**Modèles standards des entiers naturels.  
 vérifie le modèle de Peano des entiers naturels** ssi   
 **vérifie le modèle ordinaldes entiers naturels** ssi   
Pour un modèle de Péano , on peut définir comme l’unique tel que   
Pour un modèle de Péano , on peut définir comme l’unique relation binaire sur vérifiant   
**Le modèle ordinal induit par un modèle de Péano** , correspond à   
Pour un modèle ordinal , on peut définir   
Pour un modèle ordinal , on peut définir comme l’unique tel que   
**Le modèle de Péano induit par un modèle ordinal** , correspond à   
**Equivalence des modèles.**Le modèle ordinal induit par un modèle de Péano est un modèle ordinal valide des entiers naturels et le modèle de Péano qu’il induit n’est autre que le modèle originel.  
Le modèle de Péano induit par un modèle ordinal est un modèle de Péano valide des entiers naturels et le modèle ordinal qu’il induit n’est autre que le modèle originel.  
Ces deux modèles fournissent donc deux points de départs équivalents.  
**Existence.** Il existe un vérifiant le modèle de Peano.  
**Construction via ZFC.** **Un ensemble vérifie l’axiome de l’infini AI** ssi   
Un axiome de ZFC énonce qu’il existe au moins un tel ensemble .  
On pose .  
 est le plus petit ensemble pour vérifiant AI.  
On pose , et on pose . Alors est un modèle de Peano.  
**Axiomatisations.**  
Les deux modèles précédents énoncent des propriétés fondamentales de , mais ne sont pas de réelles axiomatisations des nombres entiers sur la logique, car ces modèles supposent une théorie des ensembles et des fonctions préexistante. Il est possible de donner une axiomatisation reposant uniquement sur la logique classique (calcul des propositions + prédicats), sans utiliser de concept de fonction ou d’ensemble mathématique a priori.  
Une axiomatisation est **l’arithmétique de Peano** et est formulée sur   
Une axiomatisation plus faible est **l’arithmétique de Presburger** et est formulée sur , cependant est moins expressive.  
**Notations élémentaires.** signifie et   
 signifie et .  
 signifie et   
   
Pour   
Pour Pour  **Formulations du principe de récurrence.**Soit des variables fixées, un prédicat dont on abrège l’écriture en .  
 peut eventuellement etre nul auquel cas il n’y a pas de . Grace à la notation set-builder le principe de récurrence se réénonce.  
Récurrence simple.   
 Récurrence d’ordre . Récurrence forte.  **Propriétés élémentaires de .** vérifie le modèle de Peano, vérifie le modèle ordinal, et les récurrences.  
   
 est bijective.  
   
   
   
   
   
   
**Addition dans .** tel que   
 (+ est associative)  
 (+ est commutative)  
 (somme de positifs nuls est nulle)  
Si alors et réciproquement. (+ est régulière)  
Si alors et réciproquement.  
Si alors et réciproquement.  
**Soustraction dans .**Le fait de définir une soustraction seulement dans est maladroit car il faut toujours une précondition . On préfère définir le groupe pour avoir une théorie plus élégante.  
   
   
   
   
   
   
   
**Multiplication dans**   
   
   
 ( est commutative)  
 ( est distributive sur )  
 ( est distributive sur )  
 ( est associative)  
 (intégrité)  
Si alors . Réciproque fausse si .  
Si et alors   
Si et alors . Réciproque fausse si .  
Si et alors .  
Si et alors .  
Si et alors .  
**Division dans**Le fait de définir une division seulement dans est encore très maladroit car il faut toujours une précondition de divisibilité. On préfère définir le corps pour avoir une théorie plus élégante.  
Pour et , on dit  **divise / multiple de / /**  ssi   
Dans ce cas est unique, est appelé **quotient de par**  et noté   
Pour , et :  
   
 et   
 et ssi   
   
   
   
   
   
