**Partie I Topologie**

**Chapitre 1. Espaces topologiques  
I.1. Définitions et exemples**  
Une **topologie** sur un ensemble E est une partie T de P(E) qui contient et E, stable par intersection finie et par union quelconque. (E, T) est un **espace topologique**  
Un **ouvert** d’une topologie T est un élément de T  
topologie grossière = , topologie discrète = P(E)  
Une partie est **fermée** si son complémentaire est ouvert.  
Une union quelconque d’ouverts est ouverte, une intersection finie d’ouverts est ouverte.  
Une intersection quelconque de fermés est fermée, une union finie de fermé est fermé.  
Soit et T une topologie sur E. La **topologie induite** sur A par T est   
Un ouvert induit est donc toujours de la forme un ouvert intersecté a la partie.  
Un fermé induit est donc toujours de la forme un fermé intersecté a la partie.   
Une partie d’un espace topologique est **discrète** si sa topologie induite est discrète   
T’ est une **topologie plus fine** que T sur E si elle contient T : . ouvert de T est ouvert de T’  
Une fonction a valeurs dans un espace topologique (E’,T’) définit un espace topologique sur son domaine E, **la topologie réciproque** par f :   
L’intersection d’espaces topologiques est un espace topologique.  
La **topologie engendrée** par un ensemble de parties A d’un espace est la topologie la moins fine sur E qui contient A / l’intersection de toutes celles qui contiennent A.  
**I.3. Un exemple fondamental : la topologie naturelle d’un espace métrique**  
Une **distance** sur un ensemble E est une application de telle que, la distance entre deux points est nulle ssi égalité, vérifie la symétrie , et l’inégalité triangulaire . Il découle de la déf la 2ième inégalité triangulaire   
Un **espace métrique** est un ensemble muni d’une distance sur cet ensemble.  
R munit de la valeur absolue induit une distance   
Dans un espace métrique, la **boule ouverte** de centre a et de rayon r est l’ensemble des points dont la distance au centre est inférieure strictement au rayon. La **boule fermée**  c’est pareil avec une inégalité large. La **sphère**  est l’ensemble des points dont la distance au centre est égale au rayon. Par exemple, dans R les boules ouvertes sont de la forme .  
Les boules induites s’obtiennent en intersectant avec l’espace induit.  
La **topologie naturelle d’un espace métrique/distance**, est la topologie engendrée par l’ensemble des boules ouvertes.  
On peut ensuite dire qu’un ensemble est ouvert ssi en tous ses points on peut trouver une boule incluse dans l’ensemble. ouvert   
La topologie associée à la distance discrète sur un ensemble est la topologie discrète sur cet ensemble.  
La topologie naturelle associée à la distance induite par la valeur absolue sur est la topologie usuelle sur . **I.4. Intérieur, adhérence, frontière  
L’intérieur** d’une partie d’un espace topologique est le plus grand(union) ouvert contenu dans la partie.  
**L’adhérence** d’une partie d’un espace topologique est le plus petit(inter) fermé contenu dans la partie.  
**La frontière** est le complémentaire de l’intérieur dans l’adhérence  
Une partie est ouverte ssi elle coïncide avec son intérieur.  
Une partie est fermée ssi elle coïncide avec son adhérence.   
Le complémentaire de l’adhérence est l’intérieur du complémentaire.  
Le complémentaire de l’intérieur est l’adhérence du complémentaire.  
La frontière du complémentaire coïncide avec la frontière.  
Un point est intérieur à une partie ssi il est dans un ouvert inclus dans la partie.  
Un point est adhérent à une partie ssi tout ouvert contenant le point rencontre la partie.  
Un point est sur la frontière d’une partie ssi tout ouvert contenant le point rencontre la partie et son complémentaire.  
Pour une famille quelconque de parties d’un espace topologique on a :  
L’intérieur de l’intersection est dans l’intersection des intérieurs, avec égalité si famille finie  
L’union des intérieurs est dans l’intérieur de l’union.  
L’adhérence de l’intersection est dans l’intersection des adhérences.  
