**Chapitre 10. Polynômes  
I. Polynômes à une indéterminée  
I.1. Polynômes à coefficients dans un anneau**Si est un anneau commutatif, est un anneau commutatif pour les l.c.i. et . Et un -module pour la l.c.i et la l.c.e. . est une -algebre. (vérifier)  
Tout polynôme s’écrit , avec , le **degré** de est   
On pose   
Si est un anneau commutatif intègre, est un anneau commutatif intègre.  
Dans ce cas   
Si est fini, est dénombrable. Si est infini, et ont le même cardinal.  
Les polynômes inversibles sur un anneau commutatif sont les constantes inversibles de l’anneau.   
Les polynômes inversibles sur un corps sont tous les polynômes constants.   
Un polynôme est irréductible ssi inversible ou inversible. **I.2. Polynômes à coefficients dans un corps   
I.2.1. Division euclidienne**Pour alors et   
Le polynome est le **quotient** de la D.E. de A par B. Le polynôme R est le **reste** de la D.E. de A par B.  
Le reste peut être nul avec dans ce cas .  
Dans un anneau commutatif intègre, Pour tel que est unitaire, alors et ( vérifier)  
**Division selon les puissances croissantes.** Pour alors et . **I.2.2. Idéaux de** est un anneau principal, euclidien, noethérien et factoriel.  
Rappels : Un polynôme divise un autre ssi son idéal engendré contient celui de l’autre. Un polynôme est irréductible dans ssi son idéal engendré est maximal.  
Si et sont deux polynômes de , dont l’ideal engendré est alors . Dans ce cas et sont **des coefficients de Bézout de** .  
Si , alors on peut trouver tels que et .  
Deux polynômes sont premiers entre ssi ssi   
Deux polynômes irréductibles sont premiers entre eux ssi ils sont non proportionnels.  
**Lemme de Gauss.**   
Les ideaux premiers de sont d’une part les idéaux maximaux (engendrés par un polynôme irréductible) et d’autre part l’idéal .  
 .  
Pour tel que , et   
Donc est toujours de dimension .  
Pour est linéaire surjective.  
Pour est un isomorphisme d’ev. **I.2.3. Racines d’un polynôme**Une **fonction polynôme** sur un corps est une fonction obtenue en évaluant un polynôme de c’est une fonction de la forme avec et . L’application est un morphisme de -algèbres.  
Par abus d’écriture on écrira simplement si , .  
Un point etant fixé, le morphisme est le **morphisme d’évaluation au point fixé** . Le morphisme d’évaluation en un point fixé, est un morphisme de -algebres.  
Une **racine/zéro** d’un polynôme de est un point tel que .  
Un polynôme de admet une racine en un point ssi ce polynome est divisible par   
Une **racine d’ordre** d’un polynôme de est un point ssi mais pas .  
**Une racine simple** d’un polynôme est une racine d’ordre .  
Tout est racine d’ordre du polynome nul   
Si un polynome de est de degré , le nombre de racines comptées avec leur multiplicité est .  
Dans un anneau intègre, c’est encore vrai car s’injecte dans   
Dans un anneau en général c’est faux : dans admet racines distinctes.  
Pour un corps infini, le morphisme est injectif : A une fonction polynomiale ne peut correspondre qu’un seul polynôme. Autrement dit si a une infinite de racines alors .  
**Polynôme dérivé.** Si alors on définit   
On définit la dérivée nième :   
L’application est linéaire.  
Si est scindé sur ( distincts),   
Si est scindé sur ,   
Si est scindé sur , donc .  
Si est scindé sur , .   
Si est irréductible sur , .  
Le pgcd de polynômes est invariant par extension de corps.  
**Formule Leibniz.** Si alors   
Dans un corps de caractéristique nulle, est une racine d’ordre de ssi et   
Dans un corps de caractéristique positive , Si est une racine d’ordre de alors on a  **I.2.4. Polynômes irréductibles dans et dans   
Th. D’Alembert-Gauss.** Tout polynôme non constant admet une racine dans .  
Autrement dit tout polynôme peut aussi s’ecrire   
Les polynômes irréductibles de sont les polynômes de degré 1. Les idéaux maximaux de sont de la forme avec .  
Les polynômes irréductibles de sont les polynômes de degré 1 et, d’autre part les polynômes de degré 2 dont le discriminant est négatif. Les idéaux maximaux de sont donc de la forme avec ou de la forme avec et .  
Tout polynôme de s’écrit sous la forme  **I.3. Polynômes à coefficients dans un anneau factoriel.**Soit un anneau factoriel de corps de fractions .La surjection canonique de se prolonge naturellement en une application (appliquant aux coefficients) qui est un morphisme d’anneaux, car la surjection canonique en est un.Le **contenu** d’un polynôme d’un anneau factoriel , est le pgcd dans de ses coefficients.Un polynôme d’un anneau factoriel est dit **primitif** ssi son contenu dans est càd ssi aucun irréductible de l’anneau ne divise tous ses coefficients.  
Un produit fini de polynômes primitifs sur un anneau factoriel, est un polynôme primitif.  
Le contenu d’un produit fini de polynômes sur un anneau factoriel est le produit des contenus.  
