ce cas que . Donc étant aussi , on a   
**Lemme prolongement.** Tout caractère d’un sous-groupe d’un groupe abélien fini , peut être prolongé en caractère du groupe .  
L’opération de restriction est un morphisme de groupes surjectif, de noyau les caractères de triviaux sur , est donc isomorphe à   
On a donc une suite exacte   
Le dual d’un groupe abélien fini, est aussi un groupe abélien fini de même cardinal.   
**Relations d’orthogonalité.**  
Pour un caractère d’un groupe abélien fini ,   
Pour un élément d’un groupe abélien fini ,   
Pour un groupe abélien fini, on a donc   
Pour un élément d’un groupe abélien fini, est un caractère du dual .  
L’application est un isomorphisme de groupes.  
**Exemples de caractères** : Pour ,   
 et est un ev isomorphe à donc de dimension .  
**Lemme d’indépendance de Dedekind.** Une famille finie de caractères distincts sur un groupe fini, forment une famille libre du ev .  
Ainsi   
Pour un groupe fini, abélien.  
En général   
On peut montrer le théorème de classification des groupes abéliens finis.  
Un groupe abélien fini est isomorphe à son dual, (non canoniquement). On le sait dans le cas cyclique et .  
Sur un groupe abélien fini, sur , est un produit scalaire hermitien.  
Pour ,   
Pour ce produit scalaire, les caractères de forment une base orthonormale, (et donc une famille libre).

**Théorie des représentations  
Une représentation d’un groupe**  correspond à un où est un ev non réduit à , et est un morphisme de groupes de vers le groupe linéaire sur .  
Une représentation d’un groupe vérifie , et .  
Au programme on considère , et .  
Une représentation d’un groupe est une action de groupe de sur .  
Une représentation d’un groupe a pour image un sous-groupe fini de .  
**Le degré d’une représentation d’un groupe**  est la dimension de son espace vectoriel, .  
**Deux représentations d’un même groupe sont isomorphes**   
ssi . (le diagramme commute)  
ssi .  
Autrement dit ssi pour tout et sont conjuguées avec un morphisme de passage indépendant de l’élément considéré du groupe.  
Matriciellement, deux représentations d’un même groupe sur un même espace vectoriel de dimension finie sont isomorphes ssi dans une base fixée , les matrices et sont semblables avec une matrice de passage constante par rapport à .  
**Un sous-espace d’une représentation d’un groupe** est un sous-espace de son espace vectoriel.  
**Un sous-espace d’une représentation d’un groupe est stable** ssi est stable par ssi .  
On dit aussi que  **est stable**  
Une sous-représentation d’une représentation d’un groupe, n’est pas à proprement parler « la restriction de la représentation à un de ses sous-espaces stable » qui ne veut rien dire.  
**La sous-représentation induite sur un sous-espace stable d’une représentation d’un groupe fini**  est l’application . est encore une représentation de .  
Pour une représentation de groupe donnée, fixer une sous-représentation revient donc à fixer un sous-espace stable.  
**Caractérisations matricielles de la stabilité.**  
Un sous-espace d’une représentation d’un groupe est stable ssi base de base de . Dans ce cas .  
Pour sous-espaces stables d’une représentation d’un groupe fini de dimension tels que avec une base adaptée , alors   
Réciproquement, si base de tel que avec , alors pour tout , est un sous-espace stable de , dont est une base et , et de plus   
**Représentation somme.**Pour représentations d’un même groupe , dont les espaces respectifs sont en somme directe, on peut poser et définir **la représentation somme** . C’est une représentation de sur ..ℎ𝑜( ℎ𝑖 réciproque est vraie)s somme, oser   
Alors est stable par la représentation somme, et .  
a représentation somme:ifs sont en somme directe, aiton associé l'  
**Une représentation d’un groupe est réductible** ssi elle admet deux sous-espaces stables non triviaux supplémentaires ssi elle est somme de deux représentations non triviales du groupe.  
**Une représentation d’un groupe est irréductible** ssi elle n’est pas réductible ssi sevs stables de tels que alors ( et ) ou et ).  
Une représentation de degré est toujours irréductible.  
**Le caractère d’une représentation d’un groupe fini** est   
Attention ce n’est pas pareil qu’un caractère d’un groupe   
**Propriétés élémentaires du caractère d’une représentation**  
**Un caractère d’une représentation d’un groupe est irréductible** ssi sa représentation associée l’est.  
**Une fonction définie sur un groupe est centrale** ssi l’image d’un élément ne dépend que de sa classe de conjugaison.   
Le caractère d’une représentation d’un groupe fini est une fonction centrale du groupe.   
   
