**1. Définition d’une série**  
Pour ou , et un evn  
Pour une suite , **la suite des sommes partielles de terme général / associée à la suite**  correspond à la suite . On note souvent .  
L’application est un isomorphisme d’ev de réciproque   
Il n’y a donc pas beaucoup de différence entre l’information d’une suite ou celle d’une série puisqu’elles sont en bijection. Cependant pour certaines notions comme la convergence, on doit préciser le point de vue utilisé, car le sens diffère.  
Pour une suite , **la série de terme général / associée à la suite**  notée correspond au couple de la suite et la suite des sommes partielles associée . Pour des notions très basiques comme la convergence d’une série, on n’utilise que . Pour certaines notions comme la convergence absolue, on a besoin de faire référence à . La façon standard de représenter une série est donc , afin d’avoir immédiatement à disposition le point de vue pertinent. Cependant ce n’est pas important car se déduit de et réciproquement, donc on aurait pu se contenter de modéliser une série par juste l’un ou l’autre. L’intérêt du concept de série est surtout de définir ou de redéfinir des propriétés ou opérations qui lui sont propres. On note donc   
L’ensemble des séries sur , l’ensemble des sommes partielles sur , l’ensemble des suites sur , sont donc e.v. isomorphes quelle que soit la représentation choisie.  
Pour une suite ne commençant pas à l’indice 0, , on peut énoncer les concepts de ce chapitre de manière analogue en identifiant chaque définition sur à celle sur . On ne s’intéresse généralement qu’aux comportements asymptotiques donc le premier indice n’a aucune importance.  
**2. Définitions**  
Pour ou , et un evn  
**Une série sur est convergente dans**  ssi sa suite des sommes partielles l’est.  
Dans le cas convergent, **la somme de la série**  est définie comme la limite de la suite des sommes partielles :   
Dans le cas convergent, **la suite des restes** **de la série**  est définie par :  
   
Dans le cas convergent, la suite des restes est définie et tend toujours vers 0. .  
**Une série sur est divergente dans**  ssi sa suite des sommes partielles l’est.  
Une série est donc soit convergente soit divergente.  
Une suite sur converge ssi la série converge sur .  
Le terme général d’une série convergente sur un Kevn, tend toujours vers .  
Une série sur un Kevn dont le terme général ne tend pas vers 0, **diverge grossièrement**.   
Une série dont le terme général tend vers 0, peut ne pas converger :   
**Deux séries sur un Kevn , sont de même nature** ssi (l’une converge ssi l’autre converge)  
Deux séries sur un Kevn dont les suites ne diffèrent que par un nombre fini de termes, sont de même nature, mais pas forcément de même somme.  
Pour deux séries convergentes sur , alors converge sur et   
Pour une série convergentes sur , et , alors converge sur et   
La **somme de deux séries sur**  est   
Le **produit par un scalaire d’une série sur**  est   
L’ensemble des séries sur un evn, muni de la somme de séries et du produit par un scalaire, forme un evn.  
L’ensemble des séries convergentes sur un evn, muni de la somme de séries et du produit par un scalaire, forme aussi un evn.  
Pour de module , diverge grossièrement sur .  
Pour de module , converge sur , et , et   
Pour un evn de dimension finie de base , une série sur de **séries composantes sur** , (telles que ),   
Alors la série converge sur ssi ses séries composantes convergent toutes dans , et dans ce cas   
**Une série sur vérifie le critère de Cauchy dans**  ssi sa suite des sommes partielles est une suite de Cauchy dans , càd   
Une série convergente sur un Kevn , est de Cauchy sur . La réciproque est vraie si complet.  
Dans un Kevn complet, une série est convergente ssi elle est de Cauchy.  
La série diverge sur .  
**Une série sur est absolument convergente ~~dans~~**  ssi est convergente dans   
Sur un Kevn complet , une série absolument convergente, est convergente dans , et vérifie l’inégalité triangulaire : .  
Sur un Kevn complet , pour une application linéaire continue de norme subordonnée 1, alors converge absolument donc converge dans .  
**Une série sur est semi-convergente dans**  ssi elle converge dans , mais pas absolument.  
 est semi-convergente dans , et   
**Une série sur est commutativement convergente dans**  ssi converge sur .  
Sur un evn complet , une série absolument convergente est commutativement convergente sur , et la somme est indépendante de la permutation :   
En fait sur un evn complet , convergence absolue et commutative sur sont équivalentes.  
**3. Séries à termes positifs.** On se place sur   
La convergence d’une série à termes négatifs est équivalente à la convergence de la série de signe contraire à termes positifs.  
L’étude d’une série de signe constant à partir d’un certain rang se ramène à l’étude d’une série positive en ne considérant que les termes après ce rang.  
Une série à termes positifs est convergente sur ssi sa suite des sommes partielles est majorée.  
**Comparaison des séries à termes positifs**. Pour deux suites , telles que on a  
 converge dans converge dansDonc la contraposée aussi: diverge dans diverge dans  
Encore vrai si on remplace par , ou par   
 et sont de même nature. (car )  
 converge dans , diverge dans   
 diverge dans converge dans , mais   
**Séries de Riemann.** Pour , la série converge dans ssi   
Dans ce cas   
**Règle .** Pour une série réelle ,   
Si avec et , alors converge absolument, donc converge sur .  
Si avec et , alors diverge grossièrement.  
**Comparaison logarithmique.** Pour deux séries à termes positifs strictement vérifiant (au moins à partir d’un certain rang), alors converge dans converge dans .  
**Règle de d’Alembert.** Pour une série à termes positifs strictement vérifiant , alors   
**Règle de d’Alembert plus précise.** Pour une série à termes positifs strictement,   
**Règle de Cauchy.** Pour une série à termes positifs, on pose    
Remarque : donc Règle Cauchy d’Alembert.  
Pour alors mais , donc Règle Cauchy d’Alembert.  
**Règle de Raabe-Duhamel.** Pour une série à termes positifs strictement,   
   
