

Teoriforelesning 11

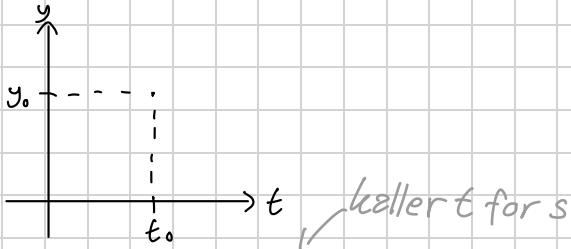
DIFFERENTIALLIGNINGER

Nøkkelbegreper

- Eksistens og entydighed for første ordens differensielligninger
- Andre ordens lineære differensielligninger
- Eulers eksplisitte og implisitte metoder
- Modellering

$$\text{IVP: } \begin{cases} y'(t) = f(t, y), & t_0 < t < T \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Merk: i) Separabel svarer til $f(t, y) = g(t) \cdot h(y)$



$$\int_{t_0}^t y'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

$$[y(s)]_{t_0}^t = y(t) - y(t_0) = y(t) - y_0$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad *$$

↑
Integralligning

ii) $f(t,y) = q(t) - p(t)y$
her kan vi (noen ganger)
bruke integrerende faktor

funksjon \downarrow
 $y_0(t) = y_0$

Pikeriterasjoner \swarrow

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0(s)) ds$$

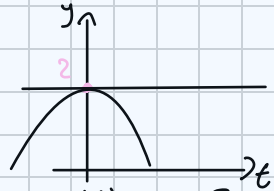
$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) ds$$

$$y_3(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_2(s)) ds$$

Vi får en følge av funksjoner $\{y_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ og hvis den konvergerer så er det mot et fikspunkt av (*)
 → En løsning av (*)

Eksempel

Løs $\begin{cases} y'(t) = 2t(1-y) \\ y(0) = 2 \end{cases}$ ved Picarditerasjon
 $t_0 = 0$
 $y_0 = y(t_0) = 2$



$$y_0(t) = y_0 = 2$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2 + \int_0^t f(s, y_0(s)) ds \\ &= 2 + \int_0^t 2s(1-2) ds \\ &= 2 - \int_0^t 2s ds = 2 - [s^2]_0^t = 2 - t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= 2 + \int_0^t f(s, y_1(s)) ds \\ &= 2 + \int_0^t 2s(1-(2-s^2)) ds \\ &= 2 + \int_0^t 2s(-1+s^2) ds \\ &= 2 - \int_0^t 2s ds + \int_0^t 2s^3 ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 - t^2 + \left[\frac{2}{4} s^4 \right]_0^t \\ &= 2 - t^2 + \frac{1}{2} t^4 \\ y_3(t) &= \dots = 1 + 1 - t^2 + \frac{1}{2} t^4 - \frac{1}{3!} t^6 \end{aligned}$$

$$y_n(t) = 1 + \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m t^{2m}}{m!}$$

Dette er n'te ordens Taylorpolynom for e^{-t^2} (rundt 0).

$$y_n(t) \rightarrow \frac{1 + e^{-t^2}}{2} \text{ når } n \rightarrow \infty$$

Sjekk løsning

$$y(t) = 1 + e^{-t^2}$$

$$\begin{cases} y'(t) = 2t(1-y) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$y(0) = 1 + 1 = 2 \quad \checkmark$$

$$y'(t) = -2t e^{-t^2} = -2t(y-1) = 2t(1-y) \quad \checkmark$$

Eksistens og entydighet

Anta at funksjonen $f(t, y)$ tilfredsstiller

1. Det finnes en M slik at for alle $t \in [a, b]$ og alle $y \in [c, d]$ så er $|f(t, y)| \leq M$.
2. Det finnes en L slik at for alle $t \in [a, b]$ og alle $y, \tilde{y} \in [c, d]$ så er

$$|f(t, y) - f(t, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|.$$

Da vil Picarditerasjonen for initialverdi problemet

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Hvor $a < t_0 < b$ og $c < y_0 < d$) konvergere (lokalet) mot en funksjon $y = y(t)$. Denne funksjonen er den eneste løsningen av initialverdi problemet.