. .  
 𝑜 𝒔𝒕𝒐 ment parlernduite sur un sous-espace

est diagonalisable sur car annulé par scindé simple, les valeurs propres de sont racines -ième de l’unité, est donc somme de racines ièmes de l’unité.  
Attention a priori les ne commutent pas 2 à 2 a priori, donc pas de codiagonalisabilité a priori.  
Dans une base de vecteur propres   
. Avec égalité à gauche ssi .  
 ssi ssi ssi .

Le caractère d’une somme directe de représentations (dont les espaces sont en somme directe) est la somme des caractères :

Deux représentations isomorphes d’un groupe, ont même caractère. (la réciproque est vraie)

Deux représentations isomorphes peuvent être en somme directe. Deux représentations en somme directe ne sont pas nécessairement pas isomorphe.

Pour un groupe fini agissant sur un ensemble de cardinal , **la représentation de sur induite naturellement par l’action** dans la base canonique de , est définie par  
.  
Pour un groupe fini agissant sur un ensemble de cardinal ,  
**Le caractère induit naturellement par l’action de sur**  noté est le caractère de la représentation de sur naturellement induite par l’action, et on a le nombre des points fixes de cet élément pour l’action de sur .

**La représentation régulière d’un groupe fini** d’ordre , est la représentation de sur induit naturellement par l’action de sur lui-même par multiplication, càd   
On a donc où base canonique de .  
**Le caractère régulier de**  est donc

**Représentation standard de et caractère induit par l’action naturelle de sur .**On considère l’action naturelle de sur .  
On considère la représentation naturelle sur .

**Théorème de Maschke.** Pour une représentation d’un groupe fini (dont le cardinal ne divise pas la caractéristique du corps de l’espace vectoriel de la représentation (vrai pour )), alors :  
Un sous-espace stable admet toujours un supplémentaire qui est aussi stable par cette représentation.  
Autrement dit, pour une sous-représentation on peut trouver une autre sous-représentation telle que la représentation est somme directe de ces deux sous-représentations.  
Symboliquement sev de sev de .  
Alors , et   
Une représentation d’un groupe fini () admet donc une décomposition en sous-représentations irréductibles .   
Ces sous-représentations ne sont pas nécessairement non isomorphes les unes aux autres. Certaines peuvent être isomorphes entre elles.

**Exo.** ev de dim finie. sous-groupe fini. est projecteur d’image   
Donc .  
Exemples pratiques TODO, groupe quaternions, diédral.

Soit représentation de sur un Kev .Soit représentation de sur un Kev .  
On définit **l’action d’entrelacement** par   
C’est une action de sur   
En restreignant cette action à , On obtient ainsi la représentation  
 .  
Remarque : est définie à partir de   
On a càd .  
Pour , est muni d’une représentation de de caractère .   
 est encore le caractère d’une représentation de sur .   
 est encore le caractère d’une représentation de sur ou .

**Lemme de Schur.**   
a) Si deux représentations irréductibles et d’un même groupe ne sont pas isomorphes alors .  
b) Pour une représentation irréductible alors et donc .

On définit un **produit scalaire hermitien naturel sur**  ensemble des fonctions centrales sur .  
Pour   
On peut même définir ce produit scalaire sur   
Dans le cas des caractères .   
   
