

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/327582107>

# METHODE DES ELEMENTS FINIS

Book · September 2018

---

CITATIONS

2

---

READS

17,849

1 author:



[Deghboudj Samir](#)

Université de Tébessa

63 PUBLICATIONS 143 CITATIONS

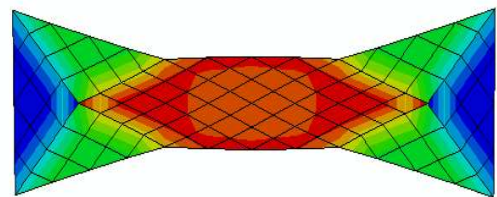
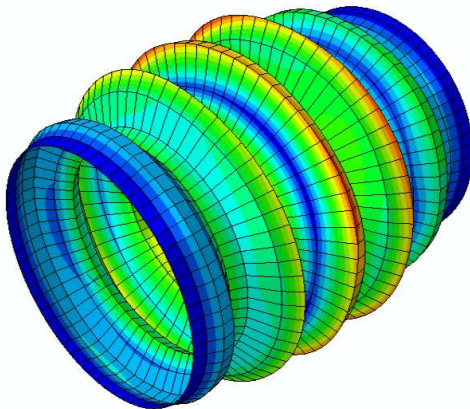
SEE PROFILE

Université Larbi Tébessi-Tébessa  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Mécanique

## POLYCOPIE DE COURS

# METHODE DES ELEMENTS FINIS

Présenté par :  
Dr : DEGHBODJ Samir



## • Préface

La **méthode des éléments finis (MEF)** est une méthode numérique utilisée pour résoudre certains des problèmes de la physique. C'est une méthode qui permet de déterminer une solution approchée sur un domaine spatial, c'est-à-dire qui permet de calculer un champ (de scalaires, de vecteurs, de tenseurs) qui correspond à certaines équations et à certaines conditions imposées.

La méthode consiste à découper le domaine spatial en petits éléments, également appelés mailles, et à rechercher une formulation simplifiée du problème sur chaque élément, c'est-à-dire à transformer le système d'équations quelconque en un système d'équations linéaires. Chaque système d'équations linéaires peut se représenter par une matrice. Les systèmes d'équations pour tous les éléments sont ensuite rassemblés, ce qui forme une grande matrice ; la résolution de ce système global donne la solution approchée au problème.

Cet ouvrage est principalement inspiré du cours de **méthode des éléments finis** destiné aux étudiants en Master de la spécialité génie mécanique et ceux des cursus proches tels que le génie civil et l'hydraulique qui poursuivent des études de Master. Il représente en fait l'effort de plusieurs années d'enseignement.

Le contenu et la progression de cet ouvrage ont été conçus avec trois objectifs :

1. Apporter à l'étudiant de la discipline les éléments et les outils nécessaires pour résoudre numériquement des problèmes de la mécanique des solides.
2. Soutenir et contribuer aux efforts de l'enseignement de cette discipline (**MEF**) en mettant à la disposition de l'étudiant un document rigoureux et pratique.
3. Présenter aux étudiants, cette méthode ainsi que sa capacités et ses limites pour qu'ils enrichissent leurs culture dans le domaine.

Ce document est divisé en cinq chapitres : le premier a été consacré à un aperçu sur les **méthodes d'approximation**. Le deuxième chapitre comporte une présentation détaillée de **la méthode des éléments finis**. Ainsi nous avons présenté les différents types et formes des éléments unidimensionnel (**1D**), bidimensionnel (**2D**) et tridimensionnels (**3D**). Dans le troisième nous avons présenté les techniques de l'approximation et de l'assemblage en considérant des éléments uni dimensionnel (**1D**).

Nous avons aussi examiné dans le quatrième chapitre les éléments à forces axiales. Pour terminer le cinquième chapitre a été consacré à la mise en œuvre de **la méthode des éléments finis** avec des cas d'applications sur **les éléments finis barres** pour la **traction des poutres**, les éléments finis barres pour **la flexion des poutres** et en fin les **éléments finis treillis en 2D**.

• **Table des Matières**

**Chapitre 1 : Méthodes d'approximation**

1.1 Méthodes analytiques .....	1
1.1.1 Modèle mathématique.....	1
1.1.2 Formulation.....	1
1.1.3 Equations différentielles .....	2
1.2 Classification des équations aux dérivées partielles.....	2
1.3 Méthodes d'approximation .....	4
1.3.1 Définition de l'approximation.....	4
1.3.2 Approximation d'une grandeur physique.....	4
1.3.2 Méthode des résidus pondérés.....	5

**Chapitre 2 : Introduction à la méthode des éléments finis**

2.1 Introduction.....	12
2.2 Présentation de la méthode des éléments finis.....	12
2.3 Domaines d'application de la méthode des éléments finis.....	12
2.4 Principe de la méthode des éléments finis.....	14
2.5 Formes classique des éléments.....	15
2.6 Règles de partition du domaine en éléments.....	16
2.7 Principe de l'approximation par éléments finis.....	14
2.7.1 Élément fini uni dimensionnel (1D).....	17
2.7.2 Élément fini bi dimensionnel (2D).....	24
2.8 Construction des fonctions d'interpolation.....	26
2.9 Élément de référence.....	28
2.9.1 Intérêt des éléments de référence.....	28
2.9.2 Eléments de référence classiques.....	28
2.9.3 Construction des fonctions d'interpolation sur l'élément de référence .....	30

**Chapitre 3 : Élément fini à une dimension (1 D)**

3.1 Introduction.....	37
3.2 Application de la méthode des éléments finis .....	37
3.2.1 Discrétisation.....	37
3.2.2 Règles de placement des nœuds.....	37
3.2.3 Fonctions d'interpolation.....	37
3.2.4 Equation générale de la fonction d'interpolation .....	39
3.3 Exemple d'utilisation d'un élément fini 1D.....	44
4.3 Matrice de rigidité élémentaire.....	50

---

5.3 Formation de la matrice de rigidité globale (GSM).....	51
<b>Chapitre 4 : Élément à forces axiales</b>	
1.4 Introduction.....	57
2.4 Modèle uni directionnel.....	57
3.4 Principe de la méthode de l'énergie potentielle minimale .....	58
<b>Chapitre 5 : Mise en œuvre de la méthode des éléments finis</b>	
5.1 Introduction .....	69
5.2 Element fini barre pour la traction des poutres .....	69
5.2.1 Mise en équation par le principe fondamental de la dynamique .....	69
5.2.2 Solution approchée par la méthode des éléments finis.....	71
5.3 Element fini barre pour la flexion des poutres .....	78
5.4 Element fini treillis.....	83
5.4.1 Interpolation sur l'élément fini barre.....	83
5.4.2 Élément treillis (2D).....	85

---

# Chapitre 1

## Méthodes d'approximation

### 1.1 Méthodes analytiques

Lors de la résolution d'un problème physique par les méthodes analytiques, on suit en général les étapes suivantes :

#### 1.1.1 Modèle mathématique

Pour écrire la formulation d'un problème, on adopte des modèles mathématiques c'est-à-dire une approche schématique du problème. Cette approche diffère selon le but à atteindre. Par exemple pour analyser le mouvement de la terre autour du soleil la terre et le soleil sont approchés par des points matériels tandis que si on veut étudier le mouvement de la terre par rapport à son axe, la terre n'est plus approchée par un point mais par une sphère par exemple. Le modèle mathématique est un point matériel dans la première approche et une sphère dans la seconde.

#### 1.1.2 Formulation

Une fois le modèle adopté, on écrit sa formulation, c'est-à-dire les équations qui régissent le problème. Le problème est décrit en général par des équations aux dérivées partielles.

**Exemples :** Quelques problèmes physiques rencontrés et qui sont régis par des équations de ce type:

#### a) Equation de la flexion simple

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M(x) \quad (1.1)$$

E: module de Young

I: moment quadratique par rapport à l'axe

y : déformée

M(x) : moment de flexion

#### b) Corde vibrante

Son équation est donnée par

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

y = y(x,t) : représente la vibration transversale d'un point d'abscisse x de la corde à l'instant t.

#### c) Propagation de la chaleur

L'équation de la chaleur est donnée par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T \quad (3.1)$$

$T = T(x, t)$  est la température en un point  $x$  du milieu unidimensionnel à l'instant  $t$ ,  $k$  est la constante de diffusion,  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$  est le laplacien.

#### d) Equation de Laplace (ou du potentiel)

L'équation est donnée par :

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (4.1)$$

On retrouve cette équation, représentant un phénomène stationnaire, dans de nombreuses applications : en transfert thermique,  $\phi$  représente la température  $T$ .

#### 1.1.3 Equations différentielles

Une équation différentielle représente une relation entre une ou plusieurs fonctions et leurs dérivées

**Exemple :**

$$\begin{aligned} \ddot{y} + a\dot{y} + by &= 0 \\ \dot{y} + 5y &= 0 \end{aligned}$$

L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de la différentiation au quel une des fonctions a été soumise.

**Exemple :**

L'ordre de  $\dot{y} + 5y$  est égal à 1

L'ordre de  $\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0$  est égal à 2

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques pour décrire des phénomènes physiques et biologiques.

**Exemple :**

L'équation de mouvement :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \quad (5.1)$$

Beaucoup de phénomènes physiques, en mécanique et électricité par exemple se ramènent à des équations différentielles.

**Exemple :**

si  $(t)$  est le temps,  $(y)$  est la position d'un mobile à l'instant  $(t)$ ,  $y(t)$  est la fonction qui à l'instant  $(t)$  associe la position  $(y)$  d'un mobile,  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$  sera défini comme étant la vitesse de ce mobile et  $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$  son accélération.

#### 1.2 Classification des équations aux dérivées partielles

Généralement les équations aux dérivées partielles (notées EDP) du second ordre sont classées en trois catégories appelées **elliptiques**, **paraboliques** et **hyperboliques**.



L'équation la plus utilisée est l'équation du second ordre, à deux variables indépendantes  $x$  et  $y$  et qui se présente sous la forme

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \phi}{\partial x} + E \frac{\partial \phi}{\partial y} + F \phi + G(x, y) = 0 \quad (6.1)$$

La classification est faite sur la base des coefficients A, B et C des dérivées de plus haut degré dans l'équation précédente écrite alors sous la forme

$$A \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f(x, y, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}) \quad (7.1)$$

Selon le signe du déterminant:

$$B^2 - 4AC \quad (8.1)$$

L'équation (7.1) ) est elliptique, parabolique ou hyperbolique.

- **Equation elliptique**

L'équation est elliptique si:

$$B^2 - 4AC < 0 \quad (9.1)$$

**Exemple 1**

Equation de Laplace 2D de transfert thermique :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Dans cette équation, nous avons :

$$A = 1, B = 0, C = 1 \Rightarrow B^2 - 4AC = -4 < 0$$

L'équation de Laplace 2D est de donc de type elliptique

- **Equation parabolique**

L'équation est parabolique si:

$$B^2 - 4AC = 0 \quad (10.1)$$

**Exemple 2**

Equation de conduction de la chaleur 1D :

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Dans cette équation, nous avons :

$$A = 1, B = 0, C = 0 \Rightarrow B^2 - 4AC = 0$$

L'équation de conduction thermique non stationnaire est parabolique.

- **Equation hyperbolique**

L'équation est hyperbolique si:

$$B^2 - 4AC > 0 \quad (11.1)$$

**Exemple 3**

L'équation d'onde 1D :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

$c$  représente la vitesse de propagation, dans cette équation, nous avons :

$$A = 1, B = 0, C = \frac{-1}{c^2} \Rightarrow B^2 - 4AC = \frac{4}{c^2} > 0$$

L'équation d'onde est de donc de type hyperbolique

### 1.3 Méthodes d'approximation

#### 1.3.1 Définition de l'approximation

Un modèle mathématique d'un système physique fait intervenir plusieurs variables ou fonctions, dites exactes  $u_{ex}(x)$  comme par exemple, température, déplacement, vitesse, etc. Celles-ci sont représentées par des fonctions "approchées"  $u(x)$  telles que la différence (erreur d'approximation) :  $e(x) = u(x) - u_{ex}(x)$  soit "petite" (de l'ordre de grandeur de la précision désirée).

#### 1.3.2 Approximation d'une grandeur physique

##### Application 1.1

Soit un champ de température  $T(x)$  qui est mesuré en trois points

x (mm)	T(x) (C°)
0	20
0,5	25
1	22

On veut avoir une valeur approchée de  $T_{ex}(x)$  en d'autres points qui ne coïncident pas avec les points de mesure. On choisi une approximation sous forme d'un polynôme du second degré soit:

$$T(x) = T(x, a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

Sachant que:

$$T_{ex}(x = 0) = T(0) = a_1 = 20$$

$$T_{ex}(x = 0,5) = T(0,5) = a_1 + 0,5a_2 + 0,25a_3 = 25$$

$$T_{ex}(x = 1) = T(1) = a_1 + a_2 + a_3 = 22$$

Ainsi on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} a_1 = 20 \\ a_1 + 0,5a_2 + 0,25a_3 = 25 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 22 \end{cases}$$

Après résolution de ce système on obtient:

$$a_1 = 20, a_2 = 18, a_3 = -16$$

Alors la fonction d'approximation est :

$$T(x) = 20 + 18x - 16x^2$$

On peut ainsi déterminer la valeur de la fonction  $T(x)$ , par exemple au point 0.7 :

$$T(0.7) = 20 + 18(0.7) - 16(0.7)^2 = 24.76$$

##### Application 2.1

Soit à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} = f(x)$$

Dans l'intervalle  $[0,1]$  avec les conditions aux limites :  $U_{exa}(x) = 0$  pour  $x=0$  et  $x=1$ ,  $f(x)$  est une fonction continue tel que  $f(0.25)=1$  et  $f(0.75)=0.25$ . On choisit une fonction d'approximation trigonométrique qui satisfait les conditions aux limites, soit :

$$U_{exa}(x) = U(x) = a_1 \sin(\pi x) + a_2 \sin(2\pi x)$$

Vérification :

$$\begin{aligned} U(0) &= a_1 \sin(0) + a_2 \sin(0) = 0 \\ U(1) &= a_1 \sin(\pi) + a_2 \sin(2\pi) = 0 \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} \Big|_{x=0.25} = -a_1 \pi^2 \sin(0.25\pi) - 4a_2 \pi^2 \sin(0.5\pi) = f(0.25) = 1$$

$$\frac{d^2 U(x)}{dx^2} \Big|_{x=0.75} = -a_1 \pi^2 \sin(0.75\pi) - 4a_2 \pi^2 \sin(1.5\pi) = f(0.75) = 0.25$$

La résolution de ce système conduit au résultat suivant:

$$a_1 = \frac{-5}{4\sqrt{2}\pi^2}$$

Et :

$$a_2 = \frac{-3}{32\pi^2}$$

Finalement la fonction d'approximation est donnée par :

$$U(x) = -\frac{5}{4\sqrt{2}\pi^2} \sin(\pi x) - \frac{3}{32\pi^2} \sin(2\pi x)$$

On peut déterminer la valeur de la fonction  $U(x)$ , par exemple au point 0.25 :

$$U(0.25) = -\frac{23}{32\pi^2} = -0.0728$$

Les méthodes d'approximation peuvent être classées en deux types :

- 1. Méthode des résidus pondérés** : Cette méthode est basée sur les équations locales qui sont des équations différentielles définies à l'intérieure du domaine et sur les conditions aux limites du problème définis sur sa frontière.
- 2. Méthode variationnelles**: C'est une formulation mathématique basée sur des considérations énergétiques.

### 1.3.2 Méthode des résidus pondérés

Elle consiste à approcher partiellement l'annulation du résidu d'une équation différentielle pour trouver une solution discrète approximative. Soit par exemple un champ scalaire  $U(M)$  défini sur un domaine  $(D)$ . On cherche la solution du modèle mathématique défini par les équations locales sur l'intérieure du domaine  $(D)$  et les conditions aux limites sur la frontière de ce domaine  $(\Gamma)$ . Ces équations forment un système d'équations différentielles défini comme suit :

$$\forall M \in D \quad L(U) = f(M, t) \quad (12.1)$$

$$\forall M \in \Gamma \quad C(U) = E(M, t) \quad (13.1)$$

Les relations (12.1) et (13.1) représentent respectivement, l'équation locale et les conditions aux limites. Le résidu représente l'erreur commise lorsqu'on utilise une approximation ( $U$ ) du champ ( $U_{\text{exa}}$ ) pour écrire les équations du problème. On définit le résidu par l'erreur sur l'équation locale

$$\forall M \in D \quad R(U) = L(U) - f(M, t) \quad (14.1)$$

Soit l'ensemble de fonctions dites de pondération  $P_i(M)$  définies sur le domaine ( $D$ ). La méthode des résidus pondérés consiste à annuler l'erreur commise sur le résidu en la pondérant par un nombre fini de fonctions  $P_i(M)$  ce qui correspond à des équations de la forme :

$$\forall P_i(M) \quad \int_{(D)} P_i(M) \cdot R(U) \cdot dV = 0 \quad (15.1)$$

Au lieu de résoudre l'équation  $R(U)=0$ , on considère le problème équivalent :

$$\forall \varphi \quad \int_{(D)} \varphi \cdot R(U) \cdot dV = 0 \quad (16.1)$$

### **Application 3.1**

Soit à résoudre l'équation différentielle suivante  $\frac{dU(x)}{dx} = -U$  définie dans l'intervalle  $[0,1]$  avec la condition aux limites  $U(0) = 1$ .

Soit la solution approchée

$$U(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

Sachant que  $U(0) = 1 = c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0$  alors  $c_0 = 1$ , il nous reste de déterminer  $c_1$  et  $c_2$ , pour cela on considère le résidu :

$$R(x) = \frac{dU(x)}{dx} + U(x)$$

Si  $U(x)$  est une solution exacte alors  $R(x) = 0$ . Si on remplace  $U(x)$  par la solution approchée on obtient :

$$U(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 \Rightarrow \frac{dU(x)}{dx} = c_1 + 2c_2 x$$

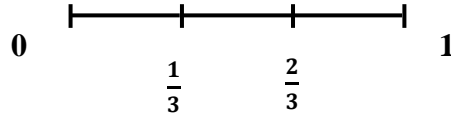
Alors:

$$R(x) = c_1 + 2c_2 x + 1 + c_1 x + c_2 x^2$$

On essaye de rendre ce résidu nul par un moyen quelconque. Plusieurs méthodes sont disponibles, les plus utilisées sont :

#### **a. Méthode de collocation par points**

Nous avons deux paramètres à déterminer  $c_1$  et  $c_2$ . On suppose que le résidu s'annule en deux points de l'intervalle  $[0,1]$ . On choisit  $x_1 = \frac{1}{3}$  et  $x_2 = \frac{2}{3}$



Alors :

$$R\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{4}{3}c_1 + \frac{7}{9}c_2 = 0$$

$$R\left(\frac{2}{3}\right) = 1 + \frac{5}{3}c_1 + \frac{16}{9}c_2 = 0$$

La résolution de ce système conduit à :  $c_1 = -0.931$  et  $c_2 = 0.3103$

La solution approchée est donc :

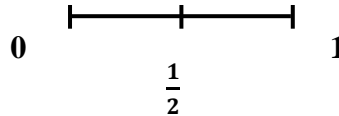
$$U(x) = 1 - 0.931x + 0.3103x^2$$

### b. Méthode de collocation par sous domaines

On suppose que la moyenne du résidu sur deux sous intervalles s'annule de la manière suivante :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} R. dx = \frac{1}{2} + \frac{5}{8}c_1 + \frac{7}{24}c_2 = 0$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 R. dx = \frac{1}{2} + \frac{7}{8}c_1 + \frac{25}{24}c_2 = 0$$



La résolution de ce système conduit à :  $c_1 = -0.9474$  et  $c_2 = 0.3158$

La solution approchée pour cette méthode est donc :

$$U(x) = 1 - 0.9474x + 0.3158x^2$$

### c. Méthode de Galerkin

Son principe consiste à considérer que les moyennes pondérées sur le domaine s'annulent. Les pondérations sont choisies parmi les fonctions qui ont servi à la construction de la solution approchée, soit alors :

$$\int_0^1 x. R. dx = \frac{1}{2} + \frac{5}{6}c_1 + \frac{11}{12}c_2 = 0$$

$$\int_0^1 x^2. R. dx = \frac{1}{3} + \frac{7}{12}c_1 + \frac{7}{10}c_2 = 0$$

La résolution de ce système conduit à :  $c_1 = -0.9143$  et  $c_2 = 0.2857$

La solution approchée pour cette méthode est donc :

$$U(x) = 1 - 0.9143x + 0.2857x^2$$

#### d. Méthode des moindres carrés

On suppose que la moyenne du carré du résidu est minimale sur le domaine.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_1} \int_0^1 R^2 \cdot dx = \int_0^1 R \cdot \frac{\partial R}{\partial c_1} dx = \frac{3}{2} + \frac{7}{3} c_1 + \frac{9}{4} c_2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial c_2} \int_0^1 R^2 \cdot dx = \int_0^1 R \cdot \frac{\partial R}{\partial c_2} dx = \frac{4}{3} + \frac{9}{4} c_1 + \frac{38}{15} c_2 = 0$$

La résolution de ce système conduit à :  $c_1 = -0.9427$  et  $c_2 = 0.311$

La solution approchée pour cette méthode est donc :

$$U(x) = 1 - 0.9427x + 0.311x^2$$

Ici nous avons effectué un changement de variable, on pose:

$$U = R^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial c_1} = \frac{\partial U}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial c_1} = 2R \frac{\partial R}{\partial c_1}$$

Et :

$$U = R^2 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial c_2} = \frac{\partial U}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial c_2} = 2R \frac{\partial R}{\partial c_2}$$

#### c. Solution exacte

La solution exacte est obtenue par la méthode de séparation des variables :

$$\frac{1}{U} dU = -dx \Rightarrow \ln(U) = -x + C$$

La solution générale est :

$$U = C \cdot e^{-x}$$

Si on applique la condition aux limites  $U(0) = 1$  on obtient  $U(0) = C \cdot e^0 = C = 1$

Donc :

$$U(x) = e^{-x}$$

#### **Application 4.1**

Résoudre l'équation différentielle suivante par la méthode des résidus pondérés

$$\frac{dU}{dx} = 1 - U$$

Pour  $0 < x < 5$ , avec la condition aux limites  $U(0) = 0$ . Choisissons une fonction d'approximation de la forme:

$$U(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Si on applique la condition aux limites :

$$U(0) = 0$$

On obtient :

$$U(0) = a_0 = 0$$

Alors :

$$U(x) = a_1x + a_2x^2$$

Le résidu s'écrit :

$$R(x) = \frac{dU}{dx} - 1 + U = 0$$

Si :

$$U(x) = a_1x + a_2x^2$$

Alors :

$$\frac{dU}{dx} = a_1 + 2a_2x$$

Ainsi :

$$R(x) = a_1 + 2a_2x - 1 + a_1x + a_2x^2 = 0$$

Appliquons la méthode de collocation par points en annulant le résidu dans deux points choisis du domaine où l'équation différentielle est définie.

Soient :

$$R(1) = 0$$

Et:

$$R(4) = 0$$

Alors :

$$R(1) = -1 + 2a_1 + 3a_2 = 0$$

$$R(4) = -1 + 5a_1 + 24a_2 = 0$$

Ceci conduit au système :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 24 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Après résolution on trouve  $a_1 = 0.6363$  et  $a_2 = 0.0909$ . La solution approchée pour cette méthode est donc :

$$U(x) = 0.6363x + 0.0909x^2$$

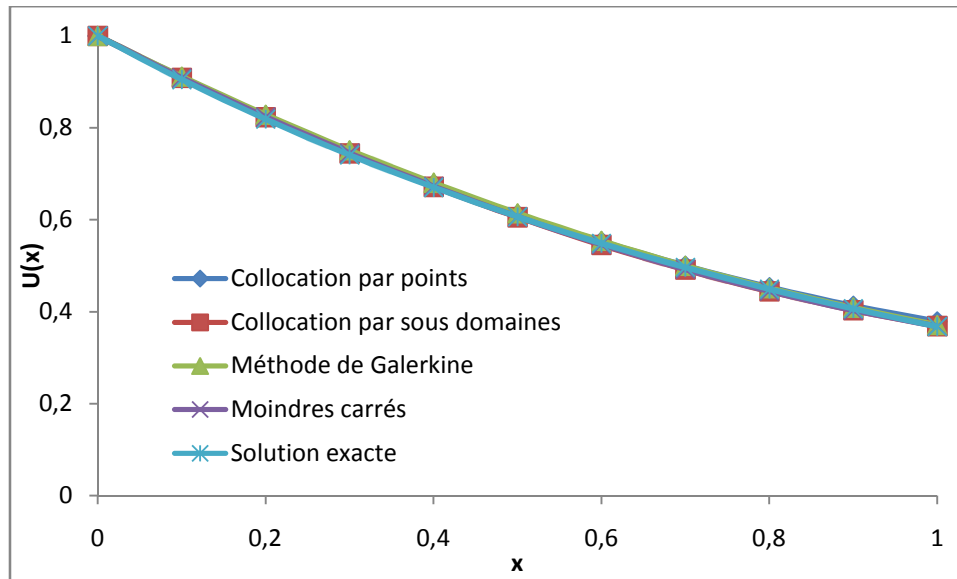


Fig. 1.1 Comparaison des résultats de différentes méthodes appliqués pour la résolution de l'équation différentielle

### Application 5.1

Soit le champ de vitesses mesuré en 4 points :

1. Donner une fonction d'approximation de ce champ de vitesses
2. Déterminer les vitesses aux abscisses : 0.25, 0.75, 1.75, 2.

x (m)	V (m/s)
0	0
0.5	9.8
1	17.3
1.5	25.2

#### • Choix de la fonction d'approximation

Choisissons une fonction d'approximation de la forme:

$$V(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$V(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2(0)^2 + a_3(0)^3 = a_0 = 0$$

$$V(0.5) = a_1(0.5) + a_2(0.5)^2 + a_3(0.5)^3 = 0.5a_1 + 0.25a_2 + 0.125a_3$$

$$V(1) = a_1 + a_2 + a_3 = 9.8$$

$$V(1.5) = a_1(1.5) + a_2(1.5)^2 + a_3(1.5)^3 = 1.5a_1 + 2.25a_2 + 3.375a_3$$

On forme le système d'équation suivant :

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.125 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1.5 & 2.25 & 3.375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.8 \\ 17.3 \\ 25.2 \end{Bmatrix}$$

Après résolution de ce système on obtient :

$$a_1 = 23.7$$

$$a_2 = -10$$

$$a_3 = 3.6$$

Donc :

$$V(x) = 23.7x - 10x^2 + 3.6x^3$$



- **Calcul des vitesses à différents abscisses**

$$V(0,25) = 23,7 \cdot (0,25) - 10 \cdot (0,25)x^2 + 3,6(0,25)^3 = 5,35$$

$$V(0,75) = 23,7 \cdot (0,75) - 10 \cdot (0,75)x^2 + 3,6(0,75)^3 = 13,66$$

$$V(1,25) = 23,7 \cdot (1,25) - 10 \cdot (1,25)x^2 + 3,6(1,25)^3 = 30,14$$

$$V(2) = 23,7 \cdot (2) - 10 \cdot (2)x^2 + 3,6(2)^3 = 36,20$$

## **Chapitre 2**

### **Introduction a la méthode des éléments finis**

#### **2.1 Introduction**

Pour analyser un phénomène naturel en général ou un problème d'ingénierie en particulier, on est souvent amené à développer un modèle mathématique pouvant décrire d'une manière aussi fiable que possible le problème en question. Le développement d'un modèle mathématique s'appuie généralement sur quelques postulats de base et plusieurs hypothèses simplificatrices pour aboutir à des équations gouvernantes qui sont souvent des équations différentielles auxquelles sont ajoutées des conditions aux limites.

