**Chapitre 7. Groupes et algèbre linéaire.  
I. Le groupe linéaire  
I.1. Définitions et caractérisation**On appelle **groupe linéaire sur un Kev E**, l’ensemble des K-automorphismes de E. On note Pour on definit **le groupe linéaire d’ordre sur ,**   
En fixant une base d’un Kev E de dimension , on voit que est ev-isomorphe a   
On note l’ensemble des matrices a coeffs dans K, et les matrices inversibles dans K.  
Le groupe linéaire d’ordre n sur K est canoniquement isomorphe a l’ensemble des matrices inversibles K  
En dimension finie,   
Faux en dim , ex si , si , .  
Lorsque avec , premier, on a  **I.2. Le groupe spécial linéaire**Le déterminant définit un morphisme de groupes.  
Le **groupe spécial linéaire d’ordre n sur K** est le noyau de ,   
 suite exacte scindée à droite par   
Donc est le produit semi direct de et de .  
En général on a pas nécessairement   
Le groupe spécial linéaire est un sous-groupe distingué du groupe linéaire. existe.  
Lorsque avec , premier, on a   
Toute matrice peut s’exprimer comme un produit fini de transvections et d’une seule matrice de dilatation.   
 est engendré par les matrices de transvections.  
 **I.3. Générateurs**Soit un Kev de dimension finie .  
Relativement a 2 sous-espaces vectoriels et supplementaires dans E, on appelle **affinité vectorielle** sur (de **base** F), de **direction** , de **rapport** , l’unique endomorphisme de E, qui se restreint a l’identité sur et a l’homothétie de rapport sur . Autrement dit . Autrement dit c’est un endomorphisme dont le spectre est inclus dans .  
Pour une affinité vectorielle on a donc toujours , donc toujours   
L’identité de E est une affinité vectorielle de direction donc le rapport n’importe pas.  
Une **homothétie de rapport**  est une affinité vectorielle de rapport avec cad .  
Un **projecteur** est une affinité vectorielle de rapport . Dans ce cas mais en fait et donc .  
Une **symétrie** est une affinité vectorielle de rapport . Dans ce cas , Une **dilatation** est une affinité vectorielle de base un hyperplan càd de direction une droite, et de rapport . Dans ce cas hyperplan et droite.  
Une dilatation **fixe son hyperplan** : ssi ssi   
Sous l’hypothèse : fixant un hyperplan H, les assertions suivantes sont équivalentes :  
 dilatation d’hyperplan H, de rapport admet une valeur propre et est diagonalisable base de tel que avec   
On appelle **réflexion** une dilatation de rapport , autrement dit c’est une symétrie sur un hyperplan.  
Deux dilatations sont conjuguées dans ssi elles ont même rapport.  
Soient *f* un endomorphisme d'un espace vectoriel *E*, l'ensemble des vecteurs invariants, et (d'après le théorème du rang, dim(*H*) + dim(*D*) = dim(*E*)).   
On dit que *f* est une **transvection** si *f* est l'identité, ou si *H* est un hyperplan (**base** de la transvection) (ce qui revient à dire que *D*, **direction** de la transvection, est une droite) et *D* est inclus dans *H* (c'est-à-dire que pour tout *x* de *E*, *f*(*x*) – *x* appartient à *H*).  
Une transvection appartient , n’est jamais l’identité, fixe toujours un hyperplan.  
Sous l’hypothèse : fixant un hyperplan H, les assertions suivantes sont équivalentes :  
u transvection d’hyperplan H Pour toute forme linéaire de noyau H, avec . u n’est pas diagonalisable et base de tel que Une transvection d’hyperplan et de droite conjuguée par fournit une transvection d’hyperplan et de droite   
Deux transvections quelconques sont conjuguées dans . Si elles sont de plus conjuguées dans   
 est engendré par les transvections. Tout élément de est produit d’au + transvections, sauf si homothétie auquel cas il faut transvections. (Perrin)  
 est engendré par les transvections et les dilatations. **I.4. Centre et commutateurs**Le centre du groupe linéaire, est l’ensemble des homothéties vectorielles.  
Le centre du groupe spécial linéaire, est l’ensemble des homothéties de det 1 càd   
Le **groupe projectif linéaire d’ordre sur**  Kev de dim. n est l’ensemble   
Le **groupe projectif spécial linéaire d’ordre sur**  Kev de dim. n est l’ensemble   
Lorsque avec , premier, on a   
Si et , alors   
Si et , alors   
Si et ou alors   
Le groupe est simple sauf si et ou   
 tandis que   
 et   
   
 et   
 mais n’est pas isomorphe a bien que . C’est donc un exemple de deux groupes non isomorphes de même cardinal. **I.5. Propriétés de groupes  
L’exposant d’un groupe**  (notation x) est le plus petit entier tq .  
Un groupe fini est toujours d’exposant fini, le ppcm des ordres de ses éléments.  
Un groupe cyclique est d’exposant fini l’ordre de n’importe lequel de ses générateurs.  
Pour un groupe abélien fini G, son ordre et son exposant et ont mêmes diviseurs premiers donc l’ordre divise une puissance de l’exposant .  
Un sous-groupe de est fini ssi son exposant est fini.  
Un endomorphisme u d’un Kev de dim finie n est nilpotent ssi   
Le groupe ne possède pas de sous-groupes arbitrairement petits. **I.6. Topologie du groupe linéaire** est un ouvert dense de . est un ouvert dense de si est de Banach.  
,   
 et sont homéomorphes par avec matrice identité avec -1 à la place en 1,1.  
 est homéomorphe a   
 est homéomorphe a   
Le groupe est connexe  
Le groupe est connexe  
exemple TODO illisible  
 a 2 composantes connexes homéomorphes : et   
est connexe  
Les formes linéaires de sont de la forme avec   
Tout hyperplan de intersecte  **II. Groupe orthogonal  
II.1. Groupe orthogonal général  
II.1.1. Définitions**Soit E un Kev de dim finie , , et une forme quadratique non dégénérée associée à sa forme polaire   
**Le groupe orthogonal est** , un élément est une **isométrie=automorphisme orthogonal** relativement a q/f.   
Tout automorphisme orthogonal est de déterminant .  
On note   
**Le groupe spécial orthogonal est   
II.1.2. Generateurs**Une **symétrie** est un élément tel que et . Pour une symétrie, il existe et 2 sev supplémentaires dans E tel que et .  
Une réflexion correspond à une symétrie qui fixe un hyperplan.  
Un **renversement** est une symétrie telle que   
Une **symétrie orthogonale** est une symétrie dans autrement dit, c’est une symétrie dont les sous-espaces associés sont -orthogonaux.   