Merk:

i) Med lokelt mener vi at $y(t)$ er en unik løsning av IVP'et for $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

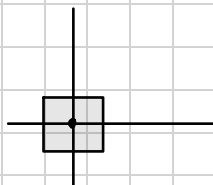
ii) IVP'et $f(y)$

$$\begin{cases} y'(t) = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = 0$$

$$y(t) = t^3, y'(t) = 3t^2 \\ = 3(t^3)^{2/3} = 3y^{2/3}$$

$$f'(y) = 3 \cdot \frac{2}{3} y^{-1/3} = \frac{2}{y^{1/3}}$$



Andre ordens lineære Dler (9.5)

$ay'' + by' + cy = 0$ \leftarrow homogen ligning
 $= f(t)$ \leftarrow inhomogen ligning

\leftarrow Gjett

Eksempel: $y'' - 2y' - 35y = 0$

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{rt} \\ y'(t) &= r e^{rt} \\ y''(t) &= r^2 e^{rt} \end{aligned}$$

$$r^2 e^{rt} + 2r e^{rt} - 35 e^{rt} = 0$$

$$e^{rt} (r^2 + 2r - 35) = 0$$

\downarrow Dette må bli 0

$$r^2 + 2r - 35 = 0 \rightarrow r_1 = -7 \\ r_2 = 5$$

Konklusjon:

$$y_1(t) = A e^{5t}$$

$$+ \\ y_2(t) = B e^{-7t}$$

Den generelle løsningen av differensialligningen

$$ay'' + by' + cy = 0$$

bestemmes av røttene til det karakteristiske polynomet $ar^2 + br + c$:

$$y(t) = \begin{cases} A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} & \text{gitt reelle røtter } r_1 \text{ og } r_2 \\ A e^{rt} + B t e^{rt} & \text{gitt en reell rot } r \\ A e^{ut} \cos vt + B e^{ut} \sin vt & \text{gitt komplekse røtter } r = u \pm iv \end{cases}$$

Eksempel (feil i bok)

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$
$$(r+2)^2 = 0 \Rightarrow r = -2$$

$$y(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t}, \quad y'(t) = -2Ae^{-2t} + Be^{-2t} - 2Bte^{-2t}$$

$$y(0) = A = 1$$

$$y'(0) = -2A + B = 1$$
$$= -2 + B = 1 \Rightarrow B = 3$$

$$y(t) = e^{-2t} + 3te^{-2t}$$

Inhomogene ligninger

Anta at $y_s(t)$ er en (spesiell) løsning av

$$ay'' + by' + c = f(t),$$

og la $y_h(t)$ være en løsning av den tilsvarende homogene ligningen.
Den generelle løsningen (1) er da

$$y(t) = y_h(t) + y_s(t)$$

• Hvis $f(t) = \text{poly}$, f.eks

$$f(t) = t^2 + 2,$$

$$\text{gjett } y_s(t) = Ct^2 + Dt + E$$

• Hvis $f(t) = e^{\alpha t} \overbrace{p(t)}^{\text{poly}}$,

$$\text{f.eks } f(t) = e^{2t} t^2$$

$$\text{gjett } y_s(t) = e^{2t}(Ct^2 + Dt + E)$$

• Hvis $f(t) = e^{\alpha t}(\beta \cos kt + \gamma \sin kt)$

$$\text{f.eks } f(t) = e^{-2t} \cos t,$$

$$\text{gjett } y_s(t) = e^{-2t}(C \cos t + D \sin t)$$

Temeforelesning 11

DIFFERENSIALLIGNINGER

Dagens tema
Eulers eksplisitte og implisitte metode
Modellering

Hva er modellering?

