**Chapitre 5.  
I. Distances et espaces métriques  
I.1. Rappels et exemples**Une **distance** sur un ensemble E est une application de telle que, , vérifie la symétrie , et l’inégalité triangulaire . Il découle de la 1ere inégalité triangulaire, la 2ième inégalité triangulaire :   
Un **espace métrique** est un ensemble muni d’une distance sur cet ensemble.  
La restriction d’une distance a une partie de son espace métrique, forme un nouvel espace métrique appelé **espace métrique induit** sur la partie. **I.2. Isométries et transport de distances**Avec une application injective entre 2 ensembles non vides, on peut définir à partir d’une distance sur l’ensemble d’arrivée , une distance sur l’ensemble de départ appelée **distance image réciproque de par** .  
Une application entre 2 espaces métriques est une **isométrie** ssi elle conserve les distances ssi ssi est la distance image réciproque de par .  
Une isométrie est automatiquement injective, et donc bijective sur son image.  
 est bijective et se prolonge en un bijection de avec . Permet de définir une distance sur , comme distance image réciproque de la valeur absolue par l’application injective .

**I.3. Espaces vectoriels normés**Soit ou .  
Une **norme** sur un espace vectoriel est une application telle que  
 , , et   
Dans ce cas on a une 2nde inégalité triangulaire :   
Un **K espace vectoriel normé** est un Kev muni d’une norme sur ce Kev.  
 sont des Kevn. est un Kevn pour les normes suivantes :  
, La **distance induite par une norme sur un Kevn** est l’application . C’est une distance. Ainsi tout Kevn peut être vu comme un espace métrique.  
Il existe des distances qui ne peuvent pas être définies par une norme.   
Une distance induite par une norme est invariante par translation. .  
Une distance induite par une norme vérifie   
Un espace métrique peut être borné, mais pas un espace vectoriel normé sur R ou C. **II. Topologie d’un espace métrique  
II.1. Topologie naturelle d’un espace métrique**Dans un espace métrique, la **boule ouverte** de centre a et de rayon r est l’ensemble des points dont la distance au centre est inférieure strictement au rayon. La **boule fermée**  c’est pareil avec une inégalité large. La **sphère**  est l’ensemble des points dont la distance au centre est égale au rayon. Par exemple, dans R les boules ouvertes sont de la forme .  
La **topologie naturelle d’un espace métrique/distance**, est la topologie engendrée par l’ensemble des boules ouvertes.   
Cependant ouvert   
Un point est intérieur a une partie d’un espace métrique ssi   
Un point est adhérent a une partie d’un espace métrique ssi   
Une partie est un voisinage de ssi contient une boule ouverte de rayon contenant .Dans un espace métrique quelconque, et   
Dans un Kevn, et et  **II.2. Diamètre d’une partie, distance entre deux parties**Le **diamètre d’une partie A d’un espace métrique** est . On note Une partie A d’un espace métrique est **bornée** ssi est majorée ssi son diamètre est fini ssi elle est incluse dans une boule de rayon fini.  
Dans un espace métrique, la **distance d’un point a une partie**  est   
On a la 2nde inégalité triangulaire :   
Dans un espace métrique, la **distance entre 2 parties**  est   
L’adhérence d’une partie d’un espace métrique est l’ensemble des points à une distance 0 de la partie.   
L’intérieur d’une partie d’un métrique est l’ensemble des points à distance du complémentaire.  
**IV. Espaces métrisables**  
2 distances sur un ensemble sont **topologiquement équivalentes** ssi elles donnent la même topologie, autrement dit ssi   
Cela forme une relation d’équivalence sur l’ensemble des distances.  
Une distance est toujours topologiquement équivalente à la distance qui en plus est toujours bornée, alors que ne l’est pas forcément.  
Deux distances sont **équivalentes** sur un ensemble non vide ssi .  
Cela est une relation d’équivalence sur l’ensemble des distances sur . L’une est bornée ssi l’autre l’est.  
Deux distances équivalentes sont topologiquement équivalentes. Mais réciproque fausse.  