#### **2.2 Présentation de la méthode des éléments finis**

La résolution analytique des problèmes mécaniques ne peut se faire que dans un nombre de cas limité, cependant les méthodes numériques basées sur la discrétisation de ces problèmes, présentent une alternative très efficace, souvent utilisées dans le domaine de la mécanique pour résoudre des problèmes complexes. La méthode des éléments finis est de toutes ses méthodes de discrétisation la plus utilisée car elle peut traiter des problèmes de géométrie complexe, elle couvre de nombreux domaines de la physique. Les moyens informatiques actuels (puissance des calculateurs, outils de visualisation et de simulation) la rendent facile à la mise en œuvre. La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne cesse de s'élargir. Le succès de la méthode est que sa formulation utilise des procédés standards qui se répètent au cours de la résolution de problèmes de natures différentes.

Cette méthode est l'une des techniques numériques les plus puissantes. L'un des avantages majeurs de cette méthode est le fait qu'elle offre la possibilité de développer un programme permettant de résoudre, avec peu de modifications, plusieurs types de problèmes. En particulier, toute forme complexe d'un domaine géométrique où un problème est bien posé avec toutes les conditions aux limites, peut être facilement traitée par la méthode des éléments finis.

#### **2.3 Domaines d'application de la méthode des éléments finis**

Les domaines d'application de la méthode des éléments finis sont très larges et très variés. En général pour les champs d'application de cette méthode sont :

1. La mécanique des milieux continus solides
2. La mécanique des milieux continus fluides

3. L'analyse thermique
4. L'électromagnétisme et l'électrostatique

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus solides, on peut classer les problèmes de la manière suivante (figure 1.2) :

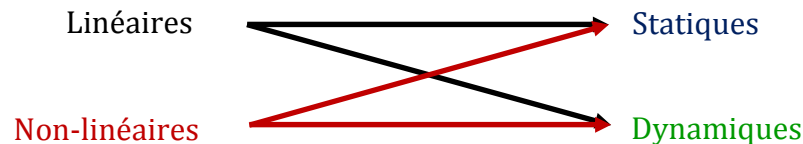


Fig. 1.2 Classification des problèmes de la mécanique

- **Statique linéaire**

Ce type d'analyse concerne principalement les domaines ou les matériaux élastiques linéaires. On cherche la déformation du matériau ( $\epsilon$ ) et la contrainte ( $\sigma$ ) pour différents types de sollicitations.

- **Dynamique linéaire**

La dynamique linéaire étudie les structures élastiques linéaires soumises à des efforts cycliques (vibrations forcées) ou à des sollicitations initiales (vibrations libres). Dans ce type d'analyses on recherche les déplacements et éventuellement les vitesses et les accélérations qui donnent les fréquences et les modes propres (analyse modale).

- **Les problèmes non linéaires**

Il existe trois classes de problèmes non linéaires :

1. Les non linéarités géométriques : Ce type d'analyse intervient lorsque les déplacements et les déformations ne sont plus petits. Dans ce cas la rigidité de la structure et les efforts dépendent des déplacements (inconnus). Ce type de non linéarité est souvent rencontré dans les études de la mise en forme des matériaux, dans le flambage et dans le post-flambage.
2. Les non linéarités de comportement : Lorsque le comportement du matériau n'est pas élastique linéaire, la rigidité de la structure dépend de la déformation. Le problème devient donc non linéaire. Ce type de non linéarité est généralement constaté dans le cas de la plasticité, la viscoplasticité et l'endommagement.
3. Les non linéarités de contact : Si au cours de la déformation les appuis changent, la rigidité de la structure sera modifiée, le problème est donc non linéaire. Ce problème est caractéristique de la mise en forme comme par exemple l'emboutissage d'une tôle.

## 2.4 Principe de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à diviser le domaine physique à traiter en plusieurs sous domaines appelés éléments finis à dimensions non infinitésimales. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments.

### **Etape 1 : Formulation des équations gouvernantes et des conditions aux limites.**

La majorité des problèmes d'ingénierie sont décrits par des équations différentielles aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites définies sur un domaine et son contour. L'application de la MEF exige une réécriture de ces équations sous forme intégrale. La formulation faible est souvent utilisée pour inclure les conditions aux limites.

### **Etape 2 : Division du domaine en sous domaines.**

Cette étape consiste à discrétiser le domaine en éléments et calculer les connectivités de chacun ainsi que les coordonnées de ses nœuds. Elle constitue ainsi la phase de préparation des données géométriques.

### **Etape 3 : Approximation sur un élément.**

Dans chaque élément la variable tel que le déplacement, la pression, la température, est approximée par une simple fonction linéaire, polynomiale ou autres. Le degré du polynôme d'interpolation est relié au nombre de nœuds de l'élément. L'approximation nodale est appropriée. C'est dans cette étape que se fait la construction des matrices élémentaires.

### **Etape 4 : Assemblage et application des conditions aux limites.**

Toutes les propriétés de l'élément (masse, rigidité,...) doivent être assemblées afin de former le système algébrique pour les valeurs nodales des variables physiques. C'est à ce niveau qu'on utilise les connectivités calculées à l'étape 2 pour construire les matrices globales à partir des matrices élémentaires.

### **Etape 5 : Résolution du système global :**

Le système global peut être linéaire ou non linéaire. Il peut définir soit un problème d'équilibre, de valeurs critiques ou de propagation. Le problème d'équilibre concerne les cas statiques et les cas stationnaires. Dans un problème de valeurs critiques, on s'intéresse aux fréquences et aux modes propres de vibrations du système physique étudié. Les problèmes de propagations, concernent les cas transitoires dans lesquels

sont déterminées les variations dans le temps des variables physiques. Les méthodes d'intégration pas à pas conviennent mieux pour ce type de problème. Les plus utilisées sont : méthode des différences finies centrales, méthode de Newmark, méthode de Wilson. A ces méthodes doivent être associées des techniques d'itération pour traiter le cas non linéaire. La plus fréquente est la méthode de Newton Raphson.

## 2.5 Formes classique des éléments

Il existe plusieurs formes d'éléments classiques correspondant à des domaines à une, deux ou trois dimensions. Chaque type d'élément est identifié par un nom précisant sa forme et par le nombre de nœuds géométrique qui le composent.

- **Éléments à une dimension**



Linéaire (2)

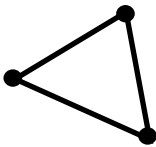


Quadratique (3)



Cubique (4)

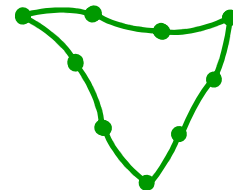
- **Éléments à deux dimensions triangulaires**



Linéaire (3)

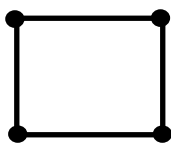


Quadratique (6)

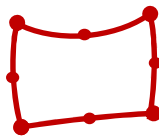


Cubique (9)

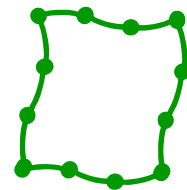
- **Éléments à deux dimensions quadrangulaires**



Linéaire (4)

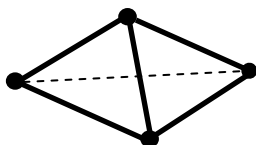


Quadratique (8)



Cubique (12)

- **Éléments à trois dimensions tétraédriques**



Linéaire (4)



Quadratique (10)



Cubique (16)

• **Éléments à trois dimensions hexaédriques (briques)**

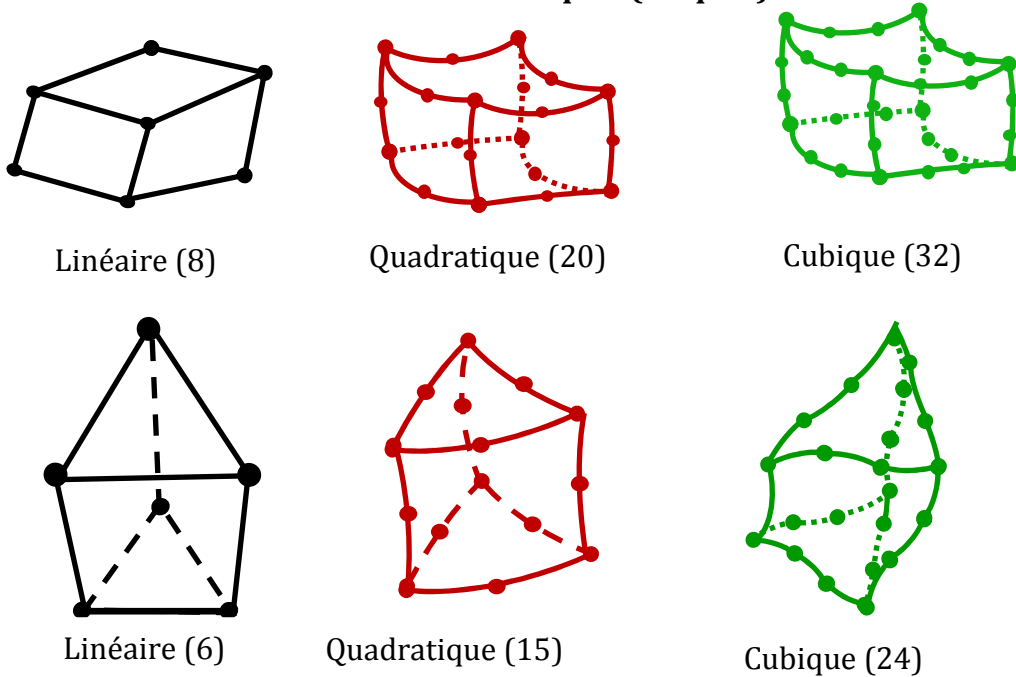


Fig. 2.2 Formes classique des éléments

**2.6 Règles de partition du domaine en éléments**

La partition d'un domaine ( $V$ ) en éléments ( $V^e$ ) doit obéir aux deux règles suivantes :

1. Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des points situés sur leurs frontières communes. Cette condition exclue tout recouvrement de deux éléments. Les frontières entre deux éléments peuvent être des points, des courbes ou bien des surfaces (figure 3.2).

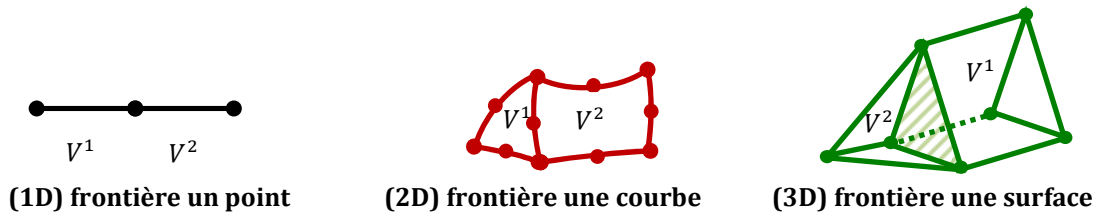


Fig. 3.2 Jonction des éléments à une, deux et trois dimensions

2. L'ensemble de tous les éléments ( $V^e$ ) doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine ( $V$ ). Lorsque la frontière de ( $V$ ) est constituée par des courbes ou des surfaces complexes que celles qui définissent les frontières des éléments, une erreur est inévitable (erreur de discrétisation géométrique). Cette erreur peut être réduite en diminuant la taille des éléments ou en utilisant des éléments à frontière plus complexe (figure 4.2).

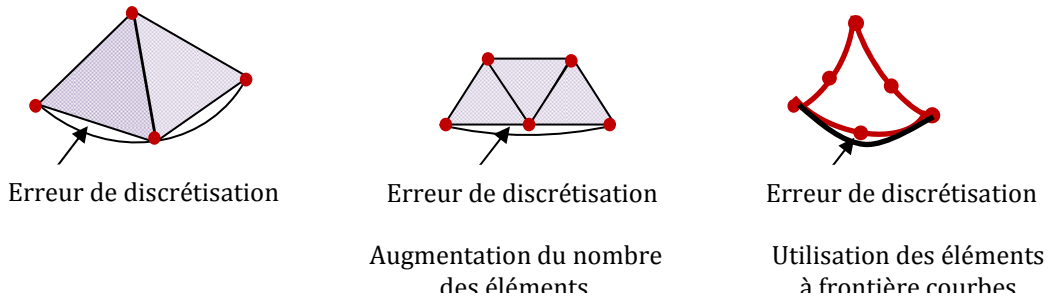


Fig. 4.2 Minimisation de l'erreur de discrétisation

## 2.7 Principe de l'approximation par éléments finis

### 2.7.1 Élément fini uni dimensionnel (1D)

Soit une fonction continue sur un domaine tel que :

$$U_{ex}(x) = f(x) \quad \forall \quad x_0 \ll x \ll x_L \quad (1.2)$$

On peut approximer cette fonction sur des sous domaines de telle sorte que l'erreur soit suffisamment petite :

$$e(x) = U(x) - U_{ex}(x) \quad \forall \quad x_i \ll x \ll x_{i+1} \quad (2.2)$$

Dans cette relation  $U_{ex}(x)$  représente la fonction exacte et  $U(x)$  la fonction d'approximation.

Considérons la fonction :

$$U_{ex}(x) = \sin(x) \quad \forall \quad x_0 \ll x \ll x_L \quad (3.2)$$

Cette fonction peut être approximée par un ensemble de fonctions de la forme :

$$U(x) = a_0 + a_1 x \quad \text{sur} \quad x_i \ll x \ll x_{i+1} \quad (4.2)$$

Ceci revient à approximer une courbe par des segments de droite (figure 3.2).

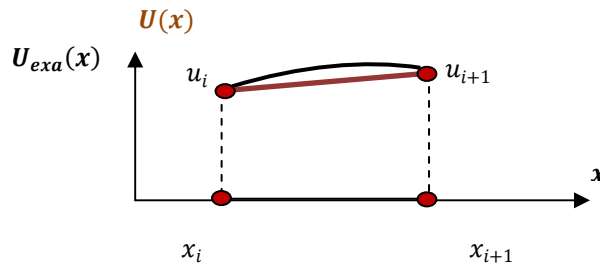


Fig. 5.2 Principe de l'approximation sur un élément

On suppose que l'erreur  $e(x)$  s'annule pour certaines abscisses  $x_i$  tel que :

$$U_{ex}(x_i) = U(x_i) \quad (5.2)$$

Soit alors :

$$U_{ex}(x_i) = U(x_i) = a_0 + a_1 x_i \quad (6.2)$$

Et :

$$U_{ex}(x_{i+1}) = U(x_{i+1}) = a_0 + a_1 x_{i+1} \quad (7.2)$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_{i+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{ex}(x_i) \\ U_{ex}(x_{i+1}) \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

De la forme:

$$[X] \cdot \{a\} = \{U\} \quad (9.2)$$

On peut donc écrire:

$$\{a\} = [X]^{-1} \cdot \{U\} \quad (10.2)$$

On peut généraliser ce concept pour toutes fonctions polynomiales de degré  $(n)$  :

$$U(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n \quad (11.2)$$

Ou bien :

$$U(x) = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \dots x^n \rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} \quad (12.2)$$

D'une manière générale :

$$U(x) = \langle P(x) \rangle \cdot \{a\} \quad (13.2)$$

$P(x)$  représente la base polynomiale.

Soit un polynôme du second degré de la forme :

$$U(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (14.2)$$

Ce polynôme peut être écrit de la manière suivante :

$$U(x) = \langle 1 \quad x \quad x^2 \rangle \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (15.2)$$

Pour annuler l'erreur aux points d'abscisses  $x_1, x_2, x_3$  on écrit :

$$U_{ex}(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \quad (16.2)$$

$$U_{ex}(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

$$U_{ex}(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2$$

Ou bien :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{ex}(x_1) \\ U_{ex}(x_2) \\ U_{ex}(x_3) \end{pmatrix} \quad (17.2)$$

Si on inverse ce système on obtient les coefficients  $\{a_i\}$ . La forme (12.2) de la fonction d'approximation n'est pas pratique car les coefficients  $\{a_i\}$  sont sans signification



physique. On peut écrire (12.2) sous une autre forme plus pratique en fonction des valeurs ponctuelles (nodales) de la fonction d'approximation.

D'après (13.2) et (10.2) , nous avons :

$$U(x) = \langle P(x) \rangle \{a\} \quad (18.2)$$

Et:

$$\{a\} = [X]^{-1}\{U\} \quad (19.2)$$

Alors :

$$U(x) = \langle P(x) \rangle [X]^{-1}\{U\} \quad (20.2)$$

Le produit  $\langle P(x) \rangle [X]^{-1}$  est un vecteur ligne qu'on peut noter  $\langle N(x) \rangle$ , alors :

$$U(x) = \langle N(x) \rangle \{U\} \quad (21.2)$$

La fonction (15.2) est appelée fonction d'approximation ou d'interpolation, elle définit une approximation nodale.

Considérons la relation (8.2) sur l'intervalle  $x_1 \ll x \ll x_2$  :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (22.2)$$

Alors :

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (23.2)$$

L'inverse de cette matrice est :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (24.2)$$

Alors :

$$U(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} \langle 1 \quad x \rangle \begin{bmatrix} x_2 & -x_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (25.2)$$

Ou bien:

$$U(x) = \left\langle \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right\rangle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (26.2)$$

Ou encore :

$$U(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot u_2 \quad (27.2)$$

De la forme :

$$U(x) = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \rangle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \langle N(x) \rangle (u) \quad (28.2)$$

Soit alors :

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad (29.2)$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (30.2)$$

Pour  $x = x_1$

$$\begin{aligned} N_1(x_1) &= \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1 \\ N_2(x_1) &= \frac{x_1 - x_1}{x_2 - x_1} = 0 \end{aligned} \quad (31.2)$$

Pour  $x = x_2$

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \frac{x_2 - x_2}{x_2 - x_1} = 0 \\ N_2(x) &= \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1 \end{aligned} \quad (32.2)$$

On peut écrire que :

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (33.2)$$

Lorsque le nombre de nœuds ( $n$ ) est grand, la construction de la fonction d'interpolation  $N(x)$  devient difficile. La méthode d'approximation nodale par sous domaines simplifie l'expression de  $U(x)$ . Elle consiste à partitionner le domaine d'étude ( $\Omega$ ) en un ensemble de sous domaines ( $\Omega^e$ ) et à définir sur chaque sous domaine ( $\Omega^e$ ) une approximation nodale en fonction des nœuds du sous domaine. Pour  $(M) \in (\Omega^e)$   $U(x) = \sum_{i=1}^n N_i^e(x) U_i^e = N^e U_n^e$ . ( $n$ ) est le nombre de nœuds de l'élément ( $\Omega^e$ ),  $U_n^e$  représente les déplacements des nœuds de l'élément. Les ( $\Omega^e$ ) sont appelés les éléments,  $x_i$  les coordonnées nodales et  $U_i = U_i(x_i)$  les variables nodales.

### **Application 1.2**

Soit à approcher une fonction exacte  $U_{exa}(x)$  définie sur un domaine ( $V$ ) (figure 4.2). On choisit un ensemble composé de ( $n$ ) points sur le domaine ( $V$ ). Ces points sont appelés nœuds géométriques. Ils peuvent coïncider avec les nœuds d'interpolation. On remplace le domaine ( $V$ ) par un ensemble d'éléments ( $V^e$ ) de forme relativement simple.

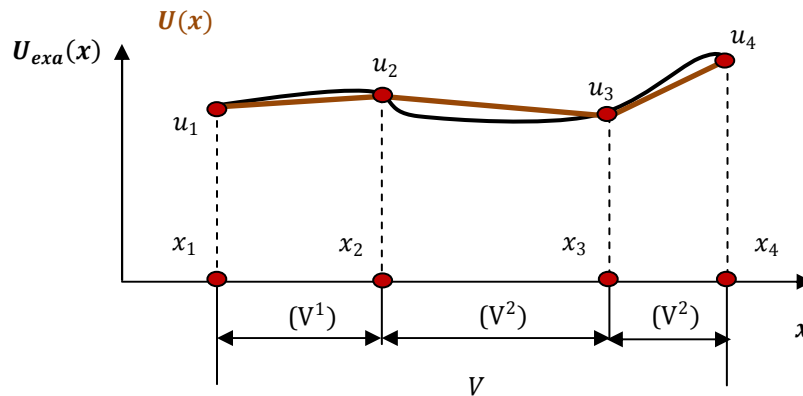


Fig. 6.2 Définition de la géométrie des éléments

- **Définition de la géométrie des éléments**

Les nœuds sont numérotés de gauche à droite de 1 à 4. 1,2,3 et 4 (3 éléments linéaire et 4 nœuds).

- Coordonnées nodales :  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$
- Domaine complet :  $x_1 \leq x \leq x_4$
- Les éléments :
  - $(V^1) \quad x_1 \leq x \leq x_2$
  - $(V^2) \quad x_2 \leq x \leq x_3$
  - $(V^3) \quad x_3 \leq x \leq x_4$

- **Construction des fonctions approchées**

On choisit des fonctions d'approximations  $U^e(x)$  linéaires sur chaque élément :

**Elément 1**

Définit sur le domaine  $(V^1)$  :  $x_1 \leq x \leq x_2$

$$U^1(x) = N_1(x).u_1 + N_2(x).u_2$$

$N_1$  et  $N_2$  sont des fonctions linéaires qui vérifient la relation (27.2).

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \Rightarrow N_1(x_1) = 1 \text{ et } N_1(x_2) = 0$$

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow N_2(x_1) = 0 \text{ et } N_2(x_2) = 1$$

Alors :

$$U^1(x_1) = N_1(x_1).u_1 + N_2(x_1).u_2 = 1.u_1 + 0.u_2 = u_1$$

$$U^1(x_2) = N_1(x_2).u_1 + N_2(x_2).u_2 = 0.u_1 + 1.u_2 = u_2$$

**Elément 2**

Définit sur le domaine  $(V^2)$  :  $x_2 \leq x \leq x_3$

$$U^2(x) = N_2(x).u_2 + N_3(x).u_3$$

$N_2$  et  $N_3$  sont des fonctions linéaires qui vérifient la relation (27.2).

$$N_2(x) = \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} \Rightarrow N_2(x_2) = 1 \text{ et } N_2(x_3) = 0$$

$$N_3(x) = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \Rightarrow N_3(x_2) = 0 \text{ et } N_3(x_3) = 1$$

Alors :

$$U^2(x_2) = N_2(x_2).u_2 + N_3(x_2).u_3 = 1.u_2 + 0.u_3 = u_2$$

$$U^2(x_3) = N_2(x_3).u_2 + N_3(x_3).u_3 = 0.u_2 + 1.u_3 = u_3$$

### **Elément 3**

Définit sur le domaine  $(V^3)$  :  $x_3 \leq x \leq x_4$

$$U^3(x) = N_3(x).u_3 + N_4(x).u_4$$

$N_3$  et  $N_4$  sont des fonctions linéaires qui vérifient la relation (27.2).

$$N_3(x) = \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3} \Rightarrow N_3(x_3) = 1 \text{ et } N_3(x_4) = 0$$

$$N_4(x) = \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} \Rightarrow N_4(x_3) = 0 \text{ et } N_4(x_4) = 1$$

Alors :

$$U^3(x_3) = N_3(x_3).u_3 + N_4(x_3).u_4 = 1.u_3 + 0.u_4 = u_3$$

$$U^3(x_4) = N_3(x_4).u_3 + N_4(x_4).u_4 = 0.u_3 + 1.u_4 = u_4$$

### **Application 2.2**

Pour approcher une fonction  $U(x)$  définie sur un domaine  $[0,1]$  on utilise la fonction d'approximation de la forme  $U(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . Si les valeurs de cette fonction  $U(x)$  aux points  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$  et  $x_3 = 1$  sont respectivement :  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  déterminer par une approximation par éléments finis la fonction  $U(x)$ .