L’union des adhérences est dans l’adhérence de l’union, avec égalité si famille finie.  
Pour une sous-partie d’une partie à topologie induite d’un espace topologique :  
L’intérieur induit contient l’intérieur intersecté a la partie.  
L’adhérence intersectée a la partie égale l’adhérence induite.  
La frontière intersectée a la partie contient la frontière induite. **I.5. Voisinages**Dans un espace topologique une partie est un **voisinage** d’une autre partie si la première contient un ouvert qui contient la deuxième. On note l’ensemble des voisinages d’une partie A.  
Une partie est ouverte ssi elle est voisinage de tous ses points.  
Un point est intérieur à une partie ssi la partie est un voisinage du point.  
Un point est adhérent à une partie ssi tout voisinage du point rencontre la partie.  
Un point est sur la frontière d’une partie ssi tout voisinage du point rencontre la partie et son complémentaire.  
Un point d’un espace topologique est **point d’accumulation** d’une partie ssi tout voisinage du point rencontre la partie en un autre point ssi le point est adhérent à la partie privée du point.  
Un point d’une partie est un **point isolé** ssi il admet un voisinage dont l’intersection avec la partie est le point seul ssi le point n’est pas adhérent à la partie privée du point.  
Un point d’accumulation est quelconque, alors qu’un point isolé appartient toujours à sa partie.  
Les points d’accumulations et points isolés forment une partition de l’ensemble des points adhérents.  
Un voisinage induit d’une topologie induite est un voisinage intersecté.  
**I.6. Parties denses**Une partie est **dense** dans une autre partie si l’adhérence de cette première contient la deuxième partie.  
Si l’espace admet une base de topologie. Une partie est dense dans une autre ssi tout élément de base rencontrant l’autre rencontre l’une.  
Un sous-groupe de est soit discret de la forme , soit dense dans .  
Un sous-groupe fermé est donc soit discret, soit . **I.7. Espace séparés**Un espace topologique est **séparé** si deux points distincts admettent toujours deux voisinages distincts.  
Un espace discret est toujours séparé. Un espace grossier n’est jamais séparé.   
Tout espace métrique est séparé. **II. Continuité et limite  
II.1. Continuité globale et locale**Une fonction entre deux espaces topologiques est **continue** si l’image réciproque de tout ouvert est un ouvert ssi l’image réciproque de tout fermé est un fermé ssi l’image de l’adhérence de toute partie est incluse dans l’adhérence de l’image de la partie.   
Une fonction est **continue en un point** si tout voisinage de l’image du point contient l’image d’un voisinage du point ssi l’image réciproque de tout voisinage de l’image du point est un voisinage du point.  
Une fonction est continue ssi elle est continue en tout point.  
Une application est **ouverte** si l’image de tout ouvert est un ouvert ssi l’image d’un intérieur est l’intérieur de l’image.  
Une application est **fermée** si l’image de tout fermé est un fermé ssi l’adhérence de l’image est l’image de l’adhérence. **II.2. Opérations sur la continuité**La composée de deux fonctions continue est continue. Si continue en et g continue en alors la composée est continue en . L’injection canonique d’une partie d’un espace topologique est continue.  
La restriction d’une fonction continue est continue sur la topologie induite. Idem pour la corestriction.  
La somme et le produit de fonctions scalaires est continue.  
L’ensemble des fonctions continues scalaires est une algèbre. **II.3. Continuité et densité, prolongements des égalités et inégalités**Une fonction continue d’un espace topologique vers un topologique séparé, nulle/constante sur une partie dense est nulle/constante partout.Deux fonctions continues à valeurs dans un topologique séparé coïncidant sur une partie dense coïncident partout. **II.4. Homéomorphismes**Un **homéomorphisme** entre deux espaces topologiques est une bijection continue de réciproque continue. Deux espaces topologiques sont **homéomorphes** s’il existe un homéomorphisme entre les deux  
L’identité est un homéomorphisme ssi la topologie de départ est identique à celle d’arrivée.  
Une bijection est un homéomorphisme ssi elle est continue et ouverte ssi elle est continue et fermée.  
