Sur l'amortissement des ondes sonores dans un milieu gazeux homogène

Yves Rocard

SUR L'AMORTISSEMENT DES ONDES SONORES DANS UN MILIEU GAZEUX HOMOGÈNE

Par M. YVES ROCARD.

Sommaire. — Dans le présent travail, on s'est proposé de donner une théorie de l'amortissement des vibrations sonores ou ultrasonores dans un milieu formé par un mélange, tel que l'air, où la diffusion des constituants doit entrer en ligne de compte. Cet amortissement dû à la diffusion des constituants est principalement dû à la modification à l'équation adiabatique qu'entraîne précisément cette diffusion. En reprenant l'examen des causes classiques d'amortissement du son (rayonnement, conductibilité thermique) on a trouvé que pour des petits mouvements sinusoïdaux de fréquence bien définie, il était aisé d'écrire au lieu de l'équation adiabatique, non valable, une équation de la forme :

$$pv^{\gamma+i\Delta\gamma} = \text{constante}$$

l'imaginaire i indiquant un déphasage entre les variations de pression et de volume, pour la fréquence envisagée qui intervient dans la valeur de $\Delta\omega$.

La valeur de $\Delta\gamma$ une fois obtenue, on en tire très aisément l'amortissement des ondes sonores qui s'ensuit, le coefficient d'amortissement étant donné par

$$\alpha = \frac{\omega}{2c\gamma}.\Delta\gamma$$

ω, pulsation, c, vitesse du son.

Cette méthode est appliquée aux diverses causes d'amortissement citées plus haut, et en particulier à l'amortissement par diffusion. L'importance relative des diverses causes est discutée.

1. L'équation de propagation des ondes sonores s'obtient comme il est bien connu par diverses éliminations faites à partir de trois équations, qui sont :

L'équation de continuité, reliant les variations de densité dans le temps aux variations de vitesses dans l'espace.

L'équation hydrodynamique du mouvement, donnant les accélérations du fluide en fonction du système des pressions.

Une équation réglant les échanges d'énergie dans le gaz et leur transformation en travail. Dans les cas usuels, cette équation est l'équation adiabatique.

Cependant, quand on cherche à rendre compte de l'amortissement des ondes sonores dû à diverses causes, on est obligé d'abandonner cet exposé systématique, car on apporte nécessairement des modifications aux hypothèses qui fournissent les équations précédentes. C'est ainsi qu'avec Stokes, lord Rayleigh, etc..., on rend compte de l'amortissement du son dû à la viscosité, à la conductibilité thermique, au rayonnement. Nous nous proposons dans le présent travail de retrouver ces résultats classiques par une méthode bien équivalente à la leur mais plus systématique. Nous aborderons ensuite l'examen d'une question plus compliquée, celle de l'amortissemcnt du son dans un mélange gazeux dû à la diffusion des constituants.

2. Equation de propagation des ondes sonores sans cause d'amortissement. — Nous rappelons d'une façon schématique l'exposé classique : voici les équations de départ :

a) Equation de continuité :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \qquad (1)$$

b) Equations du mouvement :

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \text{etc.} \qquad (2)$$

Article published online by EDP Sciences and available at http://dx.doi.org/10.1051/jphysrad:01930001012042600

c) Equation adiabatique :

$$PV^{\gamma} = C^{te}, \qquad \text{ou} \qquad \gamma P \delta V + V \delta P = 0. \tag{3}$$

Nos notations sont classiques. Les vitesses sont supposées petites, $\frac{\partial u}{\partial x}$ est de l'ordre de grandeur de u, et les produits tels que

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \text{etc.}$$

sont négligeables. Lss variations δV, δP sont des variations petites mais finies.

De (2) et (3) on tire, en appelant s la condensation $\frac{\delta V}{V}$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)\frac{\partial s}{\partial x}, \quad \text{etc.} \tag{4}$$

et en dérivant (1) on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right) = 0. \tag{5}$$

Les équations (4) permettent d'éliminer les vitesses, on a alors l'équation de propagation :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{6}$$

en introduisant la vitesse de propagation $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$.

Cet exposé, absolument classique, que nous avons rappelé, nous permettra d'abréger plus loin l'exposé de questions plus compliquées.

3. **Amortissement dû à la viscosité.** — La viscosité s'introduit par une modification aux équations du mouvement (2), sans que la marche du calcul en soit sensiblement modifié ; nous suivons donc encore là l'exposé classique de *Stokes*.

Au lieu de (2) nous avons l'équation :

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\eta}{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 3\Delta u\right\} \tag{7}$$

η désignant le coefficient de viscosité et Δ le Laplacien.