Une **réflexion orthogonale**, est une réflexion dans autrement dit, c’est une symétrie orthogonale fixant un hyperplan.  
**Th. Cartan.** Le groupe orthogonal est engendré par les réflexions orthogonales.   
Rappel : Un **plan hyperbolique** est un plan pour lequel il existe une base telle que la matrice de la forme quadratique est de la forme . Si et si admet des éléments isotropes on montre que toute droite non isotrope est intersection de 2 plans hyperboliques (donc non isotropes).  
**Th. Cartan-Dieudonné.** Tout automorphisme orthogonal est produit d’au plus n réflexions orthogonales.  
Un **renversement orthogonal**  est un renversement dans , autrement dit, c’est une symétrie orthogonale telle que .  
Si tout élément de est produit d’au plus renversements. **II.1.3. Centre et commutateurs**Si   
Si si impair, si pair.  
Si et alors   
Si , , et pas un plan hyperbolique, alors   
Si , , et plan hyperbolique, alors est un groupe abélien.  
Si , est un groupe abélien de groupe dérivé .  
 est engendré par les produits de 2 réflexions conjuguées.  
 est engendré par les commutateurs de 2 réflexions.  
 est engendré par les carrés des éléments de   
Si alors   
Tous les éléments de sont d’ordre 2.  
Un élément d’un plan est soit l’identite soit n’admet pas la valeur propre 1.  
Pour et , on a   
Si   
On a la suite   
On sait et , l’etude des autres quotients est complexe. **II.2. L’espace euclidien canonique  
II.2.1. Généralités**On suppose R-ev de dimension muni du produit scalaire canonique associée à sa forme quadratique.  
Si , alors et ce produit est direct quand est impair  
La suite est exacte scindée à droite par   
Un **endomorphisme semi-simple** est un endomorphisme tel que tout sous-espace stable admet un supplémentaire également stable par l’endomorphisme.Tout élément de est semi-simple  
Soit alors b.o.n. de E telle que   
ou les sont des matrices de la forme   
Deux symétries telles que sont conjuguées dans   
En particulier, deux renversements (resp. reflexions) sont toujours conjuguées dans   
Tout élément de est produit d’au + n réflexions n réflexions orthogonales. On peut préciser.  
Si alors s’ecrit comme le produit d’exactement reflexions orthogonales.  
Le groupe est simple.  
Pour le groupe est simple. **II.2.2. Topologie de**Le groupe est compact.  
C’est faux en general pour avec forme quadratique quelconque, même non dégénérée.  
Le groupe est connexe.  
Soit un sous-groupe compacte de , et un compact convexe de stable par tous les endomorphismes de . Alors admet un point fixe par tous les endomorphismes de . Ce résultat permet de déterminer les sous-groupes compacts de   
Tout sous-groupe compact de est conjugué à un sous-groupe de  **II.2.3. Petites dimensions  
Dimension .** On considère le plan euclidien dans lequel on a choisi une orientation.  
 correspond à l’ensemble des **rotations** d’angle   
 correspond à l’ensemble des **symétries orthogonales**.  
 est commutatif.  
   
Une **rotation d’angle**  de est donc un élément de dont la matrice est dans n’importe quelle b.o.n.d.  
Si rotation d’angle et une symétrie orthogonale, alors est une rotation d’angle   
Méthode : Si rotation d’angle et vecteur unitaire, et   
Cela permet de déterminer facilement l’angle de rotation.  
Les sous-groupes de sont de la forme avec , ils sont cycliques.  
Les sous-groupes finis de sont donc les groupes de rotation des polygones réguliers.  
Un sous-groupe fini de est soit cyclique, soit isomorphe au groupe diédral.  
**Dimension .**  
**Produit vectoriel de 2 vecteurs de**  : .  
Le produit vectoriel de 2 vecteurs liés est nul. Le produit vectoriel de 2 vecteurs libres est orthogonal au plan engendré par ces 2 vecteurs, de plus la base de est directe.  
Soit   
Si alors   
Si alors est une réflexion. Dans un b.o.n.   
Si dans une b.o.n. est une rotation d’angle par rapport au premier vecteur, ou bien est le produit d’une rotation et d’une symétrie.  
Si , alors soit , soit est produit d’une symétrie et d’une rotation, soit est produit d’un renversement et d’une rotation : càd une rotation.  
Synthèse : Le groupe est composé des rotations tandis que contient les symétries et les produits d’une rotation avec une symétrie.  
Comme dans le cas , si alors il existe une b.o.n. de dans laquelle avec déterminé par et ne dépend pas de la b.o.n.d. de choisie.  
Méthode : Détermination de l’axe et de l’angle de la rotation.  
Soit . L’axe de la rotation est donne par l’espace propre Le plan de rotation est . La trace de est egale a . Ce qui permet de trouver l’angle a signe près. Pour déterminer le signe de l’angle de la rotation u, on fixe un vecteur unitaire de l’axe et on choisit une b.o.n. du plan telle que soit directe. Pour tout plan, on a alors . En effet, on a d’une part et , d’autre part avec . On conclut par linéarité.  
Tout sous-groupe fini de est soit cyclique soit diedral, soit isomorphe au groupe des déplacements d’un polyèdre regulier.\* (utilise Burnside).Décomposition d’une rotation en retournements.  
Toute rotation de est le produit de 2 retournements. TODO clarifier… **III. Groupe unitaire  
III.1. Cas général**Soit E un Cev de dim finie , et une forme quadratique non dégénérée associée à sa forme hermitienne   
**III.1.1. Définitions**  
**Le groupe unitaire est** , un élément est une **isométrie=automorphisme unitaire** relativement a q/h.   
Le déterminant d’un automorphisme unitaire est de module 1.  
**Le groupe spécial unitaire est**   
Un endomorphisme est un automorphisme unitaire ssi il est diagonalisable dans une b.o.n. et ses valeurs propres sont toutes complexes de module 1. **III.1.2. Centre et générateurs  
Une quasi-symétrie par rapport au sous-espace et de rapport ,** est un endomorphisme fixant et dont la restriction a est .  
**Une quasi-symétrie hyperplane** est une quasi-symétrie par rapport a un hyperplan.  
Une quasi-symétrie d’hyperplan conjuguee par un automorphisme unitaire, est une quasi-symétrie d’hyperplan et de même rapport.  
Tout automorphisme unitaire est le produit d’au plus quasi-symétries hyperplanes.  
Si une **rotation unitaire plane** est un endomorphisme fixant l’orthogonal d’un plan P et tel que la restriction de cet endomorphisme a P est un élément de .  
Une rotation unitaire plane est une rotation unitaire.  
Si tout élément de s’ecrit comme le produit d’au plus rotation unitaires planes de E.  
Si alors   
Si alors   
Contrairement au cas orthogonal, les générateurs de ou ne sont pas d’ordre 2.  