**I.4. Critère d’irréductibilité des polynômes**Un polynôme de de degré est irréductible.Un polynôme de de degré irréductible, n’a pas de racine dans .Un polynôme de de degré 2 ou 3 sans racines dans est irréductible.  
**Lien irréductibilité dans et dans .**  
Attention : Si est réductible dans . , .  
Alors on ne peut pas dire que est réductible dans , car il est possible que   
Si est réductible dans avec facteurs de degré , alors il est réductible dans .  
Un polynôme constant de est irréductible dans ssi irréductible dans .  
**Lemme de Gauss général.** Un polynôme non constant de , est irréductible dans ssi il est primitif dans et irréductible dans .Un polynôme non constant de non primitif dans , est réductible dans .  
Un polynôme réductible dans est réductible dans avec facteurs (proportionnels) de degré .  
Un polynôme unitaire non constant de , est irréductible dans ssi irréductible dans .  
**Corollaire utile du lemme de Gauss.** Deux polynômes unitaires de , dont le produit est dans , s’avèrent être dans .  **Irréductibilité dans A/I.** Pour un idéal premier d’un anneau factoriel , de corps de fractions , on peut définir l’anneau quotient intègre de corps de fractions .  
Soit tel que est irréductible dans et alors est irréductible dans . Si de plus est primitif, alors irréductible dans (Gauss).**Irréductibilité dans .** Soit tel que est irréductible dans et alors est irréductible dans . Si de plus est primitif, alors irréductible dans .  
**Transfert de Gauss.** Si est un anneau factoriel, alors est un anneau factoriel.  
Si est un anneau commutatif alors ( est principal ssi est un corps)  
**Critère d’Eisenstein.** Soit   
S’il existe un facteur irréductible de valuation dans ), et tel que divise tous les sauf qu’il ne divise pas, alors est irréductible dans .   
Si de plus est primitif, alors irréductible dans (Gauss).  
Exemple : est irréductible dans et dans .  
Si premier, est irréductible dans . (l’astuce typique est Eisenstein sur )  
 est réductible dans , irréductible dans et dans .  
**Compléments polynômes.**  
**Algorithme de Schubert, 1780.** Il existe un algorithme de factorisation dans . Montre que la question est-il irréductible ? est décidable. En pratique peu utilisé, sauf dans un corps fini .  
**Th. Berkelamp, 1967.**  TODO  
**I.2.5. Localisation des racines d’un polynôme**Soit unitaire et alors admet ses racines (comptées avec multiplicité) dans le disque fermé . Autrement dit toute racine de est de module inférieur à . Ainsi en dehors pour , n’est jamais nul.  
Si non constant alors a les mêmes racines que , et n’a que des racines simples dans ou .  
Pour un polynôme sans racines multiples dans C, on pose , puis on ecrit les divisions euclidiennes successives , on pose et on continue jusqu’au dernier polynôme non nul qui est donc une constante .  
Une telle famille est appelée **suite de Sturm**.  
Dans une suite de Sturm, et n’ont pas de racine commune car ils sont premiers entre eux.  
Soit un polynôme de suite de Sturm , pour racine d’aucun , on note le nombre de changement de signe dans la suite . est donc défini sur tout R sauf en un nombre fini de points.  
**Th. Sturm, 1829.** Pour un polynôme sans racines multiples dans C, le nombre de racines réelles de dans un intervalle est egal a , lorsque sont bien définis.  
Soit unitaire et sans racines multiples et alors pour , le nombre de racines réelles distinctes de est   
Pour déterminer le nb de racines réelles distinctes de quelconque dans un intervalle il suffit d’appliquer le th. de Sturm au polynôme . On peut ensuite trouver des intervalles contenant exactement 1 racine en appliquant Sturm à nouveau sur des sous-intervalles de . La multiplicité des racines peut se calculer en appliquant le théorème a , etc.  
Pour le corollaire il peut être plus pratique de calculer . Pour assez grand, les signes des sont donnes par leur termes dominants.  
Le nombre de racines réelles distinctes d’un polynôme est donc aussi égal a .  
**Polynômes orthogonaux pour un produit scalaire à poids.**   
Motivations : Permet de simplifier l’intégration numérique via la méthode des quadratures de Gauss.  
Pour un intervalle de d’intérieur non vide, **un poids de produit scalaire sur**  correspond à une application continue strictement positive, telle que est intégrable sur .   
Pour un poids de produit scalaire sur un intervalle ,   
**Le produit scalaire de poids sur**  est   
 est un espace de Hilbert pour ce produit scalaire.  
L’ensemble des polynômes réels est en isomorphe aux fonctions polynômes réelles définies sur car d’intérieur non vide, qui forment un sous espace de .  
Donc en identifiant polynôme et fonction polynôme, on considère que est un sev de   
La famille est une famille libre du préhilbertien   
On peut donc utiliser Gram-Schmidt, en une famille   
Donc et   
 avec . On pose , pour la rendre unitaire  
 est **la famille orthonormalisée**.  
Donc est une famille orthogonale de , et pour tout ,, est unitaire.  
   