Forstå et virkelig problem

Definere variabler og

Forenkle

Løse

Velge og anvende representasjoner

Teste og tolke - sammenligne resultatet med virkeligheten

Forbedre modellen

1. REPETISJON

DIFFLIKNING: ukjent funksjon y' og y', y'', y''', \dots

ORDEN	TYPE	STRATEGI
FØRSTE y'	i) Separabel $p(y)y' = q(t)$ ii) Lineær, $y' + p(t)y = q(t)$	Substitusjon IF: $e^{p(t)}$
ANDRE y''	$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$	i) Teorem ii) Skrive om til system av 1.ordens

1 DAG:

Eulers metode

1) Eksplisitt ("forover")
2) Implisitt ("bakover") } Modellering

2. INNLEDNING

Generelt: $y'(t) = F(t, y)$

↑ variabel
↑ ukjent funksjon

Ex: $F(t, y) = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}t$

↳ Lineær

Motivasjon:

Forrige gang Ex lemenpopulasjon

$$y' = ay(B - y)$$

$y \rightarrow B, y' \rightarrow 0$

$y(t)$: antall lemen ved tiden t
 $0 < a$: vekstkoeffisient
 $0 < B$: øvre bæreevne

Ny modell: $y' = ay(B - y)\left(\frac{y}{A} - 1\right)$ $0 < A < B$

Allee-effekt
 $y < A \rightarrow \left(\frac{y}{A} - 1\right) < 0$
 $\rightarrow y' < 0 \rightarrow y$ minker

L2 $a = 0.1$
 $B = 1000$
 $A = 200$
 $y(0) = y_0$

$$y' = 0.1y(1000 - y)\left(\frac{y}{200} - 1\right)$$

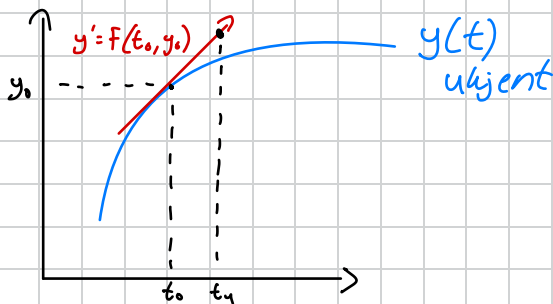
↳ Separabel

3. EULERS METODE

↳ Numerisk løsning $\{y_n\}_n$
↳ Grunnleggende metode

$$\frac{dy}{dt} = y' = F(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

Ide: Starte i kjent punkt (t_0, y_0) og følger tangenten fremover



Husk: $y'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$

$$t_1 = t_0 + h \quad y_1 = y_0 + hF(t_0, y_0)$$

$$t_2 = t_1 + h \quad y_2 = y_1 + hF(t_1, y_1)$$

\vdots

\vdots

$$\boxed{t_{n+1} = t_n + h \quad y_{n+1} = y_n + hF(t_n, y_n)} \quad \text{Eulers metode}$$

Resultat $\{(t_0, y_0), (t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)\}$

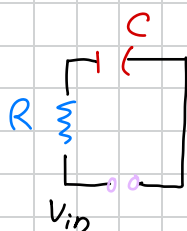
Ex: RC-krets

Batteri

Motstand R

Kondensator C

IVB: $V(0) = V_0$



$$V(t) = ?$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{RC} (V_{in} - V)$$

Ekstet løsning: $V(t) = V_{in} - (V_{in} - V_0)e^{-t/RC}$

$$\left. \begin{array}{l} V_0 = 2V \\ R = 10k\Omega \\ C = 100\mu F \\ V_{in} = 5V \end{array} \right\} V(t) = 5 - 3e^{-t}$$

$$V(1) = ?$$

MÅL: Løse numerisk

Euler:

$$\frac{dV}{dt} = V' = F(t, V)$$

Her:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{RC} (V_{in} - V(t))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{n+1} = t_n + h \\ V_{n+1} = V_n + hF(t_n, V_n) = V_n + h \left(\frac{1}{RC} (V_{in} - V_n) \right) \end{array} \right.$$

$$V_n \approx V(t_n)$$

Velg $h=0,5$

IVB: (t_0, v_0)