On ne peut pas déterminer aussi facilement leur groupe dérivé. **III.2. Le groupe unitaire canonique  
III.2.1. Généralités**On suppose C-ev de dimension muni du produit scalaire canonique associée a sa forme hermitienne.  
Si , alors et ce produit n’est pas direct.  
La suite est exacte scindée à droite.  
Deux quasi-symétries de même rapport et dont le sous-espace des points fixes est de même dimension sont conjuguées dans .  
Soit et , alors s’écrit comme produit d’exactement quasi-symétries.  
Si alors est simple. **III.2.2. Topologie de**Le groupe est compact. **IV. Décomposition du groupe linéaire  
IV.1. Décomposition de Dunford** cf réduction **IV.2. Décomposition polaire**Soit E un Rev de dimension finie muni d’une forme quadratique non dégénérée .  
Un automorphisme est dit **positif** si , on dit qu’il est **défini** si   
On note l’ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs.  
 est un ensemble ferme  
**Décomposition polaire.** Tout automorphisme s’ecrit avec unique tel que et .  
De plus l’application est un homeomorphisme.  
 admet 2 composantes connexes.  
Le groupe est un sous-groupe compact maximal de   
En fait toute matrice de admet une decomposition polaire, mais elle n’est pas unique.  
Tout élément de s’ecrit avec et diagonale.  
Attention, il n’y a pas unicité de cette précédente décomposition.  
L’enveloppe convexe de est la boule unité   
Rappel : Un **point extrémal** d’un ensemble F est un point tel que si avec alors .  
L’ensemble des points extrémaux de la boule unité de est   
Pour la norme associée au produit scalaire sur , la distance de la matrice nulle a est  **.** Cette distance est réalisée exactement sur   
Soit E un C-ev de dimension finie muni d’une forme quadratique non dégénérée .  
On note l’ensemble des endomorphismes hermitiens definis positifs.  
**Décomposition polaire.** Tout automorphisme s’ecrit avec unique tel que et .  
De plus l’application est un homeomorphisme.  
La décomposition polaire généralise l’écriture d’un nombre complexe sous sa forme polaire. **IV.3. Décomposition d’Iwasawa**Toute matrice inversible réelle s’ecrit de manière unique avec matrice orthogonale, et matrice triangulaire superieure a coeffs strictement positifs.  
De plus est un homeomorphisme.  
Toute matrice inversible complexe s’ecrit de manière unique avec matrice unitaire, et matrice triangulaire supérieure a coefficients strictement positifs.  
De plus est un homéomorphisme.

**Complément 1. A propos de l’exponentielle.  
1.1. Rappels et compléments sur l’exponentielle matricielle**Dans cette section ou .  
L’**application exponentielle matricielle** est definie pour tout par la serie convergente , cette definition se generalise a une algebre de Banach.  
On a   
Plus précisément   
L’exponentielle matricielle est a valeurs dans , et   
Rappel : Une matrice est **nilpotente** ssi . On note l’ensemble des…  
Rappel : Une matrice est **unipotente** ssi . On note l’ensemble  
Pour tout et tout on a   
Si alors   
L’exponentielle d’une matrice triangulaire superieure de diagonale est une matrice triangulaire superieure de diagonale   
Le déterminant de l’exponentielle est l’exponentielle de la trace   
La transposée de l’exponentielle est l’exponentielle de la transposée   
La conjuguée complexe de l’exp, est l’exp de la matrice conjuguée complexe   
L’exponentielle d’une matrice nilpotente est une matrice unipotente**.**  
Soit , dont est la décomposition de Dunford additive, alors   
 est la decomposition de Dunford multiplicative de et est sa decomposition de Dunford additive.  
L’exponentielle d’une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable.  
L’exponentielle d’une matrice trigonalisable est une matrice trigonalisable.  
TODO : Etudier les réciproques de ces deux dernières propriétés  
Soit un Kev de dimension finie n. On peut étendre la définition matricielle de l’exponentielle.  
 et dans toute base B de E,   
Les propriétés de l’exponentielle matricielle se transposent naturellement a ce cadre.  
L’exponentielle matricielle est différentiable en et   
Rappel : Une suite de fonctions différentiables d’un ouvert U d’un Revn, vers un Revn F, dont les différentielles convergent uniformément sur U, et qui converge simplement sur U vers une fonction f, alors cette fonction f est différentiable sur U et . Si de plus, toutes les fonctions de la suite sont sur alors, est de classe sur U.  
Rappel : Une série de fonctions différentiables d’un ouvert U d’un Revn, vers un Revn F, qui converge simplement sur U, et dont la série des différentielles converge uniformément sur U, alors la fonction somme est différentiable sur U, et . Si de plus, toutes les fonctions de la série sont sur U alors est sur U.  
Pour une matrice fixée, l’application est infiniment derivable sur R, et sa derivee est , ainsi l’application vérifie l’équa diff : .  
On définit donc   
On définit , donc   
L’application est une representation linéaire du groupe dans appelée **représentation adjointe** du groupe de Lie . L’application obtenue par differentiation est une representation de l’algebre de Lie dans elle-même appelée **représentation adjointe** de l’algèbre de Lie   
 Soit TODO verifier car illisible  
L’application exponentielle est de classe sur et pour tout   
Si , alors   
Non-injectivite globale, injectivite locale, et diffeomorphie locale au voisinage de 0 de l’exp.  
L’exponentielle matricielle n’est pas injective sur lorsque , meme lorsque .  
L’ensemble des solutions de l’equation est precisement forme des matrices diagonalisables dont le spectre est inclus dans . En particulier, toute matrice réelle dont le spectre est inclus dans verifie .  
L’exponentielle matricielle est localement injective au voisinage de , c’est un difféomorphisme local.  
 est un diffeomorphisme, en particulier est injective.  
Si est assez faible, n’admet qu’un seul sous-groupe contenu dans la boule unité de centre , de rayon , c’est le sous-groupe trivial .  
On appelle **semi-groupe a un paramètre** de , une application continue telle que .  
Un **sous-groupe a un paramètre** de est un semi-groupe a un paramètre tel que . Autrement dit, c’est un morphisme de groupes de vers .  
Les semi-groupes a un paramètre de sont exactement les applications avec .  
Soit E un R-ev de dimension finie. Les sous-groupes a un paramètres de sont exactement les applications de la forme avec .  
On retrouve la formule   
Logarithme matriciel et applications.  
L’application **logarithme matriciel** notée **log** de la boule unité vers est definie par . On a clairement .  
Pour   
Pour   
Pour   
L’application exp envoie dans .  
L’application est definie par .   
L’application est un -diffeomorphisme d’inverse .  
