**Propriétés axiomatiques de .**  
Soit  
   
   
On pose Pour tout ,   
Pour tout ,   
Pour tout , on note .  
Pour tout ,   
Pour tout , on note .  
Pour tout , .  
Pour tout , on note .  
Pour tout ,   
Pour tout ,   
Pour tout ,   
Pour tout ,   
Pour tout ,   
Pour tout ,   
Pour tout ,   
Pour tout ,   
Pour tout ,   
Pour tout ,   
Pour tout ,   
Pour tout , et   
Pour tout , et   
Pour tout , ou   
Pour tout ,   
Pour tout ,   
On note et .  
On pose ,   
On pose ,   
Toute partie non vide majorée admet un supremum dans .

**Propriétés de régularité** (découlent des axiomes)Pour tous : ssi   
 ssi   
Sous , ssi   
Sous , ssi   
 ssi   
 ssi   
Sous , ssi   
Sous , ssi   
Sous , ssi   
Sous , ssi   
 ssi   
 ssi   
Sous , ssi   
Sous , ssi   
Sous , ssi   
Sous , ssi

**Propriétés basiques.**Pour tout ,   
**Preuve**. . Donc

Pour tout , ou ou (trichotomie)  
**Preuve**. Supposons le résultat faux. Alors :  
 ou (non ) et et ou (non )  
Donc (non ) et (non ). Mais ce n’est pas possible car est total.

Pour tout ,   
**Preuve**.

Pour tout ,   
**Preuve**.

Pour tout , ou (intégrité)  
**Preuve**.

Pour tout , et et (une somme nulle de termes positifs a tous ses termes nuls)  
**Preuve**.

**Propriétés de .**Il existe un sous-corps de isomorphe a . Donc on peut supposer   
 est dense dans  :

**Valeur absolue.** Pour ,   
   
 sont de même signe ssi   
 sont de signe contraire ssi   
Pour Pour   
Pour   
Pour alors

**Partie entière.** Pour ,

**Infinis.**On introduit deux nouveaux symboles et on définit   
On étend les opérations usuelles.  
Pour   
Pour   
Pour ,   
Pour ,   
, ,

**Caractérisation des bornes sup/inf dans .** Pour une partie et   
 admet un sup dans non vide majoré  
 admet un inf dans non vide minoré  
 admet un sup dans et   
 admet un inf dans et

**Bornes sup/inf dans .** Soit une partie .  
Si est vide on pose . Si est non majoré on pose .  
Une partie admet toujours un sup dans . On a alors :  
 non vide et non majoré.  
 non vide majoré.  
.  
Si est vide on pose . Si est non minoré on pose .  
Une partie admet toujours un inf dans . On a alors :  
.  
 non vide et minoré.  
 non vide et non minoré.

Autres propriétés fondamentales de .

Toute partie non vide minorée admet un infimum dans .  
**Preuve**. Soit une partie non vide minorée. Alors est une partie non vide majorée de , donc elle admet un supremum . Alors est un infimum de .

est archimédien :   
**Preuve**.

Toute suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) converge.   
**Preuve**. Soit une suite une suite réelle, croissante et majorée.  
On pose . est une partie non vide majorée de , donc admet un supremum .  
Montrons que converge vers .  
Soit . Par caractérisation du sup dans , il existe . Autrement dit, il existe , tel que . De plus, comme est croissante, .  
Donc . Autrement dit

Toute suite de Cauchy dans converge dans .  
**Preuve**.  
Soit une suite de Cauchy dans . On note et   
Montrons que est bornée. TODO  
On montre aisément que est croissante et est décroissante.  
Donc est croissante majorée donc converge vers . est décroissante minorée donc converge vers . Comme est de Cauchy, on montre que :  
TODO

Etant données deux suites sur dont l’une est croissante, l’autre est décroissante, et dont la différence tend vers , alors ces deux suites convergent dans vers la même limite.  
**Preuve**.

**Théorème de convergence monotone succinct**:  
Toute suite croissante (resp. décroissante) tend vers le supremum (resp. l’infimum) dans de son image.