Lineærtransformasjoner

Definisjon 1 - Lineærtransformasjoner

Med en **lineærtransformasjon** fra et vektorrom V til et vektorrom W menes en funksjon $T: V \to W$ som oppfyller de to kravene

L1 $\quad T(u+v) = T(u) + T(v)$
L2 $\quad T(ru) = r \cdot T(u)$

for alle vektorer $u, v \in V$ og alle skalarer $r \in \mathbb{R}$.

Teorem 1 - Bevaring av lineærkombinasjoner

La $T: V \to W$ være en lineærtransformasjon, la $v_1, \dots, v_n$ være vektorer i V og la $r_1, \dots, r_n$ være skalarer. Da er

$$T(r_1 v_1 + r_2 v_2 + \dots + r_n v_n) = r_1 T(v_1) + r_2 T(v_2) + \dots + r_n T(v_n)$$

Egenskaper med lineærtransformasjoner

Merk: Hvis $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T(v) = Av$ der

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

er en $m \times n$ reell matrise. Da:

La $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$

Dette gjelder også generelt: **Nullvektor i vektorrom V transformeres til nullvektor i vektorrom W hvis $T: V \to W$ er en lineærtransformasjon.**

Teorem 2 - Bevaring av null og subtraksjon

La $T: V \to V'$ være en lineærtransformasjon, og la u og v være vektorer i V. Da gjelder

(1) $\quad T(0) = 0'$
(2) $\quad T(u-v) = T(u) - T(v)$

Teorem 3

Hvis to lineærtransformasjoner fra V til W har samme verdier på alle vektorer i basisen B, så har de samme verdier på alle vektorer $u \in V$, og de er dermed like.

Komposisjon av lineærtransformasjoner

La $T_1 : V_1 \to V_2$ og $T_2 : V_2 \to V_3$ være to lineærtransformasjoner **komposisjon** av T_1 og T_2 (og vi bruker notasjonen $T_2 \circ T_1$) er en avbildning

$$T_2 \circ T_1 : V_1 \to V_3$$

definert av

$$(T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v))$$

Teorem 1

La $T_1 : V_1 \to V_2$ og $T_2 : V_2 \to V_3$ være to lineærtransformasjoner komposisjonen av T_1 og T_2,

$$T_2 \circ T_1 : V_1 \to V_3$$

er en lineærtransformasjon mellom V_1 og V_3.

Definisjon av kjerne

La $T : V \to W$ være en lineærtransformasjon. Kjernen av T (notasjon $\ker(T)$) er mengden:

$$\ker(T) := \{u \in V \mid T(u) = 0 \in W\}$$

Definisjon av rekkevidde

La $T : V \to W$ være en lineærtransformasjon. Rekkevidde av T (notasjon $\mathrm{Ran}(T)$) er mengden:

$$\mathrm{Ran}(T) := \{u \in W \mid \exists v \in V \text{ s.a. } u = T(v)\}$$

Vi sier at lineærtransformasjonen $T: V \to W$ er **injektiv** hvis og bare hvis

$$T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$$

Teorem 7

$T: V \to W$ lineærtransformasjon.
T er injektiv $\iff \ker(T) = \{0\}$ (kjerne består av bare nullvektor).

Vi sier at lineærtransformasjonen $T: V \to W$ er **surjektiv** på W hvis og bare hvis

$$\mathrm{Ran}(T) = W$$

Teorem 4 - Kjernen og rekkevidden er underrom

La $T: V \to W$ være en lineærtransformasjon. Da er kjernen $\ker(T)$ et underrom av V, og rekkevidden $\mathrm{Ran}(T)$ er et underrom av W.

Inverterbare lineærtransformasjoner

En lineærtransformasjon $T: V \to W$ er **inverterbar** hvis det finnes en lineærtransformasjon

$$T^{-1}: W \to V$$

slik at $T^{-1} \circ T$ er identitet på V og $T \circ T^{-1}$ er identitet på W.
Man sier at T og T^{-1} er **inverse** av hverandre.

Teorem 2 - En betingelse for inverterbarhet

En lineærtransformasjon $T: V \to W$ er inverterbar hvis og bare hvis den er injektiv og surjektiv på W.