L'équation adiabatique se conserve, au moins en première approximation. Utilisant (1) et (3) on peut écrire :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -c^2\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\eta}{3\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) + 3\Delta u\right\} \tag{8}$$

en négligeant des produits de dérivés tels que $\frac{\partial \rho}{\partial x}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

En portant les expressions de $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ dans (5), on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} - \left(\frac{\gamma P}{\rho}\right)\Delta s - \frac{\eta}{3\rho}\Delta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial x} + \frac{\partial\Delta v}{\partial y} + \frac{\partial\Delta w}{\partial z}\right) = 0. \tag{9}$$

Or il est visible que :

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial x}+\frac{\partial \Delta v}{\partial y}+\frac{\partial \Delta w}{\partial z}=\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\Delta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

D'où l'équation de propagation tenant compte de la viscosité :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}-\frac{4}{3}\frac{\eta}{\rho}\Delta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}-c^2\Delta s=0. \tag{10}$$

c^2 désigne toujours l'expression $\gamma\frac{P}{\rho}$. Le terme en $\Delta\frac{ds}{dt}$ est le terme d'amortissement. Calculons le coefficient d'amortissement correspondant.

Il suffit d'intégrer par une expression de la forme

$$s=\mathrm{e}^{-\alpha_1 x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta x)}. \tag{11}$$

On trouve alors en identifiant:

$$\alpha_1=\frac{2}{3}\frac{\eta}{\rho}\frac{\omega^2}{c^3}. \tag{12}$$

La vitesse n'est modifiée que d'une façon imperceptible. On trouve en effet :

$$\beta^2=\frac{\omega^2}{c^2}\left[1+\frac{20}{9}\left(\frac{\eta}{\rho}\right)^2\frac{\omega^2}{c^4}+\dots\right]. \tag{13}$$

Le terme correctif est de l'ordre de 10^{-12} et négligeable.

Le coefficient d'amortissement α_1 dû à la viscosité vaut en unités cgs et pour une fréquence de 6 000:

$$\eta=0{,}000173$$
$$\rho=1{,}3.10^{-3}$$
$$c=3{,}33.10^4$$
$$\omega=6.000\times 2\pi$$

d'où :

$$\alpha_1=0{,}40.10^{-5}. \tag{14}$$

On peut abréger l'exposé de la façon suivante : ayant obtenu (10), introduisons tout de suite la périodicité en t; nous posons pour cela :

$$s=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}f(x). \tag{15}$$

Il vient alors au lieu de (10)

$$-\omega^2 s-c^2\left(1+\frac{4}{3}\frac{\eta}{\rho}\frac{\mathrm{i}\omega}{c^2}\right)\Delta s=0. \tag{16}$$

Or c^2 représente le facteur $\gamma\frac{P}{\rho}$. Tout se passe donc comme si, du fait de la viscosité, γ était devenu

$$\gamma+\mathrm{i}\Delta\gamma \tag{17}$$

avec

$$\Delta\gamma=\gamma\frac{4}{3}\frac{\eta}{\rho}\frac{\omega}{c^2}.$$

Le résultat (12) obtenu pour α_1 nous montre immédiatement qu'on aura d'une façon générale pour l'amortissement :

$$\alpha=\frac{\omega}{2c\gamma}\Delta\gamma. \tag{18}$$

Cette remarque sera utilisée abondamment par la suite.

4. Influence du rayonnement sur la propagation du son. — Pour essayer d'expliquer l'amortissement des ondes sonores, *Stokes* invoque le rayonnement, qui produit une déperdition d'énergie dans les parties comprimés, donc échauffées, du train d'ondes.

Notre méthode nous mène rapidement au résultat : prenons l'équation des gaz parfaits :

$$PV = RT \tag{19}$$

et l'équation adiabatique

$$PV^{\gamma} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}. \tag{20}$$

On en tire aisément pour de petites variations :

$$\frac{\delta T}{T} + (\gamma - 1)\frac{\delta V}{V} = 0 \tag{21}$$

ou :

$$\delta T = -T(\gamma - 1)\frac{\delta V}{V}. \tag{22}$$

Mais s'il y a des pertes par rayonnement, la variation par seconde $\frac{\partial \delta T}{\partial t}$ de la température se compose premièrement d'un terme $-T(\gamma - 1)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta V}{V}\right)$ dû à la variation de compression et deuxièmement d'un terme de rayonnement $-h\delta T$, proportionnel à l'excès de température δT et à un certain coefficient h; d'où l'équation :

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} + T(\gamma - 1)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta V}{V}\right) + h\delta T = 0. \tag{23}$$

supposons des ondes se propageant avec la pulsation ω, une intégration de (23) par rapport au temps donne immédiatement :

$$\left(1 + \frac{h}{\mathbf{i}\omega}\right)\frac{\delta T}{T} + (\gamma - 1)\frac{\delta V}{V} = 0. \tag{24}$$

