**Chapitre 1. Ensembles  
I. Rappels et quelques compléments** ssi ssi   
ssi ssi et   
    
   
   
 On note l’ensemble des parties d’un ensemble .   
L’ensemble des parties d’un ensemble a éléments, possède éléments.

**Relations et fonctions**  
Une **relation binaire** d’un ensemble vers un ensemble , correspond à une partie de .  
Une **relation binaire sur un ensemble** correspond a une relation binaire de vers .  
Le **domaine d’une relation binaire**  de vers est l’ensemble   
**L’image d’une relation binaire**  de vers est l’ensemble   
Si , relation binaire de vers ,   
Une **fonction partielle** d’un ensemble vers un ensemble correspond a une relation de vers telle que .  
Dans ce cas on peut noter   
Une **fonction (totale) = application** d’un ensemble vers un ensemble correspond à une fonction de vers de domaine , càd une relation binaire de vers telle que   
On note   
On note ou ou l’ensemble des fonctions d’un ensemble vers un ensemble . **La composée d’une fonction par une fonction**  est la fonction définie par   
La composition de fonctions est associative

**Familles et produits**  
Une **famille**  correspond à une application   
**L’union d’une famille** correspond à   
**L’intersection d’une famille** correspond à   
**Le produit d’une famille** correspond à   
**Images directes et réciproques.**Soit

**Fonctions injectives, surjectives, bijectives**

**Fonctions injectives.**  
Une **fonction est une injection/est injective** ssi tout image admet un unique antécédent  
 injective ssi   
 injective ssi   
 injective ssi   
La composée d’injections est injective.   
Pour une composée injective, la fonction intérieure est injective.   
Une fonction de domaine non vide, est injective ssi elle admet un inverse gauche (extérieur).  
Symboliquement   
Dans ce cas l’inverse gauche est toujours surjectif, (puisque est bijective)  
**Fonctions surjectives.**  
Une **fonction est une surjection/est surjective** ssi tout élément d’arrivée est image.  
 surjective ssi   
 surjective ssi   
 surjective ssi   
La composée de surjections est surjective.   
Pour une composée surjective, la fonction extérieure est surjective.  
Une fonction est surjective ssi elle admet un inverse droit (intérieur).  
Symboliquement . (attention requiert l’axiome du choix)  
Dans ce cas l’inverse droit est toujours injectif, (puisque est bijective)  
**Fonctions inversibles.**  
Un **inverse d’une fonction** est une fonction inverse à droite et à gauche de , càd telle que et .  
Une **fonction inversible** est une fonction qui admet un inverse.   
L’inverse s’il existe est unique, càd une fonction inversible n’admet qu’un unique inverse noté .  
Une fonction qui admet un inverse gauche et qui admet un inverse droit, est inversible, et alors ces inverses droits et gauches sont égaux et ne sont autres que l’unique inverse .  
Une fonction peut donc admettre, soit plusieurs inverses gauches et 0 inverse droit, soit plusieurs inverses droits et 0 inverse gauche, soit un unique inverse gauche et droit (le cas inversible), soit 0 inverse gauche et 0 inverse droit.  
L’inverse d’une fonction inversible , est inversible d’inverse . Autrement dit .  
**Fonctions bijectives.**  
Une **fonction est une bijection/est bijective** ssi injective et surjective  
 bijective ssi   
 bijective ssi elle est inversible. (ne requiert pas l’axiome du choix).  
L’inverse d’une fonction bijective est aussi appelé **la** **bijection réciproque de** .  
L’inverse d’une fonction bijective est donc bijective d’inverse .  
La composée de bijections est bijective.   
Dans ce cas l’inverse de la composée est composée des inverses dans l’autre sens.  
   
Pour une composée bijective, l’extérieur est surjectif, et l’intérieur injectif.  
Pour une fonction bijective, l’image directe de la réciproque d’une partie d’arrivée est l’image réciproque de cette partie, donc pas de risque de confusion de notation.

**Propriétés remarquables des relations binaires**Soit une relation binaire sur une classe   
**Deux éléments sont en relation (pour )** ssi   
Une relation est **réflexive** si tout élément est en relation avec lui-même :   
Une relation est **irréflexive** si aucun élément n’est en relation avec lui-même:   
Une relation est **transitive** si la relation s’hérite linéairement : et   
Une relation est **symétrique** si la relation ne dépend pas de l’ordre:   
Une relation est **antisymétrique** si la relation dans les deux sens implique l’égalité : et   
  
**Relations d’équivalence.**  
Une **relation d’équivalence** sur est une relation binaire sur , réflexive, transitive et symétrique.

La **classe d’équivalence** d’un élément est la classe des éléments qui lui sont en relation.  
Pour , on a   
**Le quotient de par une relation d’équivalence sur**  correspond à l’ensemble des classes d’équivalences.   
**Une partition d’un ensemble** , est un ensemble de parties disjointes, non vides, d’union .  
Un quotient de (par une relation d’équivalence) est une partition de .  
**Une relation d’équivalence sur est compatible avec une l.c.i. sur**  ssi   
**La loi quotient d’une l.c.i. sur compatible avec une relation d’équivalence sur** , est la loi . Elle est bien définie grâce à la compatibilité.