Dans R, les translations, les homothéties sont des homéomorphismes. Deux intervalles ouverts de R sont homéomorphes.  
Une propriété est une notion topologique si elle est conservée par homéomorphisme. Etre ouvert, fermé, voisinage d’un point, être séparé, être adhérence, intérieur, frontière sont des notions topologiques. **II.5. Limite d’une application en un point**Soit une fonction d’une partie d’un espace topologique dans un autre espace topologique. Soit un point adherent a la partie, et un point de l’espace topologique d’arrivee. On dit que la **fonction admet pour limite au point** ssi tout voisinage de la limite contient l’image d’un voisinage (épointé si convention anglaise) du point (induit(intersecté) sur la partie) ssi l’image réciproque de tout voisinage de la limite est un voisinage du point. Si la limite existe et est unique on note   
Soit une fonction d’une partie d’un espace métrique dans un autre espace métrique. Soit un point adherent a la partie, et un point de l’espace métrique d’arrivée.  
 admet pour limite en ssi   
Une limite d’une fonction appartient à l’adhérence de l’image.  
Si l’espace d’arrivée est séparé alors une limite si elle existe est unique.  
Une fonction d’un espace topologique vers un espace topologique séparé est continue en un point ssi sa limite en ce point est l’image de ce point.  
La limite se compose TODO.  
Prolongement par continuité TODO. **III. Construction d’espaces topologiques  
III.1. Espaces produits**  
On appelle **rectangle élémentaire topologique** d’un espace topologique produit, un produit (de même indexation) d’ouverts sur chaque espace, mais dont seul un nb fini d’entre eux n’est pas = a tout son espace. De façon équivalente c’est une intersection finie d’images réciproques d’ouverts d’espaces du produit par leur projection canonique.  
L’ensemble des rectangles élémentaires est une base engendrant la topologie de l’espace produit. Un ouvert de la topologie produit est donc une réunion quelconque de rectangles élémentaires.  
Une fonction d’un espace topologique à valeur dans un espace topologique produit est continue ssi chacune de ses projections l’est aussi.  
Une fonction définie sur un espace topologique produit n’est pas forcément continue ssi ses composantes le sont. Ex : en   
Le produit d’espaces séparés est séparé pour la topologie produit.  
Un espace topologique est séparé ssi la diagonale est fermée dans

**Chapitre 2.  
I. Espaces topologiques compacts  
I.2. Les compacts de**Le **diamètre d’une partie A d’un espace métrique** est . On note Une partie A d’un espace métrique est **bornée** ssi est majorée ssi son diamètre est fini.  
Les parties **compactes** de sont les parties fermées bornées.  
Les parties **compactes** de muni de la topologie produit usuelle sont les parties fermées bornées.  
Encore vrai sur les Rev de dimension fini, mais pas en dimension infinie (Riesz). **II. Compacité et continuité  
II.1. Propriétés des applications continues définies sur un compact**Tout application continue d’un espace compact vers un espace topologique séparé a pour image une partie compacte.  
Toute application continue d’un espace compact vers un espace topologique séparé est une application fermée.  
En général, l’image réciproque d’un compact n’est pas nécessairement un compact même pour une application continue. En général, un ensemble dont l’image par une fonction continue est compacte, n’est pas forcément un compact.  
Toute application continue et injective d’un espace compact vers un espace topologique séparé est un homéomorphisme de l’espace compact vers son image . **II.2. Applications : théorèmes classiques d’existence d’extrema**Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné de R vers R est bornée et atteint ses bornes.  
Une fonction est **coercive** ssi .  
Toute fonction continue et coercive de vers R, admet un minimum global.

**Chapitre 3.  
I. Espaces connexes  
I.1. Définitions, premières propriétés et exemples**Un espace topologique est **connexe** ssi son seul recouvrement en deux ouverts/fermés disjoints est ssi il n’admet pas de recouvrement constitué de deux ouverts/fermés disjoints non vides ssi les seules parties à la fois ouvertes et fermées de l’espace sont et .  
Une partie d’un espace topologique est une **partie connexe** ssi l’espace topologique qu’elle induit est connexe.  