   
Si on ne sait rien   
   
**Lien série intégrale.**Pour une fonction intégrable décroissante   
Pour une fonction intégrable croissante   
Ces inégalités tiennent toujours si on remplace intégrable par mesurable positive.  
**Lemme**. Pour mesurable positive décroissante, converge toujours.  
**Test intégral.** Pour une fonction mesurable positive décroissante, on peut donc affirmer :  
 converge dans converge dans est intégrable sur   
 diverge dans   
   
   
   
**Séries de Bertrand.** converge ssi ou ( et )  
**Sommation des relations de comparaison.** Pour deux suites , telles que on a  
 converge dans converge dans et   
 diverge dans . (en particulier vrai si diverge)  
Ce théorème est encore vrai si , par contre il faut toujours   
Cas d’équivalence : Deux séries a termes positifs équivalents, sont de même nature, en cas de convergence il y a équivalence de leur reste, en cas de divergence il y a équivalence de leur somme partielle.  
**Cesàro.** Pour une suite complexe convergente, la moyenne courante converge aussi vers la limite de la suite.   
Réciproque fausse : diverge et   
Pour une suite réelle   
**Test de la loupe de Cauchy.** Une série a termes positifs décroissants , est de même nature que   
L’hypothèse de décroissance est nécessaire : avec   
Pour une série a termes positifs décroissants , la série est de même nature.  
**Séries alternées.  
Une série réelle est alternée** ssi ses termes changent de signe à chaque rang consécutif, autrement dit ssi est de signe constant.  
**Critère de convergence des SA**. Pour une série alternée supposée wlog de la forme avec , si tend vers 0 en décroissant, alors la série alternée converge, de plus on peut encadrer les sommes partielles , de plus on peut majorer les restes par le module de leur premier terme, et est du signe de .  
 est (semi-)convergente sur , et converge sur .  
 converge sur .  
 diverge sur .  
Pour des SA compliquées sans décroissance de , une méthode est de faire un DA de de sorte à l’écrire comme somme de termes qui seront des termes généraux de SA plus simples.  
 converge sur . diverge sur .  
**Transformation d’Abel.** L’idée est que pour une série de la forme sur un evn complet, avec des scalaires , on cherche à utiliser le critère de Cauchy en réécrivant le terme  
 .  
Dans le cas intégral on écrit , cela revient à faire une intégration par partie.  
**Théorème d’Abel.** Pour une série de la forme sur un evn complet, de scalaires , tendant vers 0, telle que bornée sur , et converge absolument, alors converge.  
**Théorème d’Abel faible.** Pour une série de la forme sur un evn complet, de scalaires , tendant vers 0 en décroissant, et telle que bornée sur , alors converge.  
   