L’application est surjective. Plus précisément .   
 est connexe/arcs dans   
Les matrices complexes d’exponentielle sont les matrices diagonalisables de v.p.s dans .  
   
Sur , l’exponentielle matricielle est a valeurs dans qui est aussi la composante connexe de contenant .  
L’application est surjective si , c’est faux si , plus precisement, , et de plus   
Soit . L’unique solution de est . Plus généralement si intervalle ouvert, , et est une application continue, alors l’unique solution de est   
Soit et une fonction telle que .  
La solution nulle de est dite **stable** si pour tout , il existe tel que pour tout tel que , la solution passant par en est globale et telle que pour tout , .  
Elle est dite **attractive** si il existe tel que pour tout tel que , la solution passant par en est globale et telle que .  
Elle est dite **asymptotiquement stable** si elle est stable et attractive.  
Soit . La solution nulle du système différentiel est stable ssi toutes les valeurs propres de sont de partie réelle et les valeurs propres de multiplicite dans le polynome minimal de sont de partie réelle .  
Elle est asymptotiquement stable ssi toutes les valeurs propres de sont de partie réelle .  
Soit de classe telle que . Si les valeurs propres complexes de sont de partie reelle , alors la solution nulle du système est asymptotiquement stable. **1.2. Groupes topologiques  
Un groupe topologique** est un triplet tel que groupe, topologie sur , et tel que l’application produit de 2 élément est continue, et l’application inverse d’un élément est continue.  
Un **sous-groupe topologique** d’un groupe topologique est un sous-groupe fermé dans le groupe topologique.  
Un sous-groupe d’un groupe topologique est un groupe topologique pour la topologie induite, mais pas forcément un sous-groupe topologique.  
L’adhérence de tout sous-groupe d’un groupe topologique, est aussi un sous-groupe topologique.  
Le groupe linéaire réel d’ordre n, , muni de sa topologie usuelle est un groupe topologique.  
 est continue puisque ses coordonnées sont polynomiales.  
 est continue puisque ses coordonnées sont des fractions rationnelles dont le dénominateur ne s’annule pas sur .  
 sont des sous-groupes topologiques de .  
Chacun de ces sous-groupes peut être vu comme lieu d’annulation d’un nombre fini de polynômes : ils sont donc fermes dans .  
Un sous-groupe d’un groupe topologique est ouvert dans le groupe ssi le neutre est un point intérieur du sous-groupe.  
Tout sous-groupe d’un groupe topologique qui est ouvert dans le groupe est un sous-groupe topologique du groupe.  
La composante connexe du neutre d’un groupe topologique est un sous-groupe normal du groupe.  
Les composantes connexes d’un groupe topologique sont isomorphes entre elles.  
Le quotient (à gauche resp. à droite) d’un groupe topologique par un sous-groupe peut etre muni de la topologie quotient, la plus fine telle que continue. En général pas un groupe.  
Le quotient d’un groupe topologique par un sous-groupe topologique est séparé.  
Le quotient d’un groupe topologique compact par un sous-groupe topologique est compact.  
Dans un groupe topologique , si un sous-groupe est connexe, et le quotient est connexe, alors est aussi connexe.  
Une action d’un groupe topologique G sur un espace topologique E est dite **continue** si est continue sur muni de la topologie produit.  
Rappel : L’application naturelle est une bijection. Avec .  
Le groupe topologique est connexe. Agit continument sur la sphère de   
 a 2 composante connexes.  
TODO, finir la section (algèbre de lies)  
 **Complément 2. Empilement optimal de disques dans le plan  
2.1. Lien entre réseaux et formes quadratiques  
2.2. Empilement et admissibilité  
Complément 3. Action de sur le demi-plan de Poincare.  
3.1. Definition de l’action de   
3.2. Toute orbite rencontre   
3.3. Lorsque deux points appartiennent a cette intersection  
3.4. Generateurs du groupe   
Complement 4. Le groupe symplectique  
4.1. Définitions  
4.2. Centre et générateurs**

**Chapitre 8. Groupes et géométrie  
I. Le groupe affine**Soit E un espace affine de direction sur un corps . **I.1. Généralités et rappels**Une application entre deux espaces affines est une **application affine** si il existe une application linéaire telle que   
Autrement dit ssi linéaire telle que   
L’application est alors unique et appelée **partie linéaire** de l’application affine .  
Une application affine est entièrement déterminée par sa partie linéaire et l’image d’un point .  
Ajouter une constante à une application affine la laisse affine, et ne change pas sa partie linéaire.  
L’image d’un barycentre par une application affine est le barycentre des images en gardant mêmes coefficients de pondération.  
L’image directe d’un sous-espace affine par une application affine est le sous-espace affine   
L’image réciproque par une application affine f d’un sous-espace affine de direction est soit vide, soit un sous-espace affine de direction .  
En particulier une application affine **conserve l’alignement** = 3 points alignés donne 3 points alignés.  
Une application entre deux R-espaces affines de même dimension , est une application affine ssi elle conserve l’alignement.  
La composée de deux applications affines est une application affine de partie linéaire la composée des parties linéaires.  
Un **isomorphisme affine**, est une application affine bijective. Càd si sa partie linéaire est isomorphisme.  
Un isomorphisme affine est de partie linéaire, un isomorphisme. La réciproque d’un isomorphisme affine est une application également affine dont la partie linéaire est la réciproque de la partie linéaire.   
On note l’ensemble des automorphismes affines d’un espace affine muni de la composition affine notée .  
Si est de dimension finie et ou alors tout automorphisme affine est un homéomorphisme.  
Les translations d’un espace affine sont des isomorphismes affines.  
Un endomorphisme affine est une translation ssi sa partie linéaire est l’identité   
Un endomorphisme affine est une **homothétie de rapport**  ssi sa partie linéaire est   
L’application est un morphisme de groupes surjectif.  
Le noyau de est l’ensemble des translations sur .  
 est un sous-groupe distingué de .  
Un point étant fixé, l’ensemble des automorphismes affines admettant O comme point fixe, est un sous-groupe de . La restriction est un isomorphisme.  
Si , on peut écrire de façon unique avec et , et dans ce cas , et est l’unique automorphisme affine de même partie linéaire que et fixant O.  
Le groupe affine est produit semi-direct   
Le groupe des translations est un groupe commutatif isomorphe à  **I.2. Le groupe des homothéties-translations**Si et sont 2 sous-espaces affines supplémentaires, **l’affinité** **affine sur de direction de rapport**  est l’application qui à tout associe l’unique point tel que avec singleton car et sont aussi supplémentaires. . Avec . Dans ce cas est un point fixe et .  
