TD n°5 ONDES MÉCANIQUES

Équations des cordes vibrantes

Durée :4h

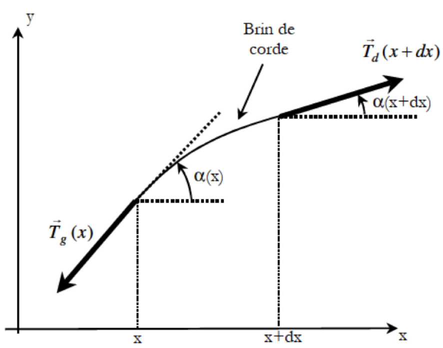
PROBLÈME 1. *ÉQUATION DE PROPAGATION DE L'ÉBRANLEMENT :*
Les cordes des instruments de musique sont des objets cylindriques homogènes, tendus entre deux points séparés par une longueur L. Le rayon du cylindre est a avec $a \ll L$.

1 Équation des cordes vibrantes :

La corde de masse linéique μ est tendue avec la tension T_0. Au repos la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox).

On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note y (x,t) le déplacement (ou ébranlement) du point de la corde à l'abscisse x à l'instant t. L'axe Oy est l'axe vertical ascendant.
On fait les hypothèses suivantes :

- *Les déplacements sont petits, de même que l'angle que fait la corde avec l'axe Ox, ce qui entraîne :*$|\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}| \ll 1$
- *On ne gardera que les termes du premier ordre en y(x,t) et en ses dérivées ;*
- *On néglige les effets de la pesanteur.*



1.1 Équation des cordes vibrantes :

1. *On considère l'élément de corde de longueur dl situé entre les plans d'abscisses x et x +dx.Appliquer le théorème de la résultante cinétique à cet élément de corde. En déduire que l'ébranlement y(x,t) vérifie l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

   ou c est une grandeur à exprimer en fonction de T_0 et μ
2. *Que devient l'équation de propagation si on ne néglige plus le poids de la corde.*
3. *supposons que cet élément dl de la corde est soumis à une force d'amortissement dans l'air,proportionnelle à sa vitesse instantanée :*

$$d\overrightarrow{f} = -b\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}dx\overrightarrow{e_y} \quad avec \quad b > 0$$

   trouver à nouveau l'équation de propagation vérifie par y(x,t).
4. *le déplacement y(x,t) de point M de la corde,supposé sinusoïdal par rapport au temps, possède la représentation complexe : $y(x,t) = A(x)e^{j\omega t}$ Établir l'équation différentielle satisfaite par l'amplitude $A(x)$ à l'aide des paramètres $k = \dfrac{\omega}{c}$ et $a = \dfrac{b}{2\sqrt{\mu T_0}}$.*
5. *on admet maintenant que l'amortissement $(b \ll \mu\omega)$:*
   (a) *donner la solution générale A(x)de l'amplitude complexe de l'onde.*
   (b) *exprimer, en notation réel, l'équation y(x,t) des ondes progressives amorties qui se propage sur cette corde.*

1.2 Corde vibrante verticale :

une corde vibrante OA, de longueur l = 1,66m et de masse m, pend librement, l'extrémité O étant fixée au plafond. la corde à l'équilibre est matérialisée par l'axe (Ox) orienté suivant la verticale descendante.
En présence d'une onde , le point M de la corde d'abscisse x = OM se déplace perpendiculairement à l'axe Ox, de la petite quantité y(x,t)à l'instant t.

1. *exprimer le module de la tension T(x) de la corde en M,à l'aide des données g,l et m.*
2. *Établir l'équation différentielle à laquelle obéit le déplacement transversal y(x,t).*
3. *justifier que la célérité de l'onde transversale s'écrit :*

$$c = \sqrt{g(l-x)}$$

2 Solution de l'équation de D'ALEMBERT :

2.1 ONDES PLANES :

une corde homogène,de masse linéique μ et de longueur Let de tension T,écartée de sa position d'équilibre, est abandonnée à l'instant t = 0.le déplacement transversal y(x,t) de tout point M de la corde, d'abscisse x $(0 \leq x \leq L)$, obéit à l'équation de D'ALEMBERT :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

On se place en coordonnées cartésiennes et on considère les deux fonction :

$$y(x,t) = f_+(t - \frac{x}{c}) + f_-(t + \frac{x}{c})$$

1. *montrer que y(x,t) est une solution de l'équation de D'ALEMBERT.*
2. *définir une onde plane.Qu'est ce qu'une onde mécanique progressive.*
3. *considérons $y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$,Déterminer la relation de dispersion.Interpréter.*
4. *Quelles sont les surfaces d'ondes ?Déterminer "la vitesse de phase" de déplacement de ces surfaces d'onde.*