Sur , les distances sont équivalentes. On a mieux en dimension finie sur K=R ou C.  
Dans le cas fini, la **distance produit** est .  
Dans le cas infini dénombrable, la **distance produit** est .  
La distance uniforme définit la topologie produit usuelle. **V. Continuité uniforme dans les espaces métriques**Une application entre 2 espaces métriques est **uniformément continue** ssi ssi   
 est uniformément continue. est continue mais pas uniformément continue des que .  
La composée d’applications uniformément continues est uniformément continue.  
Une combinaison linéaire d’applications uniformément continues est uniformément continue.  
Le produit d’applications uniformément continues n’est pas forcement uniformément continue.   
Une application entre 2 espaces métriques est**hölderienne** **d’exposant , de constante**  ssi   
Une application entre 2 espaces métriques est**lipschitzienne de constante**  ssi elle est hölderienne d’exposant de constante ssi   
Sur un espace métrique la distance a une partie est -lipschitzienne.  
Il existe des applications uniformément continues et non lipschitziennes :   
Les fonctions de hölderiennes d’exposant sont les constantes.  
Toute application hölderienne est uniformément continue. Réciproque généralement fausse.  
Toute application uniformément continue est continue. Réciproque généralement fausse. **VI. Limites dans les espaces métriques  
VI.1. Limites d’applications, limites de suites**Soit une fonction d’une partie d’un espace métrique dans un autre espace métrique. Soit un point adhérent à la partie, et un point de l’espace métrique d’arrivée.  
 admet pour limite en ssi   
Dans un espace métrique, être dans l’adhérence c’est être limite d’une suite de points de la partie.  
Dans un espace métrique, un point est une valeur d’adhérence d’une suite ssi c’est une limite d’une suite extraite de cette suite.  
Toute fonction d’une partie d’un espace métrique, vers un autre espace topologique, admet au point adherent a la partie, une limite , ssi pour toute suite de la partie qui tend vers , on a tend vers . **VI.2. Convergence simple et uniforme d’une suite d’applications**L’espace des applications de note peut être vu comme l’ensemble produit et peut être muni d’une topologie produit si possède une topologie. On appelle **topologie de la convergence simple** cette topologie produit sur .Une suite d’applications d’un ensemble vers un espace topologique **converge simplement** vers une application ssi . Autrement dit ssi la suite converge vers dans l’espace topologique produit .  
Une suite d’applications d’un ensemble vers un espace métrique **converge uniformément** vers une application ssi   
La convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque est fausse   
La limite uniforme d’une suite d’applications continues en un point d’un espace topologique vers un espace métrique, est une application continue en ce point.  
La limite uniforme d’une suite d’applications continues sur un espace topologique, vers un espace métrique, est une application continue.  
Pour un ensemble et un espace métrique , on note l’ensemble des fonctions bornées de .  
estaussi un espace métrique pour la **distance uniforme** :   
Si de plus est un Kevn, alors est un Kevn pour la **norme uniforme** : Converger dans pour la distance/norme uniforme, c’est converger uniformément. Donc la topologie associée a est appelée **la topologie de la convergence uniforme**. **VII. Compacité dans les espaces métriques  
VII.1. Suites et espaces métriques compacts**De toute suite d’un espace métrique compact, on peut extraire une sous-suite convergente dans cet espace.  
**Caractérisation compact.** Un espace métrique est compact ssi toutes ses suites admettent une valeur d’adhérence dans l’espace ssi toutes ses suites admettent une sous-suite convergente dans l’espace.  
Méthode pour montrer qu’un espace n’est pas compact, on peut montrer qu’une certaine suite, à partir d’un certain rang, donc aucune sous-suite n’est de Cauchy donc converge. **VII.2. Espaces métriques précompacts**Un espace métrique est **précompact** ssi il existe un recouvrement fini de l’espace au moyen de boules ouvertes de rayon .  
Une **partie précompacte d’un espace métrique** est une partie qui muni de la distance induite forme un espace métrique précompact.  
Tout espace métrique compact est précompact.  
Tout espace métrique précompact est borné.  