Teorem 5 - Rangteoremet

La $T: V \to W$ være en lineærtransformasjon, der V og W er vektorrom og V er endeligdimensjonalt. Da gjelder at

$$\dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Ran}(T)) = \dim(V)$$

Rangteoremet for matriser

La A være en reell (eller kompleks) $m \times n$-matrise, da gjelder at

$$n = \dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{Col}(A))$$

Ligninger definert ut av lineærtransformasjoner

La $T: V \to W$ være en lineærtransformasjon. Vi definerer ligningen

$$T(v) = 0 \in W$$

som har løsninger i V. Denne ligningen kelles **homogen ligning**, og løsningene er elementene i $\ker(T)$.

Ligningen

$$T(v) = b \in W$$

har løsninger i V hvis de eksisterer. Denne ligningen kelles **inhomogen ligning**.

Teorem 6 - Løsningsmengde til inhomogene ligninger

La $T: V \to W$ være en lineærtransformasjon, og la b være en vektor i W.
Anta at a er en konkret vektor i V som er slik at $T(a) = b$.

Da er løsningsmengden L til ligningen $T(v) = b$ med ukjent v gitt ved

$$L = \{a + u \mid u \in \ker(T)\}$$

Koordinatvektor

La

$$B = \{b_1, \dots, b_n\}$$

være en basis av vektorrommet V (V har dimensjon n). La $v \in V$ da

$$v = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$$

Vi kaller **koordinatvektoren** til v vektoren i $\mathbb{R}^n$ med komponenter de reelle tallene $c_1, \dots, c_n$. Vi bruker notasjon $[v]_B$:

$$[v]_B := \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Fiksert basis B, tilsvarer til hver vektor i V en unik koordinatvektor.
Men forskjellige basiser gir forskjellige koordinatvektorer (eksempel).
Nullvektor har koordinatvektor

$$[0]_B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

og dette er slik uansett basis.

Definisjon av isomorfi

En lineærtransformasjon $T: V \to W$ mellom vektorrom kalles en **isomorfi** hvis den er injektiv og surjektiv på W.

Da kalles de to vektorrommene isomorfe.

Teorem 1 - Koordinatavbildningen er en isomorfi

La V være et n-dimensjonalt vektorrom, og la $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ være en basis for V. Definer koordinatavbildningen $T: V \to \mathbb{R}^n$ ved å avbilde hvert element $v \in V$ over til koordinatvektoren til v i basisen B, altså

$$T(v) = [v]_B \quad \text{for alle } v \in V$$

Da er T en isomorfi. Altså er V isomorft med vektorrommet $\mathbb{R}^n$.

Matriserepresentasjoner

La

$$T : V \to \tilde{V}$$

Være en lineærtransformasjon og det er gitt to basiser

$$B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subset V, \quad \tilde{B} = \{\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_m\} \subset \tilde{V}$$

Hva skjer med $b_1, \ldots, b_n$ når vi anvender T?
Vi får $T(b_1), \ldots, T(b_n)$ som er vektorer i $\tilde{V}$ og vi kan uttrykke dem ved hjelp av $\tilde{B}$:

$$\begin{aligned}
T(b_1) &= a_{11}\tilde{b}_1 + a_{21}\tilde{b}_2 + \ldots + a_{m1}\tilde{b}_m \\
T(b_2) &= a_{12}\tilde{b}_1 + a_{22}\tilde{b}_2 + \ldots + a_{m2}\tilde{b}_m \\
&\vdots \\
T(b_n) &= a_{1n}\tilde{b}_1 + a_{2n}\tilde{b}_2 + \ldots + a_{mn}\tilde{b}_m
\end{aligned}$$

Definisjon - Matrisen til transformasjonen T i basisene B og $\tilde{B}$ er

$$[T]_{\tilde{B} \leftarrow B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Hvis $V = \tilde{V}$, $m = n$ og $B = \tilde{B}$ da skriver vi bare $[T]_B$:

$$[T]_B = [T]_{\tilde{B} \leftarrow B}$$

Sek 6.4 Teorem 2

Matrisen til transformasjonen transformerer:
koordinatvektor til v i basis B ($[v]_B \in \mathbb{R}^n$) til koordinatvektor til $T(v)$ i basis $\tilde{B}$ ($[T(v)]_{\tilde{B}} \in \mathbb{R}^n$).