   
 de plus   
**Formule de Christoffel-Darboux.** , est le quotient des coefficients dominants de et   
Pour est admet exactement racines distinctes dans donc scindé simple sur .  
Pour entre deux racines de , il y a exactement une racine de .  
Pour et tel que , le nombre de racines de supérieures à est égal au nombre de changements de signes dans la suite finie   
Si est , et alors est un endomorphisme auto-adjoint de , on peut alors construire une nouvelle famille orthonormale telle que vecteur propre de et ne diffère de que d’un signe, et on obtient   
puis la **formule de Rodrigues**   
Exemples :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Polynômes |  |  | Relation récurrente | Equa diff |
| **Legendre** |  |  |  |  |
| **Laguerre** |  |  |  |  |
| **Tchebytchev** |  |  |  |  |
| **Hermite** |  |  |  |  |

**Schéma d’intégration numérique : quadrature de Gauss.  
Newton-Cotes** : avec constantes bien choisies  
La quadrature de Gauss vise à améliorer Newton-cotes.  
On note les racines distinctes de .  
Les sont formes linéaires indépendantes sur donc forment une base du dual   
Donc   
L’idée de la quadrature de Gauss est de considérer comme approximant l’intégrale   
La dernière propriété est vraie pour une famille plus grande de polynômes  
   
Coefficients explicites :   
Erreur de la quadrature de Gauss. Pour de classe alors où le coefficient dominant de   
Pour les polynômes de Tchebychev on trouve par exemple  
Pour de classe alors