2.2 ONDES STATIONNAIRES :

une corde homogène,de masse linéique μ et de longueur L,est fixée en ses deux extrémités A(x=0) et B(x=L). La corde de tension T,écartée de sa position d'équilibre, est abandonnée à l'instant t = 0.le déplacement transversal y(x,t) de tout point M de la corde, d'abscisse x $(0 \leq x \leq L)$, obéit à l'équation de D'ALEMBERT :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

1. *on admet la solution particulière y(x,t) = f(x).g(t) est une solution de l'équation de propagation de D'ALEMBERT. montrer que le déplacement transversale de point M de la corde est de la forme :*

   $$y(x,t) = A\cos(kx + \varphi)cos(\omega t + \psi)$$

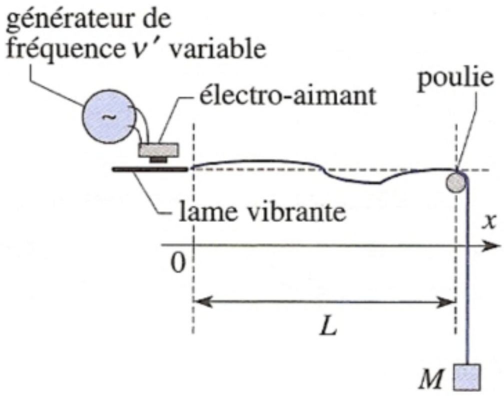
   Quelle relation y-t-il entre k,ω et c.
2. *montrer que les fréquences de vibration de la corde sont des multiples entières d'une fréquence fondamentale telque : $f_n = nf_1$, avec n entier positif.exprimer f_1 en fonction de T , L et μ.*
3. *exprimer,en fonction de la longueur L, les longueurs d'onde possibles de la corde vibrante.*
4. *exprimer le déplacement transversal $y_n(x,t)$ pour le mode n (entier)de vibration.préciser le nombre et la position des points immobiles de la corde.*

5. *dessiner la corde pour n=1 et n= 4.*

PROBLÈME 2. *Corde de Melde :*

La code de Melde est une corde ,sans raideur de masse linéique μ, tendue entre deux extrémités :

- *la première est constituée par une lame vibrante, soumise à une électroaimant excitateur, qui effectue de petites oscillations verticales .*
- *la seconde est constituée par une poulie sur laquelle la corde, enroulée, est tendue par le poids d'une masse M ajustable.*

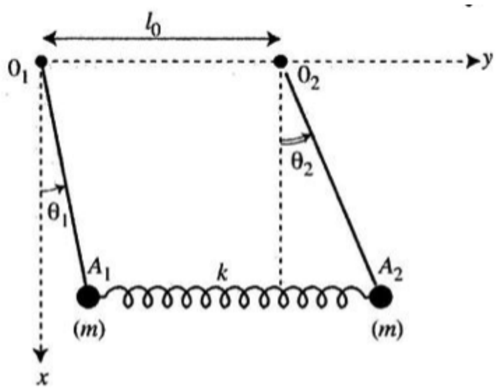


Dans l'expérience de Melde, l'extrémité d'abscisse $x = L$ d'une corde est fixée (y(L,t)=0) et un opérateur impose en $x = 0$ un déplacement harmonique $y(0, t) = a \cos \omega t$.On s'intéressera au régime sinusoïdale permanent établie de la corde vibrante.

1. *Déterminer le déplacement y(x,t) de la corde vibrante.*
2. *justifier et interpréter les résonances de vibration de la corde observées lorseque la longueur L est modifiée.*

PROBLÈME 3. *Couplage de deux pendules simples :*

Deux pendules identiques O_1A_1 et O_2A_2, de masse m et de longueur l, sont couplés par un ressort horizontal de raideur k qui relie les deux masses A_1 et A_2. A l'équilibre, le ressort horizontal à sa longueur naturelle l_0 ($l_0 = O_1O_2$). Les deux pendules sont repérés, à l'instant t, par leurs élongations angulaires θ_1 et θ_2 ,supposées petites, par rapport à leur position verticale d'équilibre. On désigne par g l'accélération de la pesanteur.