Aux points  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$  et  $x_3 = 1$  nous avons :

$$\begin{cases} U(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = u_1 \\ U(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = u_2 \\ U(x_3) = a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 = u_3 \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Si on inverse ce système on obtient :

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Si on note :

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det[X]} \begin{bmatrix} x_2x_3^2 - x_3x_2^2 & -(x_3^2 - x_2^2) & (x_3 - x_2) \\ -(x_1x_3^2 - x_3x_1^2) & (x_3^2 - x_1^2) & -(x_3 - x_1) \\ x_1x_2^2 - x_2x_1^2 & -(x_2^2 - x_1^2) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix}$$

$$\det[X] = \det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} = 1 \cdot (x_2x_3^2 - x_3x_2^2) - x_1(x_3^2 - x_2^2) + x_1^2(x_3 - x_2)$$

$$\det[X] = x_2x_3^2 - x_3x_2^2 - x_1x_3^2 + x_1x_2^2 + x_3x_1^2 - x_2x_1^2$$

Nous savons que :

$$U(x) = \langle P(x) \rangle [X]^{-1} \{U\}$$

Et :

$$\langle P(x) \rangle = \langle 1 \quad x \quad x^2 \rangle$$

Donc :

$$U(x) = \langle 1 \quad x \quad x^2 \rangle \frac{1}{\det[X]} \begin{bmatrix} x_2x_3^2 - x_3x_2^2 & -(x_3^2 - x_2^2) & (x_3 - x_2) \\ -(x_1x_3^2 - x_3x_1^2) & (x_3^2 - x_1^2) & -(x_3 - x_1) \\ x_1x_2^2 - x_2x_1^2 & -(x_2^2 - x_1^2) & (x_2 - x_1) \end{bmatrix} \{U\}$$

Le développement de cette expression conduit à :

$$U(x) = \frac{1}{\det[X]} \langle P_1(x) \quad P_2(x) \quad P_3(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Avec:

$$P_1(x) = (x_2x_3^2 - x_3x_2^2) - x(x_3^2 - x_2^2) + x^2(x_3 - x_2)$$

$$P_2(x) = -(x_1x_3^2 - x_3x_1^2) + x(x_3^2 - x_1^2) - x^2(x_3 - x_1)$$

$$P_3(x) = (x_1x_2^2 - x_2x_1^2) - x(x_2^2 - x_1^2) + x^2(x_2 - x_1)$$

$$N_1(x) = \frac{1}{\det[X]} P_1(x)$$

$$N_2(x) = \frac{1}{\det[X]} P_2(x)$$

$$N_3(x) = \frac{1}{\det[X]} P_3(x)$$

- Application numérique

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2} \text{ et } x_3 = 1$$

$$\det[X] = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 0 \cdot 1^2 + 1 \cdot (0)^2 - \frac{1}{2} \cdot (0)^2 = \frac{1}{4}$$

$$P_1(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot (1)^2 - 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - x \left((1)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + x^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x^2$$

$$P_2(x) = -(0. (1)^2 - 1. (0)^2) + x((1)^2 - (0)^2) - x^2(1 - 0) = x - x^2$$

$$P_3(x) = \left(0. \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (0)^2\right) - x \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (0)^2\right) + x^2 \left(\frac{1}{2} - 0\right) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x^2$$

Alors :

$$N_1(x) = \frac{1}{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x^2\right) = 1 - 3x + 2x^2$$

$$N_2(x) = \frac{1}{\frac{1}{4}} (x - x^2) = 4x - 4x^2$$

$$N_3(x) = \frac{1}{\frac{1}{4}} \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x^2\right) = -x + 2x^2$$

Finalement on aboutit à l'expression de la fonction d'approximation  $U(x)$  :

$$U(x) = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$U(x) = (1 - 3x + 2x^2).u_1 + (4x - 4x^2).u_2 + (-x + 2x^2).u_3$$

### 2.7.2 Élément fini bi dimensionnel (2D)

On utilise avec une grande facilité la méthode des éléments finis pour résoudre des problèmes à deux dimensions pour différents matériaux et même pour des géométries et des contours complexes. Pour les problèmes à deux dimensions on utilise des éléments triangulaires ou rectangulaires.

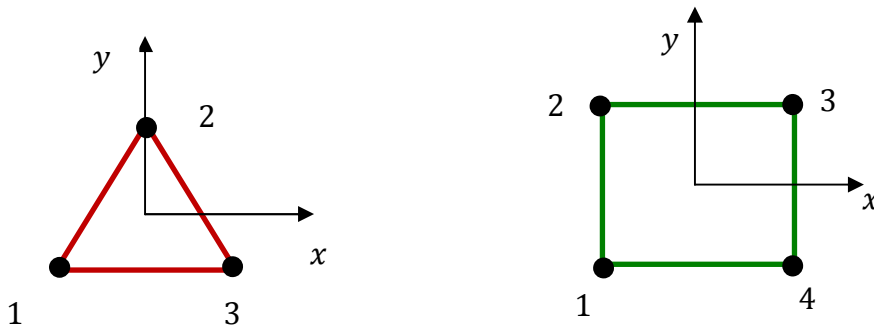


Fig. 7.2 Exemples d'élément à deux dimensions

- **Grille à deux dimensions**

L'élément triangulaire linéaire est composé de cotés droits et possède un nœud à chaque coin. Ce type d'élément est généralement recommandé pour les contours irréguliers. La fonction d'interpolation d'un élément triangulaire est de la forme :

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (34.2)$$

L'élément rectangulaire linéaire est composé de cotés droits et possède un nœud à chaque coin. On utilise l'élément rectangulaire dans le cas contours réguliers Sa fonction d'interpolation est de la forme :

$$\varphi = c_1 + c_2x + c_3xy + c_4y \quad (35.2)$$

• **Fonction d'interpolation d'un élément triangulaire à deux dimensions**

La fonction d'interpolation d'un élément à deux dimensions triangle est de la forme :

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y$$

$\varphi_i$ ,  $\varphi_j$  et  $\varphi_k$  représentent les valeurs nodales de la fonction ( $\varphi$ ) aux nœuds ( $i$ ), ( $j$ ) et ( $k$ ).

Dans le plan ( $x, y$ ) les coordonnées des nœuds ( $i$ ), ( $j$ ) et ( $k$ ) sont respectivement :

$i(x_i, y_i)$ ,  $j(x_j, y_j)$  et  $k(x_k, y_k)$ .

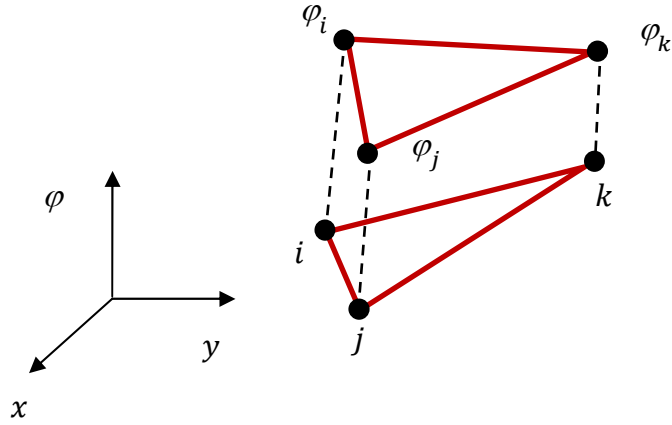


Fig. 8.2 Fonction d'interpolation d'un élément triangulaire à deux dimensions

Pour  $x = x_i$  et  $y = y_i$   $\varphi = \varphi_i$

Pour  $x = x_j$  et  $y = y_j$   $\varphi = \varphi_j$

Pour  $x = x_k$  et  $y = y_k$   $\varphi = \varphi_k$

Si on remplace dans l'équation (34.2) on obtient le système d'équation suivant:

$$\begin{cases} \varphi_i = \alpha_1 + \alpha_2x_i + \alpha_3y_i \\ \varphi_j = \alpha_1 + \alpha_2x_j + \alpha_3y_j \\ \varphi_k = \alpha_1 + \alpha_2x_k + \alpha_3y_k \end{cases} \quad (36.2)$$

La résolution de ce système permet de déterminer les coefficients de la fonction d'interpolation:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} [(x_jy_k - x_ky_j)\varphi_i + (x_ky_i - x_iy_k)\varphi_j + (x_iy_j - x_jy_i)\varphi_k] \quad (37.2)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} [(y_j - y_k)\varphi_i + (y_k - y_i)\varphi_j + (y_i - y_j)\varphi_k] \quad (38.2)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} [(x_k - x_j)\varphi_i + (x_i - x_k)\varphi_j + (x_j - x_i)\varphi_k] \quad (39.2)$$

La quantité  $(2A)$  représente l'aire du triangle (de l'élément).

$$2A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \quad (40.2)$$

La substitution de (37.2), (38.2) et (39.2) dans (34.2) et (36.2) nous conduit à l'expression de la fonction d'interpolation  $\phi$  :

$$\phi = N_i \phi_i + N_j \phi_j + N_k \phi_k \quad (41.2)$$

Avec :

$$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i x + c_i y] \quad (42.2)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} [a_j + b_j x + c_j y] \quad (43.2)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} [a_k + b_k x + c_k y] \quad (44.2)$$

Et :

$a_i = x_j y_k - x_k y_j$	$a_j = x_k y_i - x_i y_k$	$a_k = x_i y_j - x_j y_i$
$b_i = y_j - y_k$	$b_j = y_k - y_i$	$b_k = y_i - y_j$
$c_i = x_k - x_j$	$c_j = x_i - x_k$	$c_k = x_j - x_i$

## 2.8 Construction des fonctions d'interpolation

La méthode des éléments finis est basé sur le principe de l'utilisation d'une approximation nodale par sous domaines. Sur chaque sous domaine on approche la fonction  $U(x)$  par:

$$U(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \cdot u_i = N(x) \cdot u_n \quad (45.2)$$

Selon le type d'élément et de son nombre de nœuds, les fonctions d'interpolation diffèrent. En général on choisit des fonctions d'interpolation sous forme de séries polynomiales. Pour le cas des problèmes uni dimensionnels la fonction d'interpolation est généralement de la forme :

$$U(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i \quad (46.2)$$

Pour les problèmes bis dimensionnels elle est généralement de la forme :

$$U(x) = \sum_{i=1}^p a_i x^j y^k \quad j + k \leq n \quad (47.2)$$



Pour les problèmes tri dimensionnels :

$$U(x) = \sum_{i=1}^p a_i x^j y^k z^l \quad j + k + l \leq n \quad (48.2)$$

Dans les relations (47.2) et (48.2), (n) représente le degré d'interpolation.

Pour les cas simples, la détermination des fonctions d'interpolation peut être faite directement. En général on fait recours aux éléments de références.

- **Détermination directe**

L'objectif est de déterminer un polynôme qui prend des valeurs connues en un certain nombre de points (nœuds). Le nombre de termes qui composent ce polynôme doit être égal au nombre de points.

On utilise par exemple une interpolation de Lagrange de type ( $C^0$ ) pour un élément barre à deux nœuds.



Fig. 9.2 Elément barre à deux nœuds.

Au nœud (1) nous avons :

$$u(x_1) = u_1 \quad (49.2)$$

Et au nœud (2):

$$u(x_2) = u_2 \quad (50.2)$$

Sachant que :

$$U(x) = N_1(x).u_1 + N_2(x).u_2$$

Avec :

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

Et :

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Dans le cas uni dimensionnel, les polynômes utilisés dans l'écriture des fonctions d'interpolation sont généralement définis par :

$$N_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \quad (51.2)$$

Cette relation vérifie bien l'équation (33.2) :

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

On peut procéder de la même façon pour dans le cas d'un élément bi dimensionnel comme par exemple le cas d'un élément triangle à trois nœuds :

$$U(x) = N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 + N_3 \cdot u_3 \quad (52.2)$$

La présence de trois nœuds implique trois coefficients dans l'écriture de la fonction de forme  $N_i(x)$  :

$$N_i(x) = a_i + b_i x + c_i y \quad (53.2)$$

Avec :

$$N_1(x) = \frac{1}{2A} [(y_3 - y_2)(x_2 - x) - (x_3 - x_2)(y_2 - y)] \quad (54.2)$$

$$N_2(x) = \frac{1}{2A} [(y_1 - y_3)(x_3 - x) - (x_1 - x_3)(y_3 - y)] \quad (55.2)$$

$$N_3(x) = \frac{1}{2A} [(y_2 - y_1)(x_1 - x) - (x_2 - x_1)(y_1 - y)] \quad (56.2)$$

## 2.9 Elément de référence

L'élément de référence est un élément de forme simple qui peut être transformé en chaque élément réel par une transformation géométrique ( $\tau$ ) comme montré sur la figure 8.2.

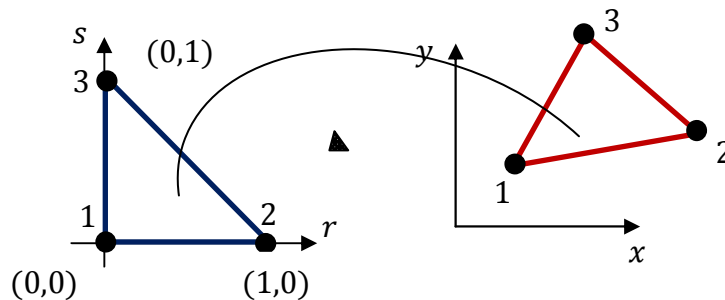


Fig.10.2 Elément de référence à deux dimensions

La transformation ( $\tau$ ) définit les coordonnées ( $x$ ) d'un point de l'élément réel en fonction des coordonnées ( $r$ ) de l'élément de référence :

$$\tau : r \rightarrow x = x(r) \quad (57.2)$$

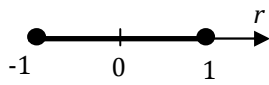
### 2.9.1 Intérêt des éléments de référence

L'élément de référence permet de remplacer la détermination des fonctions d'interpolation sur l'élément réel par celles sur l'élément de référence à cause de sa forme très simple.

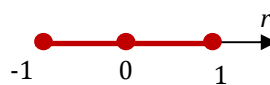
### 2.9.2 Eléments de référence classiques

En fonction de la dimension de l'élément, il existe plusieurs types d'élément de référence comme par exemple :

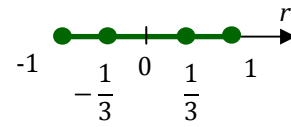
- **Élément de référence à une dimension**



Linéaire (2)

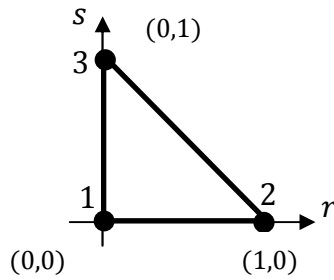


Quadratique (3)

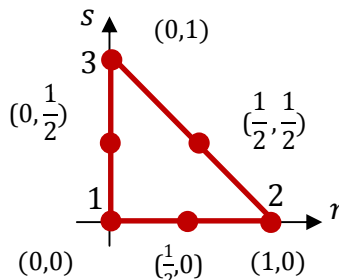


Cubique (4)

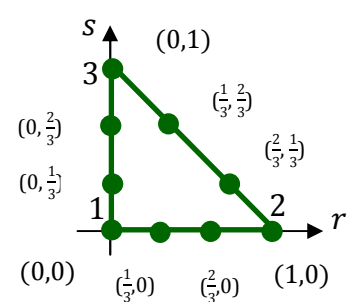
- **Élément de référence à deux dimensions triangulaires**



Linéaire (3)

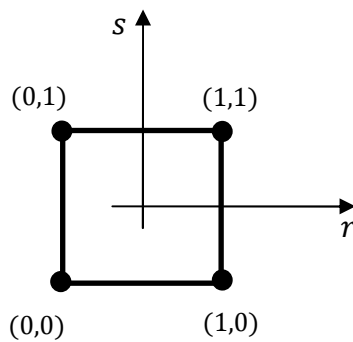


Quadratique (6)

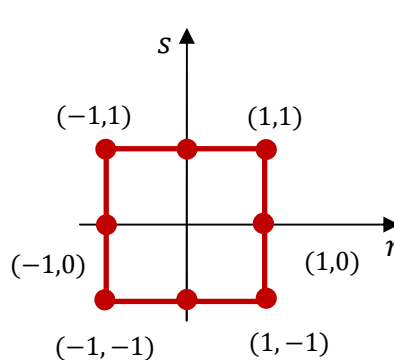


Cubique (9)

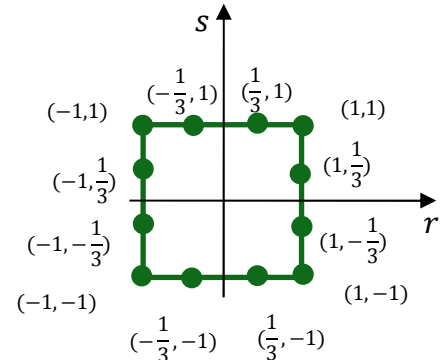
- **Éléments de référence à deux dimensions carrées**



Linéaire (4)

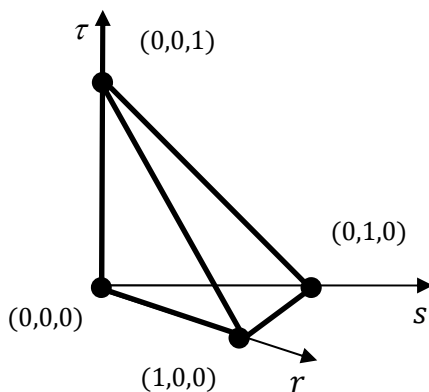


Quadratique (8)

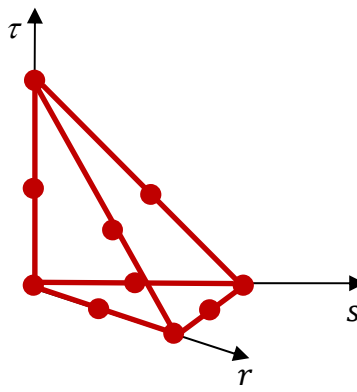


Cubique (12)

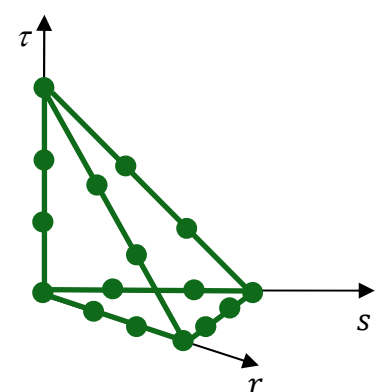
- **Éléments de référence à trois dimensions tétraédriques**



Linéaire (4)

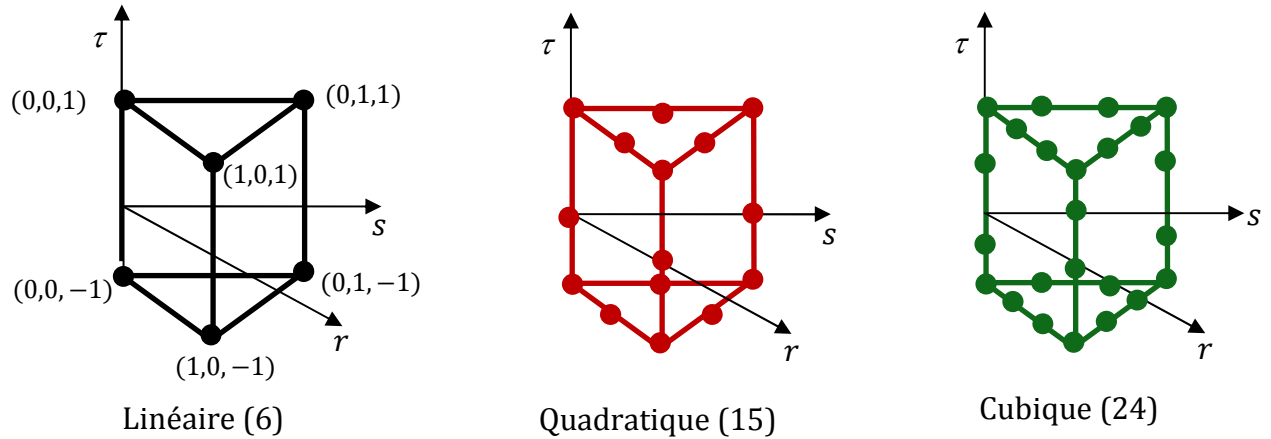


Quadratique (10)



Cubique (16)

• **Éléments de référence à trois dimensions prismatiques**



• **Éléments de référence à trois dimensions cubiques**

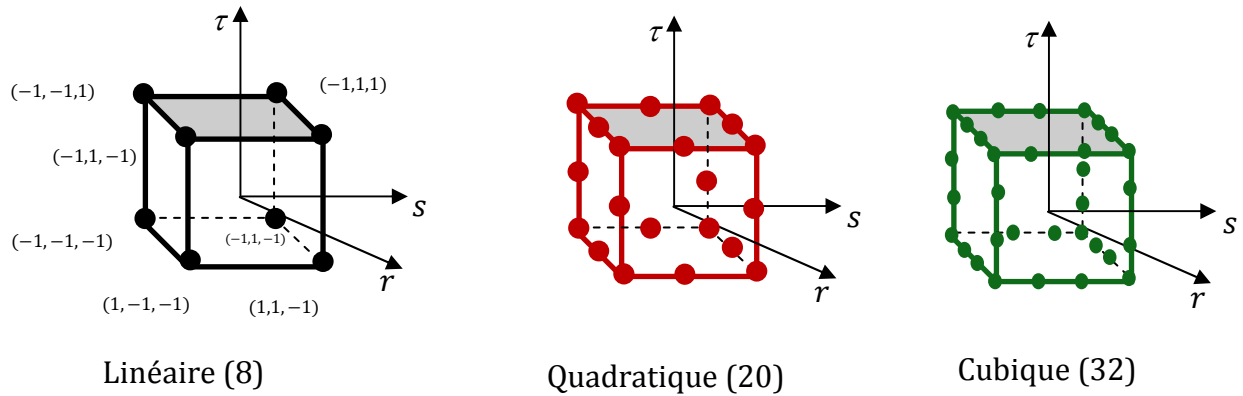


Fig. 11.2 Formes classique des éléments de références

**2.9.3 Construction des fonctions d'interpolation sur l'élément de référence**

• **Définitions**

1. Un élément est isoparamétrique si les nœuds géométriques sont confondus avec les nœuds d'interpolation.
2. Un élément est subparamétrique si le nombre de nœuds géométriques est inférieur au nombre de nœuds d'interpolation.
3. Un élément est superparamétrique si le nombre de nœuds géométriques est supérieur au nombre de nœuds d'interpolation.

• **Méthode générale de construction des fonctions d'interpolation**

La fonction  $u(r)$  est définie sur l'élément de référence par :

$$u(r) = \sum_{i=1}^n N_i u_i = N(r) u_n \quad (58.2)$$

Les fonctions  $N_i(r)$  sont composées de sommes de termes polynomiaux.

$$u(r) = \varphi(r)a = \sum_{j=1}^p \varphi_j(r)a_j \quad (59.2)$$

Dans la relation (59.2)  $\varphi(r)$  est la base polynomiale de l'interpolation.

Pour un problème unidimensionnel (1 D), la fonction  $u(r)$  est choisie comme suit :

$$u(r) = a_0 + a_1r + a_2r^2 + \dots \quad (60.2)$$

Pour un problème bidimensionnel (2 D), la fonction  $u(r)$  est choisie comme suit :

$$u(r) = a_0 + a_1r + a_2s + a_3rs + a_4r^2 + \dots \quad (61.2)$$

Le choix du nombre de terme ( $p$ ) du polynôme d'interpolation dépend de plusieurs paramètres tels que le type de l'élément et son nombre de nœuds. Pour un triangle à 6 nœuds, le déplacement  $u$  dépend de  $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  et  $u_6$ , soit 6 termes.

- Pour un élément de référence triangle à 6 nœuds, on choisi comme polynôme d'interpolation la fonction :

$$u(r, s) = a_0 + a_1r + a_2s + a_3rs + a_4r^2 + a_5s^2$$

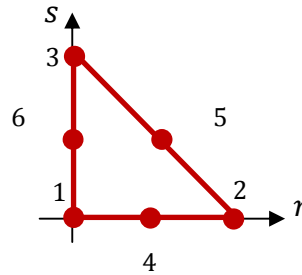


Fig. 12.2 Eléments de référence triangulaire quadratique à 6 nœuds

- Pour un élément de référence quadrangle à 8 nœuds, on choisi comme polynôme d'interpolation la fonction :

$$u(r, s) = a_0 + a_1r + a_2s + a_3rs + a_4r^2 + a_5s^2 + a_6s^2r + a_7r^2s$$

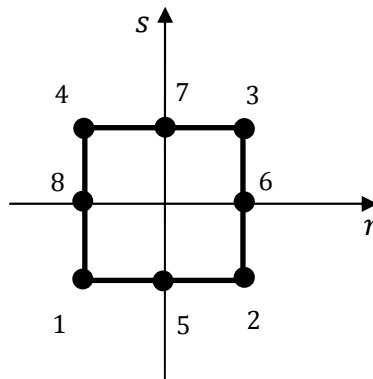


Fig. 13.2 Eléments de référence rectangulaire quadratique à 8 nœuds

### Construction de $N$ :

Sachant que :

$$u(r) = \varphi(r)a = \sum_{j=1}^p \varphi_j(r)a_j$$

On peut écrire que :

$$u(r) = \varphi_1(r)a_1 + \varphi_2(r)a_2 + \dots + \varphi_p(r)a_p \quad (62.2)$$

$p$ : nombre de terme de la base polynômiale.

En écriture matricielle (62.2) devient :

$$u(r) = [\varphi_1(r) \quad \varphi_2(r) \quad \dots \quad \varphi_p(r)] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{Bmatrix} = \varphi(r)a \quad (63.2)$$

En chaque nœud la condition suivante est vérifiée :

$$u(r_i) = u_i \quad (64.2)$$

Alors :

$$u_i = [\varphi_1(r_i) \quad \varphi_2(r_i) \quad \dots \quad \varphi_p(r_i)] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{Bmatrix} \quad (65.2)$$

Soit sous forme développée :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(r_1) & \varphi_2(r_1) & \dots & \varphi_p(r_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(r_n) & \varphi_2(r_n) & \dots & \varphi_p(r_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{Bmatrix} \quad (66.2)$$

On note :

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_1(r_1) & \varphi_2(r_1) & \dots & \varphi_p(r_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(r_n) & \varphi_2(r_n) & \dots & \varphi_p(r_n) \end{bmatrix}$$

Alors :

$$u_n = \varphi_n a \quad (67.2)$$

$\varphi_n$  représente la matrice de valeurs de la base polynomiale aux nœuds.