Une **homothétie affine de rapport**  est une affinité affine de rapport avec un point, on parle de **centre** de l’homothétie. Dans ce cas cad   
L’homothétie affine de centre de rapport est notée   
Un **projecteur affine** est une affinité affine de rapport . Dans ce cas   
Une **symétrie affine** est une affinité affine de rapport .   
Une **symétrie centrale**, est une symétrie affine de base un point appelé centre de la symétrie, autrement dit c’est une homothétie de rapport .  
L’ensemble des **homothéties-translations de est note ,** c’est aussi l’ensemble des applications affines dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle.  
L’ensemble des homothéties-translations d’un espace affine E est un sous-groupe distingué de .  
La composée d’une homothétie de rapport et d’une translation est une homothétie de rapport   
La composee de 2 homothéties de rapports respectifs est une homothétie de rapport si , et une translation si . Centres ?  
Soit , le conjugué d’une translation de vecteur par est la translation de vecteur .  
Si , le conjugué d’une homothétie de centre et de rapport par est une homothétie de centre et de même rapport .  
Donc on peut préciser avec .  
 et  **II. Le groupe des isométries** On suppose espace affine euclidien de dimension . **II.1. Généralités II.1.1. Définition et caractère affine  
Une isométrie affine** de E dans E est une application de E dans E qui conserve les distances càd et   
Si est une application affine de E dans E, est une isométrie ssi ssi . En fait les isométries affines sont toujours des applications affines.  
Une isométrie affine correspond à une application affine de partie linéaire un automorphisme orthogonal.  
Les homothéties-translations qui sont des isométries sont les translations et les symétries centrales.  
On note l’ensemble des isométries affines de E.  
 est un sous-groupe du groupe affine   
L’application est un morphisme de groupes.  
Les symétries affines orthogonales sont des isométries affines. **II.1.2. Déplacements et antidéplacements  
Un déplacement** de E est une isométrie affine dont la partie linéaire est de déterminant 1, càd càd est une rotation vectorielle. On note l’ensemble des déplacements de E  
**Un antidéplacement** de E est une isométrie affine dont la partie linéaire est de déterminant -1, càd . On note l’ensemble des déplacements de E  
 est un sous-groupe distingué de .  
La composée de 2 antidéplacements est un déplacement.  
Une **rotation affine de E** est un déplacement ayant au moins un point fixe.  
Une symétrie centrale est un déplacement ssi la dimension de l’espace affine est paire.  
Une symétrie orthogonale est un déplacement ssi sa direction est de dimension paire. **II.1.3. Similitudes  
Une similitude affine** de E dans E de rapport est une application de E vers E qui multiplie les distances par cad   
Les similitudes ne conserve que les rapports de distances.  
Une homothétie de rapport est une similitude de rapport   
Une isométrie est exactement une similitude de rapport .  
Une similitude affine de rapport correspond à une application affine de partie linéaire avec   
L’ensemble des similitudes est un sous-groupe de   
Toute similitude de rapport admet un point fixe unique.  
Toute similitude de rapport se décompose de façon unique sous la forme avec isometrie et homothetie de rapport strictement positif, et dans ce cas  ont un point fixe commun.  
Deux parties d’un espace affine sont **semblables** si elles sont image l’une de l’autre par une similitude. C’est une relation d’équivalence.  
La composée de 2 similitudes de rapports respectifs est une similitude de rapport   
L’inverse d’une similitude est une similitude de rapport inverse.  
L’ensemble des similitudes directes de E est un sous-groupe distingue de l’ensemble des similitudes de E  
Une **réflexion affine** est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan/ de direction une droite.  
Une application affine est une réflexion affine ssi elle admet un point fixe et sa partie linéaire est une réflexion vectorielle (d’hyperplan ). Dans ce cas l’hyperplan affine de cette réflexion est .  
Une réflexion affine est un antidéplacement.  
Ex : Spirale logarithmique TODO. **II.1.4. Décomposition d’une isométrie en composée de réflexions**Soit une isométrie de E différente de l’identité et un point non fixe de , alors tout point fixe de est situé sur l’hyperplan médiateur de   
Si est une isometrie de E différente de l’identité alors il existe une réflexion s telle que l’ensemble des points fixes de contienne strictement l’ensemble des points fixes de .  
Toute isométrie d’un espace affine euclidien de dimension n est la composée d’au plus reflexions. **II.1.5. Décomposition canonique d’une isométrie**Si alors et et sont stables par .  
Toute isométrie affine de E se décompose de façon unique sous la forme avec et une application affine admettant un point fixe O.  
Dans ce cas   
L’application admet donc un point fixe ssi son   
Si alors on est sur que admet un point fixe. **II.2. Les isométries planes  
II.2.1. Classification** TODO clarifier.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | Points fixes | ou |
| Translation |  | si , aucun si |  |
| Rotation affine non triviale | Rotation vectorielle avec | Un point |  |
| Réflexion affine | Réflexion vectorielle | Une droite |  |
| **Symétrie glissée** de vecteur | Réflexion vectorielle | aucun |  |

**II.2.2. Application à la détermination de composée d’isométries planes**La composée de 2 rotations affines d’angles respectifs et est une translation si et une rotation d’angle sinon.  
La composée d’une translation et d’une rotation distincte de l’identité est une rotation de même angle. **II.2.3. Composée de réflexions**Soient et deux droites affines du plan affine oriente . Si et sont des vecteurs directeurs de et et sont des vecteurs directeurs de , on a et on definit l’angle oriente des droites et par l’égalité .  
Soient et deux droites affines de réflexions associées et   
Si et sont parallèles alors est une translation. Si est un point de de projeté orthogonal sur alors le vecteur de cette translation est .  
Si et sont sécantes, alors est une rotation. Le centre de cette rotation est le point d’intersection des droites, et l’angle de la rotation est   
Une translation fixée, il existe une infinité de décompositions de sous la forme  : une droite quelconque telle que est orthogonal a étant fixée, il existe une unique droite vérifiant  ; c’est l’image de la droite par la translation de vecteur   
Une rotation de centre et d’angle étant fixée, il existe une infinité de decompositions de sous la forme : une droite quelconque contenant étant fixée, il existe une unique droite contenant verifiant , c’est-à-dire et donc .  
Le choix d’une décomposition adaptée peut être décisif dans la résolution d’un problème. La composée de 2 réflexions d’axes orthogonaux en est la symétrie centrale de centre . **II.2.4. Détermination de composées d’isométries par décomposition en réflexion**Pour simplifier une composée d’isométries on décompose les isométries en réflexions, si possible de manière à faire apparaitre 2 réflexions identiques et côte à côte dans la composition pour les simplifier. **II.3. Les isométries de l’espace** Soit E espace affine euclidien oriente de dimension 3. **II.3.1. Déplacements de l’espace**Si est une rotation affine différente de l’identité, alors l’ensemble des points fixes de est une droite affine, appelée axe de la rotation, dont la direction est l’axe de . Cet axe étant orienté, la restriction a tout plan affine orthogonal a l’axe est une rotation plan dont le centre appartient a l’axe, et d’angle egal a celui de la rotation vectorielle (avec même orientation d’axe).  
