**Théorèmes d’interversion.  
  
Limite - limite**Soit une fonction a deux variables dans 2 espaces métriques et a valeurs dans un métrique .  
On suppose que la fonction n’est définie que sur une partie du produit des deux espaces de départ. On considère un point fixé . Si  
1. L’espace d’arrivée est complet  
2. Quand on fait tendre une variable vers son point, et on fixe l’autre, la fonction converge.  
3. Quand on fait tendre l’autre variable, il y a convergence uniforme de la fonction selon l’une.  
Alors, on peut faire tendre une variable puis l’autre ou l’inverse indistinctement, toutes les limites existent et on peut intervertir.  
**Limite - limite discrète**Soit une suite de fonction d’une partie d’un espace métrique vers un evn , soit . Si  
1. est complet  
2.   
3. converge uniformément sur vers une fonction   
Alors , , donc   
**Limite - somme**Soit une suite de fonction d’un espace métrique vers un evn , soit . Si  
1. est complet  
2.   
3. converge uniformément sur . (On peut utiliser la convergence normale)  
Alors converge, donc   
**Limite - somme (version TCD)**

**Limite – intégrale – sup. Théorème de convergence monotone (TCM). (Beppo-Levi)**   
Toute suite croissante de fonctions mesurables dans converge simplement vers une fonction mesurable dans (la fonction supremum de la suite), et definit une suite d’intégrale croissantes qui admet une limite dans [0,], cette limite est égale à l’intégrale de Lebesgue de la fonction et est donc indépendante de la suite choisie.   
**Limite – intégrale – sup. TCM version proba**  
Pour une suite de v.a.r. telles que alors .   
Plus brièvement   
**Limite - Intégrale. Théorème de convergence dominée (TCD) pour Lebesgue.**Soit une suite de fonctions d’un espace mesuré à valeurs dans , Si  
1. est mesurable.  
2. p.p.   
3. intégrable, .  
Alors :  
1. est intégrable  
2. , cad   
3. càd   
Remarque : Le TCD et le TCM s’appliquent souvent pour intervertir une limite quelconque avec une intégrale, en passant d’abord par la caractérisation séquentielle des limites.  
**Limite - Intégrale. TCD version .**  
Soient . Soit espace mesuré. Soit suite de fonctions de . Si :  
1. est mesurable.  
2. mesurable telle que p.p.   
3. p.p.  
Alors :  
.   
.  
  **Limite – Intégrale (Espérance). TCD version proba**.  
Soit une suite de v.a.r. .  
1. converge simplement presque partout. p.p.   
2. presque partout avec   
Alors :  
1.   
2.   
3. . càd .   
**Limite – Intégrale (version uniforme, discrète).** **(moins lourd que le TCD si borné)**  
Soit une suite de fonctions d’un intervalle à valeurs dans , Si :  
1. intégrable.  
2. converge uniformément sur   
3. borné  
Alors :  
1. est intégrable.  
2. càd (Preuve : )  
(Preuve de 1 : donc donc avec et intégrables sur , donc intégrable sur )  
**Limite - Intégrale. TCD continu.**Soit avec espace mesuré et un espace métrique et . Si :  
1. mesurable.2. 3. intégrable,   
Alors :  
1. est intégrable   
2.   
**Limite – Intégrale (version uniforme, continue).**Soit avec espace mesuré et un espace métrique et . Si :  
1. intégrable.  
2. .   
3.   
Alors  
1. est intégrable   
2.   
**Limite - Intégrale. Cas simple où est continue et compact.**Soit avec espace mesuré et un espace métrique et . Si :  
1. est continue sur .  
2. est compact3.   
Alors le TCD s’applique avec où compact de contenant .