Remplaçant $\frac{\delta T}{T}$ par $\frac{\delta P}{P} + \frac{\delta V}{V}$, on voit que si l'on tient compte du rayonnement, l'équation adiabatique est remplacée par la relation :

$$P V^{\frac{\gamma + h/\mathbf{i}\omega}{1 + h/\mathbf{i}\omega}} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}. \tag{25}$$

Or on a :

$$\frac{\gamma + \frac{q}{\mathbf{i}\omega}}{1 + \frac{q}{\mathbf{i}\omega}} = \frac{\gamma + \frac{h^2}{\omega^2}}{1 + \frac{h^2}{\omega^2}} + \mathbf{i}(\gamma - 1)\frac{\frac{h}{\omega}}{1 + \frac{h^2}{\omega^2}} \tag{26}$$

négligeons h^2/ω^2 qui sera en général très petit; on a donc ici :

$$\Delta\gamma = (\gamma - 1)\frac{h}{\omega} \tag{27}$$

d'où l'on déduit un coefficient d'amortissement dû au rayonnement :

$$\alpha_2 = \frac{\omega}{2c\gamma}\Delta\gamma = \frac{\gamma - 1}{2\gamma c}.h. \tag{28}$$

Ce résultat est identique à celui d'un calcul de *Rayleigh*.

Pour évaluer h, *Rayleigh* fait une expérience de Clément et Desormes, comprimant légèrement le gaz d'un grand ballon et mesurant le temps qu'il met à se refroidir; en discutant dans quelle mesure ce refroidissement est dû au rayonnement pur, Rayleigh est conduit pour l'air à la valeur :

$$h = 0{,}4$$

On trouve alors en c.g.s.

$$\alpha_2 = 0{,}27.10^{-5} \tag{29}$$

valeur indépendante de la fréquence, et du même ordre de grandeur que α_1.

On peut voir sur l'équation (25) que si le rayonnement est intense et la fréquence faible, la propagation est presque isothermique, tandis qu'elle est presque adiabatique dans les cas contraires, ce qui est bien naturel.

En (25) nous avons obtenu une véritable équation de la thermodynamique des ondes acoustiques, qui nous montre le déphasage entre δV et δP introduit par un phénomène dissipant l'énergie.

5. Amortissement du son dû à la conductibilité thermique de l'air. — L'équation du transfert de la température s'écrit comme il est bien connu :

$$C_v \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \theta \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{30}$$

c_v, chaleur spécifique sous volume constant

ρ, densité

θ, coefficient de conductibilité thermique de l'air.

On peut remplacer dans cette équation T par δT, excès sur la température moyenne ambiante.

Nous pouvons intégrer l'équation (30) par rapport au temps, et écrire pour un phénomène périodique de pulsation ω :

$$C_v \rho\, \delta T = \frac{\theta}{i\omega} \Delta \delta T \tag{31}$$

Δ désignant le Laplacien.

Mais l'équation (30) suppose qu'il n'y a pas de transformation d'énergie interne en travail. Au contraire, dans la propagation du son, les variations d'énergie interne se transforment en travail de compression et dilatation ; (31) s'écrit alors :

$$C_v \rho \delta T = -P \frac{\delta V}{V} + \frac{\theta}{i\omega} \Delta \delta T. \tag{32}$$

Dans $\Delta \delta T$ nous pouvons remplacer δT par sa première approximation :

$$\frac{-P}{C_v \rho} \frac{\delta V}{V}. \tag{33}$$

D'autre part, nous éliminerons δT par la relation des gaz parfaits

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta P}{P} + \frac{\delta V}{V}. \tag{34}$$

Tenant compte de l'équation de Boyle-Mariotte

$$P = (C_p - C_v)\,\rho T, \tag{35}$$

On arrive aisément à :

$$\gamma \frac{\delta V}{V} + \frac{\delta P}{P} + \frac{\theta}{i\omega} \frac{T}{P} (\gamma - 1)^2 \Delta \left(\frac{\delta V}{V}\right) = 0. \tag{36}$$

Nous avons donc encore là une équation généralisant l'équation adiabatique :

$$(\gamma + \mathbf{i}\Delta\gamma)\frac{\delta V}{V} + \frac{\delta P}{P} = 0 \tag{37}$$

en posant symboliquement :

$$\Delta\gamma = -\frac{\theta}{\omega}\frac{T}{P}(\gamma - 1)^2 \Delta \ldots \tag{38}$$