1. ***Oscillations libres,Modes propres***
   (a) *Écrire les équations différentielles de second ordre vérifiées par les deux élongations angulaires instantanées $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$*
   (b) *Exprimer en fonction de g ,l et m les deux pulsations propres ω' et ω" de ce système, par deux méthodes différentes.*
   (c) *On lâche sans vitesse initiale le système à l'instant t=0 dans les conditions $\theta_1(0) = \theta_0$ et $\theta_2(0) = 0$.*
      i. *en déduire les lois d'évolution $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.*
      ii. *tracer $\theta_1(t)$ dans le cas ou $\dfrac{k}{m} \ll \dfrac{g}{l}$.Interpréter.*
      iii. *Calculer la période T_B de battements.*
2. ***Oscillations forcées,Impédance***
   On reprend les deux pendules simples couplés par le ressort, mais la masse A_1 est soumise à la force excitatrice horizontale $\overrightarrow{F_e} = F_M \cos \omega t \overrightarrow{e_y}$
   (a) *Écrire les équations différentielles couplées en $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$*

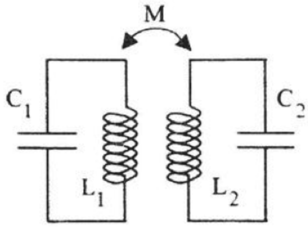
(b) *Écrire les relation complexes qui concernent les vitesses linéaires $\underline{V_1}$ et $\underline{V_2}$ de A_1 et A_2 .*

(c) *en déduire l'impédance d'entrée $\underline{Z_e} = \frac{\underline{F_e}}{\underline{V_1}}$.*

PROBLÈME 4. *Circuits L-C couplés par inductance mutuelle, régime libre et régime forcé :*

1. ***Régime libre :***

Soient deux circuits L-C identiques, de résistance négligeable. Le couplage par inductance mutuelle M est caractérisé par le coefficient de couplage $k = \frac{M}{L}$. On pose $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$:



(a) *Écrire les deux équations différentielles vérifiées par les charges $q_1(t)$ et $q_2(t)$ des condensateurs des circuits 1 et 2.*

(b) *En déduire les équations différentielles vérifiées par la somme $S(t) = q_1 + q_2$ et la différence $D(t) = q_1 - q_2$. Déterminer les pulsations propres ω' et ω'' de ce système couplé en fonction de ω_0 et k.*

(c) i. *on admet le* ***couplage lâche*** *($k = M/L \ll 1$). A l'instant t=0 où on ferme l'interrupteur, le condensateur (1) porte la charge q_{10} et celui du deuxième circuit est déchargé. Montrer que la charge du condensateur du premier circuit évolue au cours du temps suivant :*

$$q_1(t) = q_{10}cos(\Omega t).cos(\omega_0 t)$$

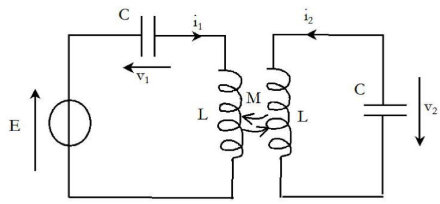
où Ω est exprimé en fonction de ω_0 et k.

ii. *En déduire la loi d'évolution de la charge $q_2(t)$ du condensateur du deuxième circuit.*

iii. *On donne $C = 2\mu F$; L=0,5 H; m=1/10 , $q_{10} = 1\mu C$. Tracer l'allure des graphes $q_1(t)$ et $q_2(t)$; calculer la pseudo période T, la période des battements T_B et la période T_A pour l'amplitude.*

2. ***Régime forcé :***

Le circuit primaire de deux circuits L-C couplés par induction mutuelle est alimenté par un générateur sinusoïdal de f.e.m $e_1(t) = V cos\omega t$. On étudie le circuit couplé en régime forcé permanent :



(a) *Exprimer, en régime forcé, les charges $q_1(t)$ et $q_2(t)$ sous la forme : $q_1(t) = Q_1(\omega).cos(\omega t)$ et $q_2(t) = Q_2(\omega).cos(\omega t)$ où on déterminera les amplitudes $Q_1(\omega)$ et $Q_2(\omega)$ en Fonction de V, L, ω_0 et k.*

(b) i. *Déterminer la pulsation ω_A d'anti-résonance pour laquelle $Q_1(\omega_A) = 0$; en déduire l'amplitude $Q_2(\omega_A)$.*

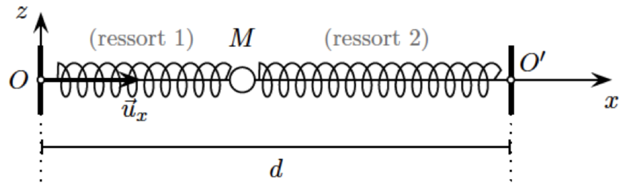
ii. *Tracer l'allure des graphes $|Q_1(\omega)|$ et $Q_2(\omega)|$.*

PROBLÈME 5. *Un, puis deux, puis une infinité d'oscillateurs harmoniques*

1. Deux ressorts et une masse :

On accroche un point matériel M entre deux ressorts tels que OO' = d. Le ressort 2 est identique au ressort 1 (raideur k et longueur à vide l_0) . On utilisera les notations avec l'indice 2 pour l_2, et $l_{eq,2}$.