**II. Polynômes à plusieurs indéterminées  
II.1. Algèbre**Soit un anneau, les anneaux et sont canoniquement isomorphes.  
On les identifie donc et on note , par récurrence   
Un élément de s’écrit sous la forme d’une somme finie : Pour on note le degré du polynôme , c’est le **degré partiel en de P**.  
**Un monôme de**  est un terme de la forme avec .  
**Le degré total d’un monôme**  est   
**Le degré total d’un polynôme**  est le maximum des degrés totaux des monômes qui apparaissent dans l’écriture de .  
On peut également définir **l’anneau des polynômes a indéterminées**   
L’anneau des polynômes a indéterminées sur un anneau factoriel, est un anneau factoriel.  
L’anneau des polynômes a indéterminées sur un anneau noethérien, est un anneau noethérien.  
L’anneau des polynômes a indéterminées sur un anneau factoriel, est un anneau factoriel.  
Même si est un corps, L’anneau des polynômes a indéterminées n’est jamais noethérien.  
Donc peut-être un exemple d’anneau factoriel non noethérien.  
 est un anneau intègre, noethérien mais pas factoriel.  
Une **fonction polynôme** **a n indéterminées** sur un corps est une fonction obtenue en évaluant un polynôme de c’est une fonction de la forme avec et .   
L’application est un morphisme de -algèbres.  
Par abus d’écriture on écrira si , .  
Un point etant fixé, le morphisme est le **morphisme d’évaluation au point fixé** . Le morphisme d’évaluation en un point fixé, est un morphisme de -algebres.  
Si est un corps infini, est un morphisme injectif. **II.2. Formules d’Euler et de Taylor** Soit un corps  
Un polynôme est **homogène de degré**  ssi tous ses monômes sont de degré .  
Dans ce cas dans mais réciproque fausse dans un corps fini par exemple : vérifie la propriété pour mais n’est pas homogène.Dans un corps infini, un polynôme est **homogène de degré**  ssi dans on a .  
La **composante homogène de degré**  d’un est la somme des termes de degré total dans l’ecriture de , soit . Elle est homogène de degré d.  
Un polynôme est donc la somme de ses composantes homogenes   
Un polynôme non nul à indeterminees sur un corps est homogène de degré ssi la seule composante homogene non nulle de est de degré .  
**Th. d’Euler :** Un polynôme a indeterminees homogène de degré verifie   
**Formule de Taylor :** Sur un corps de caractéristique nulle, un polynôme a indéterminées vérifie avec   
En caractéristique premier, cette formule n’est pas valable sans précautions.  
On a dans un corps de caractéristique . **III. Polynômes symétriques**Sur un anneau commutatif , le **-ième polynôme symétrique élémentaire a indéterminées** avec est le polynome   
On a pour cas extrêmes : et   
Dans on a :   
On definit , c’est une action de sur   
**Un polynôme symétrique a indéterminées de**  est un polynôme tel que , autrement dit c’est un polynôme invariant par permutation des variables (sous l’action de ).  
autrement dit   
Les polynômes symétriques élémentaires sont des polynômes symétriques.  
Le -ieme polynôme symétrique élémentaire est homogène de degré .  
Tout polynôme à une variable est symétrique.  
Le degré partiel d’un polynôme symétrique, est indépendant de la variable choisie, donc défini tel quel.  
Pour sous-groupe de , l’ensemble des polynômes fixes par l’action de , est une -sous- algèbre de , appelée **sous-algèbre de invariante par** .  
Si est une partie génératrice de ,   
L’ensemble des polynômes symétriques peut donc se noter  **III.1. Relations entre coefficients et racines**Pour un polynôme scindé sur un corps , on a :  
  **III.2. Théorème de structure**Sur un anneau commutatif, le **poids d’un monôme**  est .  
Le **poids d’un polynôme** est le maximum des poids des monômes intervenant dans l’écriture de .  
Le poids du -ieme polynôme symétrique élémentaire est   
**Th. de structure des polynômes symétriques.** Sur un anneau commutatif , pour un polynôme symétrique , tel que . De plus   
**Independence des polynômes symétriques élémentaires.** Les polynômes symétriques élémentaires sont algébriquement indépendants, c’est-à-dire il n’existe pas tel que . Donc dans le théorème précèdent est unique.  
 est une -algèbre de polynômes à variables isomorphe à ?   
Pour un polynôme unitaire sur un anneau commutatif , scindé dans un sur-anneau , alors les polynômes symétriques élémentaires de ses racines sont dans , par relations coeffs/racines. Donc pour tout symétrique, . (Par th de structure).  