Un espace topologique homéomorphe a un connexe est connexe. Ainsi, la connexité est une notion topologique.  
Méthode utile : Pour montrer une propriété en tout point d’un connexe il peut être utile de considérer l’ensemble des points vérifiant cette propriété et de montrer que c’est ouvert, fermé, non vide.  
Tout espace muni de la topologie grossière est connexe.  
Tout espace topologique discret est connexe ssi c’est un singleton. Les ensembles sont des parties non connexes de   
Toute partie d’un espace topologique contenue dans l’union de 2 ouverts disjoints, et rencontrant ces deux ouverts est non connexe.  
Toute partie d’un espace topologique qui contient une sous-partie connexe et dense dedans , alors est connexe. Donc tout espace topologique qui contient une partie dense connexe, est un espace connexe. L’adhérence d’une partie connexe est une partie connexe.  
L’union quelconque d’une famille de parties connexes d’intersection non vide, est une partie connexe.  
L’union quelconque d’une famille de parties connexes qui rencontrent toutes une même partie connexe, est une partie connexe.  
Pour une suite finie ou non de parties connexes telles que 2 parties consécutives se rencontrent, l’union forme une partie connexe.   
Les parties connexes de sont les intervalles.  
L’union de deux parties connexes disjointes n’est pas nécessairement connexe.  
L’intersection de deux parties connexes n’est pas nécessairement connexe.  
La frontière d’une partie connexe n’est pas nécessairement connexe.  
Une partie d’adhérence connexe n’est pas nécessairement connexe.  
Une partie d’intérieur connexe n’est pas nécessairement connexe. **I.2. Composantes connexes**Deux points d’un espace topologique sont **connectés** ssi ils appartiennent à une même partie connexe.  
La relation « être connecté » est une relation d’équivalence sur un espace topologique.  
Une **composante connexe d’un espace topologique** est une classe d’équivalence pour « être connecté »  
La composante connexe d’un point d’un espace topologique est la plus grande partie connexe de l’espace topologique qui contient le point.  
Les composantes connexes d’un espace topologique sont des parties fermées. **II. Connexité et continuité**L’image d’un espace topologique connexe par une application continue, est une partie connexe de l’espace topologique d’arrivée.  
**Théorème des valeurs intermédiaires.** Pour une fonction continue d’un intervalle de R vers R, tous les points situés entre deux points images, sont des points images. Autrement dit, l’image d’un intervalle par une fonction de continue est un intervalle.  
Un espace topologique est connexe ssi les seules applications continues de l’espace vers sont les constantes.  
L’espace produit quelconque d’espaces topologiques est connexe ssi chacun des espaces l’est.  
 est connexe, est connexe.   
Le graphe d’une application continue d’un espace connexe vers un espace topologique est une partie connexe de .  
**III. Connexité par arcs**Un **arc d’un espace topologique** est une application continue de vers l’espace topologique.  
L’image d’un arc d’un espace topologique est une partie connexe de cet espace.  
Les courbes paramétrées sont des parties connexes de .  
Les surfaces paramétrées, images d’un connexe de par une application continue, sont des connexes de .  
Un espace topologique est **connexe par arcs** ssi tout couple de points admet un arc qui les joint.  
Tout espace topologique connexe par arcs est connexe.  
L’espace R n’est pas homéomorphe a l’espace des que .  
Un cercle de n’est pas homéomorphe a . n’est pas homéomorphe a .  
Attention : la connexité n’entraine pas nécessairement la connexité par arcs. **IV. Applications pratiques de la connexité  
IV.1. Résultats d’existence**Toute application ouverte et continue, d’un espace compact, vers un espace connexe et séparé, est surjective.  
**Th. du passage des douanes.** Dans un espace topologique, un partie connexe qui rencontre l’intérieur et le complémentaire de l’adhérence d’une autre partie, doit aussi rencontrer la frontière de cette autre partie. **IV.2. Résultats d’unicité**Toute application localement constante d’un espace connexe vers un espace séparé est constante.