1.1. Mise en équation :



1. *Écrire l'expression de la force exercée par le ressort 2 sur M en fonction de k,l_2, l_0 et le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_x$. Vérifier que le signe est correct en étudiant qualitativement les deux cas : ressort allongé puis ressort contracté.*
2. *Écrire vectoriellement le principe fondamental pour M.*
3. *Projeter cette relation sur l'axe horizontal.*
4. *En déduire, en partant notamment de la relation précédente, les valeurs de $l_{eq,1}$ et $l_{eq,2}$.*

1.2.Résolution 1 :

On choisit alors l'origine de l'axe au point O et l'abscisse de M est notée x.

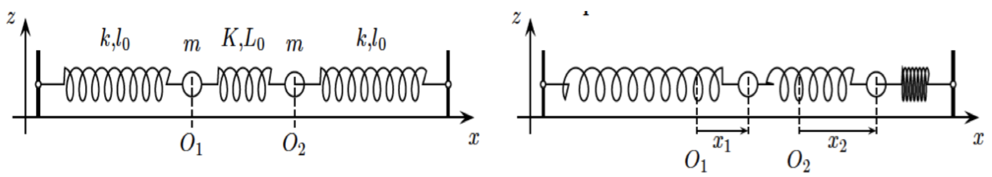
1. *Écrire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par x.*
2. *Résoudre avec précision cette équation différentielle en utilisant les conditions initiales suivantes : au départ le point M a été écarté de sa position d'équilibre (et de repos) d'une distance a dans le sens positif et lâché sans vitesse initiale. La pulsation propre du mouvement sera notée ω_0 (on précisera l'expression en fonction de k et m). On indiquera aussi la condition évidente minimale à respecter pour a dans le cadre de ce problème théorique.*

1.3.Résolution 2 :

On recommence la résolution. La nouvelle origine de l'axe est choisie à la position d'équilibre de M. L'abscisse de M est notée X.

1. *En partant de l'équation différentielle obtenue en 1.2.1) dans la mise en équation, en déduire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par X.*
2. *Résoudre cette équation différentielle en utilisant le même état initial que précédemment.*

2.Trois ressorts et deux masses : oscillateurs couplés



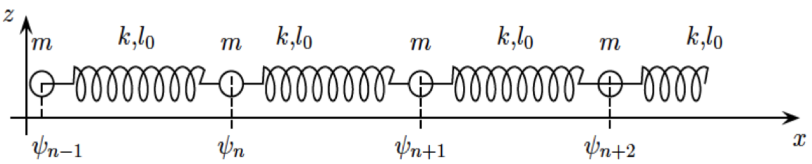
On étudie le dispositif suivant constitué de 3 ressorts linéaires de raideurs respectives (k, K et k) liés à deux masses identiques m, mobiles sur l'axe Ox les frottements sont de la forme : $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$ sur chaque masse où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse de la masse.
Soient x_1 et x_2 les élongations des deux masses à partir de leur position d'équilibre.

1. *Écrire les équations différentielles couplées liant x_1 et x_2.*

3.Chaîne infinie d'oscillateur harmonique : onde acoustique dans un solide
3.1 Mise en équation :

On s'intéresse à la propagation d'une onde mécanique dans un solide. On parle également d'onde acoustique. L'objectif de cet exercice et d'obtenir l'expression de la vitesse des ondes propgressives de compression dans un solide.

1. *On sait que la vitesse c des ondes acoustiques dans un solide dépend de son module d'Young et de sa masse volumique. Donnez par analyse dimensionnelle une expression possible pour c.*
   On modélise le solide par une chaine 1D d'oscillateurs harmoniques.



Les atomes du solide sont modélisés par des masses ponctuelles repérées par leur indice n. Celles-ci glissent sans frotter sur l'axe (Ox) et on note $\Psi_n(t)$ l'abscisse de la masse n à l'instant t. Les masses sont reliées entre elles par des ressorts de raideur k et de longueur à vide l_0.