$$v \xrightarrow{T} T(v) \qquad [v]_B \xrightarrow{[T]_{\tilde{B}\leftarrow B}} [T(v)]_{\tilde{B}}$$

Teorem 2 Sek 6.4

La $T: V \to \tilde{V}$ være en lineærtransformasjon, $\dim(V) = n$ og $\dim(\tilde{V}) = m$, $B = \{b_1, \dots, b_n\} \subset V$ og $\tilde{B} = \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m\} \subset \tilde{V}$ basiser.
For alle $v \in V$ da

$$[T(v)]_{\tilde{B}} = [T]_{\tilde{B}\leftarrow B}[v]_B$$

Her merk:
- $[T]_{\tilde{B}\leftarrow B}$ er en matrise
- $v_B \in \mathbb{R}^n$
- $[T(v)]_{\tilde{B}} \in \mathbb{R}^m$

A og M matriser, $M = [m_1|m_2|\dots|m_n]$ da er $AM = [Am_1|Am_2|\dots|Am_n]$.

Teorem 3

$$[T]_{\tilde{B}\leftarrow B} = [[T(b_1)]_{\tilde{B}}|\dots|[T(b_n)]_{\tilde{B}}]$$

Matriser til lineærtransformasjoner

Matrisen av komposisjon av to lineærtransformasjoner er matriseprodukt av koordinatmatrisene:

$$[T_2 \circ T_1]_{\tilde{B}\leftarrow B} = [T_2]_{\tilde{B}\leftarrow B}[T_1]_{\tilde{B}\leftarrow B}$$

der på venstre side har vi komposisjonen av transformasjonene og på høyre side har vi produktet av matriserepresentasjonene.

Matrisen av inverse av en lineærtransformasjon er inverse av koordinatmatrise:

$$T^{-1} \circ T : V \to V, \qquad [T^{-1} \circ T]_{B\leftarrow B} = [T^{-1}]_{B\leftarrow \tilde{B}}[T]_{\tilde{B}\leftarrow B}$$

og

$$T \circ T^{-1} : W \to W, \qquad [T \circ T^{-1}]_{\tilde{B}\leftarrow \tilde{B}} = [T]_{\tilde{B}\leftarrow B}[T^{-1}]_{B\leftarrow \tilde{B}}$$

Overgang mellom to forskjellige basiser $\mathcal{B}$ og $\tilde{\mathcal{B}}$

Hvis $v \in V$ og vi har to basiser $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subset V$ og $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\} \subset V$, hvordan finner vi matrisen som transformerer koordinatvektor $[v]_{\mathcal{B}}$ til koordinatvektor $[v]_{\tilde{\mathcal{B}}}$? En slik matrise er matriserepresentasjon av identitettransformasjonen

$$id : V \to V, \qquad [id]_{\tilde{\mathcal{B}} \leftarrow \mathcal{B}}$$

Teorem 1

For å finne overgangsmatrise $[id]_{\tilde{\mathcal{B}} \leftarrow \mathcal{B}}$ kan vi bruke en av følgende metoder

1) Finn matrisen med kolonner som er koordinatvektorene til vektorene i $\mathcal{B}$ uttrykt ved bruk av basis $\tilde{\mathcal{B}}$:

$$[id]_{\tilde{\mathcal{B}} \leftarrow \mathcal{B}} = [[b_1]_{\tilde{\mathcal{B}}}, [b_2]_{\tilde{\mathcal{B}}} | \dots | [b_n]_{\tilde{\mathcal{B}}}]$$

2) Alternativt kan vi bruke en tredje basis $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subset V$ og

$$\begin{aligned} [id]_{\tilde{\mathcal{B}} \leftarrow \mathcal{B}} &= [id]_{\tilde{\mathcal{B}} \leftarrow S} [id]_{S \leftarrow \mathcal{B}} \\ &= ([id]_{S \leftarrow \tilde{\mathcal{B}}})^{-1} [id]_{S \leftarrow \mathcal{B}} \\ &= [[\tilde{b}_1]_S | [\tilde{b}_2]_S | \dots | [\tilde{b}_n]_S]^{-1} [[b_1]_S, [b_2]_S, \dots, [b_n]_S] \end{aligned}$$