Forelesning 20

GRAFTEORI

$G=(V,E)$

$V=\{1,2,3\}$ $E=\{\{1,2\},\{2,3\}\}$

Innhold

- Mer om isomorfier
- Vandringer i grafer
- Hamiltonstier og -sykler
- Eulerveier og -kretser

Sum av grader

Hver kant bidrar med 2, når vi summer opp gradene til alle nodene i en graf (V,E), altså

der $|E|$ er antall kanter i grafen (V,E).

Konsekvens

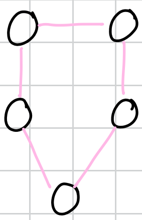
Antallet noder med oddetalls grad er alltid partall.

Oppgave

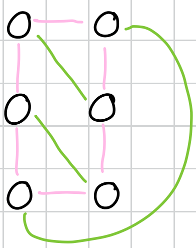
Det er et selskap med $n \geq 4$ personer.

- Er det mulig at alle i selskapet kjenner nøyaktig to av de andre gjestene? (avhenger svaret av n?)
- Er det mulig at alle i selskapet kjenner nøyaktig tre av de andre gjestene? (avhenger svaret av n?)

5 personer



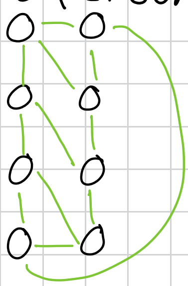
6 personer



Grad 2

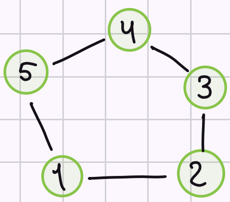
Grad 3 (også de rosa)

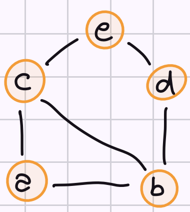
8 personer



Grafisomorfi

$f(1)=c$, $f(2)=a$, $f(3)=b$, $f(4)=d$, $f(5)=e$

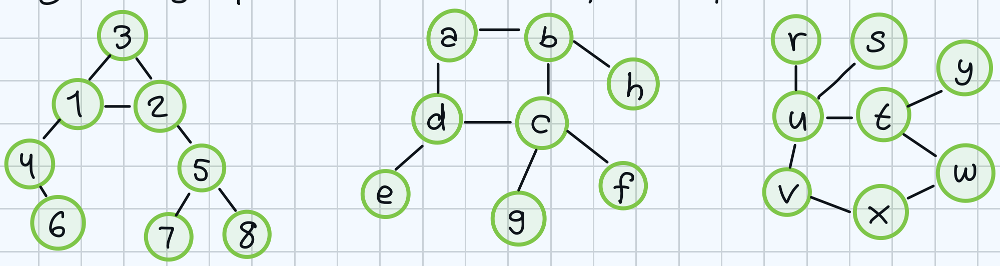




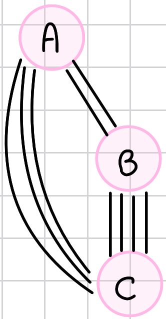
Bevis at grafer ikke er isomorfe

Eksempel

Ingen av grafene under er isomorfe. Hvorfor?



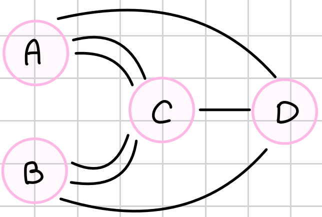
Broene i Trondheim



Problem I: Kan du gjøre en spasertur der du passerer hver bro nøyaktig en gang?

Problem II: Kan du gjøre en spasertur der du passerer hver bro nøyaktig en gang og starter og ender i samme punkt?

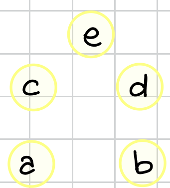
Broene i Königsberg



Problem I: Kan du gjøre en spasertur der du passerer hver bro nøyaktig en gang?

Problem II: Kan du gjøre en spasertur der du passerer hver bro nøyaktig en gang og starter og ender i samme punkt?