**Chapitre 4.  
II. Suites à valeurs dans un espace topologique  
II.1. Limites de suites**Une union dénombrable d’ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.  
Un produit fini d’ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.  
Une suite sur un ensemble correspond à une application .  
Un ensemble est dénombrable ssi c’est l’image d’une suite. R n’est pas dénombrable.  
La topologie usuelle sur est la topologie discrète sur c’est aussi la topologie engendrée sur par la topologie de l’ordre sur . , un voisinage de est de la forme .  
Une suite sur un espace topologique converge vers une limite ssi .  
Une suite sur un espace métrique converge vers une limite ssi .  
Il y a unicité de la limite si elle existe pour une suite a valeurs dans un espace séparé.  
Dans un espace non séparé il n’y a a priori pas unicité de la limite.  
Dans un espace topologique grossier, toute suite admet tout point comme limite.  
Pour une suite convergente sur un espace topologique, l’image de la suite adjointe de sa limite forme une partie compacte.  
Une **valeur d’adhérence d’une suite d’un espace topologique** est un point de l’espace dont tout voisinage contient une infinité de termes de la suite. Autrement dit c’est un point tel que .  
Toute limite d’une suite est une valeur d’adhérence de la suite.  
 ne converge pas et a et pour valeurs d’adhérences.  
Dans , n’a ni limite, ni valeur d’adhérence.  
Une suite peut avoir une unique valeur d’adhérence et pas de limite.  
Une **suite extraite d’une suite** est une suite de la forme avec suite sur strictement croissante. Dans ce cas il est bon de savoir que   
Une suite sur un espace topologique converge vers une limite ssi toutes ses suites extraites convergent vers . Ainsi une suite dont deux suites extraites convergent vers des limites distinctes, est divergente.  
Une suite à valeurs dans une partie d’un espace topologique ne peut converger que dans l’adhérence de cette partie.  
Une limite de suite extraite est toujours une valeur d’adhérence pour la suite initiale.  
Soit une fonction d’une partie d’un espace topologique vers un autre espace topologique qui admet au point adherent a la partie, une limite , alors pour toute suite de la partie qui tend vers , on a tend vers .   
Pour une fonction d’une partie d’un espace topologique vers un autre espace topologique, continue en un point de la partie, alors pour toute suite de la partie qui tend vers , on a tend vers .   
Deux espaces métriques, qui ont les mêmes suites convergentes, ont la même topologie. Deux espaces topologiques qui ont les mêmes suites convergentes, n’ont pas nécessairement la même topologie. **II.2. Suites et espace topologique compact**Dans un espace topologique compact, l’intersection d’une suite décroissante de fermés non vides est non vide.  
Dans un espace topologique compact, toute suite admet une valeur d’adhérence.  
Une suite dans un espace topologique compact qui admet une unique valeur d’adhérence, converge vers cette valeur d’adhérence.  
La propriété de **Bolzano-Weierstrass** est la propriété « toute suite admet une valeur d’adhérence ».  
Dans un espace topologique séparé, une suite décroissante de compacts non vides est d’intersection non vide. **III. Dénombrabilité et espace topologique**Pour caractériser les notions topologiques on aime utiliser les critères séquentiels, ce qui est possible sur les espaces communs , ici on énonce un cadre formel qui permet de généraliser cet but.  
**Caractérisation adhérence.** Dans un espace métrique, un point appartient à l’adhérence d’une partie ssi il existe une suite à valeurs dans la partie qui converge vers le point.   
**Caractérisation VA.** Dans un espace métrique, un point est une valeur d’adhérence d’une suite ssi c’est une limite d’une suite extraite de cette suite.  
Dans un tel espace, la limite d’une suite convergente, est donc l’unique valeur d’adhérence de cette suite.  
L’ensemble des VA d’une suite d’un espace métrique s’exprime comme et est donc toujours un fermé, et est borné si la suite l’est.  
**Caractérisation limite.** Toute fonction d’une partie d’un espace métrique vers un autre espace topologique, admet au point adherent a la partie, une limite , ssi pour toute suite de la partie qui tend vers , on a tend vers .