Un **retournement affine** correspond à une rotation affine d’angle . La restriction a tout plan orthogonal a l’axe d’un retournement est une symétrie centrale plane.  
On appelle **vissage**, une composée commutative avec rotation affine et translation. Le vecteur dirige et oriente l’axe de la rotation r qu’on appelle axe du vissage, l’angle de r est appelé **angle du vissage** et le vecteur , **vecteur du vissage.**Un vissage est une rotation ssi son vecteur   
Un vissage est une translation ssi l’angle du vissage est multiple de .  
Un **vrai vissage** est un vissage qui n’est ni une rotation, ni une translation.  
L’axe d’un vrai vissage est l’ensemble des tels que est colinéaire a . **Théorème.** Les déplacements de l’espace sont les vissages. (par décomposition canonique déplacement)  
L’ensemble des vissages d’axe donne est un sous-groupe de isomorphe a  **II.3.2. Antidéplacements de l’espace**Soit un antidéplacement de l’espace.   
Si est une réflexion vectorielle de plan alors admet une décomposition avec isométrie ayant un point fixe et de même partie linéaire que , donc reflexion affine dont le plan a pour direction . De plus . Le vecteur est nul ssi admet un point fixe. Dans ce cas est une reflexion. Sinon on dit que est une **symétrie glissée** de plan et de vecteur .  
Si est composée commutative d’une réflexion vectorielle de plan et d’une rotation d’axe distincte de l’identité, alors 1 n’est pas valeur propre de : les sous-espaces et sont des supplémentaires stables par et la restriction de a chacun d’eux n’admet pas comme valeur propre (car ). L’application affine admet donc un point fixe .   
Soient la reflexion affine de plan et la rotation affine d’axe et de même angle que . Les 3 applications affine et ont meme partie linéaire et admettent comme point fixe donc elles sont égales. On dit que est une **antirotation.  
II.3.3. Classification des isométries de l’espace**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | {points fixes} | ? |
| Translation : |  | si   si |  |
| Rotation non triviale | Rotation vectorielle | La droite |  |
| Vrai vissage | Rotation vectorielle |  |  |
| Réflexion : | Réflexion vectorielle | Le plan |  |
| Symétrie glissée | Réflexion vectorielle |  |  |
| Antirotation |  | Le singleton |  |

**II.3.4. Composition de réflexions**Deux **plans de l’espace sont perpendiculaires** ssi un vecteur orthogonal a la direction de l’un est contenu dans la direction de l’autre. (On ne dit pas : plans orthogonaux).  
Si et sont deux plans secants, soit leur droite d’intersection, si on oriente la droite , on definit **l’angle oriente entre 2 plans**  par l’egalite avec droite de orthogonale a et droite de orthogonale a .  
Soit deux réflexions planes de plans respectifs .  
Si et paralleles alors est une translation. Si de projete orthogonal sur , le vecteur de cette translation est .  
Si et secants alors est une rotation d’axe la droite d’intersection des plans, d’angle   
Si et perpendiculaires alors est un retournement dont l’axe est la droite d’intersection. **II.3.5. Détermination de composées de retournements par décomposition en réflexions.**Soient deux retournement d’axes respectifs . Exemples composée de 2 retournements d’axes sécants/parallèles /non coplanaires.  
Tout vissage est la composée de 2 retournements. Le groupe des déplacements de l’espace est engendre par les retournements. **II.4. Image d’une partie par une isométrie**L’image d’une boule par une isométrie est une boule de même rayon et de centre l’image du centre.  
L’image d’une partie bornée par une isométrie est une partie bornée de même diamètre. **II.4.1. Familles de points isométriques**Deux triangles sont des **triangles isométriques** ssi les longueurs des cotes de ces triangles sont égales deux a deux.  
L’orbite d’un triplet de points du plan sous l’action du groupe des isométries de ce plan est l’ensemble des triplets verifiant , cad l’ensemble des triangles qui sont isométrie a .   
Soient deux familles de points de E. Si pour tout , alors il existe une isometrie de E transformant pour tout en .  
Si 2 points sont équidistants des points d’un repère affine de E, alors ils sont égaux.  
Si 2 points sont équidistants de points affinement independants de E, alors ils sont egaux ou symétriques par rapport a l’espace engendre par ces points.  
Soit une famille de points affinement indépendants de E engendrant un sous-espace affine F ; soient et deux points n’appartenant pas a . Si, pour tout , on a alors il existe une isometrie admettant comme points fixes et transformant en . **II.5. Isométries conservant une partie**On dit qu’une **isométrie de E conserve**  si .  
On note l’ensemble des isometries conservant A. C’est un sous-groupe de car c’est le stabilisateur de pour l’action du groupe sur .  
On note , c’est un sous-groupe de .  
Si , on note , c’est un sous-groupe de car c’est le stabilisateur de pour l’action du groupe sur .  
Si , est l’ensemble des isometries qui conservent et admettent comme point fixe. On note aussi , c’est le groupe d’isométries conservant A et fixant . **II.5.1. Similitudes conservant une partie bornée**Toute similitude conservant une partie bornée est une isométrie **II.5.2. Points fixes des isométries conservant une partie**L’isobarycentre d’un ensemble fini A de points est un point fixe commun à toutes les isométries conservant A.  
Les isométries conservant une même partie compacte, admettent un point fixe commun. (Par th Jung) **II.5.3. Groupes d’isométries conservant des parties semblables**Si une isométrie f conservant transforme , alors et sont des groupes conjugués (par f) dans .  
Si et sont deux parties semblables de E, et sont conjugues dans le groupe des similitudes de .   
Si et sont deux parties homothetiques de E par rapport au centre un point fixe commun aux isométries conservant , alors   
Deux groupes d’isométries peuvent être conjugues dans le groupe des similitudes de E sans l’être dans le groupe des isométries de E.  
Si et sont deux parties semblables de E et si les isométries conservant ont un point fixe commun, alors et sont conjugues dans le groupe des isometries .  
Si et sont deux parties semblables de E, et sont conjugues dans le groupe des similitudes de .  
Si et sont deux parties semblables de E, et si les rotations conservant A ont un point fixe commun, alors et sont conjugues dans .  
Si et sont deux parties semblables de E, si les rotations conservant A ont un point fixe commun, et si un antidéplacement conserve , alors et sont conjugues dans . **II.6. Sous-groupes finis de**Si est un sous-groupe de on note le sous-groupe de des deplacements, et on note l’ensemble des antidéplacements de .  
