**Matrices.**

Une **matrice sur un ensemble**  correspond à une famille .

On note l’ensemble des matrices sur un ensemble .

**Notation matricielle.**

Pour on représente généralement sous la forme

Pour 2 ensembles cardinaux quelconques et , une **matrice de taille sur un ensemble**  correspond à une famille .

On note l’ensemble des matrices sur . Le cas fini peut être vu comme cas particulier du cas plus général.

Bien souvent on identifie . On préfère garder la distinction et , càd bien distinguer lignes et colonnes, car cela importe pour faire les produits.

Une **matrice**  tout court correspond à une matrice sur un ensemble non spécifié, donc simplement à une famille d’ensembles. On note la classe des matrices .

On notera **matrice** une matrice  dont les colonnes sont à support fini dans . On note la classe des matrices

Une matrice **carrée** est une matrice telle que .

On note . On note . Attention dans le cas infini.

Pour une matrice , on note  **le coefficient**  de la matrice. On a

Pour une matrice , et , la **-eme ligne de**  notée correspond à la matrice/au vecteur ligne

Pour une matrice , et , la **-eme colonne de**  notée correspond à la matrice/au vecteur colonne

Un **support matriciel** correspond à un couple d’ensembles .

Le **support d’une matrice**  est le support matriciel

Un **support extrait** d’un support matriciel correspond à un couple d’ensembles avec .

Un **support extrait d’une matrice** est un support extrait du support de cette matrice.

Une **sous-matrice d’une matrice**  correspond à la donnée de et un support extrait de .

Un **découpage d’un support matriciel** , correspond à une famille de supports matriciels partitionnant le support , càd avec partition de et partition de .

Un **sous-découpage d’un découpage** de est un découpage de .

Un -découpage de est **moins fin/plus grossier** qu’un autre -découpage de ssi il existe un -sous-découpage de tel que .

Un sous-découpage d’un découpage de correspond à un découpage plus grossier que de .

**La** **matrice par blocs de**  **selon un découpage de**  correspond à la matrice définie par

Prendre une matrice par blocs d’une matrice par blocs de correspond à considérer un sous-découpage d’un découpage, donc correspond à prendre une matrice par blocs de plus grossière.

D’une matrice par blocs , on peut déterminer la **matrice initiale** ,

**Operations.**

La **transposée** d’une matrice est la matrice   
Relativement à une l.c.i. sur , on peut définir **l’addition matricielle** comme l.c.i. sur par   
Relativement à un groupe , cela définit la l.c.e.

Relativement à un groupe , la matrice nulle est l’élément neutre de . On la note

Relativement à une l.c.e. quelconque , on peut définir la **multiplication scalaire gauche matricielle** comme l.c.e. par

On peut de façon analogue définir la multiplication scalaire droite matricielle, relativement à une l.c.e. à droite.

Si est un anneau, la multiplication scalaire est définie à gauche et à droite en considérant comme la l.c.e. (à gauche ou à droite).

Quand l’ensemble est un anneau commutatif les deux multiplications sont identiques.

Cependant, si l'anneau n'est pas commutatif, tel que celui des quaternions, alors ils peuvent être différents. Par exemple

**Somme directe de matrices.**

**Multiplications de matrices.**

Relativement à un anneau , on peut définir la **multiplication matricielle** par

En général on effectue des multiplications de matrices d’applications linéaires, donc on considère plutôt

Le produit matriciel est associatif, distributif à gauche et à droite, et compatible avec la multiplication par un scalaire càd

La multiplication de matrices par blocs donne une matrice par blocs de la multiplication des matrices initiales.

On note . Attention en dimension infinie

est une l.c.i sur les matrices carrées de

La **matrice identité** **d’ordre**  sur un anneau (unitaire) est la matrice valant sur la diagonale et partout ailleurs.

Une matrice carrée sur un anneau est **inversible** si elle est symétrisable pour la multiplication matricielle. Càd ssi il existe tel que

Dans ce cas est unique et appelée **inverse de** , et notee . On a donc

On note l’ensemble des matrices inversibles.

Pour , on définit la matrice par valant sur la diagonale jusqu’au rang , et partout ailleurs.

Relativement à un anneau , on peut définir **le produit de Hadamard** comme la l.c.i. sur par

Le produit de Hadamard, est associatif, distributif à gauche et à droite, et compatible avec la multiplication par un scalaire càd

Le produit de Hadamard est commutatif, si l’anneau sous-jacent l’est.

Relativement à un anneau , on peut définir **le produit tensoriel de Kronecker**, pour et , on pose par exemple

Il y a plusieurs façons similaires de définir ce produit. On peut le voir comme une matrice par blocs

Le produit matriciel tensoriel, est associatifs, distributif à gauche et à droite, et compatible avec la multiplication par un scalaire càd

**Structure.**

Pour tout corps, est un ev isomorphe a ,

Pour tout anneau, est un anneau. Souvent ni intègre, ni abélien.