Pour faire disparaître le Laplacien Δ au second membre, et pour expliciter par cela même $\Delta\gamma$, envisageons maintenant des ondes sinusoïdales amorties :

$$\frac{\delta V}{V} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}(\omega t - \alpha x)}. \tag{39}$$

L'équation (36) devient :

$$\frac{\delta P}{P} + \frac{\delta V}{V}\left[\gamma + \frac{\mathbf{i}\theta}{\omega}\frac{T}{V}(\gamma - 1)^2 \alpha^2\right] = 0. \tag{40}$$

On peut dans le terme correctif $\Delta\gamma$ remplacer α^2 par sa valeur de première approximation :

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{\gamma \frac{P}{\rho}}$$

d'où l'équation définitive :

$$\frac{\delta P}{P} + \frac{\delta V}{V}\left[\gamma + \mathbf{i}\theta\omega \frac{T\rho}{P^2}\frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma}\right] = 0. \tag{41}$$

Nous avons donc ici :

$$\Delta\gamma = \theta\omega \frac{T\rho}{P^2}\frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma}. \tag{42}$$

Il s'ensuit d'après notre résultat général un coefficient d'amortissement

$$\alpha_3 = \frac{\omega}{2c\gamma}\Delta\gamma$$

soit :

$$\alpha_3 = \frac{\theta\omega^2}{2c}\frac{T\rho}{P^2}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)^2. \tag{43}$$

Tenant compte de $c^2 = \gamma \frac{P}{\rho}$ et de l'équation de gaz parfaits, ce résultat se met aisément sous la forme :

$$\alpha_3 = \frac{\omega^2}{2c^3}\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)\frac{\theta}{\rho C_v}. \tag{44}$$

Si l'on tient compte de la valeur numérique du coefficient de conductibilité thermique de l'air, donnée à peu près par :

$$\theta = 1{,}7\eta\, C_v. \tag{45}$$

On trouve que α_3 est à peu près égal à $\alpha_1/10$.
Sous la forme (44) notre résultat est identique à celui de Lord Rayleigh.

Quant à l'équation (41) elle règle la loi de compression quand l'adiabatisme est légèrement mis en défaut par la conductibilité thermique et quand la pulsation ω des changements dans le temps est donnée.

6. **Amortissement du son dans l'air dû à la diffusion réciproque de ses constituants.** — Considérons une onde sonore se propageant dans l'air. A un instant donné, en un point donné, supposons qu'il y ait une compression. Aussitôt l'azote, plus léger que l'oxygène, va tendre à diffuser de lui-même vers les régions voisines moins comprimées. Ce phénomène diminue l'amplitude de la compression et se traduit comme tel par un amortissement. M. M. Brillouin l'a signalé autrefois, et dans son mémoire des *Phil. Trans.* de 1917, M. S. Chapman le rappelle également.

Grâce à la méthode que nous venons d'exposer, nous allons pouvoir calculer le coefficient d'amortissement que provoque ce phénomène.

Le cas que nous traitons est plus compliqué que les précédents, car cette diffusion réciproque des constituants de l'air introduit des modifications à la fois dans l'équation d'énergie, mettant en défaut l'adiabatisme, et dans les équations du mouvement, apportant une correction aux équations de Stokes.

Les nouvelles équations du mouvement d'un mélange de gaz, tenant compte de la diffusion, ont été données par nous [1]. La nouvelle équation d'énergie, tenant compte de la diffusion, se trouve par contre dans le mémoire de Chapman que nous venons de citer.

Envisageons d'abord l'amortissement dû à la modification à l'équation d'énergie.

La nouvelle équation d'énergie dûe à Chapman est l'équation 12.19 de son mémoire. En l'absence de toute transformation d'énergie interne en travail, de tout mouvement de convection et de toute perte par conductibilité thermique, elle s'écrirait :

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \Sigma \frac{\partial}{\partial x} \frac{RT \sum_1^\infty r(\nu_1 \alpha_r + \nu_2 \alpha_{-r})}{\alpha'_0} u'_0. \tag{46}$$

Le premier Σ désigne une sommation pour les trois axes de coordonnées.

Le deuxième Σ représente une somme pour $r = 1, 2, 3\ldots$

α_r, α_r sont une double suite de coefficients introduits par Chapman,

u'_0 est une vitesse de diffusion définie par

$$\nu_0 u'_0 = \nu_1 (u_1 - u_0) = - D_{12} \frac{\partial \nu_1}{\partial x} \tag{47}$$

ν_1, ν_2, ν_0, nombre de molécules par unité de volume pour le gaz 1, le gaz 2 et le mélange.
u_1, u_2, u_0, vitesse d'ensemble en un point du gaz 1, du gaz 2, du mélange.
D_{12} coefficient de diffusion des deux gaz du mélange pris dans leurs proportions actuelles.