2. *Quelle force les ressorts servent-ils à modéliser ? Donner un ordre de grandeur de l_0 .*
3. *Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la n^{ieme} masse. En déduire l'équation différentielle qui régit son mouvement.*

3.2. Approximation des milieux continus :

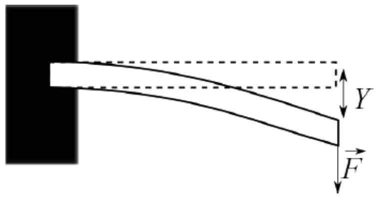
1. *Comme dans l'exercice précédent le mouvement de la masse n dépend du mouvement des masses n - 1 et n + 1. On obtient donc N équations couplées où N est le nombre d'atomes présents dans le solide ($N \sim 10^{23}$). Ces équations décrivent la propagation d'une perturbation le long de la chaîne.Chaque oscillateur est séparé de ses voisins immédiats d'une longueur l_0 au repos. Nous supposons cette longueur suffisamment faible (devant une longueur caractéristique du phénomène qui reste à définir) pour pouvoir traiter la chaîne comme un milieu continu. Ainsi, on va poser, tout comme dans l'exemple introductif du cours $\Psi(x = nl_0, t) = \Psi_n(t)$. La fonction Ψ dépend cette fois de l'espace et du temps, il faut donc remplacer les dérivées $\frac{d}{dt}$ par des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial t}$ dans ce cas $\Psi(nl_0 + l_0, t) \sim \Psi(nl_0, t) + l_0\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2}l_0^2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$ et $\Psi(nl_0 - l_0, t) \simeq \Psi(nl_0, t) - l_0\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2}l_0^2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$.Montrer alors que l'équation précédente peut se réécrire sous la forme :*

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

2. *Quelle est la dimension de v ?*
3. *Cette équation est connue sous le nom d'équation de D'Alembert. À quelle condition une onde progressive monochromatique est-elle solution de cette équation ? À quelle vitesse se propage donc les ondes dans la chaîne d'oscillateurs ?*
4. *Les paramètres k et l_0 sont des paramètres microscopiques difficilement accessibles expérimentalement.Il est possible de les relier à des quantités macroscopiques facilement mesurables : $k = El_0$ et $\rho = \frac{m}{l_0^3}$.Donner alors l'expression de la vitesse en fonction de paramètres macroscopiques.*
5. *Calculer la vitesse de propogation du son dans l'acier ($E = 0,21TPa, \rho = 7850kg.m^{-3}$).*

PROBLÈME 6. *Modélisation d'une fibre de verre :*

Le verre est un matériau très dur. Cependant, il est possible de le déformer légèrement sans le casser : on parle l'élasticité. Récemment, des expériences de biophysique ont été menées pour étudier l'ADN. Le capteur utilisé était simplement une fibre optique en silice amincie à l'extrémité de laquelle on accroche un brin d'ADN.



L'expérience consistait alors à suivre la déformation de flexion de la fibre optique. La masse volumique du verre est $\rho = 2500kg.m^{-3}$. Une fibre de verre de longueur l et de diamètre d est encastrée horizontalement dans une paroi immobile. Au repos, la fibre est horizontale (on néglige son poids).
Quand on applique une force verticale F à son extrémité, la fibre se déforme. L'extrémité est déplacée

d'une longueur Y appelé la flèche. La flèche est donnée par la relation suivante $Y = \dfrac{7l^3F}{Ed^4}$, où E est appelé module d'Young du verre. Pour les applications numériques, on prendra pour le module d'Young $E = 7.10^{10} SI$.

1. *Quelle est la dimension du module d'Young ? Quelle est son unité dans le système légal ? Connaissez vous d'autres grandeurs physiques qui possèdent la même dimension ?*
2. *En considérant uniquement la force F, montrer que l'on peut modéliser la fibre de verre par un ressort de longueur à vide nulle et de constante de raideur k dont on donnera l'expression.*
3. *Calculer numériquement k pour une fibre de longueur $l = 7$ mm et de diamètre $k = 10\mu m$.*
   On admet que lors des vibrations de la tige, l'énergie cinétique est donné par l'expression :$E_c = \rho l d^2 \left(\dfrac{dY}{dt}\right)^2$. Son énergie potentielle lorsque la flèche vaut Y est : $E_p = \frac{1}{2}\dfrac{Ed^4}{7l^3}Y^2$.
4. *Écrire l'expression de l'énergie mécanique et négligeant l'énergie potentielle de pesanteur.*
5. *Justifier que l'énergie mécanique est constante. En déduire l'équation différentielle qui régit les vibrations de la fibre.*
6. *Quelle est l'expression de la fréquence propre de vibration de la tige de verre ? Calculer numériquement cette valeur pour la fibre citée en exemple.*