   
Deux caractères distincts de représentations irréductibles (qui ne sont donc pas isomorphes), forment une famille orthonormale. . Et   
Pour deux caractères irréductibles, ou bien le produit scalaire donne 0 s’ils ne sont pas égaux et donc induits par des représentation non isomorphes, ou bien le produit scalaire donne s’ils sont égaux donc induits par des représentations isomorphes.

**Multiplicité d’une représentation irréductible**. Pour une représentation d’un groupe fini décomposée : en somme directe d’irréductibles et une autre représentation irréductible alors donne le nombre de isomorphes à . On voit que pour une autre décomposition alors donc est encore le nombre de isomorphes à qui ne dépend donc pas de la décomposition choisie.   
**La multiplicité d’une représentation irréductible dans une représentation de**  est le scalaire qui correspond au nombre de isomorphes à quelle que soit la décomposition de .  
Cela peut être plus que , dans une décomposition , rien n’empêche qu’un isomorphe à un autre .  
On peut réécrire où les sont non isomorphes 2 à 2 et .  
**Intérêt des caractères.** Deux représentations sont isomorphes ssi elles ont même caractère. .  
L’étude des représentations de groupes est essentiellement ramenée à l’étude de leur caractères.

On note l’ensemble de tous les caractères irréductibles d’un groupe , de représentations respectives non isomorphes 2 à 2 (contrairement aux décompositions fournies par Maschke).   
Soit une représentation quelconque de . On peut la décomposer avec Maschke, mais on peut aussi la décomposer sur l’ensemble fixé de toutes les représentations .  
On peut écrire où multiplicité (possiblement 0) de (dans ).  
Alors . Donc .

**Critère d’irréductibilité.** Un caractère est irréductible ssi .

**Théorème de structure**: L’ensemble de tous les caractères irréductibles (donc non isomorphes 2 à 2) d’un groupe forment une base orthonormée de .   
En particulier il y en a autant que qui est le nombre de classes de conjugaisons de .   
Les tables de caractères sont donc carrées.

On note l’ensemble de tous les caractères irréductibles (donc non isomorphes 2 à 2) d’un groupe . On pose .   
Par rapport à la représentation régulière, la multiplicité d’une représentation irréductible est égale à son degré. Autrement dit .  
Donc donc donc en , on obtient .  
Donc si on a trouvé une famille de qui vérifient , ce sont tous les .  
Sur un groupe fini il n’y a qu’un nombre fini de caractères irréductibles.  
On a divise . (admis)

**Exemple.** Si est commutatif, alors il y a caractères irréductibles tous de degré .  
On pose pour la fonction qui vaut sur la classe de , et ailleurs. .  
On peut la décomposer sur la base des caractères irréductibles de   
 donc évalué en on obtient les deux égalités.  
 si , et si .   
**Application.** Si est abélien il y a représentation irréductibles de ,   
Il y a donc au moins représentations irréductibles de (non isomorphes 2 à 2 car les caractères sont différents) sur . (car des caractères distincts sur entraine des caractères distincts sur ).

**Produit tensoriel de deux espaces vectoriels.**Pour , evs sur un corps commutatif , il existe un ev noté et une application bilinéaire notée tels que   
1) Pour tout ev et tout , il existe une unique application linéaire telle que   
1’) Si base de et base de alors base de .  
(1 et 1’ sont équivalents sous le début de la déf).  
De plus le ev est unique à isomorphisme d’ev près.  
 **est le produit tensoriel algébrique de par**   
Si et de dimension finie alors aussi et   
On peut réitérer l’opération. Le produit tensoriel est associatif, il existe un isomorphisme naturel (càd ne dépendant pas du choix des bases) entre et . Cet isomorphisme envoie . De même les espaces et sont isomorphes. Mais attention si , l’application n’est pas symétrique.   
**Produit tensoriel de deux représentations.** Soit et deux représentation d’un même groupe .  
   
Matriciellement dans une base donnée, la matrice de est le produit tensoriel des matrices de et de .  
Le produit tensoriel de deux représentations est encore une représentation du même groupe.  
Le produit tensoriel de deux représentations irréductibles n’est pas forcément irréductible, on peut le décomposer en somme directe de représentations irréductibles.