Dans un espace métrique, tout compact est fermé borné. Réciproque fausse en général. n’est pas compact mais est fermé borné.  
Dans un espace métrique, la distance a une partie compacte non vide est atteinte.  
Dans un espace métrique, une partie compacte non vide a son diamètre atteint en au moins un couple de ses points. **VII.3. Continuité et espace métriques compacts  
Heine.** Une application continue d’un métrique compact vers un métrique est uniformément continue.  
Une application continue d’un espace topologique compact vers un métrique est bornée d’image un compact.  
Une application continue d’un espace topologique compact vers est bornée et atteint ses bornes.  
L’ensemble des fonctions continues d’un espace topologique compact vers un métrique est une partie fermée de l’espace métrique des fonctions bornées muni de la distance uniforme

**Chapitre 6.  
I. Espaces métriques complets**  
On dit que la fonction vérifie **le critère de Cauchy** au point fixé ssi   
Si la fonction admet une limite (finie) en ce point alors elle vérifie le critère de Cauchy en ce point. (réciproque fausse en général)  
 en 0 pour la partie ne vérifie pas le critère de Cauchy.  **I.2. Suites de Cauchy**Une suite d’un espace métrique est une **suite de Cauchy**  
ssi   
ssi est une suite convergente vers 0 dans   
La suite est de Cauchy sur la droite achevée muni d’une distance sigmoïdale (Arctan/x/(1+|x|)) mais évidemment pas sur R muni de la topologie usuelle.  
Toute suite de Cauchy d’un espace métrique est bornée.   
Toute suite convergente d’un espace métrique est de Cauchy  
Une suite de Cauchy possédant une valeur d’adhérence converge vers cette valeur qui est alors unique. **I.3. Espaces complets**Un espace métrique est un **espace complet** ssi toute ses suites de Cauchy convergent.  
Tout espace métrique discret est complet car toute suite de Cauchy y est stationnaire.  
Un **espace de Banach** est un espace vectoriel normé complet.  
Un espace métrique est complet ssi toute suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0 a pour intersection un singleton.  
Soit une fonction d’une partie d’un espace métrique a valeur dans un espace métrique d’arrivée complet. Soit un point adhérent à la partie. La fonction admet une limite finie au point ssi elle vérifie le critère de Cauchy au point. **I.4. Premières propriétés des espaces complets**Une partie complète est fermée. Toute partie fermée d’un espace complet est complète.   
Donc dans un complet, être complet c’est être fermé.  
Le caractère complet est conservé par distances équivalentes, et isométrie.  
Le produit fini d’espaces métriques complets est complet pour la distance produit.  
Le produit dénombrable d’espaces métriques complets dont le diamètre tend vers 0 est complet pour la distance produit. **I.5. Exemples**L’espace R muni de la distance associe à la valeur absolue est complet.  
 muni de la distance associée à la norme infinie est complet.  
La droite réelle achevée muni d’une distance sigmoïdale est complet. **II. Précompacte, complétude et compacité**Un espace métrique compact est complet.  
Dans un complet, être complet c’est être fermé. Dans un compact, être compact c’est être fermé.  
Donc dans un compact, partie compacte = fermé = complet.  
Un espace métrique est compact ssi il est précompact et complet.  
Le produit dénombrable de métriques compacts muni de la topo produit est un métrique compact. **III. Applications aux problèmes de convergence  
III.1. Interversion de limites**Soit une fonction a deux variables dans 2 espace métriques X,Y et a valeurs dans un espace métrique F.  
On suppose que la fonction n’est définie que sur une partie AxB du produit des deux espaces de départ. On considère un point fixé . Si  
1. L’espace d’arrivée est complet  
2. Quand on fait tendre une variable vers son point, et on fixe l’autre, la fonction converge.  
3. Quand on fait tendre l’autre variable, il y a convergence uniforme de la fonction selon l’une.  
Alors, on peut faire tendre une variable puis l’autre ou l’inverse indistinctement, toutes les limites existent et on peut intervertir.  