En particulier , pour .  
En particulier pour on peut construire dans un polynôme dont les racines sont exactement les sommes de racines distinctes de scindé dans un sur-anneau . **III.3. Sommes de Newton**On appelle **-ieme somme de Newton a variables**, le polynôme   
La -eme somme de Newton à variables est un polynôme symétrique homogène de degré .  
**Th. Newton.** Pour ,   
Pour ,   
Cela permet de calculer les en fonction des progressivement. Le théorème de structure n’est pas pratique à appliquer pour les , on préfère donc le théorème de Newton pour ça.  
Dans un corps ou est inversible, on peut utiliser les premieres formules de Newton pour exprimer comme polynôme en fonction des .  
Dans un corps ou est inversible (par ex caractéristique 0), tout polynôme s’exprime de façon unique comme un polynôme en . Dans ce cas on a .  
On pose , on pose   
alors , collecter le coeff de donne telle que .  
Application : nilpotente ssi . **IV. Elimination**: Comment résoudre equations polynomiales à inconnues ?  
Spécialité (finir plus tard si intérêt)  
On s’intéresse au cas ,  **IV.1. Résultant de deux polynômes** Soit corps commutatif,   
**Le résultant de 2 polynômes tels que** est   
C’est un **déterminant de Sylvester**. Il est d’ordre .  
Le pgcd de deux polynômes de est de degré ssi leur résultant est nul.  
Sur un corps algebriquement clos, deux polynômes de ont une racine commune ssi   
Pour 2 polynômes scindés sur un corps alors   
Dans , pour 3 polynomes on a  **IV.2. Applications algébriques du résultant   
IV.2.1. Racines multiples des polynômes  
IV.2.2. Nombres algébriques  
IV.2.3. Transformation des équations algébriques  
IV.2.4. Application arithmétique  
V. Fractions rationnelles  
V.1. Corps des fractions rationnelles  
Le corps des fractions rationnelles sur un corps K** est l’ensemble   
On a donc , est un corps commutatif.  
On peut identifier a son plongement via l’injection .  
Tout fraction rationnelle F sur un corps K, admet un unique représentant avec et unitaire. C’est le **représentant irréductible de la fraction F.**Une **racine = zéro de multiplicité d’une fraction rationnelle**  avec , est une racine de multiplicite de son **numérateur** .  
Un **pôle de multiplicité d’une fraction rationnelle**  avec , est une racine de multiplicite de son **dénominateur** .  
**L’ensemble de définition d’une fraction rationnelle**  avec est l’ensemble égal au corps privé des pôles de la fraction.  
Une **fonction rationnelle** sur un corps est une fonction obtenue en évaluant une fraction rationnelle de c’est une fonction de la forme avec et .   
Par abus d’écriture on écrira simplement si , .  
Sur un corps infini, deux fonctions rationnelles qui coïncident sur l’intersection de leur ensemble de définition, correspondent à la même fraction rationnelle. (Injectivité).  
On appelle **degré d’une fraction rationnelle**  le nombre , ce nombre est indépendant du représentant choisi.   
Pour 2 fractions rationnelles on a et si , alors .  
Pour toute fraction rationnelle sur un corps, il existe un unique polynome tel que . On appelle E, la **partie entière de la fraction rationnelle F**, et  **V.2. Décomposition en éléments simples  
V.2.1. Cas général**  
Soit l’ensemble des polynômes de irréductibles et unitaires sur un corps   
 est un espace vectoriel dont est un base  
 est un espace vectoriel dont est une base  
 presque tous nuls  
**Forme utile.** Soit , avec , unitaire. Alors on peut décomposer en facteurs irréductibles avec , .  
Alors et   
 s’avère être la partie entière de .  
On appelle  **la** **partie polaire de associée a , la partie polaire de associée a , et la partie polaire de** . **V.2.2. Décomposition en éléments simples dans un corps algébriquement clos** est un espace vectoriel dont est une base  
 , avec presque tous nuls.  
**Forme utile.** Soit , avec , unitaire. Alors on peut décomposer en facteurs irréductibles avec , .  
Alors et   
On cherche ensuite à déterminer les coefficients .  
Pour un pôle simple on a et en écrivant , on a aussi   
Pour un pôle multiple d’ordre , écrivant , on a   
En posant , et en faisant la division selon les puissances croissantes de par à l’ordre , on obtient avec . On obtient donc la partie polaire associée à .  
Exemple on pose , on fait