L'inversion du système (66.2) donne :

$$a = \varphi_n^{-1} u_n \quad (68.2)$$

Si on remplace (68.2) dans (59.2) on obtient:

$$u(r) = \varphi(r)a = \varphi(r)\varphi_n^{-1}u_n \quad (69.2)$$

On remplace (58.2) dans (69.2) pour obtenir :

$$u(r) = \varphi(r) \varphi_n^{-1} u_n = N(r) u_n \quad (70.2)$$

Finalement, on trouve l'expression de la fonction d'interpolation :

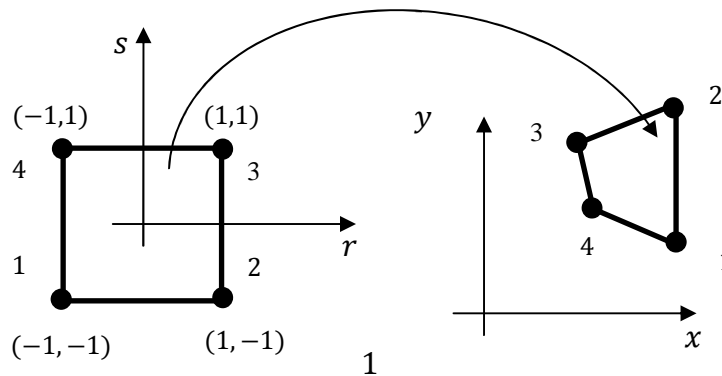
$$N(r) = \varphi(r) \varphi_n^{-1} \quad (71.2)$$

• **Etales de la construction de  $N$**

1. Choix du polynôme (le nombre de terme dépend selon le cas du type de l'élément et de son nombre de nœuds).
2. Détermination de la matrice  $\varphi_n$  des valeurs de la base polynomiale aux nœuds.
3. Inversion de  $\varphi_n$  pour l'obtention de  $\varphi_n^{-1}$ .
4. Calcul de  $N(r) = \varphi(r) \varphi_n^{-1}$ .

**Application 3.2**

On se propose de déterminer les fonctions d'interpolation  $N(r)$  pour le cas d'un élément quadrilatère isoparamétrique à 4 nœuds.



1. Choix de la base polynomiale : l'élément comporte 4 nœuds, on choisit donc une base de la forme :

$$\varphi = [1 \quad r \quad s \quad rs]$$

2. Détermination de la matrice  $\varphi_n$  des valeurs de la base polynomiale aux nœuds :

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} \varphi_1(r_1) & \varphi_2(r_1) & \cdots & \varphi_p(r_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(r_n) & \varphi_2(r_n) & \cdots & \varphi_p(r_n) \end{bmatrix}$$

Au nœud 1 :  $(r, s) = (-1, -1)$

$$\varphi = [1 \quad -1 \quad -1 \quad 1]$$

Au nœud 2 :  $(r, s) = (1, -1)$

$$\varphi = [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1]$$

Au nœud 3 :  $(r, s) = (1, 1)$

$$\varphi = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

Au nœud 4 :  $(r, s) = (-1, 1)$

$$\varphi = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]$$

Alors :

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3. Inversion de  $\varphi_n$  :

$$\varphi_n^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Calcul de  $N(r) = \varphi(r)\varphi_n^{-1}$ .

$$N(r) = \varphi(r)\varphi_n^{-1} = \frac{1}{4} [1 \quad r \quad s \quad rs] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Soit :

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

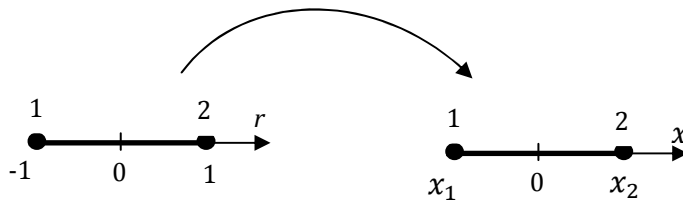
$$N_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

#### **Application 4.2**

On se propose de déterminer les fonctions d'interpolation  $N(r)$  pour le cas d'un élément poutre.



1. Choix de la base polynômiale : Pour l'élément poutre nous avons deux degrés de liberté dans chaque nœud (1 translation + 1 rotation). Soit en tout quatre degrés de liberté par élément :



$$u_n = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \left(\frac{du}{dr}\right)_1 \\ u_2 \\ \left(\frac{du}{dr}\right)_2 \end{Bmatrix}$$

On choisit la base polynômiale suivante :

$$\varphi = [1 \quad r \quad r^2 \quad r^3]$$

Et :

$$\frac{d\varphi}{dr} = [0 \quad 1 \quad 2r \quad 3r^2]$$

4. Détermination de la matrice  $\varphi_n$  des valeurs de la base polynomiale aux nœuds :

Nous avons :

$$u_n = \varphi_n a$$

Ou bien :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ \left(\frac{du}{dr}\right)_1 \\ u_2 \\ \left(\frac{du}{dr}\right)_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(r_1) \\ \frac{d\varphi}{dr}(r_1) \\ \varphi(r_2) \\ \frac{d\varphi}{dr}(r_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & r_1^3 \\ 0 & 1 & 2r_1 & 3r_1^2 \\ 1 & r_2 & r_2^2 & r_2^3 \\ 0 & 1 & 2r_2 & 3r_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix}$$

Au nœud 1 :  $r = -1$

$$\varphi = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = [0 \quad 1 \quad -2 \quad 3]$$

Au nœud 2 :  $r = 1$

$$\varphi = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$$

Ainsi :

$$\varphi_n = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_1^2 & r_1^3 \\ 0 & 1 & 2r_1 & 3r_1^2 \\ 1 & r_2 & r_2^2 & r_2^3 \\ 0 & 1 & 2r_2 & 3r_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Inversion de  $\varphi_n$  :

$$\varphi_n^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Calcul de  $N(r)$

$$N(r) = \varphi(r)\varphi_n^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & r & r^2 & r^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit :

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$$

## Chapitre 3

### Élément fini à une dimension (1 D)

#### 3.1 Introduction

La méthode des éléments finis consiste à diviser une région (domaine) unidirectionnelle en éléments linéaires puis développer une équation pour chaque élément. Cette procédure sera par la suite généralisée et appliquée sur tout le domaine, pour pouvoir produire une équation continue pour toute la région constituée d'éléments linéaires.

#### 3.2 Application de la méthode des éléments finis

Soit à résoudre l'équation différentielle suivante:

$$D \frac{d^2 \phi}{dx^2} + Q = 0 \quad (1.3)$$

Utilisons des éléments linéaires pour résoudre cette équation.

##### 3.2.1 Discrétisation

Soit un domaine d'étude (1D), on discrétise ce domaine en cinq éléments linéaires (figure 1.3), soit un maillage de six nœuds. Les nœuds et les éléments sont numérotés de gauche à droite.

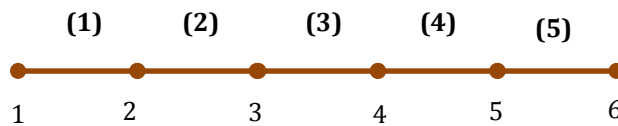


Fig.1.3 Maillage composé de cinq éléments linéaires

##### 3.2.2 Règles de placement des nœuds

On place les nœuds très proches dans les régions où la fonction  $\phi$  change brusquement. On place aussi des nœuds où il y'a un changement considérable des paramètres  $D$  et  $Q$  de l'équation (1.3). En fin on place un nœud à l'endroit où on cherche la valeur de la fonction  $\phi$ .

##### 3.2.3 Fonctions d'interpolation

L'élément linéaire à deux nœuds choisi est un segment de droite de longueur  $L$  ayant comme extrémités les nœuds  $(i, j)$  (figure 3.2). A gauche du nœud  $(i)$  la fonction  $\phi$  varie linéairement suivant l'équation :

$$\phi = a_1 + a_2 x \quad (2.3)$$

Pour déterminer les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  on utilise les conditions aux limites sur les nœuds  $(i, j)$

$$\phi = \phi_i \quad \text{pour } x = x_i \quad (3.3)$$

$$\phi = \phi_j \quad \text{pour } x = x_j$$

Alors:

$$\begin{aligned}\phi_i &= a_1 + a_2 x_i \\ \phi_j &= a_1 + a_2 x_j\end{aligned}\tag{4.3}$$

Après résolution de ce système d'équations on obtient :

$$a_1 = \frac{\phi_i x_j - \phi_j x_i}{x_j - x_i} = \frac{\phi_i x_j - \phi_j x_i}{L}\tag{5.3}$$

Et:

$$a_2 = \frac{\phi_j - \phi_i}{x_j - x_i} = \frac{\phi_j - \phi_i}{L}\tag{6.3}$$

On remplace les relations (5.3) et (6.3) dans la relation (2.3) pour obtenir:

$$\phi = \left( \frac{\phi_i x_j - \phi_j x_i}{L} \right) + \left( \frac{\phi_j - \phi_i}{L} \right) \cdot x\tag{7.3}$$

Soit après réarrangement :

$$\phi = \frac{(x_j - x)}{L} \cdot \phi_i + \left( \frac{x - x_i}{L} \right) \cdot \phi_j\tag{8.3}$$

L'expression de la relation (8.3) représente la forme standard de la fonction d'interpolation. Les valeurs nodales  $\phi_i$  et  $\phi_j$  sont multipliées par des fonctions linéaires qui sont appelées les fonctions de forme ou d'interpolation.

$$\phi = N_i \cdot \phi_i + N_j \cdot \phi_j\tag{9.3}$$

Ou bien en écriture matricielle :

$$\phi = [N] \{ \phi \}\tag{10.3}$$

Avec :

$$[N] = [N_i \quad N_j]\tag{11.3}$$

Et:

$$\{ \phi \} = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix}\tag{12.3}$$

### Remarques

1. Chaque fonction d'interpolation est égale à 1 à son propre nœud et égale à 0 sur l'autre nœud.
2. La somme de deux fonctions d'interpolation est égale à 1.
3. La fonction d'interpolation est une fonction polynomiale du même type (si l'équation (2.3) est linéaire, l'équation d'interpolation l'est aussi).
4. La somme des dérivées des fonctions d'interpolation est égale à 0 ( $N_i(x_j) = \delta_{ij}$ ).

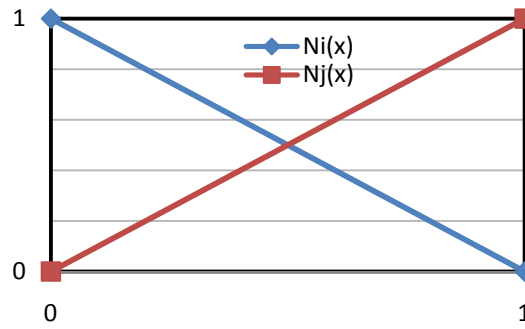


Fig.2.3 Représentation graphiques des fonctions de forme linéaires

### 3.2.4 Equation générale de la fonction d'interpolation

Une équation générale de la fonction d'interpolation peut être construite en connectant plusieurs équations linéaires avec les propriétés développées dans la section précédente. Chacune des équations peut être écrite sous la forme suivante :

$$\phi^{(e)} = N_i^{(e)} \cdot \phi_i^{(e)} + N_j^{(e)} \cdot \phi_j^{(e)} \quad (13.3)$$

(e) indique le numéro de l'élément.

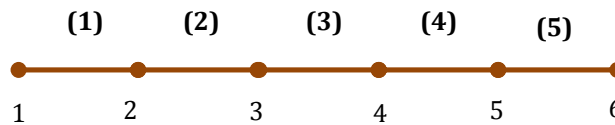
Avec :

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \quad (14.3)$$

Et :

$$N_j(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (15.3)$$

Considérons l'exemple précédant :



On définit la table de connectivité qui définit la numérotation des éléments et des nœuds.

Elément (e)	Nœud (i)	Nœud (j)
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6

Les fonctions d'interpolation pour chaque élément sont données comme suit :

$$\phi^{(1)} = N_1^{(1)} \cdot \phi_1^{(1)} + N_2^{(1)} \cdot \phi_2^{(1)}$$

$$\phi^{(2)} = N_2^{(2)} \cdot \phi_2^{(2)} + N_3^{(2)} \cdot \phi_3^{(2)}$$

$$\phi^{(3)} = N_3^{(3)} \cdot \phi_3^{(3)} + N_4^{(3)} \cdot \phi_4^{(3)}$$

$$\phi^{(4)} = N_4^{(4)} \cdot \phi_4^{(4)} + N_5^{(4)} \cdot \phi_5^{(4)}$$

$$\phi^{(5)} = N_5^{(5)} \cdot \phi_5^{(5)} + N_6^{(5)} \cdot \phi_6^{(5)}$$

### Application 1.3

Les coordonnées nodales  $x_i$  et  $x_j$  et les valeurs nodales  $\phi_i$  et  $\phi_j$  pour des éléments linéaires à deux nœuds sont données dans le tableau suivants :

1. Déterminer  $\phi$  pour différentes valeurs des abscisses ( $x$ ) données.
2. Déterminer  $\frac{d\phi}{dx}$  pour chaque cas.

N° (e)	x	$x_i$	$x_j$	$\phi_i$	$\phi_j$
1	0.5	0	2	60	42
2	3.6	3	4.5	28	36
3	7.2	6.5	7.5	64	53
4	1.8	0.5	3	0	-15
5	2.2	1	3	60	70

#### • Evaluation de la fonction $\phi$

On choisi des fonctions d'interpolation linéaires :

$$\phi^{(e)} = N_i \cdot \phi_i^{(e)} + N_j \cdot \phi_j^{(e)}$$

Avec :

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i}$$

$$N_j(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Donc :

$$\phi^{(e)} = \left( \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right) \cdot \phi_i^{(e)} + \left( \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) \cdot \phi_j^{(e)}$$

#### Elément 1 :

$$x = 0 \quad x_i = 0 \quad x_j = 2 \quad \phi_i = 60 \quad \phi_j = 42$$

$$\phi^{(1)}(0.5) = \left( \frac{2 - 0.5}{2} \right) \cdot 60 + \left( \frac{0.5 - 0}{2} \right) \cdot 42 = 55.5$$

#### Elément 2 :

$$x = 3.6 \quad x_i = 3 \quad x_j = 4.5 \quad \phi_i = 28 \quad \phi_j = 36$$

$$\phi^{(2)}(3.6) = \left( \frac{4.5 - 3.6}{1.5} \right) \cdot 28 + \left( \frac{3.6 - 3}{1.5} \right) \cdot 36 = 31.6$$

**Elément 3 :**

$$x = 7.2 \quad x_i = 6.5 \quad x_j = 7.5 \quad \phi_i = 0 \quad \phi_j = -15$$

$$\phi^{(3)}(7.2) = \left(\frac{7.5 - 7.2}{1}\right) \cdot 64 + \left(\frac{3.6 - 3}{1}\right) \cdot 53 = 56.3$$

**Elément 4 :**

$$x = 1.8 \quad x_i = 0.5 \quad x_j = 3 \quad \phi_i = 64 \quad \phi_j = 53$$

$$\phi^{(4)}(1.8) = \left(\frac{3 - 0.5}{2.5}\right) \cdot 0 + \left(\frac{1.8 - 0.5}{2.5}\right) \cdot (-15) = -7.8$$

**Elément 5 :**

$$x = 2.2 \quad x_i = 1 \quad x_j = 3 \quad \phi_i = 60 \quad \phi_j =$$

$$\phi^{(4)}(1.8) = \left(\frac{3 - 2.2}{2}\right) \cdot 60 + \left(\frac{2.2 - 1}{2}\right) \cdot 70 = -66$$

- **Evaluation de la fonction**  $\frac{d\phi}{dx}$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{dN_i}{dx} \cdot \phi_i^{(e)} + \frac{dN_j}{dx} \cdot \phi_j^{(e)} = \frac{\phi_j - \phi_i}{L}$$

**Elément 1 :**

$$x = 0 \quad x_i = 0 \quad x_j = 2 \quad \phi_i = 60 \quad \phi_j = 42$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{42 - 60}{2} = -9$$

**Elément 2 :**

$$x = 3.6 \quad x_i = 3 \quad x_j = 4.5 \quad \phi_i = 28 \quad \phi_j = 36$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{36 - 28}{1.5} = 5.33$$

**Elément 3 :**

$$x = 7.2 \quad x_i = 6.5 \quad x_j = 7.5 \quad \phi_i = 0 \quad \phi_j = -15$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{-15 - 0}{2.5} = -6$$

**Elément 4 :**

$$x = 1.8 \quad x_i = 0.5 \quad x_j = 3 \quad \phi_i = 64 \quad \phi_j = 53$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{53 - 64}{1} = -11$$

**Elément 5 :**

$$x = 2.2 \quad x_i = 1 \quad x_j = 3 \quad \phi_i = 60 \quad \phi_j = 70$$

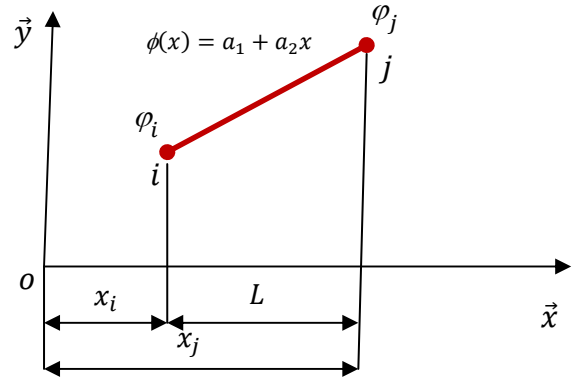
$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{70 - 60}{2} = 5$$

### Application 2.3

Soit un élément linéaire à deux nœuds ( $i$ ) et ( $j$ ) (figure) et soit  $\phi$  une fonction d'interpolation linéaire tel que :  $\phi(x) = a_1 + a_2x$  , avec les conditions aux limites suivantes :  $\phi(x_i) = \phi_i$  et  $\phi(x_j) = \phi_j$

Déterminer l'expression de  $\phi(x)$  en fonction de  $\phi_i$  et  $\phi_j$  et des fonctions d'interpolation  $N_i(x)$  et  $N_j(x)$ .

1. Démontrer que :  $N_i(x) + N_j(x) = 1$
2. Démontrer que :  $\frac{dN_i(x)}{dx} + \frac{dN_j(x)}{dx} = 0$



- **Fonction d'approximation sur l'élément**

$$\phi(x) = a_1 + a_2x$$

- **Conditions aux limites du problème**

$$\phi(x_i) = \phi_i$$

Et:

$$\phi(x_j) = \phi_j$$

L'application des conditions aux limites conduit au système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \phi_i = a_1 + a_2x_i \\ \phi_j = a_1 + a_2x_j \end{cases}$$

La résolution de ce système conduit à :

$$a_1 = \frac{\phi_i x_j - \phi_j x_i}{x_j - x_i} = \frac{\phi_i x_j - \phi_j x_i}{L}$$

Et :

$$a_2 = \frac{\phi_j - \phi_i}{x_j - x_i} = \frac{\phi_j - \phi_i}{L}$$

Si on remplace dans l'expression de  $\phi(x)$  on obtient :

$$\phi(x) = \frac{\phi_i x_j - \phi_j x_i}{L} + \left( \frac{\phi_j - \phi_i}{L} \right) x = \phi_i \frac{(x_j - x)}{L} + \phi_j \frac{(x - x_i)}{L}$$

De la forme :



$$\phi(x) = \phi_i \cdot N_i(x) + \phi_j \cdot N_j(x)$$

Démontrons que :

$$N_i(x) + N_j(x) = 1$$

$$N_i(x) + N_j(x) = \frac{(x_j - x)}{L} + \frac{(x - x_i)}{L} = \frac{(x_j - x_i)}{L} = \frac{L}{L} = 1$$

Démontrons que :

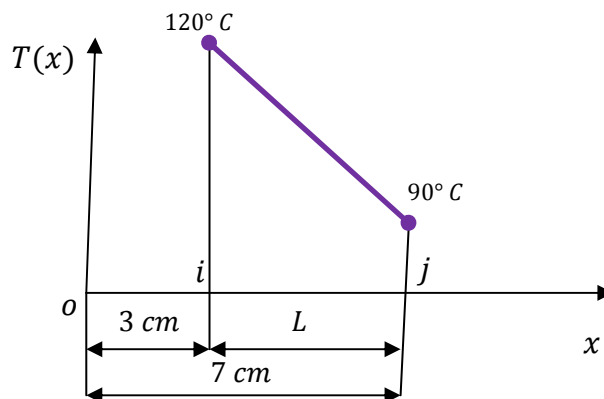
$$\frac{dN_i(x)}{dx} + \frac{dN_j(x)}{dx} = 0$$

$$\frac{dN_i(x)}{dx} + \frac{dN_j(x)}{dx} = \frac{-1}{L} + \frac{1}{L} = 0$$

### Application 3.3

Pour étudier la distribution de la température dans un fil, on utilise un élément (1D) pour approximer la fonction  $T(x)$ . Les températures aux nœuds  $(i)$  et  $(j)$  sont respectivement  $120$  et  $90^\circ\text{C}$ . (figure).

- 1) Déterminer les températures aux points d'abscisses : 3, 4, 5.
- 2) Déterminer les gradients de températures  $\frac{dT(x)}{dx}$  aux mêmes points.



On utilise une interpolation linéaire avec un élément fini linéaire à deux nœuds

$$T(x) = N_i(x) \cdot T_i + N_j(x) \cdot T_j$$

Tel que

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i}$$

Et :

$$N_j(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

La longueur  $L$  de l'élément est

$$L = 7 - 3 = 4 \text{ m}$$

$$T(3.4) = \frac{(7 - 3.4)}{7 - 3} \cdot 100 + \frac{(3.4 - 3)}{7 - 3} \cdot 30 = 93 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$T(5.2) = \frac{(7 - 5.2)}{7 - 3} \cdot 100 + \frac{(5.2 - 3)}{7 - 3} \cdot 30 = 61.5 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = \frac{-T_i + T_j}{x_j - x_i} = \frac{-T_i + T_j}{L} = \frac{-100 + 30}{4} = -17.5 \text{ }^{\circ}/m$$

### 3.3 Exemple d'utilisation d'un élément fini 1D

Les concepts de base des fonctions d'interpolation déjà développé dans le chapitre précédant sont généraux et peuvent être utilisé pour résoudre des problèmes de mécanique des solides régis par des équations aux dérivées partielles. Utilisons la méthode des éléments finis (MEF), pour développer une solution approximative de l'équation différentielle unidirectionnelle définie sur l'intervalle  $[0,H]$  :

$$D \frac{d^2 \phi}{dx^2} + Q = 0 \quad (16.3)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\phi(0) = 0 \quad (17.3)$$

$$\phi(H) = \phi_H \quad (18.3)$$

La relation (16.3) est applicable à des problèmes de mécanique, comme par exemple l'étude de la flexion d'une poutre quand le moment de flexion est connu. La résolution de ce problème est faite grâce à la méthode des éléments finis en utilisant dans ce cas, la formulation de Galerkin. Cette formulation est basée sur l'évaluation de l'intégrale résiduelle qui permet de produire une équation nodale qui sera appliquée d'une manière progressive pour générer un système algébrique d'équations linéaire. Pour résoudre l'équation (16.3) on adopte le maillage qui suit et qui est composé de deux éléments linéaires :

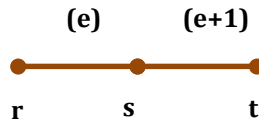


Fig.3.3 Maillage composé de deux éléments linéaires

Considérons l'équation résiduelle du nœud interne (s), les équations des autres nœuds seront par la suite déduites de la même manière. L'interpolation linéaire sur les deux éléments (e) et (e+1) donne :

$$\phi^{(e)} = N_r^{(e)} \cdot \phi_r + N_s^{(e)} \cdot \phi_s \quad (19.3)$$

$N_r$  et  $N_s$  représentent les fonctions de forme sur les nœuds (r) et (s) de l'élément (e) tandis que  $\phi_r$  et  $\phi_s$  sont les valeurs nodales de la fonction  $\phi$  à évaluer. Nous savons que :

$$N_s^{(e)} = \frac{x - x_r}{x_s - x_r} \quad (20.3)$$

Alors :

$$\frac{dN_s^{(e)}}{dx} = \frac{1}{L} \quad (21.3)$$

$$\frac{d\phi^{(e)}}{dx} = \frac{1}{L}(\phi_r^{(e)} + \phi_s^{(e)}) \quad (22.3)$$

Et:

$$\phi^{(e+1)} = N_s^{(e+1)} \cdot \phi_s + N_t^{(e+1)} \cdot \phi_t \quad (23.3)$$

$N_s$  et  $N_t$  représentent les fonctions de forme sur les nœuds (s) et (t) de l'élément (e+1) et  $\phi_s$  et  $\phi_t$  sont les valeurs nodales de la fonction  $\phi$  à évaluer.

$$N_s^{(e+1)} = \frac{x_t - x}{x_t - x_s} \quad (24.3)$$

$$\frac{dN_s^{(e+1)}}{dx} = -\frac{1}{L} \quad (25.3)$$

$$\frac{d\phi^{(e+1)}}{dx} = \frac{1}{L}(-\phi_s^{(e+1)} + \phi_t^{(e+1)}) \quad (26.3)$$

Evaluons le résidu  $R_s$  au nœud interne (s) par la méthode de Galerkin et prenons comme fonction de pondération la fonction de forme  $N_s^{(e)}$  alors :

$$R_s = R_s^{(e)} + R_s^{(e+1)} = - \int_0^H N_s \left( D \frac{d^2 \phi}{dx^2} + Q \right) dx \quad (27.3)$$

Avec :

$$R_s^{(e)} = - \int_{x_r}^{x_s} N_s \left( D \frac{d^2 \phi}{dx^2} + Q \right)^{(e)} dx \quad (28.3)$$

$$R_s^{(e+1)} = - \int_{x_s}^{x_t} N_s \left( D \frac{d^2 \phi}{dx^2} + Q \right)^{(e+1)} dx \quad (29.3)$$

Sachant que :

$$\frac{d}{dx} \left( N_s \frac{d\phi}{dx} \right) = N_s \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{dN_s}{dx} \frac{d\phi}{dx} \quad (30.3)$$

Et:

$$N_s \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( N_s \frac{d\phi}{dx} \right) - \frac{dN_s}{dx} \frac{d\phi}{dx} \quad (31.3)$$

Donc :

$$- \int_{x_r}^{x_s} N_s \left( D \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right)^{(e)} dx = - \left[ DN_s \frac{d\phi}{dx} \right]_{x_r}^{x_s} + \int_{x_r}^{x_s} \left( DN_s \frac{dN_s}{dx} \frac{d\phi}{dx} \right)^{(e)} dx \quad (32.3)$$

De même:

$$- \int_{x_s}^{x_t} N_s \left( D \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right)^{(e+1)} dx = - \left[ DN_s \frac{d\phi}{dx} \right]_{x_s}^{x_t} + \int_{x_s}^{x_t} \left( DN_s \frac{dN_s}{dx} \frac{d\phi}{dx} \right)^{(e+1)} dx \quad (33.3)$$