Les isométries d’un sous-groupe fini donné d’isométries, admettent un point fixe commun.  
Les isométries d’un sous-groupe fini donné du groupe affine , admettent un point fixe commun.  
Si un sous-groupe fini donné d’isométries contient au moins un antidéplacement, alors est pair, est d’indice dans et . **II.6.1. Groupes finis d’isométries planes**Dans le plan euclidien, soient deux points et le milieu de , soit la symétrie centrale de centre , la reflexion d’axe , la reflexion d’axe la médiatrice de donc passant par O.  
 est le **groupe des 3 symétries**, il est isomorphe au **groupe de Klein** .  
Soit est un groupe fini d’isometries planes  
Cas 1 :Si est un groupe de deplacements, alors est un groupe cyclique de rotations de meme centre.  
Cas 2 :Si est un antideplacement , le sous-groupe est cyclique engendre par une rotation est une reflexion dont l’axe contient le centre de et   
Si (cas 1) est un groupe fini de rotations de cardinal engendre par avec et alors donc . Les reels qui representent les angles des rotations peuvent etre choisis dans l’intervalle et on a alors .  
Si (cas 1) est un morphisme surjectif de groupes de noyau . Donc   
Si (cas 2) est de cardinal , avec , donc . Si , le produit devient direct et isomorphe au groupe de Klein.  
Pour , n’est pas isomorphe a , de meme n’est pas isomorphe a   
Rappel : Un polygone convexe est l’enveloppe convexe de ses sommets.  
Si , Un **polygone régulier d’ordre**  est un polygone convexe inscrit dans un cercle de centre tel que avec la convention .   
L’isobarycentre des sommets d’un polygone régulier est le centre du cercle sur lequel il est inscrit. On l’appelle **centre du polygone régulier.**  
On note un polygone regulier d’ordre , et l’ensemble des isométries le conservant.  
 est forme des rotations de centre et d’angle et des reflexions par rapport aux droites definies par , .  
 est donc isomorphe au groupe diedral   
Le **groupe diédral d’ordre**  correspond au groupe produit semi direct et vérifie la suite exacte scindée à droite , comme on vient de voir, il est isomorphe au **groupe diédral géométrique**: le groupe des isométries fixant un polygone régulier d’ordre .  
Le groupe diedral geometrique est engendre par et l’une quelconque de ses reflexions.  
Deux polygones réguliers de même centre et homothétiques ont le même groupe d’isométries.  
Deux polygones réguliers de même centre et dont l’un est obtenu par rotation de l’autre d’angle ont le meme groupe d’isometries.  
Soit un polygone regulier d’ordre n, et   
Si est pair, est symétrique par rapport a , et toute droite joint 2 sommets de ou bien 2 sommets de .  
Si est impair, est le symetrique de par rapport a , Toute droite joint un sommet de a un sommet de .  
 est l’unique sous-groupe d’isométries planes de cardinal 1. Si est un sous-groupe d’isometries planes dont le groupe des rotations est , alors ou avec reflexion.  
Le groupe des 3 symétries est le groupe d’isometries conservant un segment non réduit a un point, c’est-à-dire conservant un polygone régulier d’ordre 2.  
Les sous-groupes finis d’isométries planes dont le sous-groupe des rotations n’est pas restreint a sont des groupes de rotations et des groupes d’isométries conservant un polygone régulier.  
**Th.** Deux sous-groupes d’isométries planes sont conjugues dans ssi ils sont isomorphes. **II.6.2. Exemples simples de groupes finis de rotations de l’espace**Si sont des retournements d’axes orthogonaux et concourants, alors l’ensemble est un groupe commutatif isomorphe au groupe de Klein . Tout groupe fini de rotations d’ordre , dont les rotations non triviales sont des retournements, est de cette forme.  
Une rotation de l’espace qui conserve un plan affine est une rotation d’axe orthogonal au plan, ou un retournement d’axe contenu dans le plan.  
Si est une rotation d’axe orthogonal a en , alors est la rotation plane de centre .  
Si est un retournement d’axe contenu dans , alors est la reflexion plane d’axe .  
Deux rotations distinctes qui conservent ont des restrictions distinctes.  
Soit un plan affine euclidien oriente dans l’espace affine euclidien de dimension 3.  
Une rotation conservant un polygone régulier transforme 3 points non alignés de en 3 points non alignés de , elle conserve donc le plan .  
Le groupe des rotations conservant un polygone regulier est forme des rotations d’axe orthogonal en a et d’angle , et des retournements par rapport aux droites .  
L’application qui a une rotation conservant associe est un isomorphisme du groupe sur le groupe .  
Le groupe des rotations de l’espace qui conservent le polygone régulier est isomorphe au groupe diedral . **III. Les polytopes réguliers de l’espace et leur groupes de rotation**Soit espace affine euclidien de dimension 3. **III.1. Généralités sur les polytopes réguliers III.1.1. Isométrie conservant un polytope**Un **polytope** est un polyèdre convexe compact d’intérieur non vide de E.Une isométrie de conserve un polytope ssi elle induit une permutation des sommets de ce polytope. Soit l’ensemble des sommets de , et le groupe symetrique sur S. L’application est un morphisme injectif de groupes.  
Le groupe des isométries conservant un polytope est donc fini et peut être identifié a un sous-groupe des permutations des sommets du polytope.  **III.1.2. Définition des polytopes réguliers**   
On appelle **drapeau d’un polytope**  un triplet ou est une face de , est une arete de et un sommet de l’arete . On a alors .  
Une arete est contenue dans exactement 2 faces et contient exactement 2 sommets. Toute arête est presente dans 4 drapeaux exactement. Il y a 4 fois plus de drapeaux que d’arêtes.  
Un polytope est **régulier** ssi le groupe des isométries conservant le polytope agit transitivement sur les drapeaux du polytope.  
Dans un polytope régulier , agit transitivement sur les faces, les aretes et les sommets. Les faces sont donc isometriques, le nombre d’arete par face est constant, les aretes sont isometriques, les faces sont des polygones reguliers. Une isometrie conservant transforme un sommet en un sommet , l’ensemble des aretes issues de est envoye sur l’ensemble des aretes issues de , le nombre d’aretes issues d’un sommet est une constante.  
Si polytope regulier de sommets , alors . L’isobarycentre des sommets est un point fixe commun aux isometries conservant appele **centre du polytope.** 2 sommets quelconques sont images l’un de l’autre par une isométrie fixant . Tous les sommets sont equidistant du centre . Le polytope est donc inscrit dans une sphère de centre .  
Un polytope régulier est une généralisation a la dimension 3 d’un polygone régulier.  
