Forelesning 7

PREDIKATLOGIKK

- Kvantorer og predikater $\forall x \exists y P(x,y)$
- Rekkefølge på kvantorer $\forall x \exists y P(x,y) \overset{?}{\Leftrightarrow} \exists y \forall x P(x,y)$
- Kvantorer og negasjoner $\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$
- Kvantorer og konnektiver $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \overset{?}{\Leftrightarrow} \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

Predikatlogikk

Så langt
- Utsagn $P, Q, R, \ldots$
- Konnektiver $\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$
- Formler $(P \wedge Q) \rightarrow (R \vee \neg S)$

Husk: En relasjon R på en mengde A er en delmengde av $A \times A$.

R er refleksiv hvis $\langle x,x \rangle \in R$ <u>for alle</u> $x \in A$.

R er ikke symmetrisk hvis det finnes et par $\langle x,y \rangle \in R$ slik at $\langle y,x \rangle \notin R$.

I predikatlogikk utvider vi utsagnslogikk med blant annet tegnene:

$\forall$: "for alle"

$\exists$: "det eksisterer"/"det finnes"

Disse kalles "kvantorer"

$\forall \leftarrow$ "universalkvantoren", $\exists \leftarrow$ "eksistenskvantoren"

<u>Litt notasjon</u>

"For alle $x \in A$" skriver vi nå som "$\forall x \in A$"

"Det finnes en $x \in A$ slik at..." skriver vi som "$\exists x \in A$".

Eksempel

"Alle naturlige tall er større enn eller lik null"
skrives som $\forall x \in \mathbb{N}\,(x \geq 0)$

"Det finnes et reelt tall x slik at $x^2 = 2$"
skrives som $\exists x \in \mathbb{R}\,(x^2 = 2)$

Ofte brukes symbolet $\exists!$ for "det finnes nøyaktig én"

Eksempel

$\exists! n \in \mathbb{N}\,(n+3=7)$

"det finnes nøyaktig ett naturlig tall n slik at $n+3=7$"

Hvordan bruke $\forall$ og $\exists$ til å utvide utsagnslogikk til predikatlogikk?

Se på setningen $P =$ "x^2 er et heltall"
Er dette et utsagn?

I så fall må setningen være sann eller usann:
Ser vi på x som en ukjent, er svaret "nei".
Ser vi på en bestemt verdi for x, si $x=2$,
så er P et utsagn.

Med andre ord:

La $P(x) \overset{\text{"er definert som"}}{:=}$ "x^2 er et heltall"   Da er $P(x)$ ikke et utsagn, men $P(2)$ er det:
"2^2 er et heltall" (som forøvrig er sant)

Spørsmål: Er $P(x)$ sann for alle x?
Svar: Tja. Kommer an på hvilke verdier for x vi tillater.

Eksempel

$P(3) \leftarrow$ Sann

$P(1/4) \leftarrow$ Usann

$P(☺) \leftarrow$ Gir ikke mening

Vi velger alltid et univers å trekke verdiene fra.

La universet være $\mathbb{Z}$. Da er $\forall x\, P(x)$ sann.
Hvis universet er $\mathbb{R}$, så er $\forall x\, P(x)$ usann.

Merk: $P(x)$ har en fri variabel, mens
$\boxed{\forall x\, P(x)}$ har ingen frie variabler

Dette er et utsagn!

Definisjon

Et uttrykk som blir et utsagn så fort et gitt antall variabler er bestemt, kalles et predikat.

Et predikat med k frie variabler, kalles et predikat av aritet k.

Eksempel

La $Q(x,y) := (x^2 = y)$ og la universet være $\mathbb{N}$.

Da er f.eks. $Q(3,9)$ sann og $Q(9,3)$ er usann.

- $\exists x Q(x,4)$ er et utsagn (som er sant, la $x=2$)
  "det finnes en $x \in \mathbb{N}$ slik at $x^2 = 4$"

- $\exists x Q(x,y)$ er et predikat av aritet 1.

- $\forall y \exists x Q(x,y)$ er et utsagn (usant, la f.eks. $y=2$)
  "for alle y, finnes en x slik at $x^2 = y$"

Rekkefølge på kvantorer

La $P(x,y)$ være et predikat av aritet 2, over et univers U.

La oss se på utsagnene $\forall x \exists y P(x,y)$ og $\exists y \forall x P(x,y)$.
Er disse ekvivalente?

Eksempel (for å illustrere)

La $P(x,y) :=$ "student x fikk karakter y på eksamen"

$\forall x \exists y P(x,y)$: "for alle studenter x, så finnes en karakter y slik at student x fikk karakter y på eksamen"

$\exists y \forall x P(x,y)$: "det finnes en karakter y som alle fikk på eksamen"

Ikke det samme! Merk at $\exists y \forall x P(x,y) \rightarrow \forall x \exists y P(x,y)$

Kvantorer og negasjoner

La $P(x)$ være et predikat av aritet 1 over universet $U = \{1,2,3,4\}$.

Da er $P(1), P(2), P(3)$ og $P(4)$ fire utsagn.

$\exists x P(x)$ betyr at (minst) ett av utsagnene er sanne, altså er
$P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$ sann.

Hvordan tolker vi da $\neg(\exists x P(x))$?
Jo, da må:
$\neg(P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4))$ være sann.

Det er det samme som (De Morgans lov)
$\neg P(1) \wedge \neg P(2) \wedge \neg P(3) \wedge \neg P(4)$

Med andre ord, for alle x er $P(x)$ usann, eller $\forall x \neg P(x)$.

Teorem

La P være et predikat av aritet 1.
Da har vi:

$$\neg \exists x P(x) \iff \forall x \neg P(x)$$

$$\neg \forall x P(x) \iff \exists x \neg P(x)$$

Koroller (konsekvens)

$\exists$ kan skrives med $\neg$ og $\forall$
$\forall$ kan skrives med $\neg$ og $\exists$

$$\forall x P(x) \iff \neg\neg \forall x P(x) \iff \neg(\exists \neg P(x))$$
$$\exists x P(x) \iff \neg\neg \exists x P(x) \iff \neg(\forall x \neg P(x))$$

Kvantorer og konnektivene $\wedge$ og $\vee$

Vi skal se på hvordan $\exists$ og $\forall$ distribuerer over $\wedge$ og $\vee$.

Med andre ord kan vi si noe om sammenhengen mellom f.eks.

① $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ og $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

② $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ og $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

La $P(x) := (x^2=4)$ og $Q(x) := (x^2=9)$ og la $U = \mathbb{R}$.

$\exists x(P(x) \vee Q(x))$ vil si:
"det finnes $x \in \mathbb{R}$ s.a. $x^2=4$ eller $x^2=9$" SANT

$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ vil si:
"det finnes $x \in \mathbb{R}$ s.a. $x^2=4$ eller det finnes $x \in \mathbb{R}$ s.a. $x^2=9$" SANT

$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ vil si:
"det finnes $x \in \mathbb{R}$ s.a. $x^2=4$ og $x^2=9$" USANT!

$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ vil si:
"det finnes $x \in \mathbb{R}$ s.a. $x^2=4$ og det finnes $x \in \mathbb{R}$ s.a. $x^2=9$" SANT

Summa summarum:

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \not\Leftrightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$$

For $\forall$:

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$