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  | On s’arrête à l’ordre |
|  |  |
|  |  |

Donc   
Donc   
En pratique on utilise la formule pour les pôles simples, mais pas pour les pôles multiples.  
On préfère utilise des méthodes astucieuses exploitant les propriétés de , comme la parité, les limites, la conjugaison, partie réelle/imaginaire, etc…  
Pour une fraction rationnelle complexe sans pôle dans , est de rayon 1.  
Pour est de rayon de convergence 1. Et   
Pour une fraction rationnelle complexe dont n’est pas pôle, alors est d.s.e. avec pour rayon de convergence le module minimum des pôles de , càd de disque le plus grand ne contenant aucun pôle, de plus le développement est combinaison linéaire des variant dans .  
Une fraction rationnelle complexe est holomorphe au point de la sphère de Riemann ssi son degré est ssi .  
Une fraction rationnelle complexe est méromorphe sur la sphère de Riemann.  
**V.2.3. Décomposition en éléments simples dans**Etant donne la forme d’un polynôme irréductible réel, on trouve deux types d’éléments simples   
Elément simple de première espèce   
Elément simple de seconde espèce   
On peut passer par la décomposition dans , et regrouper les pôles conjugués, mais en général on évite et on essaye d’appliquer les méthodes astucieuses. **V.3. Applications de la décomposition en éléments simples  
V.3.1. Application en algèbre linéaire**Pour tels que on peut écrire la décomposition en éléments simples pour trouver les coefficients de Bézout dans la formule .  
Si alors  **V.3.2. Theoreme de Gauss-Lucas**Pour un polynôme complexe de degré , les racines du polynôme dérivé sont dans l’enveloppe convexe des racines du polynôme.  
Si le polynôme est scindé dans , les racines complexes du polynôme dérivé sont donc en particulier toutes réelles, est scindé dans . On sait même qu’elles se trouvent entre les racines de , par Rolle. **V.3.3. Application aux dénombrements**   
   
La décomposition en éléments simples de fait apparaitre des éléments simples de la forme ou est une racine de l’unite d’ordre l’un des , est un entier, est un nombre complexe. Chacun de ces éléments simples peut être développé en série entière de rayon 1. peut donc ainsi s’exprimer comme série entière, ce qui donne tous les . **V.4. Déterminants de Hankel**Si est une série entière à coeffs dans , de rayon , on note la somme pour . Alors fonction rationnelle ssi   
Ces déterminants sont appelés **déterminants de Hankel**.