**Relations d’ordre**

Une **relation d’ordre** sur est une relation binaire sur , réflexive, transitive et antisymétrique.  
Deux éléments sont **comparables** pour la relation, s’il y a au moins une relation entre les deux : ou   
Une relation est **totale** si tout couple est comparable : ou   
L’ordre naturel sur les nombres réels est une relation d’ordre total.  
Si est une relation d’ordre sur , on définit en général   
**Bornes et éléments maximaux.**Soit un ordre partiel sur une classe , et une partie de .  
Pour , **majorant** de dans ssi   
Un **majorant** est un élément supérieur ou égal à toute la partie.Un **minorant** est un élément inférieur ou égal à toute la partie.  
Un **élément maximal**, est un élément de la partie qui n’admet pas d’élément strictement supérieur.   
Un **élément minimal**, est un élément de la partie qui n’admet pas d’élément strictement inférieur.  
Un **élément maximum**, est un majorant de la partie qui appartient à la partie.  
Un **élément minimum**, est un minorant de la partie qui appartient à la partie.  
Un **supremum** est un minimum de l’ensemble des majorants de la partie.  
Un **infimum** est un maximum de l’ensemble des minorants de la partie.  
maximum maximal  
minimum minimal  
Pour un ordre total, maximum maximal, minimum minimal.  
Le maximum/minimum/supremum/infimum s’il existe est unique.  
S’il existe, le maximum est unique et est aussi l’unique maximal, et l’unique supremum de la partie.  
S’il existe, le minimum est unique et est aussi l’unique minimal, et l’unique infimum de la partie.  
A priori, quand l’ordre n’est pas total, il peut y avoir plusieurs maximaux / resp. minimaux. Si c’est le cas il n’y pas de maximum/ resp. minimum.  
Si le maximum /resp. minimum/resp. supremum/resp. infimum existe on le note  
 resp. resp. resp.

**Cardinaux  
Un ensemble domine un ensemble**  ssi il existe une injection de vers .  
La relation de dominance est réflexive et transitive.  
**Théorème de comparabilité.** Pour deux ensembles quelconques, l’un domine l’autre. Autrement dit la relation de dominance est totale.  
**Un ensemble est équipotent à un ensemble**  ssi il existe une bijection de vers .  
**Th de Schröder-Bernstein.** Si un ensemble domine, et est dominé par un autre ensemble, alors ils sont équipotents.  
La relation d’équipotente est une relation d’équivalence sur les ensembles.  
Le **cardinal** d’un ensemble, correspond à sa classe d’équipotente.  
La relation de dominance, correspond à une relation d’ordre sur les cardinaux. Le théorème de Schröder-Bernstein en exprime sa propriété de symétrie.  
Donc on peut écrire que domine ssi .

**Ensembles dénombrables**  
Un ensemble **fini** est un ensemble équipotent a pour un certain .  
Dans ce cas son cardinal correspond à .  
Un ensemble **infini dénombrable** est un ensemble équipotent à .  
Un ensemble **dénombrable** est un ensemble fini ou infini dénombrable.  
L’ensemble est infini dénombrable.  
Le produit fini d’ensembles infinis dénombrables est infini dénombrable.  
Tout sous-ensemble d’un ensemble dénombrable est dénombrable.  
Il existe une surjection d’un ensemble infini dénombrable, vers un autre ensemble, ssi l’autre ensemble est également infini dénombrable.  
Une réunion dénombrable d’ensembles dénombrables est dénombrable.  
Pour tout ensemble , domine strictement , cad   
Par exemple n’est pas dénombrable.

**Axiomes, Cardinaux. Théorie axiomatique – Zermelo-Fraenkel (ZF)  
Axiome d’extensionalité.** Deux ensembles contenant les mêmes éléments sont égaux.  
 **Axiome de l’ensemble vide.** Il existe un ensemble qui ne contient aucun élément.   
 Dans ce cas est unique  
**Axiome de la paire.** Pour tous ensembles il existe un ensemble contenant et rien d’autre  
 Dans ce cas est unique et on le note   
**Axiome de la réunion.** Pour tout ensemble , il existe un ensemble dont les éléments, sont les éléments des éléments de .  
 Dans ce cas est unique et on note   
**Axiome de l’ensemble des parties.** Pour tout ensemble , il existe un ensemble dont les elements dont les ensembles contenus dans   
 Dans ce cas est unique et on note   
**Axiome de l’infini.** Il existe un ensemble infini.  
  **Axiome de séparation.** Si est un prédicat utilisant les symboles , on a :  
 Dans ce cas est unique et on le note   
**Axiome de substitution.** Soit des ensembles, Soit un prédicat fonctionnel de cad tel que . Alors on a  
 Dans ce cas est unique et on le note   
On peut pas écrire cette forme avec l’axiome de séparation a priori, car n’est pas défini. A posteriori c’est possible. On a avec   
**Axiome de fondation.** Tout ensemble non vide admet un élément tel que   
**Axiome de choix.** Formulations équivalentes :  
   
**Conséquences**Il n’y a qu’un seul ensemble vide  
Le singleton existe et est unique. Pour , existe et est unique.  
**Paradoxe de Russel**: ne peut pas être un ensemble.On peut définir en utilisant l’axiome de l’infini en posant