   
   
   
**Caractérisation des applications entre et**   
**Lemme.** bijective  
 injective   
 surjective   
 bijective   
 , injective ssi surjective ssi bijective.  
**Ensembles finis et cardinaux.**  
Un **ensemble est fini** ssi ( est vide ou il existe une bijection de avec )  
Un **ensemble est infini**, s’il n’est pas fini.  
Le **cardinal de l’ensemble vide** est .  
Le **cardinal d’un ensemble fini non vide** noté , est l’unique entier , tel qu’il existe une bijection de .  
Le cardinal d’un ensemble fini est donc toujours un entier naturel.  
Le cardinal d’un ensemble infini peut être défini, mais n’est jamais affecté à un entier naturel.  
Un ensemble est fini ssi   
Un ensemble est vide ssi   
Entre 2 ensembles finis non vides , il existe une application injective ssi   
Entre 2 ensembles finis non vides , il existe une application surjective ssi   
Entre 2 ensembles finis non vides , il existe une application bijective ssi   
Entre 2 ensembles finis non vides de meme cardinal, une application est injective ssi elle est surjective ssi elle est bijective.  
D’un ensemble infini, on peut extraire une partie finie de taille un entier arbitraire fixé.  
Une injection qui part d’un ensemble fini, arrive dans un ensemble fini.  
Une surjection qui arrive d’un ensemble fini, part d’un ensemble fini.  
Si deux ensembles sont en bijection, alors soit ils sont tous deux fini, soit ils sont tous deux infini.  
Une application de domaine fini, a une image directe finie, car surjective dans son image.  
Une famille d’entiers est **croissante** ssi   
Une famille d’entiers est **strictement croissante** ssi   
Pour ,   
Une famille finie d’entiers peut être permutée de sorte à la rendre croissante.  
.  
Un ensemble fini non vide d’entiers peut être décrit par une famille strictement croissante d’entiers unique.  
   
Une partie d’un ensemble fini, est finie et de cardinal inferieur.   
Une partie de est finie ssi elle est majorée ssi elle est bornée.  
L’intersection d’ensembles finis est finie, et   
L’union d’ensembles finis est finie, et   
**Notation d’opérateur itéré, pour une l.c.i. associative et commutative.**  
Soit ensemble muni d’une l.c.i. \* associative et commutative. Soit tels que et soit une famille définie au moins sur les indices .  
   
   
 donc on peut toujours ramener les indices entre et .  
On peut définir l’opérateur pour un ensemble fini non vide de cardinal , et une application définie au moins sur .  
 bijective, .  
 On a en particulier   
**Changement de variables**. Pour une bijection vers on a   
Pour ,   
La somme itérée dans se note . Le produit itéré dans se note .  
**Propriétés spécifiques a .**  
   
, en particulier   
**Combinatoire.**  
**Fonction puissance.**   
   
**Fonction factorielle.**   
**Arrangement.**   
**Coefficient binomial.**   
 et   
   
   
   
   
Pour 2 ensemble finis , le produit cartésien est fini,   
Pour 2 ensemble finis , l’ensemble des applications de vers càd est fini, et   
Pour 2 ensemble finis , l’ensemble des injections de vers a éléments si , exactement si égalité, mais 0 éléments si .  
Pour 2 ensemble finis , l’ensemble des bijections de vers a éléments si , mais 0 éléments si .   
Pour un ensemble fini , l’ensemble des parties de est fini de cardinal   
Pour un ensemble fini a éléments, l’ensemble des parties de a éléments est   
Pour un ensemble fini a éléments, l’ensemble des familles de a éléments est puisque ce sont les injections.  
Intuitivement le lien peut se comprendre comme choisir une famille de éléments mais ignorer l’ordre donc diviser par toutes les permutations possibles de cette famille.  
**Lemme des bergers.** Si un ensemble possède une partition en parties contenant chacune éléments alors contient éléments.