**Continuité - Limite**Soit une suite de fonction d’un espace métrique vers un evn , et . Si :  
1. continue en   
2. converge uniformément vers une fonction sur , (ou seulement sur tout compact de si est localement compact).  
Alors est continue en

**Continuité - Somme**  
Soit une suite de fonction d’un espace métrique vers un evn   
1. continue en   
2. converge uniformément sur , (ou seulement sur tout compact de si localement compact), (on peut utiliser la convergence normale si est complet).  
Alors est continue en

**Continuité - Intégrale**  
Soit une fonction à valeurs dans C à deux variables : un paramètre dans un espace métrique , et une variable d’intégration dans un espace mesuré . Si :  
1. mesurable  
2. p.p. continue en .  
3. intégrable, p.p   
ou si loc. compact 3’. compact intégrable p.p   
Alors 1. est bien définie sur , et continue en .  
Se prouve avec TCD.   
Hypothèses alternatives via convergence uniforme :  
1. intégrable.  
2. est continue en .  
3. .   
4. (ne marche donc pas pour et ).  
Hypothèses alternatives simples (il suffit de poser ) :  
1. est continue sur .  
2. est compact.

**Dérivée - Limite**Soit une suite de fonction d’un intervalle vers un evn . Si  
1. est de classe sur   
2. converge uniformément sur (ou seulement sur tout compact )  
3. converge  
Alors  
1. est bien définie de classe sur   
2.   
3. converge uniformément sur tout compact vers   
Attention en général on a pas convergence uniforme sur tout . Cependant c’est le cas si est compact, ou si est un intervalle borné et on avait convergence uniforme sur tout de dans hypothèse 2. **Dérivée -ieme - Limite**Soit une suite de fonction d’un intervalle vers un evn . Si  
1. est de classe sur   
2. converge uniformément sur (ou seulement sur tout compact )  
3. converge simplement sur   
Alors  
1. est bien définie et de classe sur   
2.   
3. converge uniformément sur tout compact vers   
Attention en général on a pas convergence uniforme sur tout . Cependant c’est le cas si est compact, ou si est un intervalle borné et on avait convergence uniforme sur tout de dans hypothèse 2. **Différentielle - Limite, sur un ouvert convexe**Soit une suite de fonctions d’un ouvert convexe d’un R-evn E vers un Banach F. Si  
1. est différentiable sur   
2. converge uniformément sur (ou seulement sur tout compact )  
3. converge  
Alors  
1. est bien définie et différentiable sur   
2.   
3. converge uniformément sur tout compact vers   
Attention en général on a pas convergence uniforme sur tout . Cependant c’est le cas si est borné et on avait convergence uniforme sur tout de dans hypothèse 2.  
**Différentielle - Limite, sur un ouvert connexe**  
Soit une suite de fonctions d’un ouvert connexe U d’un R-evn E vers un Banach F. Si   
1. est différentiable sur   
2. converge uniformément sur   
3. converge  
Alors  
1. est bien définie et différentiable sur   
2.   
3. converge uniformément sur vers .  
Attention en général on a pas convergence uniforme sur tout . Cependant c’est le cas si est borné et on avait convergence uniforme sur tout de dans hypothèse 2.  
**Dérivée Complexe - limite (par Morera)**Soit une suite de fonctions d’un ouvert vers   
1. holomorphe sur   
2. converge uniformément sur (ou seulement sur tout compact )  
Alors  
 La fonction limite est bien définie et holomorphe sur l’ouvert   
2. converge uniformément sur tout compact de vers .   
3. converge uniformément sur tout compact de vers . Et   
De plus :  
Si l’ouvert est connexe, et si tous les sont sans zéros, alors la fonction limite est soit identiquement nulle, soit sans zéros.  
Si l’ouvert est connexe, et si tous les sont injectives, alors la fonction limite est soit constante, soit injective.