Si on remplace les équations (14.2) et (15.2) dans la relation (9.2) on obtient:

$$R_s = - \left[ DN_s \frac{d\phi^{(e)}}{dx} \right]_{x_r}^{x_s} + \int_{x_r}^{x_s} \left( DN_s \frac{dN_s}{dx} \frac{d\phi}{dx} \right)^{(e)} dx - \int_{x_r}^{x_s} (N_s Q)^{(e)} dx - \left[ DN_s \frac{d\phi^{(e+1)}}{dx} \right]_{x_s}^{x_t} + \int_{x_s}^{x_t} \left( DN_s \frac{dN_s}{dx} \frac{d\phi}{dx} \right)^{(e+1)} dx - \int_{x_s}^{x_t} (N_s Q)^{(e+1)} dx = 0 \quad (34.3)$$

Sachant que :

$$N_s(x_s)^{(e)} = \frac{x_s - x_r}{x_s - x_r} = 1 \quad (35.3)$$

$$N_s(x_r)^{(e)} = \frac{x_r - x_r}{x_s - x_r} = 0 \quad (36.3)$$

Et

$$N_s(x_s)^{(e+1)} = \frac{x_t - x_s}{x_t - x_s} = 1 \quad (37.3)$$

$$N_s(x_t)^{(e+1)} = \frac{x_t - x_t}{x_t - x_s} = 0 \quad (38.3)$$

(34.3) devient:

$$R_s = - \left[ D \frac{d\phi^{(e)}}{dx} \right]_{x=x_s} + \int_{x_r}^{x_s} \left( D \frac{dN_s}{dx} \frac{d\phi}{dx} - N_s Q \right)^{(e)} dx + \left[ D \frac{d\phi^{(e+1)}}{dx} \right]_{x=x_s} + \int_{x_s}^{x_t} \left( \frac{dN_s}{dx} \frac{d\phi}{dx} - N_s Q \right)^{(e+1)} dx = 0 \quad (39.3)$$

Calculons les intégrales suivantes:

$$\int_{x_r}^{x_s} D \frac{dN_s}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx = \int_{x_r}^{x_s} D \frac{1}{L} \left( \frac{1}{L} \right) (-\phi_r + \phi_s) dx = \frac{D}{L} (-\phi_r + \phi_s)$$

$$\int_{x_r}^{x_s} N_s Q dx = Q \int_{x_r}^{x_s} \left( \frac{x - x_r}{x_s - x_r} \right) dx = \frac{Q}{L} \left[ \frac{x^2}{2} - x_r x \right]_{x_r}^{x_s} = \frac{Q}{L} \left( \frac{x_s^2}{2} - x_r x_s - \left( \frac{x_s^2}{2} - x_r x_r \right) \right) = \frac{Q}{2L} (x_s - x_r)^2 = \frac{QL}{2}$$

Donc:

$$R_s^{(e)} = - \left[ D \frac{d\phi^{(e)}}{dx} \right]_{x=x_s} + \frac{D}{L} (-\phi_r + \phi_s) - \frac{QL}{2} \quad (40.3)$$

$$\int_{x_s}^{x_t} D \frac{dN_s}{dx} \frac{d\phi}{dx} dx = \int_{x_r}^{x_s} -D \frac{1}{L} \left( \frac{1}{L} \right) (-\phi_s + \phi_t) dx = \frac{D}{L} (\phi_s - \phi_t)$$

$$\int_{x_s}^{x_t} N_s Q dx = Q \int_{x_r}^{x_s} \left( \frac{x_t - x}{x_t - x_s} \right) dx = \frac{Q}{L} \left[ x_t x - \frac{x^2}{2} \right]_{x_s}^{x_t} = \frac{Q}{L} \left( x_t^2 - \frac{x_t^2}{2} - \left( x_t x_s - \frac{x_s^2}{2} \right) \right) = \frac{Q}{2L} (x_t - x_s)^2 = \frac{QL}{2}$$

Donc:

$$R_s^{(e+1)} = \left[ D \frac{d\phi^{(e+1)}}{dx} \right]_{x=x_s} + \frac{D}{L} (\phi_s - \phi_t) - \frac{QL}{2} \quad (41.3)$$

Et en fin :

$$R_s = \left[ D \frac{d\phi^{(e+1)}}{dx} \right]_{x=x_s} - \left[ D \frac{d\phi^{(e)}}{dx} \right]_{x=x_s} + \frac{D}{L} (\phi_s - \phi_t) - \frac{QL}{2} + \frac{D}{L} (-\phi_r + \phi_s) - \frac{QL}{2} \quad (42.3)$$

Après arrangement des termes de cette relation on obtient:

$$R_s = \left[ D \frac{d\phi^{(e+1)}}{dx} \right]_{x=x_s} - \left[ D \frac{d\phi^{(e)}}{dx} \right]_{x=x_s} + \frac{D}{L} (\phi_s - \phi_t) - \frac{QL}{2} + \frac{D}{L} (-\phi_r + \phi_s) - \frac{QL}{2} \quad (43.3)$$

La valeur du terme  $[D \frac{d\phi^{(e+1)}}{dx}]_{x=x_s} - [D \frac{d\phi^{(e)}}{dx}]_{x=x_s}$  sur le nœud (s) tend vers zéro et peut être négligé. Il est généralement utilisé dans l'étude du raffinement du maillage. Ainsi la relation (43.3) devient :

$$R_s = \frac{D^{(e+1)}}{L} (\phi_s - \phi_t) - \frac{QL^{(e+1)}}{2} + \frac{D^{(e)}}{L} (-\phi_r + \phi_s) - \frac{QL^{(e)}}{2} \quad (44.3)$$

Soit après arrangement :

$$R_s = -\left(\frac{D^{(e)}}{L}\right) \phi_r + \left[\left(\frac{D^{(e)}}{L}\right) + \left(\frac{D^{(e+1)}}{L}\right)\right] \phi_s - \left(\frac{D^{(e+1)}}{L}\right) \phi_t - \frac{QL^{(e+1)}}{2} - \frac{QL^{(e)}}{2} \quad (45.3)$$

Si on effectue un changement de variable sur les numéros des nœuds, l'expression finale du résidu est donnée comme suit:

$$R_s = -\left(\frac{D^{(s-1)}}{L}\right) \phi_{s-1} + \left[\left(\frac{D^{(s-1)}}{L}\right) + \left(\frac{D^{(s)}}{L}\right)\right] \phi_s - \left(\frac{D^{(s)}}{L}\right) \phi_{s+1} - \frac{QL^{(s)}}{2} - \frac{QL^{(s-1)}}{2} = 0 \quad (46.3)$$

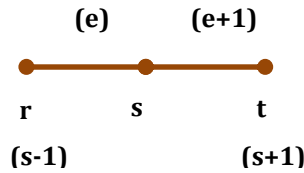
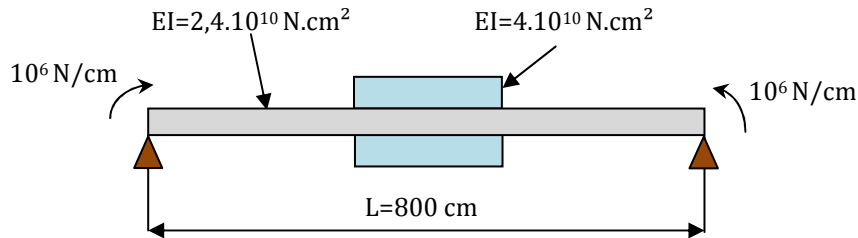


Fig.4.3 Numérotation des nœuds du maillage

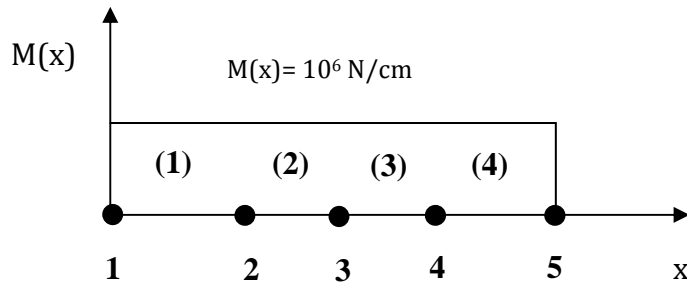
### Application 4.3

Déterminer les valeurs approximatives de la flèche d'une poutre simple (figure) dont les extrémités sont sollicitées par des moments concentrés par la méthode des éléments finis. La poutre est renforcée au milieu par une barre d'acier



#### • Etape 1:(Maillage)

La poutre est assimilée à une barre (1D). On place les nœuds là où il y'a un changement de section.



- **Etape 2:(Conditions aux limites)**

Deux appuis simples aux extrémités de la poutre (nœuds 1 et 5). Les déplacements verticaux sont nuls.

$$y_1 = y_5 = 0$$

$y_i$  représente le déplacement vertical de la poutre (flèche ou déformée de la poutre).

- **Etape 3:(Modèle mathématique)**

La flexion de cette poutre est modélisée par l'équation de la flexion simple suivante :

$$EI \frac{d^2 \phi}{dx^2} - M(x) = 0$$

Le tableau ci-dessous résume les caractéristiques géométriques de la poutre:

(e)	D=EI	Q= M(x)	L
1	$2,4.10^{10}$	$-10^6$	200
2	$4.10^{10}$	$-10^6$	200
3	$4.10^{10}$	$-10^6$	200
4	$2,4.10^{10}$	$-10^6$	200

Les grandeurs Q et L sont constantes pour toute la grille, la relation devient sous sa forme simplifiée (46.3) :

$$R_s = \frac{-D^{(s-1)} \cdot y_{(s-1)} + (D^{(s-1)} + D^{(s)}) \cdot y_{(s)} - D^{(s)} \cdot y_{(s+1)}}{L} - QL = 0$$

Grace à cette relation, on peut déterminer les différentes valeurs des  $y_i$  aux nœuds considérés en évaluant les résidus par rapport aux nœuds internes.

- **Nœud 2**

$$R_2 = \frac{-D^{(1)} \cdot y_{(1)} + (D^{(1)} + D^{(2)}) \cdot y_{(2)} - D^{(2)} \cdot y_{(3)}}{L} - QL = 0$$

$$R_2 = \frac{-2,4 \cdot 10^{10} y_1 + (2,4 \cdot 10^{10} + 4 \cdot 10^{10}) \cdot y_2 - 4 \cdot 10^{10} \cdot y_3}{200} - (-10^6) = 0$$

$$R_2 = -1,2y_1 + 3,2 \cdot y_2 - 2 \cdot y_3 + 2 = 0$$

- **Nœud 3**

$$R_3 = \frac{-D^{(2)} \cdot y_{(2)} + (D^{(2)} + D^{(3)}) \cdot y_{(3)} - D^{(3)} \cdot y_{(4)}}{L} - QL = 0$$

$$R_3 = \frac{-4 \cdot 10^{10} y_2 + (4 \cdot 10^{10} + 4 \cdot 10^{10}) \cdot y_3 - 4 \cdot 10^{10} \cdot y_4}{200} - (-10^6) = 0$$

$$R_3 = -2y_2 + 4 \cdot y_3 - 2 \cdot y_4 + 2 = 0$$

- **Nœud 4**

$$R_4 = \frac{-D^{(3)} \cdot y_{(3)} + (D^{(3)} + D^{(4)}) \cdot y_{(4)} - D^{(4)} \cdot y_{(5)}}{L} - QL = 0$$

$$R_4 = \frac{-2,4 \cdot 10^{10} y_3 + (-2,4 \cdot 10^{10} + 4 \cdot 10^{10}) \cdot y_4 - 2,4 \cdot 10^{10} \cdot y_5}{200} - (-10^6) = 0$$

$$R_4 = -2y_3 + 3,2 \cdot y_4 - 1,2 \cdot y_5 + 2 = 0$$

On obtient le système d'équations à 3 inconnues suivant

$$\begin{cases} -1,2y_1 + 3,2 \cdot y_2 - 2 \cdot y_3 + 2 = 0 \\ -2y_2 + 4 \cdot y_3 - 2 \cdot y_4 + 2 = 0 \\ -2y_3 + 3,2 \cdot y_4 - 1,2 \cdot y_5 + 2 = 0 \end{cases}$$

Si on applique les conditions aux limites ( $y_1 = y_5 = 0$ ) on obtient le système :

$$\begin{cases} 3,2 \cdot y_2 - 2 \cdot y_3 = -2 \\ -2y_2 + 4 \cdot y_3 - 2 \cdot y_4 = -2 \\ -2y_3 + 3,2 \cdot y_4 = -2 \end{cases}$$

Après résolution on trouve :

$$\begin{cases} y_2 = -2.50 \text{ cm} \\ y_3 = -3.00 \text{ cm} \\ y_4 = -2.50 \text{ cm} \end{cases}$$

Une fois les valeurs nodale de la flèche ( $y_2, y_3, y_4$ ) connues, on peut déterminer la déformée de la poutre en n'importe quel point en utilisant une fonction d'interpolation linéaire de la flexion de cette poutre. On se propose de déterminer les déformées aux abscisses ( $x = 300 \text{ cm}$ ) et ( $x = 500 \text{ cm}$ ).

Le point  $x = 300 \text{ cm}$  est situé entre les nœuds 2 et 3. On considère l'élément 2 d'équation :

$$y^{(2)} = N_2^{(2)} \cdot y_2 + N_3^{(2)} \cdot y_3 = \left( \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} \right) \cdot y_2 + \left( \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \right) \cdot y_3$$

$$y^{(300)} = \left( \frac{400 - 300}{200} \right) \cdot (-2.50) + \left( \frac{300 - 200}{200} \right) \cdot (-3.50) = -2.75 \text{ cm}$$

Le point  $x = 500 \text{ cm}$  est situé entre les nœuds 3 et 4. On considère l'élément 3 d'équation :

$$y^{(3)} = N_3^{(3)} \cdot y_3 + N_4^{(3)} \cdot y_4 = \left( \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3} \right) \cdot y_3 + \left( \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} \right) \cdot y_4$$

$$y^{(300)} = \left( \frac{600 - 500}{200} \right) \cdot (-3.00) + \left( \frac{500 - 400}{200} \right) \cdot (-2.50) = -2.75 \text{ cm}$$

Il beaucoup plus avantageux d'utiliser la notation matricielle pour écrire le système d'équation :

$$\begin{cases} R_2 = 3,2 \cdot y_2 - 2 \cdot y_3 + 2 = 0 \\ R_3 = -2 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 - 2 \cdot y_4 + 2 = 0 \\ R_4 = -2 \cdot y_3 + 3,2 \cdot y_4 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3,2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 3,2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cette écriture conduit à une expression générale de la forme :

$$\{R\} = [K]\{y\} - \{F\} = \{0\} \quad (47.3)$$

Dans cette relation :

$[K]$  : matrice de rigidité globale

$\{y\}$  : vecteur des valeurs inconnues

$\{F\}$  : Vecteur global des forces

#### 4.3 Matrice de rigidité élémentaire

Soit un domaine (D) uni directionnel composé de (n) élément linéaires à deux nœuds et de (n+1) nœuds (figure 4.3) :

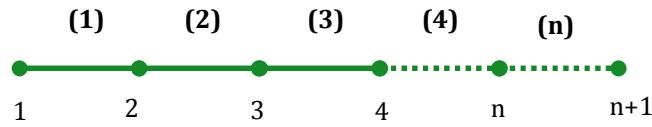


Fig.4.3 Maillage composé de (n) éléments linéaires et (n+1) nœuds

L'expression de l'équation résiduelle qui définit le résidu en chaque nœud du domaine est donnée comme suit :

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (48.3)$$

Chaque élément du maillage contribue dans l'équation résiduelle par ses deux extrémités (2 nœuds) , par exemple l'élément 3 contribue dans l'expression des résidus  $R_3$  et  $R_4$  par :

$$R_3^{(3)} = \int_{x_3}^{x_4} N_3^3 \left( D \frac{d^2 \phi}{dx^2} + Q \right) dx \quad (49.3)$$

$$R_4^{(3)} = \int_{x_3}^{x_4} N_4^3 \left( D \frac{d^2 \phi}{dx^2} + Q \right) dx \quad (50.3)$$

Ce résultat peut être généralisé pour tout élément (e) de limites (i) et (j), alors :

$$R_i^{(e)} = \int_{x_i}^{x_j} N_i^e \left( D \frac{d^2 \phi}{dx^2} + Q \right) dx \quad (51.3)$$

$$R_j^{(e)} = \int_{x_i}^{x_j} N_j^e \left( D \frac{d^2 \phi}{dx^2} + Q \right) dx \quad (52.3)$$

Les deux équations (51.3) et (52.3) sont en fait équivalentes aux équations (40.3) et (41.3) déjà évaluées.



$$R_s^{(e)} = - \left[ D \frac{d\phi^{(e)}}{dx} \right]_{x=x_s} + \frac{D}{L} (-\phi_r + \phi_s) - \frac{QL}{2}$$

Et:

$$R_s^{(e+1)} = \left[ D \frac{d\phi^{(e+1)}}{dx} \right]_{x=x_s} + \frac{D}{L} (\phi_s - \phi_t) - \frac{QL}{2}$$

La valeur des termes  $\left[ D \frac{d\phi^{(e+1)}}{dx} \right]_{x=x_s}$  et  $\left[ D \frac{d\phi^{(e)}}{dx} \right]_{x=x_s}$  sur le nœud (s) tendent vers zéro et peuvent être négligés. Ainsi on obtient :

$$R_s^{(e)} = \frac{D}{L} (-\phi_r + \phi_s) - \frac{QL}{2} \quad (53.3)$$

Et:

$$R_s^{(e+1)} = \frac{D}{L} (\phi_s - \phi_t) - \frac{QL}{2} \quad (54.3)$$

Sachant que :

$$R_i^{(e)} \Leftrightarrow R_s^{(e+1)} \quad \text{avec} \quad s = i \quad \text{et} \quad \text{avec} \quad t = j \quad (55.3)$$

Et:

$$R_j^{(e)} \Leftrightarrow R_s^{(e)} \quad \text{avec} \quad r = i \quad \text{et} \quad \text{avec} \quad s = j \quad (56.3)$$

Alors :

$$R_i^{(e)} = \frac{D}{L} (\phi_i - \phi_j) - \frac{QL}{2} = 0 \quad (57.3)$$

Et:

$$R_j^{(e)} = \frac{D}{L} (-\phi_i + \phi_j) - \frac{QL}{2} = 0 \quad (58.3)$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} R_i^{(e)} \\ R_j^{(e)} \end{Bmatrix} = \left( \frac{D}{L} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} - \frac{QL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (59.3)$$

Ou bien:

$$\{R^{(e)}\} = [K]^{(e)} \{\phi\} - \{f\}^{(e)} = \{0\} \quad (60.3)$$

Dans cette relation :

$[K]^{(e)}$  : matrice de rigidité élémentaire

$\{R^{(e)}\}$  : contribution de l'élément (e) au système d'équations final

$\{f\}^{(e)}$  : Vecteur des forces élémentaires

Ces grandeurs seront utilisées pour former le système global (47.3):

### 5.3 Formation de la matrice de rigidité globale (GSM)

La méthode directe pour former la matrice de rigidité globale est une procédure d'incorporation de la matrice élémentaire dans le système global. Les valeurs

numériques des nœuds (i) et (j) pour un élément sont écrites à côté des colonnes de  $[K]^{(e)}$  et  $\{f\}^{(e)}$ .

$$[K]^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \quad (61.3)$$

Et :

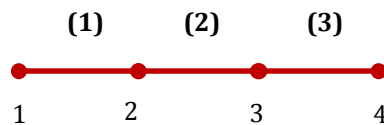
$$\{f\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \quad (62.3)$$

### Application 5.3

Soit le système suivant composé de trois éléments linéaires à deux nœuds. On donne les matrices de rigidités élémentaires  $[K]^{(e)}$  ainsi que les vecteurs forces élémentaires  $\{f\}^{(e)}$ . Il est demandé de déterminer la matrice de rigidité globale  $[K]$  et le vecteur force global  $\{f\}$ .

- **Maillage**

Nous adoptons le maillage suivant:



- **Les matrices de rigidité élémentaires**

$$[K]^{(1)} = 3.4 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [K]^{(2)} = 1.5 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [K]^{(3)} = 2.7 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Les vecteurs de forces élémentaires**

$$\{f\}^{(1)} = -10^3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{f\}^{(2)} = -10^3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{f\}^{(3)} = -10^3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- **Assemblage**

Pour chaque élément on place la numérotation correspondante. La matrice de rigidité globale  $[K]$  a pour dimensions  $(3 \times 3)$  et le vecteur force global  $\{f\}$  est de dimensions  $(3 \times 1)$ . L'assemblage est réalisé en incorporant les matrices de rigidités élémentaires  $[K]^{(e)}$  ainsi que les vecteurs forces élémentaires  $\{f\}^{(e)}$  dans la matrice de rigidité globale  $[K]$  et dans le vecteur force global  $\{f\}$  en respectant l'ordre et la numérotation des nœuds. Les éléments d'interconnexion sont ajoutés et le reste de la matrice globale  $[K]$  est complété par des zéros.

- Matrices de rigidités élémentaires

$$[K]^{(1)} = 3.4.10^3 \begin{bmatrix} \overset{1}{1} & \overset{2}{-1} \\ -1 & \overset{2}{1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \overset{1}{1} \\ \overset{2}{2} \end{matrix} \quad [K]^{(2)} = 1.5.10^3 \begin{bmatrix} \overset{2}{1} & \overset{3}{-1} \\ -1 & \overset{3}{1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \overset{2}{2} \\ \overset{3}{3} \end{matrix} \quad [K]^{(3)} = 2.7.10^3 \begin{bmatrix} \overset{3}{1} & \overset{4}{-1} \\ -1 & \overset{4}{1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \overset{3}{3} \\ \overset{4}{4} \end{matrix}$$

- Les vecteurs de forces élémentaires

$$\{f\}^{(1)} = -10^3 \begin{Bmatrix} \overset{1}{1} \\ \overset{2}{1} \end{Bmatrix} \quad \{f\}^{(2)} = -10^3 \begin{Bmatrix} \overset{2}{1} \\ \overset{3}{1} \end{Bmatrix} \quad \{f\}^{(3)} = -10^3 \begin{Bmatrix} \overset{3}{1} \\ \overset{4}{1} \end{Bmatrix}$$

- Matrice de rigidité globale

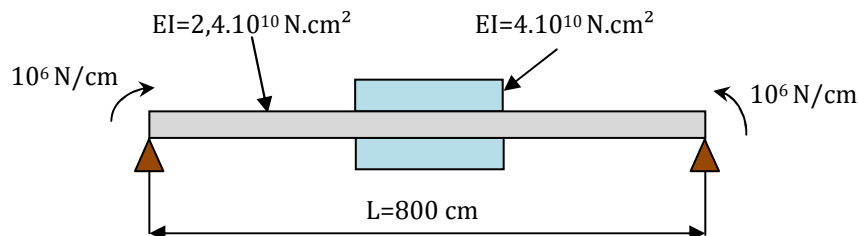
$$[K] = 10^3 \begin{bmatrix} \overset{1}{3.4} & \overset{2}{-3.4} & \overset{3}{0} & \overset{4}{0} \\ \overset{2}{-3.4} & \overset{2}{3.4} + \overset{3}{1.5} & \overset{3}{-1.5} & \overset{4}{0} \\ \overset{3}{0} & \overset{3}{-1.5} & \overset{3}{1.5} + \overset{4}{2.7} & \overset{4}{-2.7} \\ \overset{4}{0} & \overset{4}{0} & \overset{4}{-2.7} & \overset{4}{2.7} \end{bmatrix} \begin{matrix} \overset{1}{1} \\ \overset{2}{2} \\ \overset{3}{3} \\ \overset{4}{4} \end{matrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 3.4 & -3.4 & 0 & 0 \\ -3.4 & 4.9 & -1.5 & 0 \\ 0 & -1.5 & 4.2 & -2.7 \\ 0 & 0 & -2.7 & 2.7 \end{bmatrix}$$

- Vecteur force global

$$\{f\} = -10^3 \begin{Bmatrix} \overset{1}{1} \\ \overset{2}{1} + \overset{3}{1} \\ \overset{3}{1} + \overset{4}{1} \\ \overset{4}{1} \end{Bmatrix} = -10^3 \begin{Bmatrix} \overset{1}{1} \\ \overset{2}{2} \\ \overset{3}{2} \\ \overset{4}{1} \end{Bmatrix}$$

### Application 6.3

Considérons le même exemple de l'application 3.3 et déterminons les valeurs la flèche de la poutre.



- Caractéristique de la poutre

(e)	i	j	D/L	QL/2
1	1	2	1,2.10 <sup>8</sup>	-10 <sup>8</sup>
2	2	3	2.10 <sup>8</sup>	-10 <sup>8</sup>
3	3	4	42.10 <sup>8</sup>	-10 <sup>8</sup>
4	4	5	1,2.10 <sup>8</sup>	-10 <sup>8</sup>

- Matrices de rigidité élémentaires

Les matrices de rigidités élémentaires sont données par la relation suivante:

$$[K]^{(e)} = \left(\frac{D}{L}\right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix}$$

Pour l'assemblage on numérote les nœuds (i) et (j) pour chaque élément.

$$[K]^{(1)} = 1,2 \cdot 10^8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} = 10^8 \begin{bmatrix} 1,2 & -1,2 \\ -1,2 & 1,2 \end{bmatrix} \quad [K]^{(2)} = 2 \cdot 10^8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} = 10^8 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{(1)} = 2 \cdot 10^8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} = 10^8 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad [K]^{(2)} = 1,2 \cdot 10^8 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} = 10^8 \begin{bmatrix} 1,2 & -1,2 \\ -1,2 & 1,2 \end{bmatrix}$$

• **Matrice de rigidité globale : dimension (5x5)**

$$[K] = 10^8 \begin{bmatrix} 1,2 & -1,2 & 0 & 0 & 0 \\ -1,2 & 1,2+2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2+2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2+1,2 & -1,2 \\ 0 & 0 & 0 & -1,2 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} = 10^8 \begin{bmatrix} 1,2 & -1,2 & 0 & 0 & 0 \\ -1,2 & 3,2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3,2 & -1,2 \\ 0 & 0 & 0 & -1,2 & 1,2 \end{bmatrix}$$

• **Vecteurs forces élémentaires**

$$\{f\}^{(1)} = -10^8 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \{f\}^{(2)} = -10^8 \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad \{f\}^{(3)} = -10^8 \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix} \quad \{f\}^{(4)} = -10^8 \begin{Bmatrix} 1 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

• **Vecteur force global : dimension (5x1)**

$$\{f\} = -10^3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 1+1 \\ 1+1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} = -10^3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Finalement on forme le système global :

$$10^8 \begin{bmatrix} 1,2 & -1,2 & 0 & 0 & 0 \\ -1,2 & 3,2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3,2 & -1,2 \\ 0 & 0 & 0 & -1,2 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{Bmatrix} - 10^8 \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Si on applique les conditions aux limites ( $y_1 = y_5 = 0$ ) on obtient le système :

$$\begin{cases} 3,2 \cdot y_2 - 2 \cdot y_3 + 2 = 0 \\ -2 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 - 2 \cdot y_4 + 2 = 0 \\ -2 \cdot y_3 + 3,2 \cdot y_4 + 2 = 0 \end{cases}$$

On retombe sur le même système et sur les mêmes résultats :

$$\begin{cases} y_2 = -2,50 \text{ cm} \\ y_3 = -3,00 \text{ cm} \\ y_4 = -2,50 \text{ cm} \end{cases}$$

**Application 7.3**

Considérons une poutre à section droite variable, encastree par ses deux extrémités et soumise à une charge axiale  $P = 10 \text{ KN}$ . L'aire  $A$  est égale à  $10 \text{ mm}^2$ . Le module de Young  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Mpa}$ . On donne  $L=2\text{m}$ . En utilisant la méthode directe.