Valable pour les suites de fonctions lorsque l’autre variable est un indice n qui tend vers l’infini. **III.2. Applications uniformément continues  
Théorème d’existence fondamental en analyse/intégration.** Une application uniformément continue d’une partie dense d’un espace métrique/ou semi-métrique, à valeurs dans un espace métrique complet peut être prolongée sur tout l’espace de départ en une application continue de façon unique. De plus ce prolongement est encore uniformément continu. Il est défini en tout point de l’espace donc adhérent à la partie dense, comme la limite de la fonction initiale en ce point dont l’existence découle du théorème. **IV. Approximations successives et point fixe  
IV.1. Dynamique liée à une application**On appelle **orbite d’un point d’un ensemble suivant une fonction de l’ensemble dans lui-même,** l’ensemble des points obtenus en appliquant la fonction a elle-même itérativement un nombre quelconque de fois. Un **point** **fixe d’une fonction d’un ensemble dans lui-même** est un point dont l’image par la fonction est lui-même, càd un point dont l’orbite est le singleton le contenant.  
Dans un espace topologique séparé, si la suite définie par une orbite d’une fonction continue converge alors la limite est un point fixe de cette fonction. **IV.2. Le théorème du point fixe**Une application d’un espace métrique dans un autre est **-contractante** si elle est -lipschitzienne avec , cad . Une telle fonction est en particulier continue.  
Le théorème des accroissements finis (TAF) est souvent utile pour montrer éventuellement cette prop.  
**Théorème du point fixe.** Une fonction contractante d’un espace métrique complet dans lui-même admet un unique point fixe. De plus les orbites suivant la fonction convergent toutes vers cet unique point fixe. Attention la condition n’est generalement pas suffisante pour le theoreme (cependant elle suffit si l’espace est compact.  
On obtient la même conclusion sur , si n’est contractante qu’après l’avoir composé par elle-même un nombre suffisant (quelconque) de fois (si on remplace par dans l’hypothèse).  
Exemple surjectivité des perturbations de l’identité.

**Chapitre 7.  
I. Espaces vectoriels normés  
I.1. Rappels et définitions**Soit ou .  
Deux normes sur un ev sont équivalentes ssi   
Cela définit une relation d’équivalence sur l’ensemble des normes de   
pour montrer que 2 normes ne sont pas équivalentes il suffit que non borné.  
Deux normes sont équivalentes ssi elles définissent la même topologie. Donc il n’y a pas besoin d’avoir deux concepts distincts comme pour les distances.  
Deux normes sur un Kev sont équivalentes ssi une suite converge vers 0 pour l’une ssi elle converge vers 0 pour l’autre.  
Un Kevn est connexe/arcs et même localement connexe.  
Une partie convexe d’un Kevn est connexe/arcs. Une boule est convexe et donc connexe/arcs.  
Un **espace de Banach** est un Kevn complet pour la distance associée à la norme. **I.2. Exemples**, l’application est une norme sur   
Toutes les normes sur un Kevn de dimension finie, sont équivalentes et définissent la même topologie.  
Pour un ensemble et un Kevn , l’ensemble des fonctions bornées estaussi un Kevn, qui est complet si est complet.  
Pour un ensemble et un Kevn , l’ensemble des fonctions continues bornées est aussi un Kevn comme sous Kev de , qui est complet si est complet.  
Pour l’ensemble des fonctions continues de dans , est aussi un evn admettant pour normes par ex : et .  
Les normes ne sont pas 2 à 2 équivalentes sur . En revanche donc .  
Pour tout l’espace des suites sur de norme finie, est un Kevn pour la norme .  
**L’espace des suites sur K de limite nulle** est un Kevn pour la norme uniforme.  
**L’espace des suites sur K nulles à partir d’un certain rang**  est un Kevn pour la norme uniforme.  
On a les inclusions strictes  **I.3. Sous-espaces produits et quotients**Soit un produit fini ou dénombrable de Kevns Dans le cas fini, la **norme produit** est .  
Dans le cas infini dénombrable, la **norme produit** est   
La norme uniforme définit la topologie produit usuelle.L’application somme sur un Kevn est -lipschitzienne, donc UC et continue.  