Pour tout corps, est une -algebre.

Pour anneau, on définit la matrice sur valant en et ailleurs.

On a

Pour un corps , et les forment une base de , qui est donc de -dimension .

**Matrices et espaces vectoriels.**

La **matrice d’un vecteur dans une base**  d’un ev , est . Seul un nombre fini de sont non nuls. est le cardinal représentant la dimension de .

La **matrice d’une famille de vecteur** d’un dans une base , est la matrice initiale de la matrice par blocs . Càd

La **matrice d’une application linéaire**  d’une base vers une base est

La -ieme colonne de la matrice de dans la base contient l’expression de dans .

Pour et de dimension finie et , et

Pour et on a

Pour et on a

Pour , la transposée et

Dans un ev de dimension finie , l’application est un isomorphisme de -algebres.

Ayant fixé une base d’un Kev , et une base d’un ev , et une matrice alors il y a un seul morphisme d’ev dont c’est la matrice :

La **matrice de passage** d’une base vers une base d’un même ev , est la matrice de la nouvelle base dans l’ancienne . Il est courant d’écrire cette matrice :

On a . Il est courant d’écrire cette matrice :

Tout matrice de passage est inversible et réciproquement, toute matrice inversible de est la matrice de passage d’une certaine base de vers une certaine autre base de .

Pour bases d’un ev , , on écrit souvent , ou

**Changement de bases.** Pour bases d’un ev , bases d’un ev , ,

on écrit souvent

Sur un anneau , 2 **matrices sont équivalentes** et on note ssi

est une relation d’équivalence sur

D’après la formule de changement de bases, toutes les matrices d’une application linéaire appartiennent à la même classe d’équivalence. De plus, toute matrice de cette classe d’équivalence (), est la matrice de respectivement a une certaine base de et une certaine base de .

Sur un anneau , 2 **matrices carrées sont semblables** et on note ssi

est une relation d’équivalence sur

D’après la formule de changement de bases, toutes les matrices d’un endomorphisme dans une même base appartiennent à la même classe de similitude. De plus, toute matrice de cette classe de similitude (), est la matrice de respectivement a une certaine base de .

La matrice représentative de l’identité dans n’importe quelle base est toujours .

La matrice représentative d’un projecteur dans une base adaptee a la décomposition est avec

**Algèbre linéaire sur les matrices.**

**La base canonique du ev**  avec un corps, et quelconque, est la base avec . En dimension infinie c’est encore bien une base de (mais pas de )

**L’application linéaire canonique d’une matrice**  est l’unique a.l. dont est la matrice représentative relativement aux bases canoniques de .

Les notions d’algèbre linéaire relatives à une application linéaire peuvent être définies relativement à une matrice, en les assimilant à la même notion sur l’application linéaire canonique de la matrice.

Le **noyau d’une matrice** est

L’**image d’une matrice** est

Le noyau d’une application linéaire est isomorphe au noyau de sa matrice représentative dans n’importe quelle base fixée.

L’image d’une application linéaire est isomorphe à l’image de sa matrice représentative dans n’importe quelle base fixée.

Le **rang d’une matrice** est le rang de n’importe quelle application linéaire dont elle est représentative. (indépendant de )

Le **rang d’une famille quelconque de vecteurs colonnes** est la dimension de l’espace qu’ils engendrent.

L’image d’une matrice est engendrée par ses vecteurs colonnes.

Le rang d’une matrice est égal à la dimension de son image.

Le rang d’une matrice est égal au rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Le rang d’une matrice est égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes.

**Théorème du rang**. Le rang d’une matrice est toujours égal à la codimension de son noyau.

. On a toujours

En dimension finie

Le rang d’une matrice vérifie toujours

**Caractérisation de l’équivalence et du rang.** Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont même rang.

Toute matrice est équivalente à la matrice de son rang   
Dans , il y a exactement classes d’équivalences.

**Trace d’une matrice carrée en dimension finie.**

La **trace d’une matrice carrée de taille finie** est la somme de ses coefficients diagonaux.

Deux matrices carrées finies semblables ont même trace.

Pour un corps , l’application trace est une forme linéaire sur le ev .

Toute forme linéaire sur les matrices carrées , vérifiant est proportionnelle à la trace. Càd

La **trace d’un endomorphisme**  d’un Kev de dimension finie , est la trace de n’importe quelle matrice représentative de l’endomorphisme . base de

La trace d’un projecteur d’un ev de dimension finie est

**Operations sur les lignes et les colonnes**

**La matrice de permutation**  est

**La matrice de dilatation de coefficient**  est

**La matrice de transvection de coefficient**  est

Soit , soit tels que