**Dérivée - Somme**Soit une suite de fonction d’un intervalle vers un evn . Si  
1. est de classe sur   
2. converge uniformément sur (ou sur tout compact )  
3. converge  
Alors  
1. est de classe sur   
2.   
3. converge uniformément sur tout compact  **Dérivée k-ième - Somme**Soit une suite de fonction d’un intervalle vers un evn . Si  
1. est de classe sur   
2. converge uniformément sur (ou sur tout compact )  
3. converge simplement sur   
Alors  
1. de classe sur   
2.   
3. converge uniformément sur tout compact  **Différentielle - Somme, version convexe**Soit une série de fonctions d’un ouvert convexe U d’un Revn E vers un Banach F. Si   
1. est différentiable sur   
2. converge uniformément sur (ou seulement sur tout compact )  
3. converge.  
Alors  
1. différentiable sur   
2.   
3. converge uniformément sur tout compact   
**Dérivée complexe - Somme**  
Soit une suite de fonctions d’un ouvert de vers   
1. holomorphe sur   
2. converge uniformément sur U (ou seulement sur tout compact )  
Alors  
1. est holomorphe sur   
2. converge uniformément sur tout compact de .   
3. converge uniformément sur tout compact de .   
De plus,  
Si converge normalement sur tout compact de U, alors aussi.  
Remarque : holomorphe et CU sur tout implique CN sur tout

**Dérivée - Intégrale**  
Soit une fonction à valeurs dans à deux variables : un paramètre dans un intervalle ouvert de R, et une variable d’intégration dans un espace mesuré . Si :  
1. intégrable (Dominer si nécessaire)  
2. p.p. dérivable sur . (Pas de version locale).   
3. intégrable, p.p. .  
3(alt). compact , intégrable, p.p. .  
Alors  
1. est dérivable sur   
2.   
Aux bornes d’un intervalle, le théorème ne s’applique pas, on applique plutôt le TCD, ou le TCM, avec la caractérisation séquentielle des limites. En prépa il fallait supposer de plus continue, càd pour que son intégrale ait un sens.  
**Dérivée partielle - Intégrale**  
Soit une fonction a valeurs dans C a deux variables : un paramètre x dans un ouvert convexe de et une variable d’intégration dans un espace mesuré . Si :  
1. intégrable. (1. est un cas particulier de 3. Avec )  
2. p.p. est de classe sur . (Pas de version locale).  
3. , intégrable, p.p.   
3(alt). , compact , intégrable, p.p. Alors  
1. est de classe sur .  
2.   
Hypothèses alternatives simples si compact (il suffit de poser ) :  
1. est sur . (plus exigeant).  
2. est compact.  
**Dérivée complexe - Intégrale**  
Soit une fonction a valeurs dans C a deux variables : un paramètre dans un ouvert de C, et une variable d’intégration dans un espace mesuré . Si :  
1. mesurable  
2. p.p. est holomorphe sur . (Pas de version locale).  
3. intégrable, p.p.   
3(alt). compact intégrable, p.p.   
Alors   
1. est bien définie et holomorphe sur   
2.

**Intégrale - Intégrale. Théorème de Fubini-Tonelli.**  
Soit deux espaces mesurés -finis.  
**Tonelli.** Pour une fonction mesurable, les fonctions partielles sont mesurables, est -mesurable, est -mesurable, et on a (peut valoir )  
**Fubini.** = Tonelli pour les fonctions a valeurs dans et intégrables au lieu de simplement mesurable.Une fonction est -intégrable càd ssi ssi   
Dans ce cas, les fonctions partielles sont intégrables, est -intégrable, est -intégrable, et on a (toujours fini dans C)  
Les hypothèses sont bien toutes nécessaires (même la -finitude).  
**Théorème de Fubini-Tonelli pour le complété d’un espace produit.**Soit deux espaces mesurés -finis. Soit l’espace mesuré complété de   
**Tonelli.** Pour une fonction mesurable, les fonctions partielles sont mesurables, est -mesurable, est -mesurable, et on a (peut valoir )  
**Fubini.** Pour une fonction -intégrable,  
Une fonction est -intégrable càd ssi ssi   
Dans ce cas les fonctions partielles sont intégrables, est -intégrable, est -intégrable, et on a (toujours fini dans C).   
**Cas particulier Fubini.** Si est continue sur un produit de segments, les hypothèses de Fubini sont vérifiées, donc les conclusions s’appliquent.