L’application produit par un scalaire sur un Kevn est continue.  
Dans un Kevn, l’adhérence d’un sev est un sev.  
Tout sev strict d’un Kevn de dimension finie, est d’intérieur vide.  
Le complété d’un Kevn est canoniquement muni d’une structure d’espace de Banach.  
Le **noyau d’une semi-norme** est le Ksev des vecteurs de semi-norme nul.  
On peut transformer un Kev semi-normé en un Kevn en le quotientant par le noyau de la semi-norme. **I.4. Parties denses et parties totales**Une **partie totale d’un Kevn** est une partie dont le sev engendré est dense dans le Kevn.  **II. Applications linéaires continues  
II.1. Espaces d’applications linéaires continues**Entre deux Kevns on note l’ensemble des applications linéaires de dans Entre deux Kevns on note l’ensemble des applications linéaires continues de dans   
 est un Ksev de   
Une application linéaire d’un Kevn E vers un Kevn F vérifie les équivalences :  
 continue ssi continue en 0 ssi bornée sur ssi bornée sur ssi ssi lipschitzienne ssi uniformément continue.  
Pour montrer qu’une application linéaire n’est pas continue il suffit de montrer telle que non bornée.  
 est linéaire continue.  
 est linéaire mais pas continue.  
**La norme d’opérateur /subordonnée/triple à**  est   
Caracterisation norme triple :est un Kevn complet si l’est.  
   
Pour est linéaire continue de norme triple   
Pour est linéaire continue de norme triple   
Pour 3 Kevn , alors et   
Une application linéaire n’est jamais bornée au sens premier.  
   
Pour une algèbre de Banach, inversible et   
Pour une algèbre de Banach, le groupe des inversibles est un ouvert de .  
Pour une algèbre de Banach, est un homéomorphisme.  
**Théorème de l’isomorphisme de Banach.** Si et bijective alors . **II.2. Formes linéaires continues et dual topologique**Rappel : La codimension d’un sev d’un Kev est la dimension d’un sev supplémentairequelconque.  
Un hyperplan d’un Kev est un sev de codimension 1.Pour un Kev , on note **le dual algébrique de E.**Pour un Kevn , on note **le dual topologique de E.**Un sev d’un Kev E est un hyperplan ssi c’est le noyau d’un forme linéaire non nulle.  
Une forme linéaire non nulle est complètement déterminée par la donnée de l’image d’un vecteur n’appartenant pas à son noyau.  
Deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles ssi elles ont même noyau hyperplan.  
Dans un Kevn, un hyperplan est fermé ssi une forme linéaire de noyau cet hyperplan est continue.  
Dans ce cas si , le complémentaire de l’hyperplan possède deux composantes connexes et  **III. Espaces d’applications multilinéaires continues** est l’ensemble des applications -linéaires d’un produit de Kevns vers un Kevn.  
 est l’ensemble des applications - linéaires continues d’un produit fini de Kevns vers un Kevn.  
Une application linéaire d’un produit de Kevn vers un Kevn F vérifie les équivalences :  
 continue ssi continue en 0 ssi bornée sur ssi bornée sur ssi   
**La norme d’opérateur/subordonnée/triple a**  est  **Caractérisation**.  
Exemple : est bilinéaire continue.  
Si est un Kevn complet alors est complet **IV. Espaces normés de dimension finie  
IV.1. Propriétés générales**Sur un Kev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.  
Toute application linéaire d’un Kevn de dimension finie vers un Kevn quelconque est continue.  
Toute application n-linéaire d’un produit fini de Kevn de dimensions finies vers un Kevn quelconque est continue.  
Dans un Kevn, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est complet et donc fermé.  
Un Kevn complet de dimension infinie ne possède pas de base algébrique dénombrable. **IV.2. Le théorème de Riesz**Un Kevn est de dimension finie ssi il est localement compact.  
Un Kevn est de dimension finie ssi la boule unité fermée est compacte.  
Les parties compactes d’un Kevn de dimension finie sont exactement les fermés bornés.