Chapman établit par ailleurs que

$$\Sigma \frac{\partial}{\partial x} \frac{RT \sum_1^\infty r(\nu_1 \alpha_2 + \nu_2 \alpha_{-r})}{\alpha'_0} u'_0$$

peut s'écrire :

$$- \Sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_0}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{RT}{J} \frac{D_T}{D_{12}} u'_0 \right) \tag{48}$$

J, équivalent mécanique,
D_T, coefficient de diffusion thermique donné en première approximation pour des molécules igides élastiques par :

$$D_T = 0{,}51\, \lambda_2 D_{12} \tag{49}$$

[1] *Annales de Physique*, 1927.

λ_1 et λ_2 étant les proportions des molécules de chaque sorte de sorte que :

$$D = A\nu_0 \frac{RT}{J} = - A\nu_0 RT \text{ en unités de travail} = ANP \tag{50}$$

En appelant A un coefficient numérique $\left(\frac{0{,}51}{\lambda_1}\right)$ de l'ordre de grandeur de 1, dépendant du reste du modèle moléculaire choisi pour les molécules d'azote et d'oxygène.

D'autre part, on a d'après (47) :

$$\frac{\partial u'_0}{\partial x} = - \frac{D_{12}}{\nu_0}\left(\frac{\partial^2 \nu_1}{\partial x^2}\right) \tag{51}$$

Or ν_1 a une variation $\delta\nu_1$ donnée par :

$$\delta\nu_1 = \nu_1\left(\frac{\delta V}{V}\right) \text{ en première approximation,} \tag{52}$$

d'où :

$$- \sum \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu_0}{\lambda_1\lambda_2}\,\frac{RT}{J}\,\frac{D_T}{D_{12}}\,u'_0\right) = - ApD_{12}\,\Delta\left(\frac{\delta V}{V}\right). \tag{53}$$

L'équation (46) devient alors :

$$\rho C_v \frac{\partial \delta T}{\partial t} = - ApD_{12}\,\Delta\left(\frac{\delta V}{V}\right). \tag{54}$$

Si nous revenons pour un instant à l'équation (30), en tenant compte de (33) on peut l'écrire :

$$\left.\begin{aligned}\rho C_v \frac{\partial \delta T}{\partial t} &= \theta\Delta\delta T\\ &= - \frac{p\theta}{C_v\rho}\,\Delta\left(\frac{\delta V}{V}\right).\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Il s'en suivait alors un coefficient d'amortissement

$$\alpha_3 = \frac{\theta\omega^2}{2c}\,\frac{T\rho}{P^2}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^2 = \frac{P\theta}{C_v\rho}\times\left(\frac{\omega^2 C_v T\rho^2}{2cP^3}\right)\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^2. \tag{43}$$

Reprenons alors la question de l'amortissement par diffusion.

Comparant (54) et (55) on voit qu'il nous suffit de remplacer dans l'expression (43) $\frac{P\theta}{c_v\rho}$ par $A\ P\,D_{12}$ pour trouver le coefficient d'amortissement α_4 :

$$\alpha_4 = AD_{12}\cdot\frac{\omega^2 C_v T\rho^2}{2cP^2}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^2. \tag{56}$$

Tenant compte de l'expression de P, $P = (C_p - C_v)\,\rho\,T$, cette expression se met aisément sous la forme

$$\alpha_4 = AD_{12}\,\frac{\omega^2}{2c}\cdot\frac{1}{C_v T\gamma^2} = AD_{12}\,\frac{\omega^2}{2c}\,\frac{\gamma-1}{\gamma^2}\cdot\frac{\rho}{P}. \tag{57}$$

On peut chercher aussi à écrire l'équation adiabatique corrigée en tenant compte de l'effet de diffusion. Il suffit pour cela de se rappeler qu'à α_4 correspond un $\Delta\gamma$ donné par :

$$\alpha_4 = \frac{\omega}{2c\gamma}\,\Delta\gamma,$$

soit :

$$\Delta\gamma = AD_{12}\omega(\gamma - 1)\frac{\rho}{P}. \tag{58}$$

L'équation adiabatique corrigée s'écrit donc ici :

$$PV^{\left(\gamma + iAD_{12}\omega(\gamma-1)\frac{\rho}{P}\right)} = C^{te}. \tag{59}$$

Quant à la valeur numérique de α_4, il faut pour la calculer prendre :

$$D_{12} = 0{,}073 \text{ cgs},$$

valeur du coefficient de diffusion de l'azote et de l'oxygène. On trouvera alors

$$\alpha_4 = 0{,}3.10^{-6} \text{ cgs} \tag{60}$$

pour une fréquence de 6 000 cycles, en supposant $A = 1$

Une théorie cinétique, développée en employant pour les molécules d'oxygène et d'azote des modèles moléculaires adaptés à une bonne représentation des faits, nous fournirait pour A une valeur numérique exacte, mais pour l'instant la valeur numérique même nous importe peu ; les résultats obtenus nous montrent déjà que la diffusion fournit un coefficient d'amortissement six fois moindre environ que celui dû à la viscosité.