Calculer:

- 1- Les déplacements axiaux au niveau des nœuds 2 et 3 en mm
- 2- Les efforts axiaux au niveau des nœuds 1 et 4 en KN

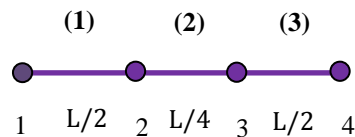
Noter que :

$$[K]^{(e)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{P\} = [K].\{u\}$$

- **Maillage**

On adopte le maillage suivant composé de 3 éléments linéaires à deux nœuds :



- **Les matrices de rigidité élémentaires**

$$[K]^{(e)} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{(1)} = \frac{E(2A)}{\frac{L}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{4EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10}{2000} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 4 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{(2)} = \frac{E(2A)}{\frac{L}{4}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{8EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10}{2000} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 8 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{(3)} = \frac{EA}{\frac{L}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10}{2000} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **La matrice de rigidité globale (assemblage)**

$$[K] = [K]^{(1)} + [K]^{(2)} + [K]^{(3)}$$

$$[K] = 10^3 \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 12 & -8 & 0 \\ 0 & -8 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Calcul des déplacements inconnus aux nœuds 2 et 3**

Nous avons :

$$\{P\} = [K].\{u\}$$

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ -4 & 12 & -8 & 0 \\ 0 & -8 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

Les déplacements sont nuls au niveau des encastremements

$$u_1 = u_4 = 0$$

Donc :

$$\begin{cases} -4.10^3 u_2 = P_1 & (1) \\ 2.10^3 u_2 - 8.10^3 u_3 = P_2 & (2) \\ -8.10^3 u_2 + 10.10^3 u_3 = P_3 & (3) \\ -2.10^3 u_3 = P_4 & (4) \end{cases}$$

$$P_2 = P = 10 \text{ KN}$$

$$P_3 = 0 \text{ (Pas de chargement)}$$

$P_1$  et  $P_4$  représentent les réactions au niveau de l'encastrement (nœuds 1 et 4).

Considérons les équations (2) et (3) :

$$\begin{cases} 2.10^3 u_2 - 8.10^3 u_3 = 10^4 \\ -8.10^3 u_2 + 10.10^3 u_3 = 0 \end{cases}$$

Après résolution de ce système on obtient :

$$\begin{cases} U_2 = 1.7857 \text{ mm} \\ U_3 = 1.4286 \text{ mm} \end{cases}$$

- **Calcul des efforts axiaux aux nœuds 1 et 4**

Considérons les équations (1) et (4) :

$$\begin{cases} -4.10^3 u_2 = P_1 \\ -2.10^3 u_3 = P_4 \end{cases}$$

Soient :

$$\begin{cases} P_1 = -7142.8 \text{ N} = -7.1428 \text{ KN} \\ P_4 = -2857.2 \text{ N} = -2.8572 \text{ KN} \end{cases}$$

Vérification :

$$P = -(P_1 + P_4) = -(7.1428 + 2.8572) = 10 \text{ KN}$$

## Chapitre 4

### Élément à forces axiales

#### 1.4 Introduction

La méthode des éléments finis est applicable dans l'analyse des structures discrètes (poutres, treillis et charpentes) et des structures continues (plaques et coques) qui peuvent doivent être analysé par la théorie de l'élasticité. Ces structures sont généralement analysées grâce à plusieurs méthodes. Parmi ces méthodes on peut citer la méthode énergétique basée sur la minimisation de l'énergie potentielle.

#### 2.4 Modèle uni directionnel

Le maillage utilisé par ce type de structure comportant des éléments et des membres à forces axiales est similaire est un maillage uni directionnel basé sur des éléments linéaires à deux nœuds composés de segments de droites. Pour les éléments et les membres à forces axiales l'effort appliqué à la structure est coïncide avec son axe (figure 1.4).

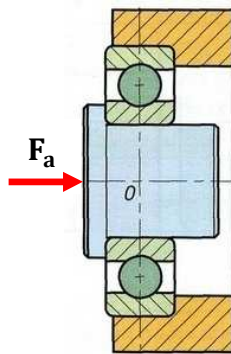


Fig.1.4 Exemple d'un système à forces axiales

- **Principe de l'énergie potentielle minimale**

Le principe de l'énergie potentielle minimale stipule que les déplacements à la position d'équilibre apparaissent quand l'énergie potentielle d'un système stable atteint une valeur minimale.

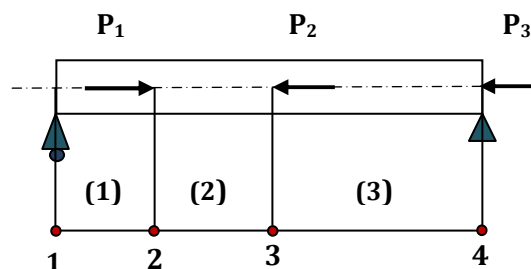


Fig.2.4 Maillage d'un système à forces axiales

### 3.4 Principe de la méthode de l'énergie potentielle minimale

La méthode de l'énergie potentielle minimale est basée sur les étapes suivantes :

1. L'écriture de l'équation de déplacement pour chaque élément
2. L'incorporation des conditions aux limites
3. L'écriture d'une équation pour l'énergie potentielle de la structure en fonction des déplacements.
4. Minimisation de l'énergie potentielle par rapport aux déplacements inconnus.

L'énergie potentielle d'un membre soumis à une force axiale est donnée par la relation:

$$\Pi = A - W = A - PU \quad (4.1)$$

Dans cette relation ( $\Pi$ ) représente l'énergie potentielle, ( $A$ ) l'énergie de déformation et ( $W$ ) le travail des forces extérieurs.

Dans le cas de plusieurs éléments :

$$\Pi = \sum_{e=1}^n A^{(e)} - \sum_{i=1}^p P_i U_i \quad (4.2)$$

(e) : nombre d'éléments

p : de nombre nœuds

L'énergie de déformation est donnée par la relation suivante :

$$A^{(e)} = \int_v \frac{\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}}{2} dv \quad (4.3)$$

D'après la loi de Hooke nous avons :

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} \quad (4.4)$$

Si on remplace (4.4) dans (4.3) on obtient :

$$A^{(e)} = \int_v \frac{\sigma_{xx}^2}{2 \cdot E} dv \quad (4.5)$$

$$A^{(e)} = \int_v \frac{E \cdot \varepsilon_{xx}^2}{2} dv \quad (4.6)$$

Pour trouver une expression de l'énergie de déformation du membre à forces axiales considéré en fonction de son déplacement, on doit évaluer les intégrales des relations (4.5) et (4.6). Le modèle adopté pour les membres à forces axiales est un segment de droite (figure 3.4).



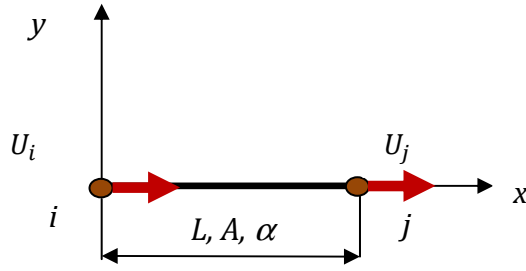


Fig.3.4 Modèle adopté pour les membres à forces axiales

A : est la section de l'élément (aire de la section)

L : est la longueur de l'élément

$\alpha$  : la conductivité thermique du matériau de l'élément

La déformation totale  $e_{xx}$  est donnée par la relation :

$$e_{xx} = \frac{dU}{dx} \quad (4.7)$$

D'un autre côté :

$$e_{xx} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{Th} \quad (4.8)$$

Dans cette relation  $\varepsilon_{xx}$  représente la déformation mécanique due aux forces appliquées et  $\varepsilon_{Th}$  la déformation thermique un cas de chargement thermique.

Ainsi :

$$\varepsilon_{xx} = e_{xx} - \varepsilon_{Th} \quad (4.9)$$

Avec :

$$\varepsilon_{Th} = \alpha \cdot \delta T \quad (4.10)$$

Si on remplace la relation (4.7) dans l'équation (4.9), on obtient :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{dU}{dx} - \varepsilon_{Th} \quad (4.11)$$

On remplace (4.11) dans (4.6), on obtient :

$$A^{(e)} = \int_v \frac{E}{2} \cdot \left( \frac{dU}{dx} - \varepsilon_{Th} \right)^2 dv = \int_v \frac{E}{2} \cdot \left( \frac{dU}{dx} \right)^2 dv - \int_v \alpha \cdot \delta T \left( \frac{dU}{dx} \right) dv + \int_v \frac{E}{2} \cdot (\alpha \cdot \delta T)^2 dv \quad (4.12)$$

Sachant que :

$$dv = A \cdot ds \quad (4.13)$$

Puisque la section A est constante et sachant que d'une manière générale nous avons :

$$\int_v f(x) dx = \int_0^L \int_A f(x) dA dx = A \int_0^L f(x) dx \quad (4.14)$$

Alors :

$$A^{(e)} = \frac{AE}{2} \int_0^L \left( \frac{dU}{dx} \right)^2 dx - AE \alpha \delta T \int_0^L \left( \frac{dU}{dx} \right) dx + \frac{AE}{2} (\alpha \cdot \delta T)^2 \int_0^L dx \quad (4.15)$$

L'étape finale est le choix d'une fonction d'interpolation pour le déplacement élémentaire. Soit la fonction linéaire suivante :

$$U = \frac{(x_j - x)}{L} \cdot u_i + \left( \frac{x - x_i}{L} \right) \cdot u_j \quad (4.16)$$

Pour l'élément linéaire choisi, nous avons :

$x_i = 0$  et  $x_j = L$ , donc :

$$\frac{dU}{dx} = \frac{-u_i + u_j}{L} \quad (4.17)$$

On remarque que le terme  $\left(\frac{dU}{dx}\right)$  est constant, donc si on remplace (4.16) dans (4.15) nous obtenons :

$$\Lambda^{(e)} = \frac{AEL}{2} \left(\frac{dU}{dx}\right)^2 - AE\alpha \delta T L \left(\frac{dU}{dx}\right) + \frac{AE}{2} (\alpha \delta T)^2 \quad (4.18)$$

Si on substitue (4.17) dans (4.18) on obtient l'équation finale de l'énergie de déformation pour un membre à force axiale écrite en fonction des déplacements nodaux.

$$\Lambda^{(e)} = \frac{AE}{2L} (U_i^2 - U_i U_j + U_j^2) - AE\alpha \delta T (-U_i + U_j) + \frac{AEL}{2} (\alpha \delta T)^2 \quad (4.19)$$

Dans le cas où la structure est composée de plusieurs éléments on peut déterminer les valeurs des forces axiales qui agissent sur chaque élément à partir des déplacements nodaux.

$$S^{(e)} = \sigma_{xx} \cdot A \quad (4.20)$$

Pour un milieu élastique, la loi de Hooke stipule que :

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} \quad (4.21)$$

Alors :

$$S^{(e)} = E \cdot A \cdot \varepsilon_{xx} \quad (4.22)$$

Si on remplace (4.11) dans (4.22) on obtient :

$$S^{(e)} = E \cdot A \cdot \left(\frac{dU}{dx} - \varepsilon_{Th}\right) \quad (4.23)$$

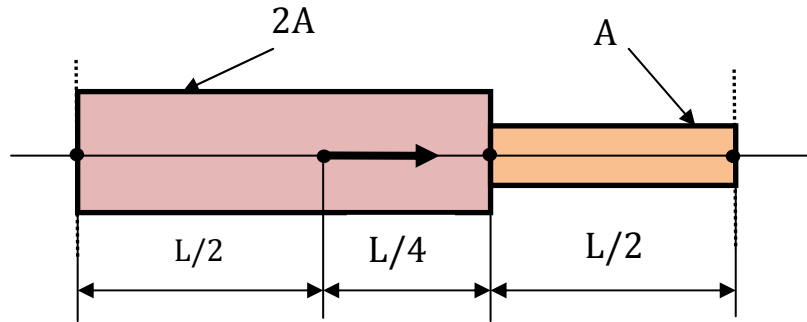
Enfin si on remplace (4.10 et (4.17) dans (4.23) on obtient :

$$S^{(e)} = E \cdot A \cdot \left(\frac{-u_i + u_j}{L} - \alpha \delta T\right) = \frac{EA}{L} (-u_i + u_j) - AE\alpha \delta T \quad (4.23)$$

Cette relation permet d'écrire l'expression de la force axiale en fonction des déplacements nodaux.

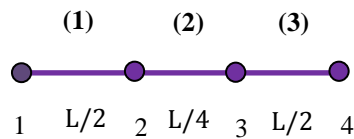
#### **Application 1.4**

Considérons une poutre à section droite variable, encastree par ses deux extrémités et soumise à une charge axiale  $P = 10$  KN. L'aire  $A$  est égale à  $10 \text{ mm}^2$ . Le module de Young  $E = 2.10^5$  Mpa. On donne  $L=2$ m. Si on néglige la variation de la température et en utilisant la méthode de minimisation de l'énergie potentielle. Calculer en mm les déplacements axiaux au niveau des nœuds 2 et 3 et au milieu de l'élément 1 et 3.



- **Maillage**

On choisit le maillage suivant composé de 3 éléments linéaires à deux nœuds :



- **Conditions aux limites**

Un encastrement au niveau des nœuds 1 et 4 implique des déplacements nuls à leur niveau:

$$U_1 = U_4 = 0$$

Sachant que:

$A_1 = A_2 = 2A \text{ (mm}^2\text{)}$	$A_3 = A \text{ (mm}^2\text{)}$	E (Mpa)	$L_1 = \frac{L}{2} \text{ (mm)}$	$L_2 = \frac{L}{4} \text{ (mm)}$	$L_3 = \frac{L}{2} \text{ (mm)}$
20	10	$2 \cdot 10^5$	1000	500	1000

Alors :

(e)	i	j	L	AE/2L
1	1	2	1000	$2 \cdot 10^3$
2	2	3	1000	$4 \cdot 10^3$
3	3	4	500	$10^3$

- **Expression de l'énergie potentielle**

$$\Pi = \sum_{e=1}^3 \Lambda^{(e)} - \sum_{i=1}^4 P_i U_i$$

$$\Pi = \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)} + \Lambda^{(3)} - (P_1 U_1 + P_2 U_2 + P_3 U_3 + P_4 U_4)$$

Or :

$$U_1 = U_4 = 0$$

Et :

$$P_3 = 0 \quad (\text{pas de chargement au niveau du noeud 3})$$

Donc:

$$\Pi = \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)} + \Lambda^{(3)} - P_2 U_2$$

L'expression de l'énergie de déformation élémentaire en fonction des déplacements nodaux est donnée par la relation suivante :

$$A^{(e)} = \frac{AE}{2L} (U_i^2 - U_i U_j + U_j^2) - AE \alpha \delta T (-U_i + U_j) + \frac{AEL}{2} (\alpha \delta T)^2$$

L'effet de la température est négligé dans ce problème ( $\delta T = 0$ ) alors :

$$A^{(e)} = \frac{AE}{2L} (U_i^2 - U_i U_j + U_j^2)$$

**Elément (1) : i=1 et j=2**

$$A^{(1)} = \frac{AE}{2L} (U_1^2 - U_1 U_2 + U_2^2) = 2 \cdot 10^3 \cdot U_2^2$$

**Elément (2) : i=2 et j=3**

$$A^{(2)} = \frac{AE}{2L} (U_2^2 - U_2 U_3 + U_3^2) = 4 \cdot 10^3 \cdot U_2^2 - 8 \cdot 10^3 \cdot U_2 U_3 + 4 \cdot 10^3 \cdot U_3^2$$

**Elément (3) : i=3 et j=4**

$$A^{(3)} = \frac{AE}{2L} (U_3^2 - U_3 U_4 + U_4^2) = 10^3 \cdot U_3^2$$

Finalement l'expression de l'énergie de déformation:

$$A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} = 6 \cdot 10^3 \cdot U_2^2 - 8 \cdot 10^3 \cdot U_2 U_3 + 5 \cdot 10^3 \cdot U_3^2$$

Et l'expression de l'énergie potentielle devient:

$$\Pi = 6 \cdot 10^3 \cdot U_2^2 - 8 \cdot 10^3 \cdot U_2 U_3 + 5 \cdot 10^3 \cdot U_3^2 - 10000 \cdot U_2$$

Si on minimise l'énergie potentielle par rapport aux déplacements inconnus on obtient les deux équations :

$$\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial U_2} = 12 \cdot 10^3 \cdot U_2 - 8 \cdot 10^3 \cdot U_3 - 10000 = 0$$

$$\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial U_3} = 10 \cdot 10^3 \cdot U_3 - 8 \cdot 10^3 \cdot U_2 = 0$$

On forme le système d'équation suivant :

$$10^3 \begin{bmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Après résolution de ce système on obtient :

$$\begin{cases} U_2 = 1.7857 \text{ mm} \\ U_3 = 1.4286 \text{ mm} \end{cases}$$

- **Approximation par un élément fini 1D à deux nœuds**

**Elément (1) : les nœuds i=1 et j=2**

$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = 1.7857 \text{ mm} \end{cases}$$

Le milieu de l'élément (1) correspond à l'abscisse :  $x_3 = 500 \text{ mm}$ . Soit la fonction linéaire d'approximation:

$$U(x) = N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 = \left( \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \right) \cdot u_1 + \left( \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) \cdot u_2$$

$$U(500) = \left( \frac{500 - 0}{1000} \right) \cdot 1.7857 = 0.8928 \text{ mm}$$

Elément (2) : les nœuds  $i=3$  et  $j=4$

$$\begin{cases} U_3 = 1.4286 \text{ mm} \\ U_4 = 0 \end{cases}$$

Le milieu de l'élément (3) correspond à l'abscisse :  $x_3 = 2000 \text{ mm}$ .

Soit la fonction linéaire d'approximation:

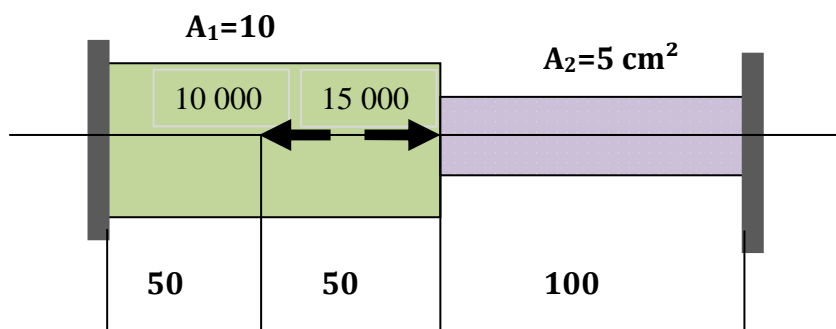
$$U(x) = N_3 \cdot u_3 + N_4 \cdot u_4 = \left( \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3} \right) \cdot u_3 + \left( \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} \right) \cdot u_4$$

$$U(500) = \left( \frac{2500 - 2000}{1000} \right) \cdot 1.4286 = 0.7143 \text{ mm}$$

### Application 2.4

Soit le système à forces axiales suivant (figure). Sachant que le coefficient de dilatation thermique est  $\alpha = 11.10^{-6} / ^\circ\text{C}$ , le module de Young  $E = 10^7 \text{ N/cm}^2$  et si la variation de la température est  $\delta T = 10 ^\circ\text{C}$  :

1. Déterminer les déplacements inconnus provoqués par les charges axiales appliquées en utilisant le principe de l'énergie potentielle minimale.
2. Déterminer les forces axiales dans les différents tronçons de la poutre considérée.
3. Déterminer les contraintes axiales dans les différents tronçons de la poutre considérée.
4. Déterminer les déformations axiales dans les différents tronçons de la poutre considérée.

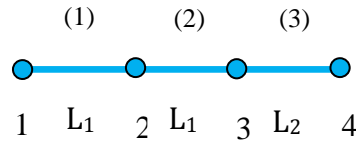


#### • Données

$$E = 10^7 \text{ N/cm}^2 \quad A_1 = 10 \text{ cm}^2 \quad A_2 = 5 \text{ cm}^2 \quad L_1 = 50 \text{ cm} \quad L_2 = 50 \text{ cm} \quad \alpha = 11.10^{-6} / ^\circ\text{C} \quad \delta T = 10 ^\circ\text{C}$$

- **Maillage**

Soit le maillage composé de 3 éléments linéaires à deux nœuds :



- **Conditions aux limites**

Un encastrement au niveau des nœuds 1 et 4 implique des déplacements nuls à leur niveau:

$$U_1 = U_4 = 0$$

Pas de chargement au niveau des nœuds 1 et 4

$$P_1 = P_4 = 0$$

Chargement au niveau des nœuds 2 et 3

$$P_2 = -10000 \text{ N}$$

$$P_3 = 15000 \text{ N}$$

Les caractéristiques géométriques de la poutre sont résumées dans le tableau suivant :

(e)	A (cm <sup>2</sup> )	L (cm)	AE/2L	AE α δT	AE L/2(α. δT) <sup>2</sup>
1	10	50	2.10 <sup>6</sup>	22000	0.605
2	10	50	2.10 <sup>6</sup>	22000	0.605
3	20	100	2.10 <sup>6</sup>	44000	2.420

- **Expression de l'énergie potentielle**

$$\Pi = \sum_{e=1}^3 \Lambda^{(e)} - \sum_{i=1}^4 P_i U_i$$

$$\Pi = \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)} + \Lambda^{(3)} - (P_1 U_1 + P_2 U_2 + P_3 U_3 + P_4 U_4)$$

Or :

$$U_1 = U_4 = 0$$

Donc:

$$\Pi = \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)} + \Lambda^{(3)} - P_2 U_2 - P_3 U_3$$

Soit :

$$\Pi = \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)} + \Lambda^{(3)} + 10000. U_2 - 15000. U_3$$

L'énergie de déformation élémentaire en fonction des déplacements nodaux est donnée par la relation suivante :

$$\Lambda^{(e)} = \frac{AE}{2L} (U_i^2 - U_i U_j + U_j^2) - AE \alpha \delta T (-U_i + U_j) + \frac{AE L}{2} (\alpha. \delta T)^2$$

**Elément (1) :** i=1 et j=2

$$\Lambda^{(1)} = \frac{AE}{2L} (U_1^2 - U_1 U_2 + U_2^2) - 22000.(-U_1 + U_2) + 0.605$$

$$\Lambda^{(1)} = 2.10^6. (U_2^2) - 22000. (U_2) + 0.605$$

**Elément (2) :** i=2 et j=3

$$\Lambda^{(2)} = \frac{AE}{2L} (U_2^2 - U_2 U_3 + U_3^2) - 22000.(-U_2 + U_3) + 0.605$$

$$\Lambda^{(2)} = 2.10^6. (U_2^2 - U_2 U_3 + U_3^2) - 22000.(-U_2 + U_3) + 0.605$$

**Elément (3) :** i=3 et j=4

$$\Lambda^{(3)} = \frac{AE}{2L} (U_3^2 - U_3 U_4 + U_4^2) - 44000.(-U_3 + U_4) + 2.42$$

$$\Lambda^{(3)} = 2.10^6. (U_3^2) - 44000.(-U_3) + 2.42$$

Finalement l'expression de l'énergie de déformation:

$$\Lambda = \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)} + \Lambda^{(3)} = 2.10^6. (U_2^2) - 22000. (U_2) + 0.605 + 2.10^6. (U_2^2 - U_2 U_3 + U_3^2) - 22000.(-U_2 + U_3) + 0.605 + 2.10^6. (U_3^2) - 44000.(-U_3) + 2.42$$

Soit:

$$\Lambda = 2.10^6. (U_2^2) + 4.10^6. (U_3^2) - 2.10^6. U_2 U_3 + 22000. (U_3) + 3.63$$

Et l'expression de l'énergie potentielle devient:

$$\Pi = 2.10^6. (U_2^2) + 4.10^6. (U_3^2) - 2.10^6. U_2 U_3 + 22000. (U_3) + 3.63 + 10000. U_2 - 15000. U_3$$

$$\Pi = 2.10^6. (U_2^2) + 4.10^6. (U_3^2) - 2.10^6. U_2 U_3 + 7000. U_3 + 3.63 + 10000. U_2$$

Si on minimise l'énergie potentielle par rapport aux déplacements inconnus on obtient les deux équations :

$$\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial U_2} = 4.10^6 U_2 - 2.10^6 U_3 + 10000 = 0$$

$$\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial U_3} = 8.10^6 U_3 - 2.10^6 U_2 + 7000 = 0$$

On forme le système d'équation suivant :

$$10^6 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10000 \\ 7000 \end{Bmatrix}$$

Après résolution de ce système on obtient :

$$\begin{cases} U_2 = 0.0034 \text{ cm} \\ U_3 = 0.0017 \text{ cm} \end{cases}$$

- Forces axiales dans les différents tronçons de la poutre**

Expression de la force axiale en fonction des déplacements nodaux :

$$S^{(e)} = \frac{EA}{L} (-u_i + u_j) - AE \alpha \delta T$$

**Elément (1) :** i=1 et j=2

$$S^{(1)} = \frac{EA}{L}(-u_1 + u_2) - AE\alpha \delta T$$

$$S^{(1)} = 4 \cdot 10^6(-u_1 + u_2) - AE\alpha \delta T = 4 \cdot 10^6(0 + 0.0034) - 22000 = -8400 \text{ N}$$

**Elément (2) :** i=2 et j=3

$$S^{(2)} = \frac{EA}{L}(-u_2 + u_3) - AE\alpha \delta T$$

$$S^{(2)} = 4 \cdot 10^6(-u_2 + u_3) - AE\alpha \delta T = 4 \cdot 10^6(-0.0034 + 0.0017) - 22000 = -28800 \text{ N}$$

**Elément (3) :** i=3 et j=4

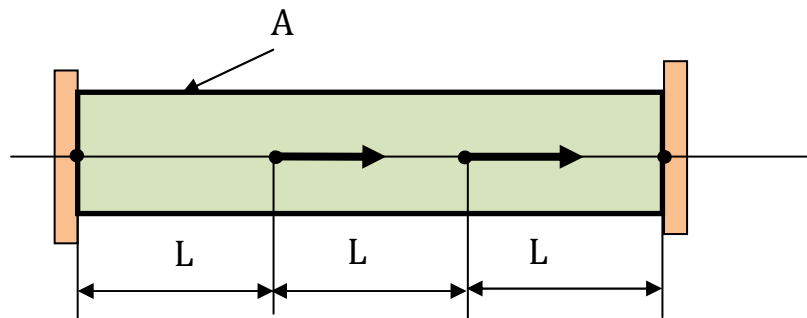
$$S^{(3)} = \frac{EA}{L}(-u_3 + u_4) - AE\alpha \delta T$$

$$S^{(3)} = 4 \cdot 10^6(-u_3 + u_4) - AE\alpha \delta T = 4 \cdot 10^6(0 - 0.0017) - 22000 = -50800 \text{ N}$$

### Application 3.4

Considérons le système à forces axiales suivant constitué d'une poutre encastree par ses deux extremités et soumise à deux charges axiales égales de valeur  $P = 10\,000 \text{ N}$ . L'aire  $A$  de la section de cette poutre est égale à  $5 \text{ cm}^2$ . Le module de Young  $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ . On donne  $L_1=L_2=L_3=L=50 \text{ cm}$ . Le coefficient de dilation thermique est  $\alpha=11 \cdot 10^{-6}$ . La variation de la température est  $\delta T = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ . En utilisant la méthode de minimisation de l'énergie potentielle.