**Chapitre 8. Exemples d’espaces topologiques  
I.1. Fonctions polynômes**  
Une **fonction polynôme** est une fonction de la forme avec , finie, . Si   
Une fonction polynôme est continue.   
Soit fonction polynôme non constante sur . est fermé, d’intérieur vide.  
Un hyperplan de est un fermé d’intérieur vide puisque noyau d’une forme linéaire   
Une fonction **polynôme trigonométrique** est une fonction de la forme avec , finie, . Si   
**I.2. Polynômes et matrices** est une fonction polynôme donc continue.  
 continue car linéaire et continue car composantes polynômiales.   
**II. Propriétés topologiques des groupes classiques** ouvert dense de non fermé donc non compact, non complet, mais localement compact.  
 ouvert dense de non fermé donc non compact, non complet, mais localement compact.  
 compact de , compact de compact d’intérieur vide de , compact de   
**IV.2. Connexité et groupes classiques**  
 a deux composantes connexes homéomorphes : Les matrices de dét strict positif/négatif.  
 a deux composantes connexes homéomorphes : et l’ensemble des isométries indirectes.  
 est connexe.  
, dont connexes.  
**VII. La structure des ouverts de**   
Un ouvert de est réunion dénombrable d’intervalles ouverts disjoints définis de manière unique en tant que composantes connexes.  
Tout ouvert de est réunion d’une famille dénombrable de cellules disjointes de sommets dans et de côté de longueur dans l’ensemble

**Chapitre 9 Espaces de fonctions continues  
I. Espaces de fonctions continues  
I.1. Espaces de fonctions continues**  
On note les fonctions continues, les fonctions bornées,   
Si l’espace d’arrivée est métrique on peut munir les fonctions bornées dans cet espace d’une distance. La **distance uniforme entre deux fonctions bornées** étant   
Si l’espace d’arrivée est complet, l’espace des fonctions bornées (muni de la distance uniforme induite) dans cet espace est complet.  
L’espace des fonctions continues bornées d’un espace topologique vers un espace métrique est un fermé de l’espace des fonctions bornées muni de la distance uniforme. fermé de   
**1er théorème de Dini**. D’un espace métrique compact vers , toute suite croissante (ou décroissante) de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction continue, est uniformément convergente.  
**2e théorème de Dini.** D’un segment de R vers R, toute suite de fonctions croissantes (pas forcement continues) qui converge simplement vers une fonction continue, est uniformément convergente.  
**I.2. Théorème de prolongement de Tietze-Urysohn.**   
Soit une fonction réelle continue bornée, de domaine un fermé non vide d’un espace métrique. Alors on peut prolonger continument à tout l’espace métrique en conservant l’inf et le sup. Autrement dit le prolongement est continu, ,   
**II. Théorème de Stone-Weierstrass  
Théorème de Stone-Weierstrass forme réelle**  
On cherche une condition suffisante pour qu’un partie des fonctions continues d’un espace topologique compact vers R) y soit dense pour la norme uniforme. Il suffit :  
1. La partie est une sous-algèbre de   
2. Tout couple de point distincts de peut être séparé par une certaine fonction de A.  
3. La partie A contient les fonctions constantes.  
**Théorème de Stone-Weierstrass forme complexe**On cherche une condition suffisante pour qu’un partie des fonctions continues d’un espace topologique compact vers R y soit dense pour la norme uniforme. Il suffit de :  
1. La partie est une sous-algèbre de   
2. Tout couple de point distincts de peut être séparé par une certaine fonction de A.  
3. La partie A contient les fonctions constantes.  
4. La partie A est stable par conjugaison de fonctions. (Seule condition à rajouter par rapport à forme R).  
**Théorème de Stone-Weierstrass polynôme**L’ensemble des polynômes est dense dans l’espace des fonctions continues d’un compact de vers R pour la norme uniforme.  
L’ensemble des polynômes trigonométriques complexes unidimensionnels de variable réelle est dense dans l’espace des fonctions continues 2pi périodiques à variable réelles et à valeurs complexes pour la norme uniforme.