Vandringer og stier



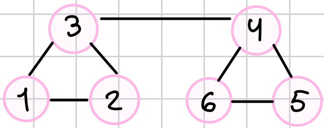
Eksempler:

- Vandring: abded
- Lukket vandring: abadeda
- Sti: abde
- Sykel: abda
- Hamiltonsti: abced
- Hamiltonsykel: acedba

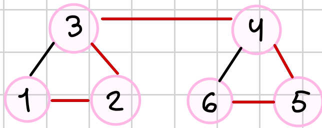
Definisjoner

- Vandring: sekvens av nabonoder
- Lukket vandring: vandring som starter og ender i samme node
- Sti: vandring der ingen noder gjentas
- Sykel: lukket sti, dvs. sti der ingen noder gjentas (bortsett fra at startnoden også er sluttnoden).
- Hamiltonsti: sti som besøker alle noder en gang, start og slutt kan være forskjellige.
- Hamiltonsykel: Lukket Hamiltonsti

Vandringer og stier - eksempel



Denne grafen har ingen
Hamiltonsykel. Hvorfor?



Men det er lett å finne en
Hamiltonsti.

Oppgave: Hvor mange forskjellige Hamiltonstier finnes for denne grafen?

Svar: fire muligheter: 1-2-3-4-5-6, 2-1-3-4-5-6, 1-2-3-4-6-5, 2-1-3-4-6-5
(hvis vi sier at to stier er de samme hvis de bruker/inneholder de samme
kantene).

Dårlige nyheter

- Det finnes ingen kjent effektiv algoritme for å avgjøre om en
  graf har en Hamilton-sykel eller ikke.

Kretser og Eulerkretser

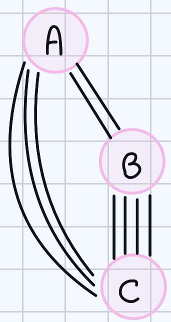
Definisjoner

- Krets: Lukket vandring uten gjentagende kanter.
- Eulervei: Vandring som er innom hver kant nøyaktig en gang.
- Eulerkrets: Lukket vandring som er innom hver kant nøyaktig
  en gang.

Multigrafer

NB: Alle definisjonene vandringer, stier, sykler, kretser, Eulerveier,
Eulerkretser, gir også mening for multigrafer (altså når vi tillater
parallelle kanter), men når vi skal spesifisere en vandring i en
multigraf, er det ikke nok å spesifisere nodene, vi må også
spesifisere kantene.

Eulerveier og Eulerkretser - Trondheim-eksempelet



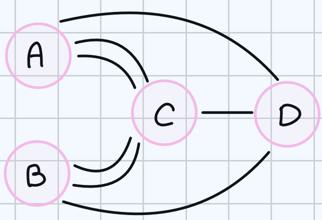
Her finnes en Eulervei, men ingen Eulerkrets.

Eulervei: A-B-A-C-A-C-B-C-B-C

Hvorfor ingen Eulerkrets: A har (odde) grad 5, kall kantene k1,...k5. Anta at vi velger A som "startpunkt". Etter å ha brukt k1 er vi ikke i A. Etter å ha brukt k2 er vi i A osv. Altså etter k5 er vi ikke i A. Det er ikke flere kanter igjen, så vi kommer aldri tilbake til startpunktet A.

Merk: siden en Eulerkrets er en lukket vandring som skal inneholde alle kanter, og dermed alle noder, kan vi velge hvilken som helst node som "startpunkt".

Eulerveier og Eulerkretser - Königsberg-eksempelet



Her finnes hverken Eulervei eller Eulerkrets.

Velg en node med odde grad, f.eks. A, med kantene k1, k2, k3. En eventuell Eulervei må da enten slutte eller begynne i A: Hvis den ikke begynner i A, er vi i A etter å ha brukt k1 og etter å ha brukt k3. Altså slutter den i A.

Samme resonnement er for alle noder med odde grad.

Det er mer enn to noder med odde grad, derfor ingen Eulervei.