Le **symbole d’un polytope régulier** est le couple , ou est le nombre d’aretes par sommet, et est le nombre d’arêtes par face. Avec la formule d’Euler il n’y a que 5 cas possibles  
**III.1.3. Classification à l’aide de la formule d’Euler  
Formule d’Euler.** Si un polytope d’un espace affine réel de dimension 3 admet faces, aretes et sommets, alors .  
**Solides de Platon.** Dans un espace affine euclidien de dimension 3, soit un polytope tel que le nombre d’arêtes par face est une constante , le nombre d’arete par sommet est une constante . Alors , et la valeur du couple determine la valeur du triplet . De plus les seules valeurs sont :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | Solide |
|  |  | **Tétraèdre** |
|  |  | **Cube** |
|  |  | **Dodécaèdre** |
|  |  | **Octaèdre** |
|  |  | **Icosaèdre** |

**III.1.4. Nombres d’isométries conservant un polytope régulier**Le centre d’un polytope régulier est intérieur a ce polytope.  
La seule isométrie fixant le centre d’un polytope régulier et un de ses drapeaux, est l’identité.  
Etant donnes 2 drapeaux d’un polytope régulier, il existe au plus une isométrie fixant le centre du polytope et envoyant l’un des drapeaux sur l’autre. Si est le nombre d’aretes d’un polytope quelconque , et le polytope est regulier ssi .  
Dans un polytope regulier, agit fidèlement et transitivement sur l’ensemble des drapeaux. **III.1.5. Isométries conservant une arête**Il existe 4 isométries fixant un segment et un point du plan médiateur distinct du milieu.  
Dans un polytope régulier, les 4 isométries fixant une arête quelconque, et fixant le centre du polytope, fixent aussi le polytope . **III.1.6. Rotations fixant un sommet**  
**Caractérisation polytopes réguliers.** Un polytope est regulier ssi agit transitivement sur les sommets et il existe un sommet tel que le groupe des rotations conservant et fixant agit transitivement sur l’ensemble des sommes adjacents a .  
Si le groupe des rotations conservant et fixant agit transitivement sur l’ensemble des sommets adjacents a , la famille formée de et des sommets qui lui sont adjacents definit une pyramide a base reguliere.  
L’image de cette pyramide par une rotation conservant et transformant en un autre sommet est une pyramide isometrique definie par et les sommets adjacents a .  
Si est le nombre d’aretes issues d’un sommet d’un polytope régulier . Le groupe des rotations conservant et fixant est d’ordre . **III.2. Classification des polytopes réguliers a similitude près  
III.2.1. Angle géométrique entre un bipoint et son image par une rotation  
III.2.2. Valeurs possibles du symbole d’un polytope régulier**Les polytopes régulier de même symbole sont semblables. **III.3. Le tétraèdre régulier et son groupe d’isométries**Un **tétraèdre régulier** est l’enveloppe convexe de 4 points non coplanaires a egale distance les uns des autres.   
Un tétraèdre régulier est un simplexe. Les faces d’un tétraèdre régulier sont des triangles  
Une **bimédiane d’un tétraèdre régulier**, est une droite joignant les milieux de 2 cotes opposes.Les cotes opposes d’un tétraèdre régulier sont orthogonaux  
Les bimédianes sont les perpendiculaires communes des cotes opposes  
Le tétraèdre régulier est inscrit dans une sphère de centre, l’isobarycentre des sommets.  
Les hauteurs sont concourantes au centre du tétraèdre et coupent les faces en leur centre de gravite.  
Il y a 24 isométries conservant un tétraèdre régulier qui sont   
- l’identité   
- les 8 rotations d’axe les hauteurs et d’angle , ces rotations correspondent aux 3-cycles de   
- Les 3 retournements d’axe les bimedianes qui correspondent aux produits de 2 transpositions de supports disjoints de   
- Les 6 reflexions par rapport aux plans mediateurs des couples de points du tétraèdre qui correspondent aux transpositions de   
- Les 6 composees ou est un quart de tour d’axe une bimédiane, et est une reflexion de plan le plan mediateur du couple des milieux de cotes opposes definissant la bimédiane qui correspond aux 4-cycles de   
Un tétraèdre régulier est un polytope régulier et et  **III.4. Le cube et son groupe d’isométries**Un cube quelconque est un polytope semblable au polytope défini comme intersection des demi espaces (soit 6 inéquations).  
Les sommets d’un tel cube sont les   
Un cube a 8 sommets, 6 faces, 12 aretes.  
Une isométrie qui conserve le cube transforme une diagonale de face en une diagonale de face, une grande diagonale en une grande diagonale.Les rotations qui conservent le cube sont les 24 rotations suivantes :  
- l’identité  
- les quarts de tour et les retournement d’axe joignant les centres des faces opposées (  
- les rotations d’ordre 3 d’axe les grandes diagonales )  
- les retournements d’axe joignant les milieux de 2 arêtes symétriques par rapport à (6)  
Le cube est un polytope régulier.  
Toute isométrie conservant le cube induit une permutation des grandes diagonales du cube  
Le groupe des déplacements conservant le cube est isomorphe au groupe symétrique  **III.5. L’octaèdre régulier et son groupe de rotations**On part d’un cube ) et on definit le centre des 6 faces , l’enveloppe convexe de ces 6 points est **un octaèdre régulier**.  
Un octaèdre régulier est un polytope régulier a 6 sommets, 12 arêtes, 8 faces.  
TODO : **III.6. L’icosaèdre régulier et son groupe de rotations  
III.6.1. Construction des sommets de l’icosaèdre  
III.6.2. Premières propriétés de l’icosaèdre  
III.6.3. Rotations d’ordre 5 conservant l’icosaèdre  
III.6.4. Rotations conservant l’icosaèdre régulier  
III.6.5. Isomorphisme du groupe des rotations de avec le groupe alterne   
III.7. Le dodecaedre regulier et son groupe de rotations   
III.8. Les sous-groupes finis de   
III.8.1. Determination du cardinal d’un sous-groupe de rotations  
III.8.2. Classification - a isomorphisme près - Des groupes finis de rotation de l’espace.  
III.8.3. Conjugaison dans   
Théorème** :  
Tout sous-groupe fini de rotations de l’espace est isomorphe a un des groupes   
Les sous-groupes finis de sont isomorphes a un des groupes

**Complément 1. Dual d’un convexe. D’un polyèdre  
1.1. Ensemble polaire  
1.2. Dual d’un polytope  
I.3. Dual d’un polytope régulier de l’espace  
Complément 2. Groupe de frise  
2.1. Généralités  
2.2. Groupes de frises formes uniquement de déplacements  
2.3. Groupes de frises contenant un antidéplacement   
2.4. Classification des groupes de frises**