1. Déterminer en cm les déplacements axiaux dus aux charges appliquées.
2. Déterminer les efforts axiaux

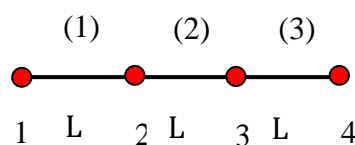


#### • Données

$$E = 10^7 \text{ N/cm}^2 \quad A_1=10 \text{ cm}^2 \quad A_2=5 \text{ cm}^2 \quad L_1=50 \text{ cm} \quad L_2=50 \text{ cm} \quad \alpha = 11 \cdot 10^{-6} / ^\circ\text{C} \quad \delta T = 10 \text{ }^\circ\text{C}$$

#### • Maillage

Soit le maillage composé de 3 éléments linéaires à deux nœuds :





- **Conditions aux limites**

Les encastremements au niveau des nœuds 1 et 4 impliquent des déplacements nuls :

$$U_1 = U_4 = 0$$

Absence de chargement au niveau des nœuds 1 et 4

$$P_1 = P_4 = 0$$

Chargement au niveau des nœuds 2 et 3

$$P_2 = P = 10\,000\text{ N}$$

$$P_3 = P = 10\,000\text{ N}$$

Les caractéristiques géométriques de la poutre sont résumées dans le tableau suivant :

$(e)$	$A\text{ (cm}^2\text{)}$	$L\text{ (cm)}$	$AE/2L$	$AE\alpha\delta T$	$AE/2(\alpha\delta T)^2$
1	5	50	$10^6$	11 000	C1
2	5	50	$10^6$	11 000	C2
3	5	50	$10^6$	11 000	C3

- **Expression de l'énergie potentielle**

$$\Pi = \sum_{e=1}^3 \Lambda^{(e)} - \sum_{i=1}^4 P_i U_i$$

$$\Pi = \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)} + \Lambda^{(3)} - (P_1 U_1 + P_2 U_2 + P_3 U_3 + P_4 U_4)$$

Appliquons les conditions aux limites:

$$U_1 = U_4 = 0$$

$$\Pi = \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)} + \Lambda^{(3)} - P_2 U_2 - P_3 U_3$$

$$\Pi = \Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)} + \Lambda^{(3)} - 10000 \cdot U_2 - 10000 \cdot U_3$$

L'énergie de déformation élémentaire en fonction des déplacements nodaux est donnée par la relation suivante :

$$\Lambda^{(e)} = \frac{AE}{2L} (U_i^2 - U_i U_j + U_j^2) - AE\alpha\delta T (-U_i + U_j) + \frac{AE}{2} (\alpha\delta T)^2$$

**Elément (1) : i=1 et j=2**

$$\Lambda^{(1)} = 10^6 \cdot (U_1^2 - U_1 U_2 + U_2^2) - 11000 \cdot (-U_1 + U_2) + 30.3$$

$$\Lambda^{(1)} = 10^6 \cdot U_2^2 - 11000 \cdot U_2 + 30.3$$

**Elément (2) : i=2 et j=3**

$$\Lambda^{(2)} = 10^6 \cdot (U_2^2 - U_2 U_3 + U_3^2) - 11000 \cdot (-U_2 + U_3) + 30.3$$

$$\Lambda^{(2)} = 10^6 \cdot U_2^2 - 2 \cdot 10^6 \cdot U_2 U_3 + 10^6 \cdot U_3^2 + 11000 \cdot U_2 - 11000 \cdot U_3 + 30.3$$

**Elément (3) : i=3 et j=4**

$$\Lambda^{(3)} = 10^6 \cdot (U_3^2 - U_3 U_4 + U_4^2) - 11000 \cdot (-U_3 + U_4) + 30.3$$

$$A^{(3)} = 10^6 \cdot U_3^2 + 11000 \cdot U_3 + 30.3$$

Finalement l'expression de l'énergie de déformation:

$$A = A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} = 2 \cdot 10^6 \cdot U_2^2 + 2 \cdot 10^6 \cdot U_3^2 - 2 \cdot 10^6 \cdot U_2 U_3 + 90.9$$

Et l'expression de l'énergie potentielle devient:

$$\Pi = 2 \cdot 10^6 \cdot U_2^2 + 2 \cdot 10^6 \cdot U_3^2 - 2 \cdot 10^6 \cdot U_2 U_3 - 10000 \cdot U_2 - 10000 \cdot U_3 + C$$

Si on minimise l'énergie potentielle par rapport aux déplacements inconnus on obtient les deux équations :

$$\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial U_2} = 4 \cdot 10^6 U_2 - 2 \cdot 10^6 U_3 - 10000 = 0$$

$$\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial U_3} = 4 \cdot 10^6 U_3 - 2 \cdot 10^6 U_2 - 10000 = 0$$

Soit ainsi le système d'équation suivant :

$$10^6 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10000 \\ 10000 \end{Bmatrix}$$

Si on résous ce système on obtient :

$$U_2 = U_3 = 0.005 \text{ cm}$$

- **Forces axiales dans les différents tronçons de la poutre**

Expression de la force axiale en fonction des déplacements nodaux :

$$S^{(e)} = \frac{EA}{L} (-u_i + u_j) - AE\alpha \delta T$$

**Elément (1) :** i=1 et j=2

$$S^{(1)} = \frac{EA}{L} (-u_1 + u_2) - AE\alpha \delta T$$
$$S^{(1)} = 2 \cdot 10^6 (-u_1 + u_2) - AE\alpha \delta T = 2 \cdot 10^6 (0 + 0.005) - 11000 = -1\,000 \text{ N}$$

**Elément (2) :** i=2 et j=3

$$S^{(1)} = \frac{EA}{L} (-u_2 + u_3) - AE\alpha \delta T$$
$$S^{(1)} = 2 \cdot 10^6 (-u_2 + u_3) - AE\alpha \delta T = 2 \cdot 10^6 (-0.005 + 0.005) - 11000 = -11\,000 \text{ N}$$

**Elément (3) :** i=3 et j=4

$$S^{(1)} = \frac{EA}{L} (-u_3 + u_4) - AE\alpha \delta T$$
$$S^{(1)} = 2 \cdot 10^6 (-u_3 + u_4) - AE\alpha \delta T = 2 \cdot 10^6 (-0.005 + 0) - 11000 = -21\,000 \text{ N}$$

## Chapitre 5

### Mise en œuvre de la méthode des éléments finis

#### 5.1 Introduction

L'analyse des contraintes est l'un des domaines les plus importants de l'application de la méthode des éléments finis. Généralement on applique cette méthode pour déterminer des forces et des déplacements qui sont dues suite à l'application de ces forces. Egalement on fait recours à la méthode des éléments finis pour déterminer des contraintes et des déformations.

#### 5.2 Element fini barre pour la traction des poutres

Soit une barre de section constante ( $A$ ) et de longueur ( $L$ ), sollicitée par un champ de traction ( $P$ ) (figure 5.1). La barre a un comportement élastique linéaire. On se propose de déterminer les champs de déplacement ( $u$ ), de déformation ( $\varepsilon$ ) et de contrainte ( $\sigma$ ) en tous point de la barre.

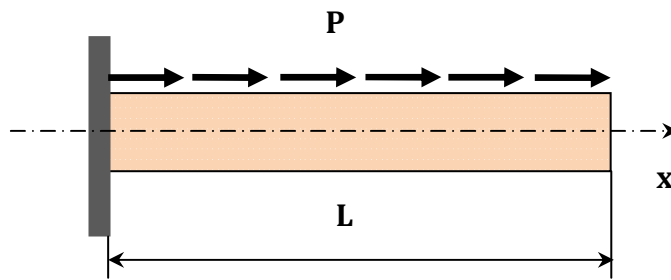


Fig. 5.1 Barre soumise à un champ de tractions

##### 5.2.1 Mise en équation par le principe fondamental de la dynamique

On étudie l'équilibre des forces appliquée à un segment de longueur ( $dx$ ) situé à une distance ( $x$ ) du bord encastré de la barre (figure 5.2).

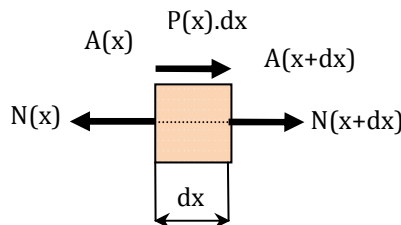


Fig. 5.2 Bilan des forces élémentaires

On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad (5.1)$$

Soit après projection sur l'axe  $\vec{x}$ :

$$N(x + dx) - N + P \cdot dx = 0 \quad (5.2)$$

Or:

$$N(x + dx) = N(x) + \frac{dN}{dx} \cdot dx \quad (5.3)$$

Alors:

$$N + \frac{dN}{dx} \cdot dx - N + P \cdot dx = 0 \quad (5.4)$$

Ou bien :

$$\frac{dN}{dx} \cdot dx + P \cdot dx = \frac{dN}{dx} + P = 0 \quad (5.5)$$

N: représente l'effort normal

Sachant que pour un milieu élastique la loi de Hooke stipule que :

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x \quad (5.6)$$

Et que si on considère l'hypothèse des petits déplacements :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (5.7)$$

L'effort normal est donné par la relation:

$$N(x) = A \cdot \sigma_x \quad (5.8)$$

Si on remplace les relations (5.6) et (5.7) dans l'équation (5.8) on obtient:

$$N(x) = AE \cdot \varepsilon_x = EA \cdot \left( \frac{du}{dx} \right) \quad (5.9)$$

Alors si on passe à la dérivée première par rapport à (x) :

$$\frac{dN(x)}{dx} = EA \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \quad (5.10)$$

Finalement on remplace (5.10) et (5.5) on obtient:

$$EA \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + P = 0 \quad (5.11)$$

On applique les conditions aux limites de ce problème:

- **Conditions aux limites**

Au niveau du bord encastré de la barre pour  $x=0$ :

$$u(0) = 0 \quad (5.12)$$

Au niveau du bord libre de la barre pour  $x=L$  (pas de chargement):

$$N(L) = \left( \frac{du}{dx} \right)_{x=L} = 0 \quad (5.13)$$

- **Solution analytique**

Pour trouver la solution analytique de ce problème, on intègre deux fois l'équation (5.11). On considère l'équation (5.11) :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{-P}{EA}$$

On passe à la première intégrale :

$$\int \frac{d^2u}{dx^2} \cdot dx = \int \frac{-P}{EA} \cdot dx \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{-P}{EA} \cdot x + C_1$$

On passe à la deuxième intégrale :

$$\int \frac{du}{dx} \cdot dx = \int \left( \frac{-P}{EA} x + C_1 \right) dx = \frac{-P}{2EA} x^2 + C_1 x + C_2 = u(x)$$

On obtient ainsi l'expression de la fonction de déplacement  $u(x)$  :

$$u(x) = \frac{-P}{2EA} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (5.14)$$

On applique les conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$

$$u(0) = \frac{-P}{2EA} 0^2 + C_1(0) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\left( \frac{du}{dx} \right)_{x=L} = 0 \Rightarrow \frac{-P}{EA} (L) + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{PL}{EA}$$

Finalement :

$$u(x) = \frac{-P}{2EA} x^2 + \frac{PL}{EA} \cdot x \quad (5.15)$$

On en déduit que :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{-P}{EA} \cdot x + \frac{PL}{EA} \quad (5.16)$$

Et:

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = \frac{-P}{A} \cdot x + \frac{PL}{A} \quad (5.17)$$

### 5.2.2 Solution approchée par la méthode des éléments finis

- **Formulation intégrale**

On forme le résidu (R) à partir de l'équation globale (5.11) et on multiplie par la fonction de pondération ( $\phi$ ) puis on intègre sur l'intervalle  $[0, L]$  :

$$\int_0^L \phi \cdot \left( EA \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + P \right) dx = 0 \quad \forall \phi \quad (5.18)$$

- **Formulation faible**

On intègre le premier membre de l'équation (5.18) (intégration par partie).

$$\int_0^L \left( \phi \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \right) dx = \left[ \phi \cdot \frac{du}{dx} \right]_0^L - \int_0^L \left( \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{du}{dx} \right) dx \quad (5.19)$$

Appliquons les conditions aux limites :

Au niveau du bord encasté de la barre pour  $x=0$ :

$$u(0) = 0 \Rightarrow \left( \frac{du}{dx} \right)_{x=L} = 0$$

Au niveau du bord libre de la barre pour  $x=L$  (pas de chargement):

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=L} = 0$$

Ainsi la relation (5.19) devient:

$$\int_0^L \left( \phi \frac{d^2 u}{dx^2} \right) dx = - \int_0^L \left( \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{du}{dx} \right) dx \quad (5.20)$$

Si on remplace (5.20) dans (5.18) on obtient :

$$\int_0^L EA \left( \phi \frac{d^2 u}{dx^2} \right) dx + \int_0^L P \cdot \phi \cdot dx = - \int_0^L EA \left( \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{du}{dx} \right) dx + \int_0^L P \cdot \phi \cdot dx = 0 \quad \forall \phi \quad (5.21)$$

#### • Discrétisation

Pour la discrétisation, on utilise la méthode de Galerkin et on choisit comme fonction de pondération la variation de la fonction (u) :

$$\phi = \delta u \quad (5.22)$$

Le domaine d'étude est discrétisé par un élément barre à deux nœuds de longueur (L). Le déplacement à l'intérieur de l'élément est interpolé à l'aide des déplacements nodaux des deux extrémités de la barre.

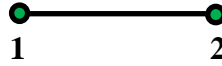


Fig. 5.3 Élément barre à deux nœuds

Pour un élément barre (figure 3.5) nous avons :

$$u(x) = \langle N(x) \rangle \{U_n\} = \langle N_1(x) \ N_2(x) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \langle U_n \rangle \{N(x)\} = \langle u_1 \ u_2 \rangle \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

On choisi les fonctions de forme linéaires suivantes :

$$N_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = 1 - \frac{x}{L} \quad (5.24)$$

Et :

$$N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x}{L} \quad (5.25)$$

A l'aide de la relation (5.23) on peut déterminer le déplacement en n'importe quel point de l'élément. On remplace (5.23) dans (5.21) :

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(\langle N(x) \rangle \{U_n\})}{dx} = \frac{dN(x)}{dx} \{U_n\} = \langle U_n \rangle \left\{ \frac{dN(x)}{dx} \right\} \quad (5.26)$$

A partir des relations (5.24) et (5.25) nous avons :

$$\frac{dN_1(x)}{dx} = -\frac{1}{L} \quad (5.27)$$

Et :

$$\frac{dN_2(x)}{dx} = \frac{1}{L} \quad (5.28)$$

D'après les relations (5.22) et (5.26) on peut écrire que :

$$\frac{d\phi}{dx} = \langle \phi_n \rangle \left\{ \frac{dN(x)}{dx} \right\} \quad (5.29)$$

Compte tenu des relations (5.26) et (5.29) la relation (5.21) devient :

$$-\int_0^L EA \langle \varphi_n \rangle \left\{ \frac{dN(x)}{dx} \right\} \cdot \frac{dN(x)}{dx} \{U_n\} \cdot dx + \int_0^L P \langle \varphi_n \rangle \{N(x)\} \cdot dx = 0 \quad (5.30)$$

Sachant que les fonctions  $\varphi_n$  et  $U_n$  ne dependent pas de la variable  $x$  on peut écrire :

$$\langle \varphi_n \rangle \cdot \left( -\int_0^L EA \left\{ \frac{dN(x)}{dx} \right\} \cdot \frac{dN(x)}{dx} \{U_n\} \cdot dx + \int_0^L P \{N(x)\} \cdot dx \right) = 0 \quad (5.31)$$

Cette relation est vérifiée  $\forall$  la valeur de  $\varphi_n$  donc :

$$-\int_0^L EA \left\{ \frac{dN(x)}{dx} \right\} \cdot \frac{dN(x)}{dx} \cdot dx \cdot \{U_n\} + P \int_0^L \{N(x)\} \cdot dx = 0 \quad (5.32)$$

Il reste à évaluer les différentes intégrales.

$$\left\{ \frac{dN(x)}{dx} \right\} \cdot \frac{dN(x)}{dx} = \begin{Bmatrix} \frac{dN_1(x)}{dx} \\ \frac{dN_2(x)}{dx} \end{Bmatrix} \cdot \left\langle \frac{dN_1(x)}{dx} \quad \frac{dN_2(x)}{dx} \right\rangle = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \cdot \left\langle -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Ou bien

$$\left\{ \frac{dN(x)}{dx} \right\} \cdot \frac{dN(x)}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Donc

$$-\int_0^L EA \left\{ \frac{dN(x)}{dx} \right\} \cdot \frac{dN(x)}{dx} \cdot dx = -\int_0^L EA \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

De même

$$\int_0^L \{N(x)\} \cdot dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \cdot dx = \begin{bmatrix} [x]_0^L - \left[ \frac{x^2}{2L} \right]_0^L \\ \left[ \frac{x^2}{2L} \right]_0^L \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} \end{Bmatrix} = \frac{L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.36)$$

Si on remplace (5.35) et (5.36) dans la relation (5.32) on obtient l'équation discrétisée

$$-\left( \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \right) + \frac{PL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

$R_{x1}$  représente la relation à l'appui

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{PL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

Cette relation prend la forme d'un système linéaire

$$[K] \{U_n\} = \{f_n\} \quad (5.33)$$

Dans cette relation :

$[K]$  : Matrice de rigidité

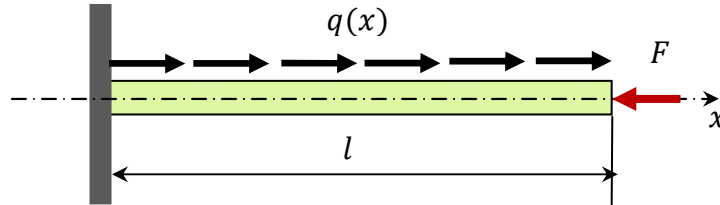
$\{U_n\}$  : Vecteur déplacement nodal

$\{f\}^{(e)}$  : Vecteur des forces nodales

Ces grandeurs seront utilisées pour former le système global (47.3):

### Application 1.5

Soit une barre de section constante ( $A$ ) et de longueur ( $L$ ), encastree d'un coté et libre sur l'autre. La barre est sollicitée par une charge linéaire uniformément répartie  $q(x)$  sur toute sa longueur et par une charge concentrée sur l'extrémité libre. On se propose de déterminer les champs de déplacement ( $u$ ), de déformation ( $\varepsilon$ ) et de contrainte ( $\sigma$ ) en tous point de la barre (figure).

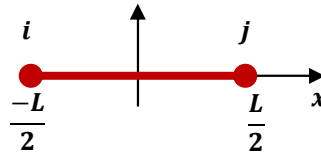


- Données**

$E = 210\,000\text{ MPa}$	$A = 10\text{ cm}^2$	$q = 100\text{ N/cm}$	$l = 100\text{ cm}$	$F = 1000\text{ N}$
---------------------------	----------------------	-----------------------	---------------------	---------------------

- Géométrie de l'élément**

Compte tenu de la géométrie unidimensionnelle du problème, on choisit un élément fini à deux nœuds ( $i, j$ ) de type segment de longueur ( $L$ ) (figure).



On choisit la fonction d'approximation suivante :

$$u(x) = a_1 + a_2 x$$

- Condition aux limites**

Nœud ( $i$ )	Nœud ( $j$ )
$x = \frac{-L}{2}$	$x = \frac{L}{2}$
$u(x) = a_1 + a_2 \cdot \left(\frac{-L}{2}\right) = u_i$	$u(x) = a_1 + a_2 \cdot \left(\frac{L}{2}\right) = u_j$

Alors:

$$u(x) = \left(\frac{-x}{L} + \frac{1}{2}\right) \cdot u_i + \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{2}\right) \cdot u_j$$

Ou bien:

$$u(x) = \left[\frac{-x}{L} + \frac{1}{2} \quad \frac{x}{L} + \frac{1}{2}\right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

- Déformation**

Pour un milieu élastique:

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{u_i - u_j}{L} = \left[\frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L}\right] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$



- **Effort normal**

$$N(x) = EA \cdot \varepsilon(x) = EA \left( \frac{u_i - u_j}{L} \right)$$

- **Matrice de rigidité élémentaire**

Pour un élément fini barre à deux nœuds  $(i, j)$ , la matrice de rigidité élémentaire est donnée par :

$$[K^{(e)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Vecteur des forces généralisées**

Le travail de forces extérieures est donné grâce à la relation:

$$W = F_i u_i + F_j u_j + \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} q(x) \cdot u(x) dx$$

Pour le cas des forces concentrées nous avons:

$$\{F^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}$$

Pour le cas des forces réparties l'expression dépend de  $q(x)$ :

1.  $q(x)$  constant,  $q(x) = q$

$$W = q \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left[ \left( \frac{-x}{L} + \frac{1}{2} \right) \cdot u_i + \left( \frac{x}{L} + \frac{1}{2} \right) \right] dx = q \left( \frac{u_i + u_j}{L} \right) L = [u_i \quad u_j] \begin{bmatrix} q \frac{L}{2} \\ q \frac{L}{2} \end{bmatrix}$$

Soit:

$$\{F^{(e)}\} = \frac{q \cdot L}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.  $q(x)$  linéaire,  $q(x) = q \frac{2x}{L}$

$$W = q \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x \left[ \frac{u_j - u_i}{L} x + \frac{u_i + u_j}{2} \right] dx = \frac{qL}{6} (u_j - u_i)$$

Soit:

$$\{F^{(e)}\} = \frac{q \cdot L}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

### A. Solution analytique

- **Effort normal**

$$N(x) = -q(l - x) - F$$

- **Déformation**

$$\varepsilon(x) = \frac{q}{EA} (l - x) - \frac{F}{EA}$$

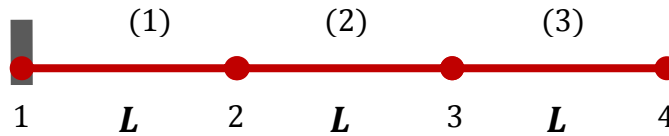
- Déplacement

$$u(x) = \frac{q}{EA} \left( l \cdot x - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{F}{EA} \cdot x$$

**B. Solution MEF**

- Maillage

On utilise le maillage présenté sur la figure suivante:



- Matrices de rigidités élémentaires

$$[K^{(e)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Element 1:**  $L = \frac{l}{3}$

$$[K^{(1)}] = \frac{3EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Element 2:**  $L = \frac{l}{3}$

$$[K^{(2)}] = \frac{3EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Element 3:**  $L = \frac{l}{3}$

$$[K^{(2)}] = \frac{3EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Assemblage

Element	Nœud (i)	Nœud (j)
1	1	2
2	2	3
3	3	4

Dimension de la matrice de rigidité globale

$$D = \text{Nb}(\text{nœuds}) + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$[K] = \frac{3EA}{l} \begin{bmatrix} \textcolor{blue}{1} & \textcolor{blue}{-1} & 0 & 0 \\ \textcolor{blue}{-1} & \textcolor{blue}{1} + \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{-1} & 0 \\ 0 & \textcolor{red}{-1} & \textcolor{red}{1} + \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{-1} \\ 0 & 0 & \textcolor{red}{-1} & \textcolor{red}{1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \textcolor{red}{1} \\ \textcolor{red}{2} \\ \textcolor{red}{3} \\ \textcolor{red}{4} \end{matrix}$$

Soit :

$$[K] = \frac{3EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Vecteur des forces généralisées**

- Présence d'une force concentrée sur l'élément (3) au nœud 4

$$\{F^{(3)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{3} \\ \text{4} \end{matrix}$$

- Force répartie sur tous les éléments ( $3L = l$ )

$$\{F^{(1)}\} = \frac{q \cdot l}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{1} \\ \text{2} \end{matrix} \quad \{F^{(2)}\} = \frac{q \cdot l}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{2} \\ \text{3} \end{matrix} \quad \{F^{(3)}\} = \frac{q \cdot l}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{3} \\ \text{4} \end{matrix}$$

- **Assemblage**

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{q \cdot l}{6} \\ \frac{q \cdot l}{6} + \frac{q \cdot l}{6} \\ \frac{q \cdot l}{6} + \frac{q \cdot l}{6} \\ \frac{q \cdot l}{6} - F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{q \cdot l}{6} \\ \frac{q \cdot l}{3} \\ \frac{q \cdot l}{3} \\ \frac{q \cdot l}{6} - F \end{bmatrix}$$

- **Résolution et prise en compte des conditions aux limites**

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

$$[K] = \frac{3EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q \cdot l}{6} \\ \frac{q \cdot l}{3} \\ \frac{q \cdot l}{3} \\ \frac{q \cdot l}{6} - F \end{Bmatrix}$$

Encastrement au niveau du nœud 1, ( $u_1 = 0$ ). Cette condition nous permet de simplifier le système d'équation qui devient:

$$[K] = \frac{3EA}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q \cdot l}{3} \\ \frac{q \cdot l}{3} \\ \frac{q \cdot l}{6} - F \end{Bmatrix}$$

$$[K] = 42 \cdot 10^3 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \cdot 10^3 \\ 10^3 \\ 1.5 \cdot 10^3 \end{Bmatrix}$$

Après résolution de ce système on trouve:

$$\begin{cases} u_2 = 0.1786 \text{ cm} \\ u_3 = 0.2381 \text{ cm} \\ u_4 = 0.2738 \text{ cm} \end{cases}$$

• Calcul des efforts et des déformations

**Déformations et efforts**

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{u_i - u_j}{L}$$

$$N(x) = EA \cdot \varepsilon(x) = EA \left( \frac{u_i - u_j}{L} \right)$$

<b>Elément 1</b>	$\varepsilon(x) = \frac{u_1 - u_2}{L} = -0,003572$	$N(x) = EA \left( \frac{u_1 - u_2}{L} \right) = -750,12 \text{ N}$
<b>Elément 2</b>	$\varepsilon(x) = \frac{u_2 - u_3}{L} = -0,00119$	$N(x) = EA \left( \frac{u_2 - u_3}{L} \right) = -2499 \text{ N}$
<b>Elément 3</b>	$\varepsilon(x) = \frac{u_4 - u_3}{L} = -0,000714$	$N(x) = EA \left( \frac{u_4 - u_3}{L} \right) = -1499,4 \text{ N}$

**5.3 Element fini barre pour la flexion des poutres**

Soit une poutre droite de section droite constante reposant sur deux appuis simple et Soumise au chargement montré sur la figure 5.4.