**Complément 1. Application géométrique du résultant  
1.1. Cas affine  
1.2. Cas projectif  
Recherche pratique des points d’intersection.  
Complément 2. Sous-variétés algébriques de et ideaux de   
Complément 3. Polynômes cyclotomiques**Soit l’ensemble des nombres complexes de module . C’est un groupe pour la multiplication. **L’indicatrice d’Euler** est l’application   
**Une racine nième de l’unité** est un complexe tel que .  
Pour les racines -iemes de l’unité sont exactement les   
Les racines -iemes de l’unité forment un groupe cyclique d’ordre : sous-groupe de   
Une **racine primitive -ieme de l’unité** est une racine nième de l’unité d’ordre dans , autrement dit c’est un avec . Il y en a donc distinctes.  
**Formule d’Euler.**   
On note le groupe des racines primitives -ieme de l’unité   
On a et les sont disjoints 2 a 2. Les forment une partition de   
Le **-ieme polynome cyclotomique est**   
Les polynômes cyclotomiques sont unitaires.  
   
**Formule d’Euler cyclotomique**. On a   
Pour premier   
Pour premier   
Les polynômes cyclotomiques sont dans .  
Pour , est un polynôme réciproque, càd que dans la suite de ses coefficients, le premier est égal au dernier, le deuxième à l'avant dernier, etc… càd .  
Les polynômes cyclotomiques sont irréductibles dans .  
Soit , on a , avec , donc   
 est une extension algébrique simple de appelée **-ième corps cyclotomique**.  
Donc et ce sont des corps.  
En fait est le polynôme minimal sur de toute racine primitive de .   
Donc   
   
 est un corps de rupture de sur , car .  
 est en fait un corps de décomposition de sur , donc est une extension galoisienne.  
Si , le ième corps cyclotomique est un sous-corps du ième. **Complément 4. Polynômes invariants sous le groupe alterné  
4.1. Cas ou 2 est inversible dans A  
4.2. Cas général  
Complément 5. Groupe des K automorphismes de**

**Résumé des propriétés de structure.** TODO  
Pour corps, anneau intègre, principal, euclidien, noethérien, factoriel, de Bézout, à pgcd.  
Pour corps, anneau intègre, noethérien, pas principal donc pas euclidien.  
Dans un anneau commutatif , anneau principal ssi corps.  
 est un anneau euclidien, donc principal.  
 non principal, donc non euclidien  
 est un anneau intègre, noethérien mais pas factoriel.  
Si anneau commutatif noethérien, alors noethérien.  
Si anneau factoriel, anneau factoriel.  
Si anneau factoriel, alors anneau factoriel.  
Même si est un corps, n’est jamais noethérien.

**Exercices.**Sur , avec ,   
Un corps fini n’est jamais algébriquement clos car n’a pas de racine sur .  
Pour , n’a que des racines simples dans .  
Pour , n’a que des racines simples dans .  
Un polynôme de irréductible sur , n’a que des racines simples dans .  
Une racine d’ordre a la moitié du degré d’un polynôme de , est rationnelle .  
 admet une racine d’ordre , alors admet une racine dans .  
   
Pour distincts dans un corps, , alors , , avec fixés. De plus pour on a alors   
 scindé sur , de degré , alors ssi .  
**Principe du maximum.** Un polynôme complexe non constant vérifie . Plus généralement compact   
Pour distincts, est irréductible dans   
Pour distincts, est irréductible dans   
Pour distincts, est irréductible dans   
**Polynômes de Tchebychev.**   
On a , donc le coeff dominant est   
Un polynôme réel unitaire de degré verifie   
Pour non constante, soit , soit avec avec non constant.  
Pour est défini ssi n’est pas une constante qui est un pôle de .  
Pour est un polynôme ssi 1), 2), 3), ou 4)  
 est constant.  
 est constant et pas un pôle de .  
 et sont des polynômes.  
 avec , et avec   
La transformée de Fourier discrète d’un polynôme est , en posant , alors formule d’inversion :   
Un polynôme tel que et , est divisible par .  
Pour tel que , alors et   
Une fraction rationnelle complexe dont l’image de tout naturel non pole est dans , est dans   
Une fraction rationnelle complexe dont l’image de tout naturel non pole est dans , est dans   
L’ensemble des réels algébriques sur est dénombrable. Donc il existe des réels transcendants.