 converge dans   
**Test intégral (rappel).** Pour une fonction réelle mesurable positive décroissante:  
 converge dans converge dans est intégrable sur   
 diverge dans   
**Test intégral complexe.** Pour une fonction de dérivée intégrable sur , alors converge dans l’intégrale impropre converge dans   
 converge dans diverge dans   
**Sommation par paquets.**  
Soit une série sur un evn , et des groupements de termes définis par une suite avec strictement croissante.  
Si la série converge, alors la série des groupements converge aussi et a même somme :   
La réciproque est vraie dans l’un des cas suivants :  
- Les termes sont des réels positifs ou nuls  
- Les termes sont des réels, et leur signe est constant dans chaque groupement de terme.  
- La suite tend vers 0, et la taille des groupements est majorée.   
Dans un de ces cas, une série et sa série de groupements sont de même nature, et de même somme si convergence.  
 diverge dans et converge dans   
 converge dans et   
**Produit de Cauchy.**Soit suites dans une algèbre de Banach.  
Si alors avec   
1. converge absolument donc converge  
2.   
   
   
**Interversion somme, somme.**  
Soit une suite double , si  
1.   
2.   
Alors toutes les sommes existent et s’intervertissent  
1. convergeconverge  
2. converge et converge  
3.   
   
**Algèbre de Banach.**  
Pour une algèbre de Banach, inversible et   
Pour une algèbre de Banach, le groupe des inversibles est un ouvert de .  
Pour une algèbre de Banach, est un homéomorphisme.  
**Exponentielle.** Pour une algèbre de Banach, converge dans .  
**L’exponentielle dans une algèbre de Banach** est définie par   
   
 et   
   
   
   
 (ne permet pas de calculer les \*)  
   
Pour calculer complètement, on peut utiliser la décomposition de Dunford, voire de Jordan.