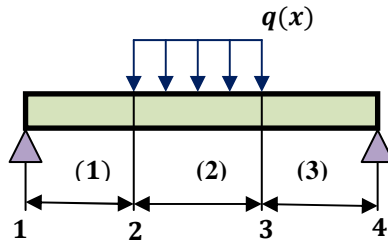


Fig. 5.4 Poutre soumise à la flexion simple

Un élément poutre isolé est soumis aux sollicitations suivantes (figure 5.4).

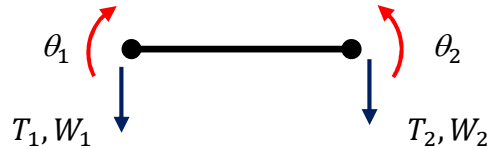


Fig. 5.5 Élément barre en flexion simple

Le nombre de degrés de liberté d'un élément est égal au produit du nombre de nœuds par le nombre de degrés de liberté ( $ddl$ ) de chaque nœud. Par exemple, dans ce cas nous avons  $ddl = 2.2 = 4$ . La matrice de rigidité élémentaire est donnée par la relation :

$$[K_e]\{U\} = \{f_e\} \quad (5.34)$$

Le vecteur force élémentaire est défini par :

$$\{f\} = \begin{pmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

Le vecteur déplacement est défini par :

$$\{U\} = \begin{pmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

Le nombre de degrés de liberté est égal à quatre. On choisit donc comme polynôme d'interpolation pour la fonction de déplacement un polynôme d'ordre quatre.

$$W = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3 \quad (5.37)$$

Alors:

$$\theta = \frac{dW}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 \cdot x + 3\alpha_4 \cdot x^2 \quad (5.38)$$

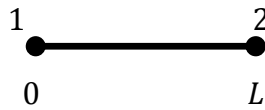
Sous une autre forme on peut écrire que :

$$\{u(x)\} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (5.39)$$

La fonction  $u(x)$  est donc de la forme :

$$\{u(x)\} = [P(x)] \cdot \{\alpha\} \quad (5.40)$$

Pour un élément poutre à deux nœuds de longueur  $L$  :



- **Condition aux limites**

Nœud 1	Nœud 2
$x = 0$	$x = L$
$W_1 = \alpha_1$	$W_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot L + \alpha_3 \cdot L^2 + \alpha_4 \cdot L^3$
$\theta_1 = \alpha_2$	$\theta_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3 \cdot L + 3\alpha_4 \cdot L^2$

Si on remplace dans l'équation (5.39) on obtient:

$$\{u(x)\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

De la forme :

$$\{u(x)\} = [A] \cdot \{\alpha\} \quad (5.42)$$

Donc :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \cdot \{u(x)\} \quad (5.43)$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Si on remplace la relation (5.43) dans (5.40) on obtient :

$$\{u(x)\} = [P(x)][A]^{-1}\{u\} \quad (5.45)$$

• **Relation entre déplacement et déformations**

D'après la théorie de l'élasticité le champ de déformations  $\varepsilon(x)$  peut être déduit à partir de celui de déplacements  $u(x)$ . Les déformations  $\varepsilon(x)$  sont obtenues par dérivation du champ de déplacement  $u(x)$ .

$$\{\varepsilon(x)\} = \text{dérivée} ([P(x)]). [A]^{-1}\{u\} \quad (5.46)$$

D'après la théorie de la flexion simple des poutres nous avons:

$$M(x) = -EI \frac{d^2w}{dx^2} \quad (5.47)$$

Et:

$$\sigma(x) = \frac{M(x).z}{I} \quad (5.48)$$

Or:

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{\frac{M(x).z}{I}}{E} = \frac{-EI \frac{d^2w}{dx^2}.z}{EI} = -z. \frac{d^2w}{dx^2} \quad (5.49)$$

Ce qui conduit à:

$$-\frac{d^2w}{dx^2} = [0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x] \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (5.50)$$

Si on remplace (5.50) dans (5.49) on aura :

$$\varepsilon(x) = z. [0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x] \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (5.51)$$

Ce qui conduit à:

$$\varepsilon(x) = z. [0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.52)$$

Soit alors :

$$\varepsilon(x) = z. \left[ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \quad \frac{-6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right] \cdot \begin{Bmatrix} W_1 \\ \theta_1 \\ W_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.53)$$

$$\{B(x)\} = \text{dérivée} ([P(x)]) = [0 \quad 0 \quad -2 \quad -6x] \quad (5.54)$$

Alors:

$$\varepsilon(x) = z. \{B(x)\}. [A]^{-1}. \{u\} \quad (5.55)$$

Pour un matériau élastique, la loi de Hooke qui les contraintes aux déformations stipule que :

$$\{\sigma(x)\} = [D]. \varepsilon(x) \quad (5.56)$$

Dans la relation (5.54)  $[D]$ , représente la matrice des propriétés élastiques du matériau constituant l'élément.

- **Relation entre les charges et les déplacements nodaux**

Le travail externe des charges nodales dû à un déplacement virtuel ( $\delta u$ ) est donné comme suit:

$$Q_e = P_1. \delta u_1 + P_2. \delta u_2 + P_3. \delta u_3 + \dots + P_n. \delta u_n = \{\delta u\}. \{P\} \quad (5.57)$$

Le travail interne est donné comme suit :

$$Q_i = \iiint_V \{d\varepsilon(x)\}^T. \{\sigma(x)\}. dV \quad (5.58)$$

Si on remplace (5.55) et (5.56) dans (5.58) on obtient :

$$Q_i = \iiint_V z^2. \{\{B(x)\}. [A]^{-1}. \{du\}\}^T. [D]. \{\{B(x)\}. [A]^{-1}. \{u\}\} dV \quad (5.59)$$

Sachant que:

$$dV = A. dx \quad (5.60)$$

$dV$  : élément de volume

$A$  : aire de la section de la barre

Et:

$$\iint z^2. dA = I \quad (5.61)$$

Donc:

$$Q_i = \int_0^L I. \{\{B(x)\}. [A]^{-1}. \{du\}\}^T. [D]. \{\{B(x)\}. [A]^{-1}. \{u\}\} dx \quad (5.61)$$

L'équilibre entre le travail externe et le travail interne fait que:

$$Q_e = Q_i \quad (5.62)$$

Sachant que  $du = \delta u$ , alors :

$$Q_e = \{\delta u\} \cdot \{P\} = \{P\} \cdot \{\delta u\}^T = \{\delta u\}^T \int_0^L I \cdot \{B(x)\} \cdot [A]^{-1} \}^T \cdot [D] \cdot \{B(x)\} \cdot [A]^{-1} \cdot \{u\} \} dx \quad (5.63)$$

Ceci conduit à:

$$\{P\} = \{u\} \cdot \int_0^L I \cdot \{B(x)\} \cdot [A]^{-1} \}^T \cdot [D] \cdot \{B(x)\} \cdot [A]^{-1} \cdot \{u\} \} dx \quad (5.64)$$

Or:

$$\{P\} = [K] \cdot \{u\} \quad (5.65)$$

Par identification:

$$[K] = \int_0^L I \cdot \{B(x)\} \cdot [A]^{-1} \}^T \cdot [D] \cdot \{B(x)\} \cdot [A]^{-1} \cdot \{u\} \} dx \quad (5.66)$$

Soit:

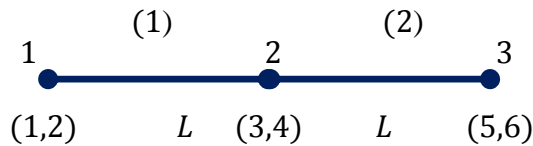
$$[K] = \int_0^L \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \cdot EI \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} & -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & \frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \cdot dx \quad (5.67)$$

En effectuant le produit et en intégrant on obtient la matrice élémentaire de l'élément barre en flexion simple.

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

### **Application 2.5**

Déterminer la matrice de rigidité globale d'une poutre composée deux éléments barres identiques de longueur  $l_1 = l_2 = L = 1 \text{ m}$ , soumise à une flexion simple.



Chaque nœud possède 2 degrés de liberté. La dimension de la matrice de rigidité globale est :

$$d = 2 \times 3 = 6$$



- Matrices de rigidités élémentaires

Element 1:  $l_1 = L = 1$

$$[K^1] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Element 2:  $l_2 = L$

$$[K^2] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

- Assemblage

Element / Nœuds	(1)	(2)
1	1	-
2	2	-
3	3	3
4	4	4
5	-	5
6	-	6

$$[K^G] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & & & \\ \textcolor{blue}{1} & 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ \textcolor{blue}{2} & 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ \textcolor{blue}{3} & -12 & -6 & 12+12 & -6+6 & -12 & 6 \\ \textcolor{blue}{4} & 6 & 2 & -6+6 & 4+4 & 12 & -6 \\ \textcolor{blue}{5} & 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ \textcolor{blue}{6} & 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

Finalement on obtient la matrice de rigidité globale du système :

$$[K^G] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} & \textcolor{red}{1} & \textcolor{red}{2} & \textcolor{red}{3} & \textcolor{red}{4} & \textcolor{red}{5} & \textcolor{red}{6} \\ \textcolor{blue}{1} & 12 & 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ \textcolor{blue}{2} & 6 & 4 & -6 & 2 & 0 & 0 \\ \textcolor{blue}{3} & -12 & -6 & 24 & 0 & -12 & 6 \\ \textcolor{blue}{4} & 6 & 2 & 0 & 8 & 12 & -6 \\ \textcolor{blue}{5} & 0 & 0 & -12 & -6 & 12 & -6 \\ \textcolor{blue}{6} & 0 & 0 & 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

## 5.4 Element fini treillis

### 5.4.1 Interpolation sur l'élément fini barre

Soit un élément barre linéaire à deux nœuds ( $i, j$ ) (figure 5.6). Les déplacements nodaux aux nœuds ( $i$ ) et ( $j$ ) sont notés respectivement ( $u_i$ ) et ( $u_j$ ). Utilisons une approximation nodale à deux paramètres:

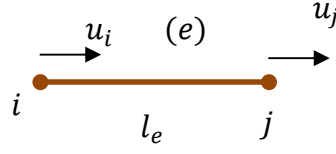


Fig. 5.6 Élément barre linéaire à deux nœuds

$$u(x) = a_1 + a_2 x = \langle 1 \quad x \rangle \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (5.69)$$

- **Condition aux limites**

Nœud (i)	Nœud (j)
$x = 0$	$x = l$
$u(x) = a_1 + a_2 \cdot 0 = u_i$	$u(x) = a_1 + a_2 \cdot l = u_j$

En en déduit que:

$$a_1 = u_i$$

$$a_2 = \frac{u_j - u_i}{l}$$

La relation (5.69) devient:

$$u(x) = \langle 1 - \frac{x}{l} \quad \frac{x}{l} \rangle \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (5.70)$$

De la forme:

$$u(x) = \langle N(x) \rangle \{u_e\} = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \rangle \{u_e\} \quad (5.71)$$

L'énergie de déformation est donnée par la relation:

$$2E_d = \int_{(D)} \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon} \, dv \quad (5.72)$$

Dans la relation (5.72),  $\bar{\sigma}$  représente le tenseur de contrainte et  $\bar{\varepsilon}$  celui de déformation. Pour un matériau élastique, on utilise les lois de comportement élastique.

$$\sigma(x) = E \cdot \varepsilon(x) \quad (5.73)$$

Et:

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.74)$$

On remplace (5.73) et (5.74) dans (5.72) :

$$2E_d = \int_0^l ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \quad (5.75)$$

Sachant que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \langle \frac{\partial N(x)}{\partial x} \rangle \{u_e\} = \langle -\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \rangle \{u_e\} \quad (5.76)$$

Et:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (5.77)$$

Si on remplace (5.76) dans (5.77) on aura:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \{u_e\}^T \cdot \left\langle \frac{\partial N(x)}{\partial x} \right\rangle^T \cdot \left\langle \frac{\partial N(x)}{\partial x} \right\rangle \cdot \{u_e\} = \{u_e\}^T \cdot \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \{u_e\} \quad (5.78)$$

On substitue (5.78) dans (5.75) et on obtient :

$$2E_d = \int_0^l ES \cdot \{u_e\}^T \cdot \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \{u_e\} dx = \{u_e\}^T \cdot \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \{u_e\} \quad (5.79)$$

De la forme :

$$2E_d = \{u_e\}^T [K_e] \{u_e\} \quad (5.80)$$

Par identification, on en déduit la matrice de rigidité élémentaire:

$$[K_e] = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

- **Etat de contraintes**

L'effort normal est déterminé en fonction des déplacements nœaux:

$$N = ES \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = ES \left\langle \frac{dN(x)}{dx} \right\rangle \{u_e\} = ES \left\langle -\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \frac{ES}{l} [u_j - u_i] \quad (5.82)$$

#### 5.4.2 Élément treillis (2D)

Soit un élément barre  $(i, j)$  qui forme un angle  $(\alpha)$  avec l'axe  $(\vec{x})$  du repère  $(\vec{x}, \vec{y})$  choisis (figure ). On veut exprimer le déplacement axial  $(\bar{u})$  en fonction des composantes globales  $(u, v)$  :

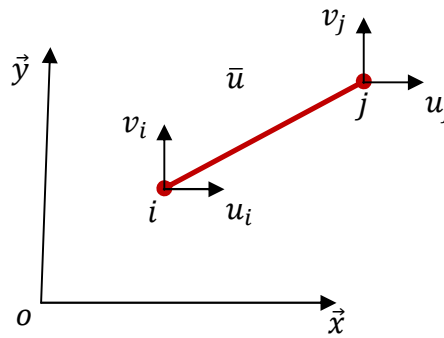


Fig. 5.7 Élément treillis (2D)

$$\bar{u} = \langle \cos \alpha \quad \sin \alpha \rangle \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \langle C_\alpha \quad S_\alpha \rangle \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (5.83)$$

Appliquons ce changement de base aux nœuds  $(i)$  et  $(j)$  de l'élément considéré :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_\alpha & S_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_\alpha & S_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (5.84)$$

Reportons ce changement de base dans l'expression de l'énergie de déformation :

$$2E_d = \{\bar{u}_e\}^T \frac{ES}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{\bar{u}_e\} \quad (5.85)$$

Soit :

$$2E_d = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} C_\alpha & S_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_\alpha & S_\alpha \end{bmatrix} \frac{EI}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_\alpha & S_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_\alpha & S_\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (5.86)$$

Le développement de cette expression conduit au résultat suivant :

$$2E_d = \{u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j\} \frac{EI}{l_e} \begin{bmatrix} [A] & -[A] \\ -[A] & [A] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (5.87)$$

De la forme :

$$2E_d = \{\bar{u}_e\}^T [K_e] \{\bar{u}_e\} \quad (5.88)$$

On en déduit la matrice de rigidité élémentaire:

$$[K_e] = \frac{ES}{l_e} \begin{bmatrix} [A] & -[A] \\ -[A] & [A] \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

Avec:

$$[A] = \begin{bmatrix} C_\alpha^2 & C_\alpha S_\alpha \\ C_\alpha S_\alpha & S_\alpha^2 \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

- **Etat de contraintes**

L'effort normal est déterminé en fonction des déplacements nodaux:

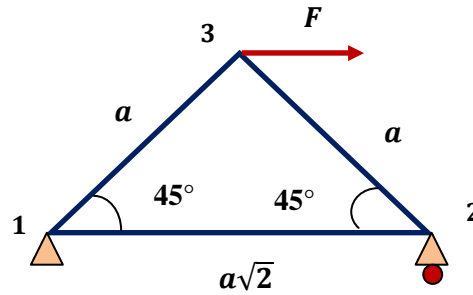
$$N = ES \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) = ES \left\langle \frac{dN(x)}{dx} \right\rangle \{\bar{u}_e\} = \frac{ES}{l} [\bar{u}_j - \bar{u}_i] \quad (5.91)$$

On remplace (5.84) dans (5.91) :

$$N = \frac{ES}{l} \langle C_\alpha \quad S_\alpha \rangle \{u_j - u_i\} \quad (5.92)$$

### **Application 3.5**

Etudier la réponse statique du système mécanique suivant composé de trois barres en treillis. On donne le module de Young  $E = 200\,000 \text{ MPa}$ . La section des barres  $S = 100 \text{ mm}^2$ . La longueur  $a = 250 \text{ mm}$ . L'effort appliqué  $F = 1000 \text{ N}$ .

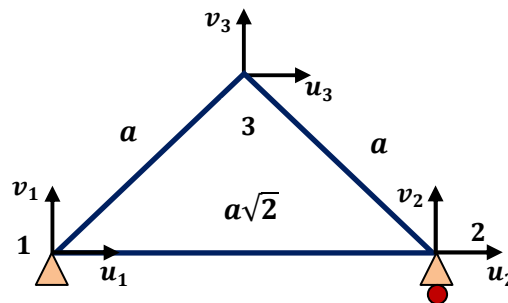


- **Analyse du problème**

Nous avons trois nœuds, chaque nœud possède deux variables  $(u, v)$  qui représentent les déplacements nodaux. Soit au total 6 degrés de liberté.

$$\{u\}^T = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3\}$$

- **Représentation graphique des degrés de liberté**



- **Conditions aux limites**

Nœud 1	Nœud 2
$u_1 = 0$	—
$v_1 = 0$	$v_2 = 0$
2 inconnues: $\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{Bmatrix}$	1 inconnue: $\{Y_2\}$

- **Vecteur forces nodales**

$$\{F\}^T = \{X_1 \quad Y_1 \quad 0 \quad Y_2 \quad F \quad 0\}$$

- **Vecteur déplacement**

$$\{u\}^T = \{0 \quad 0 \quad u_2 \quad 0 \quad u_3 \quad v_3\}$$

Nous avons au total 6 inconnues à déterminer. Sachant que:

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

Alors:

$$[K] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ 0 \\ Y_2 \\ F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Calculons la matrice de rigidité globale de cette structure. Pour un élément barre  $(i, j)$  de longueur  $(l)$  nous avons :

**En 1D:**

$$[K_e] = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{sur } \langle u_i \ u_j \rangle$$

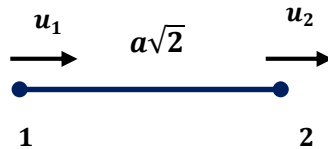
**En 2D:**

$$[K_e] = \frac{ES}{l_e} \begin{bmatrix} [A] & -[A] \\ -[A] & [A] \end{bmatrix} \quad \text{sur } \langle u_i \ v_i \ u_j \ v_j \rangle$$

$$\alpha = 45^\circ \quad C_\alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad S_\alpha = \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} C_\alpha^2 & C_\alpha S_\alpha \\ C_\alpha S_\alpha & S_\alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• **Élément 1**



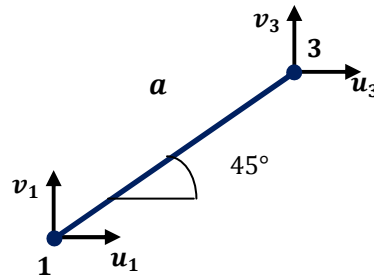
$$[K_1] = \frac{ES}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{ES}{a\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}ES}{2a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sur  $\langle u_1 \ u_2 \rangle$

• **Élément 2**

$$[K_2] = \frac{ES}{2a} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

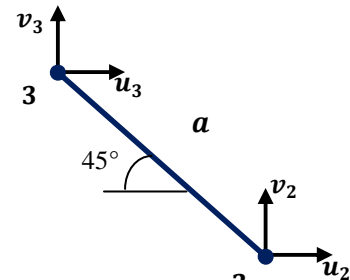
Sur  $\langle u_1 \ v_1 \ u_3 \ v_3 \rangle$



**Élément 3**

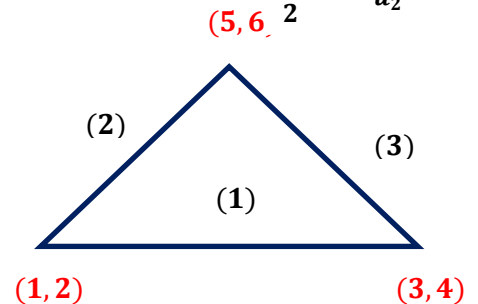
$$[K_3] = \frac{ES}{2a} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sur  $\langle u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \rangle$



• **Assemblage**

Nœuds/ Element	(1)	(2)	(3)
1	1	1	-
2	-	2	-
3	3	-	3
4	-	-	4
5	-	5	5
6	-	6	6



Dimension de la matrice de rigidité globale

$$d = Nb \text{ (noeuds)} \cdot Nb(ddL) = 3 \cdot 2 = 6$$

$$[K_G] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1+1 & 1+1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1+1 & 1+1 \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \left(\frac{ES}{2a}\right)$$

$$[K_G] = \frac{ES}{2a} \begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Résolution**

$$[K]\{U\} = \{F\}$$

$$\frac{ES}{2a} \begin{bmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ 0 \\ Y_2 \\ F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pour déterminer les déplacements inconnues le système se réduit à:

$$\frac{ES}{2a} \begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Une fois les déplacements inconnues sont déterminés on peut calculer les efforts au niveau des appuis:

---

• **Bibliographie**

- [1] G. Daht, G. Touzot, Une présentation de la méthode des éléments finis, ISBN 2-7637-6912-8, Les presses de l'université de Laval, Québec.
- [2] J. L Segerlind, Applied finite element analysis, Agricultural Engineering Department, Michigan State University, John Wiley & Sons, 2<sup>nd</sup> edition.
- [3] W. Y Yang, W. Cao, T. S Chung, J. Morris, Applied Numerical Methods Using MATLAB, ISBN 0-471-69833-4, John Wiley & Sons, 2005.
- [4] P. Boisse, Résistance des structures introduction à la méthode des éléments finis, Cours MS 256, Insa de Lyon.
- [5] O. Rahmani, S. kebdani, Introduction à la Méthode des Éléments Finis pour les Ingénieurs, Edition OPU, 2003.
- [6] E.J. HEARN, Mechanics of Materials 1: An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials, University of Warwick United Kingdom, 3<sup>rd</sup> edition.
- [7] E.J. HEARN, Mechanics of Materials 2: An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials, University of Warwick United Kingdom, 3<sup>rd</sup> edition.
- [8] G. R Liu, S. S Quek, The Finite Element Method: A Practical Course, Department of Mechanical Engineering, National University of Singapore, Elsevier Science Ltd, 2003.
- [9] A.J.M. Ferreira, MATLAB Codes for Finite Element Analysis, Porto University, Portugal, Springer.
- [10] E. Madenci, I. Guven, The Finite Element Method and Applications in Engineering Using Ansys, The University of Arizona, Springer.
- [11] R.T Fenner, Finite Element Methods for Engineers, Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, Technology and Medicine London, 1996.
- [12] B. William, J. Zimmerman, Process Modelling and Simulation with Finite Element Methods, ISBN 981-238-793-5, World Scientific Printers, University of Sheffield, UK.
- [13] C. Zienkiewicz, La Méthode Des Éléments Finis, Mc Graw Hill, 1979.
- [14] C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, The Finite Element Method For Solid And Structural Mechanics, Sixth Edition, Butterworth-Heinemann 2005.
- [15] J. L Batoz, G. Dhatt, Modélisation Des Structures Par Éléments Finis, Volume 1 : Solides Elastiques, Hermès Sciences Publication 1990.
- [16] J. L Batoz, G. Dhatt, Modélisation Des Structures Par Éléments Finis, Volume 2 : Poutres & Plaques, Hermès Sciences Publication 1990.
- [17] J. L Batoz, G. Dhatt, Modélisation Des Structures Par Éléments Finis, Volume 3 : Coques, Hermès Sciences Publication 1992.