7. **Autre amortissement du son dû à la diffusion des constituants de l'air.** — En toute rigueur, nous ne pouvons pas dire, même en première approximation, que l'expression (57) donnant la valeur de α_4 représente l'amortissement du son dû à la diffusion, car l'existence de la diffusion vient aussi affecter les équations du mouvement, circonstance dont nous n'avons pas encore tenu compte. La correction de diffusion apportée aux équations du mouvement va nous fournir un nouveau coefficient d'amortissement α_5 et ce sera la somme $\alpha_4 + \alpha_5$ qui représentera le coefficient d'amortissement total dû à la diffusion.

Les équations du mouvement des mélanges de gaz, telles que nous les a fournies la théorie cinétique dans le travail cité plus haut, tiennent compte de cette diffusion, et ce sont elles que nous allons utiliser. Nous allons montrer qu'elles conduisent en première approximation à une absence d'amortissement : $\alpha_5 = 0$.

Elles s'écrivent :

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\eta}{3}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 3\Delta u\right\}$$
$$+ \frac{D_0}{3}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2\nu_0}\right)\left[\sum_0^\infty (2r+3)\delta_r P_1 + \sum_0^\infty (2r+3)\delta_{-r} P_2\right] \tag{61}$$

pour le mouvement du mélange lui-même, avec les notations suivantes :

X, force extérieure par unité de volume
D_0 coefficient
δ_r, δ_{-r}, série de coefficients numériques pour $r = 0, 1, 2\ldots$
P_1, P_2, P, pressions partielles et totale des deux constituants et du mélange.

On peut aussi écrire les équations du mouvement de l'un ou l'autre des constituants : en un point du gaz, ceux-ci ont chacun une densité, une pression, une vitesse définies. On a, par exemple, pour le gaz affecté de l'indice 1 :

$$\rho_1\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = \rho_1 X_1 - \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\eta}{3}\left(\frac{\nu_1\Sigma\gamma_r}{\nu_1\Sigma\gamma_r + \nu_2\Sigma\gamma_{-r}}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 3\Delta u\right]$$
$$+ \frac{D_0}{3}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2\nu_0}\right)\Sigma(2r+3)\delta_r P_1, \tag{62}$$

γ_r, γ_r, nouvelle série de coefficients numériques.

Ces divers coefficients $\delta_r \delta_{-r}$, γ_r, γ_{-r}, D_0, etc., sont introduits par Chapman dans son mémoire déjà cité.

Dans le calcul actuel, d'autre part, nous négligeons les petits écarts à l'équilibre adiabatique et nous écrivons :

$$\frac{\delta P}{P} + \gamma \frac{\delta V}{V} = 0. \tag{63}$$

Le calcul suit alors une marche analogue à celle du § 3 :

Nous dérivons l'équation de continuité, en posant $\frac{\delta V}{V} = -\frac{\delta \rho}{\rho}$:

$$-\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\delta V}{V}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dv}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dw}{dt}\right) = 0. \tag{64}$$

Pour abréger un peu, posons $-\frac{\delta V}{V} = s$. Remplaçons $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ par leurs valeurs tirées des équations du mouvement, il vient :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - \frac{4}{3}\frac{\eta}{\rho}\Delta\frac{ds}{dt} - c^2 \Delta s + \frac{D_0}{3\rho}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2\nu_0}\right)\left[\Sigma(2r+3)\delta_r p_1 + \Sigma(2r+3)\delta_{-r} p_2\right]. \tag{65}$$

Dans le calcul de $\frac{\partial}{\partial t}\Delta\left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2\nu_0}\right)$ nous négligerons, comme il a été entendu au début, les produits de dérivées, d'où :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2\nu_0}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\nu_0}\Delta(\nu_1 - \nu_2) - \frac{\nu_1 - \nu_2}{2\nu_0^2}\Delta\nu_0\right] \tag{66}$$

et, en introduisant s, s_1, s_2,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2\nu_0}\right) = \frac{1}{2\nu_0}\frac{\partial}{\partial t}\left[\Delta(\nu_1 s_1 - \nu_2 s_2) - (\nu_1 - \nu_2)\Delta s\right]. \tag{67}$$

Or, en première approximation, on a :

$$s_1 = s_2 = s,$$

donc ce terme est identiquement nul, comme on le vérifie facilement, à des produits de dérivées près.