**Somme, Somme, (version Tonelli)**  
Soit une suite double à valeurs dans . Alors  **Somme - Somme. (version Fubini)**  
Soit une suite double à valeurs dans , si  
1.   
Alors toutes les sommes existent et s’intervertissent  
1. convergeconverge  
2. converge et converge  
3.

**Somme - Intégrale, (version Tonelli) (à privilégier si tout est >= 0)**Pour une série de fonctions sur un espace mesuré , à valeurs dans [0,+, si :  
1. , est mesurable  
Alors :  
 est mesurable sur   
   
**Somme – Intégrale, (version Fubini) (à privilégier si pas borné)**Pour une série de fonctions sur un espace mesuré , à valeurs dans , si :  
1. , est mesurable (alors on sait mesurable et )  
2. ou . (l’une ou l’autre suffit puisqu’il y a égalité)  
Alors  
1. est bien définie pp sur et intégrable sur .  
2.   
(On peut voir cette comme une seule fonction a 2 variables définie sur le produit des espaces mesurés. Alors est mesurable pour la tribu produit ssi est mesurable. )  
**Somme - Intégrale. (version uniforme) (à privilégier si borné)**  
Soit une suite de fonctions d’un intervalle vers , Si :  
1. borné  
2. converge uniformément sur   
3. intégrable sur .  
Alors :  
1. est intégrable sur   
2. Alors (Preuve : TCD ou )  
(Preuve de 1 : donc donc avec et intégrables sur )  
**Somme - Intégrale, (version TCD)**Pour une série de fonctions sur un espace mesuré , à valeurs dans , si :  
1. , est mesurable  
2. converge simplement presque partout sur , cad,   
3. intégrable, p.p.   
Alors est intégrable sur , converge,   
   
**Somme - Intégrale, (version prépa sans Lebesgue (inutile)).**Soit une suite de fonctions d’un intervalle vers ou , Si :  
1. c/m et intégrable sur   
2. CVS sur et c/m sur   
3.   
Alors   
1. intégrable sur   
2. converge  
3.

**Divers.**

**Somme - Produit fini. (Produits de Cauchy.)**Soit suites dans une algèbre de Banach.  
Si alors avec   
1. converge absolument donc converge  
2.

**Produits infinis.**  
Soit une suite de fonctions holomorphes d’un ouvert U vers C, alors  **converge normalement sur tout compact de U** signifie : converge normalement sur tout compact de U  
ou ce qui est équivalent : converge uniformement vers 0 sur tout compact de U et converge normalement sur tout compact de .   
**Théorème.** Si est une suite de fonctions holomorphes d’un ouvert U vers C, telle que converge normalement sur tout compact de U, alors converge absolument vers une fonction holomorphe sur U, de plus l’ensemble des zéros de est la réunion des zéros des et la multiplicité d’un zéro de est la somme des multiplicités de ce zéro pour chaque .  
De plus la série de fonctions méromorphes CN sur tout K et .

**Séries de fonctions méromorphes.**Les séries de fonctions méromorphes nécessitent des définitions particulières, car pas définies partout.  
Soit une suite de fonctions méromorphes sur un ouvert .  
La série associée est dite uniformément convergente sur tout compact de U si pour tout compact K de U :  
1. il existe un entier tel que la fonction n’a pas de pôles dans K.  
2. La série de fonctions tronquée converge uniformément sur K.  
Dans ce cas on a holomorphes, et donc série de somme holomorphe sur l’ouvert.  
et ou la 1ere somme est méromorphe, la 2e holomorphe.  
**Théorème** : Soit une suite de fonctions méromorphes sur un ouvert uniformément convergente sur tout compact de l’ouvert U. Alors on a les conséquences suivantes:  
1. La réunion des pôles est un ensemble ferme et discret, tel que pour tout pole , on a   
2. La série de terme général converge absolument pour tout   
3. La somme de la série de fonctions est definie sur et meromorphe sur .  
4. La derivee de la somme definie sur est la somme de la série des dérivées.

**Le lemme de Fatou.**   
Pour toute suite de fonctions mesurables d’un espace mesuré vers [0,+], on a l’inegalite   
Pour une suite de v.a.r. positives dans,