**Suites de fonctions.**  
L’espace des applications de note peut être vu comme l’ensemble produit et peut être muni d’une topologie produit si possède une topologie. On appelle **topologie de la convergence simple** cette topologie produit sur .Une suite de fonctions d’un ensemble vers un espace topologique **converge simplement (CS)** vers une fonction ssi . Autrement dit ssi la suite converge vers dans l’espace topologique produit .  
Une suite de fonctions d’un ensemble vers un espace métrique **converge uniformément (CU)** vers une fonction ssi   
La convergence uniforme implique la convergence simple. Càd une suite de fonctions CU est CS.  
La réciproque est fausse. CS sur mais pas CU sur   
La limite uniforme d’une suite d’applications continues en un point d’un espace topologique vers un espace métrique, est une application continue en ce point.  
La limite uniforme d’une suite d’applications continues sur un espace topologique, vers un espace métrique, est une application continue.  
Pour une suite d’un ensemble vers un espace métrique CU vers , et une suite alors   
Pour un ensemble et un espace métrique , on note l’ensemble des fonctions bornées de .  
estaussi un espace métrique pour la **distance uniforme** :   
Si est un Kevn, alors est un Kevn pour la **norme uniforme** : De plus complet complet.Converger dans pour la distance/norme uniforme, c’est converger uniformément. Donc la topologie associée a est appelée **la topologie de la convergence uniforme**.  
 ne converge pas uniformément sur , mais CU sur tout compact de   
 converge uniformément (donc simplement) sur vers la fonction nulle.  
 CS vers 0 sur , CU sur tout compact de , mais pas CU sur   
Pour un espace topologique et un espace métrique , on note l’ensemble des fonctions continues bornées de . Autrement dit   
Si est un Kevn, alors est un Kevn pour la norme uniformecomme Ksev de De plus complet complet.  
 muni de la norme est un evn complet.  
Une suite d’applications d’un ensemble vers un espace métrique **vérifie le critère de Cauchy uniforme (CCU)** ssi   
Une suite de fonctions CU vérifie le CCU.  
La réciproque est vraie si l’espace métrique d’arrivée est complet, auquel cas CU CCU.  
La limite uniforme d’une suite de polynômes sur un corps (TODO sur seulement?), vers un espace métrique, est un polynôme sur ce même corps.  
**Interversions suites de fonctions.**   
**Interversion continuité, limite.** (cf interversions)  
 CS sur vers une limite pas continue sur   
 CS sur mais vers une limite pas continue sur   
**Interversion limite, limite.** (cf interversions) **Interversion limite, limite discrète.** (cf interversions)  
 CS vers sur   
**Interversion limite, intégrale TCM, TCD.** (cf interversions)  
 CS vers sur mais   
**Interversion dérivée, limite**(cf interversions) **Interversion dérivée -ieme, limite** (cf interversions) **Interversion différentielle, limite, sur un ouvert convexe** (cf interversions)  
**Interversion différentielle, limite, sur un ouvert connexe** (cf interversions)  
**Interversion dérivée complexe, limite (par Morera)** (cf interversions)  
**Séries de fonctions.** On se place dans un evn , avec ou , et un espace topologique.  
Pour une suite de fonctions , **la suite des somme partielles de terme général / associée à la suite**  correspond à la suite .  
Pour une suite de fonctions , **la série de fonctions de terme général / associée à la suite**  notée correspond au couple de la suite et la suite des sommes partielles associée   
Une série de fonctions d’un ensemble vers un evn **converge simplement (CS)** vers une fonction ssi converge dans , et , càd ssi la suite des sommes partielles de fonctions converge simplement vers , càd ssi la suite des restes converge simplement vers .  
Une série de fonctions d’un ensemble vers un evn **converge uniformément (CU)** vers une fonction ssi , càd ssi la suite des sommes partielles de fonctions converge uniformément vers , càd ssi la suite des restes converge uniformément vers .  
Une série de fonction CU est CS.  
Une suite de fonctions d’un ensemble vers un evn converge simplement sur ssi la série de fonctions converge simplement sur .  
Une suite de fonctions d’un ensemble vers un evn converge uniformément sur ssi la série de fonctions converge uniformément sur .  
Si une série de fonctions converge uniformément sur , alors son terme général converge uniformément sur vers .  
 CS sur et CU sur   
 CS sur , mais pas CU sur mais CU sur tout compact de   
Une série de fonctions d’un ensemble vers un evn **vérifie le critère de Cauchy pour uniforme pour les séries (CCUS)** ssi la suite de sommes partielles est CCU, càd ssi .  
Une série de fonctions CU, vérifie le CCUS.  
La réciproque est vraie si le evn d’arrivée est complet, auquel cas CU CCUS.  
 CS sur , non CU sur mais CU sur   
Une série de fonctions d’un ensemble vers un evn **converge normalement (CN) sur dans**  ssi converge dans .  
Une série de fonctions CN, est AC en tout point.  
Une série de fonction CU est CS.  
Dans un evn complet, une série de fonction AC en tout point, est CS.  
Dans un evn complet, une série de fonction CN est CU, et donc CS.  
 CS sur et CU sur mais pas CN sur   
 est CS, CU, et CN sur   
**Série alternées.** Une suite de fonctions a valeurs réelles CU vers la fonction nulle, et telle que est une suite décroissante, alors la série CU sur .  
**Interversion continuité, somme** (cf interversions)  
 continue sur continue sur   
Pour algèbre de Banach, est continue, est continue sur . **Interversion limite, somme** (cf interversions)  
   
   
**Interversion somme positive, intégrale** (cf interversions)  
**Interversion somme, intégrale v1** (cf interversions)  
**Interversion somme, intégrale v2 (version sigma finie)** (cf interversions)  
**Interversion somme, intégrale v3 (cas particulier de Fubini).** (cf interversions)  
   
**Interversion dérivée, somme** (cf interversions) **Interversion dérivée k-ième, somme** (cf interversions) **Interversion différentielle, somme, version convexe** (cf interversions)  
**Interversion dérivée complexe, somme** (cf interversions)   
Pour algèbre de Banach, est et