Par conséquent, à l'ordre d'approximation qui nous a fourni les amortissements α_1, α_2, α_3, α_4, la modification aux équations du mouvement causée par la diffusion ne produit pas d'amortissement supplémentaire. Nous avons en première approximation :

$$\alpha_5 = 0$$

Ceci signifie simplement que la modification au mouvement du gaz produite par la diffusion ne se traduit pas directement par un amortissement, ce qui au fond est assez naturel : le fait qu'un des constituants va plus vite que l'autre n'entraîne pas par lui-même qu'une dissipation d'énergie supplémentaire ait lieu dans le gaz. Cependant cette différence dans le mouvement doit, par l'intermédiaire de la viscosité tout au moins, tendre à s'annuler; on doit donc trouver un amortissement de seconde approximation dû à cet effet.
Pour le calculer, il faut abandonner la relation

$$s_1 = s_2 = s$$

qui n'est valable qu'en première approximation.

En réalité, s se propage avec le coefficient d'amortissement dû à la viscosité :

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{\eta}{\rho} \frac{\omega^2}{c^3} \tag{68}$$

tandis que d'après l'équation (62) s_1 et s_2 sont amortis respectivement par :

$$\alpha' = \frac{2}{3} \frac{\eta}{\rho_1} \frac{\nu_1 \Sigma \gamma_r}{\nu_1 \Sigma \gamma_r + \nu_2 \Sigma \gamma_{-r}} \frac{\omega^2}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{\eta_1}{\rho_1} \frac{\omega^2}{c^3} \tag{69}$$

$$\alpha'' = \frac{2}{3} \frac{\eta}{\rho_2} \frac{\nu_2 \Sigma \gamma_{-r}}{\nu_1 \Sigma \gamma_r + \nu_2 \Sigma \gamma_{-r}} \cdot \frac{\omega^2}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{\eta_2}{\rho_2} \cdot \frac{\omega^2}{c^3}. \tag{70}$$

On peut alors effectuer le calcul des quantités telles que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta s_1$$

qui figurent en (67), en supposant à s, s_1, s_2 des expressions sinusoïdales amorties.

Le calcul ultérieur est de faible intérêt, puisqu'il ne doit donner en définitive, qu'un amortissement supplémentaire très faible. Dans le cas de l'air, j'ai trouvé finalement, en tenant compte de divers résultats numériques de la théorie cinétique, le nouveau coefficient *en c. g. s* :

$$\alpha_5 = \frac{2}{3} \frac{\eta}{\rho} \frac{\omega^2}{c^3} \left[\frac{h_2 \nu_2 - h_1 \nu_1}{\nu_0} \right] \times 150 \eta \frac{\omega}{c} \tag{71}$$

en posant :

$$h_2 = \frac{\dfrac{\rho \nu_2}{\rho_2} \Sigma \gamma_{-r} - (\nu_1 \Sigma \gamma_r + \nu_2 \Sigma \gamma_{-r})}{\nu_1 \Sigma \gamma_r + \nu_2 \Sigma \gamma_{-r}} \tag{72}$$

$$h_1 = \frac{\dfrac{\rho \nu_1}{\rho_1} \Sigma \gamma_2 - (\nu_1 \Sigma \gamma_r + \nu_2 \Sigma \gamma_{-r})}{\nu_1 \Sigma \gamma_r + \nu_2 \Sigma \gamma_{-r}}. \tag{73}$$

Etant donné que les quantités $\Sigma \gamma_r$, $\Sigma \gamma_{-r}$ sont voisines de 1 (voir S. Chapman), les quantités h_1, h_2 sont petites devant 1, de l'ordre de quelques centièmes au plus. On voit alors que dans toutes circonstances, le terme d'amortissement α_5 est très faible devant tous les termes $\alpha_1 \ldots \alpha_4$ déjà obtenus, mais pas absolument négligeable cependant :

On a en effet :

$$\frac{\alpha_5}{\alpha_1} = \left(\frac{h_2 \nu_2 - h_1 \nu_1}{\nu_0} \right) \times 150 \eta \frac{\omega}{c}.$$

Pour la fréquence 6 000, en prenant égale à 1/100 la valeur de la parenthèse, on peut s'attendre à une valeur du rapport de 3.10^{-4} environ.

Ce terme d'amortissement α_5 est cependant de beaucoup supérieur aux termes de seconde approximation qu'on peut trouver dans α_1, α_2, α_3, α_4 en poussant les calculs plus à fond, en écrivant les termes jusque au second ordre dans les équations, etc. On trouve ainsi par exemple :

$$\alpha_1 = \frac{2}{3} \frac{\eta}{\rho} \frac{\omega^2}{c^3} \left[1 - \frac{10}{9} \frac{\eta^2}{\rho^2} \frac{\omega^2}{c^4} \right] \tag{74}$$

et il est visible que la correction représentée par le second terme de la parenthèse est de beaucoup inférieure à α_5.

8. **Conclusions**. — En résumé, le coefficient d'amortissement du son dans l'air homogène et immobile se compose de cinq termes principaux, les trois premiers α_1,, α_2, α

calculés par Stokes, lord Rayeigh, les deux derniers que nous obtenons pour la première fois, croyons-nous. Nous résumons en un tableau leurs expressions et leurs valeurs.

CAUSE D'AMORTISSEMENT	EXPRESSION DU COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT	VALEUR EN C. G. S. POUR LA FRÉQUENCE 6 000
Viscosité (Stokes)	$\alpha_1 = \frac{2}{3}\frac{\eta}{\rho}\frac{\omega^2}{c^3}$	$\alpha_1 = 0{,}40.10^{-5}$
Rayonnement (Stokes-Lord Rayleigh)	$\alpha_2 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma c}.h$	$h = 0{,}4,\ \alpha_2 = 0{,}27.10^{-5}$
Conductibilité thermique (Stokes-Lord Rayleigh)...	$\alpha_3 = \frac{\delta}{\rho C_v}.\frac{\gamma - 1}{\gamma}.\frac{\omega^2}{2c^3}$	$\alpha_3 = 0{,}4.10^{-6}$
Transfert d'énergie modifié par la diffusion	$\alpha_4 = AD_{12}\frac{\omega^2}{2c}\frac{\gamma - 1}{\gamma^2}\frac{\rho}{P}$	$\alpha_4 = 0{,}3.10^{-6}$
Mouvement modifié par diffusion	$\alpha_5 \simeq \alpha_1\left[\frac{h_2\nu_2 - h_1\nu_1}{\nu_0}\right]150\eta\frac{\omega}{c}$ (en c. g. s.)	$\alpha_5 = 3.10^{-4}\alpha_1$

Dans le cas où la cause d'amortissement affecte directement l'équation de transfert d'énergie, qui s'écarte alors un peu de l'équation adiabatique pure et simple, nous avons trouvé qu'il existait à chaque fréquence un certain déphasage dans le temps entre les petites variations de volume et celles de pression. Ceci revient à donner à l'exposant $\frac{C_p}{C_v} = \gamma$ de l'équation adiabatique une valeur modifiée et comportant en particulier un terme imaginaire. Si l'on écrit cet exposant sous la forme :

$$\gamma + \mathrm{i}\,\Delta\gamma,$$

l'équation qui remplace l'équation adiabatique s'écrit :

$$pv^{\gamma + \mathrm{i}\,\Delta\gamma} = \text{constante}.$$

Cette forme n'ayant d'ailleurs de sens que pour de *petits déplacements* à partir de l'état initial. On trouve alors que le terme $\Delta\gamma$ est lié au coefficient d'amortissement par la relation très simple:

$$\alpha = \frac{\omega}{2c\gamma}\Delta\gamma. \tag{18}$$

Ainsi, l'amortissement α_2 dû au rayonnement conduit à un terme $\Delta\gamma_2$, celui α_3, dû a la conductibilité conduit à $\Delta\gamma_3$, celui α_4 dû à la diffusion conduit à $\Delta\gamma_4$ et l'équation quasi-adiabatique générale doit s'écrire :

$$pv^{\gamma + \mathrm{i}(\Delta\gamma_2 + \Delta\gamma_3 + \Delta\gamma_4)} = 0. \tag{75}$$

Quant à α_1, il conduit bien aussi à un terme $\Delta\gamma_1$, mais ce terme n'a aucune existence physique, puisque pour calculer l'amortissement dû à la viscosité α_1, on conserve l'équation adiabatique. La signification de $\Delta\gamma_1$ est purement mathématique et représente la modification qu'il faudrait faire subir à l'équation $pv^\gamma =$ constante pour retrouver l'amortissement de viscosité α_1 sans introduire la viscosité dans les équations du mouvement. Il en est du reste de même de α_5 qui conduit aussi à un $\Delta\gamma_5$ sans signification physique.

Par contre, l'équation (75) représente fidèlement, pour de petits écarts à l'état d'équilibre les propriétés thermodynamiques des gaz subissant des actions à la pulsation ω.

Manuscrit reçu le 9 Octobre 1930.