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = t_0 + h = 0 + 0,5 = 0,5$$

$$v_0 = 2$$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + h \left(\frac{1}{RC} (v_{in} - v_0) \right) \\ &= 2 + 0,5 \left(\frac{1}{10 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} (5 - 2) \right) \\ &= 3,5 \end{aligned}$$

$$t_2 = 0,5 + 0,5 = 1$$

$$v_2 = v_1 + h(v_{in} - v_1) = 4,25$$

$t(\text{sek})$	0	0,5	1
$V(\text{volt})$	2	3,5	4,25

Eksekt: $V(1) = 5 - 3e^{-1} \approx \underline{3,89636...}$

Feil: $e_n = |y(t_n) - y_n|$

Her: $e_n = |V(1) - v_2| = |3,89636 - 4,25| = \underline{0,35364}$

$$\frac{4,25 \cdot 100\%}{3,89636} \approx \pm 9,1\%$$

DISKUSJON

- 1) Hva kan være årsaker til feil?
- 2) Hvordan kan vi redusere feil?

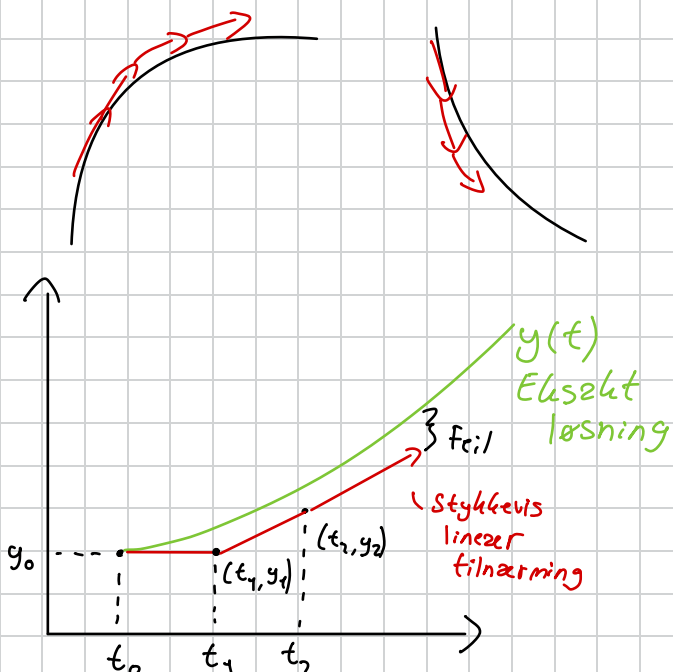
$$h=0,1 \quad h=0,01$$

(Flere steg, men mer nøyaktig løsning enn $h=0,5$)

$$h=10^{-4} \quad h=10^{-6}$$

Kanskje ikke så mye å vinne på det

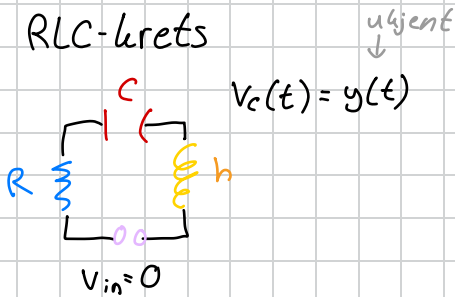
mindre h



Varianter av Eulers metoder:

- * Eksplisitt } $O(h)$
- * Implisitt }
- * Midtpunktmotoden $O(h^2)$ (Ikke den i boka)

Ex: RLC-krets



$$\Rightarrow LCy'' + RCy' + y = \underbrace{V_{in}(t)}_{=0}$$

Ide: Omskrive til $\vec{y}' = A\vec{y}$ $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ $\vec{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}$

\Rightarrow To tallfølger $\{y_{1,n}\}_n$ og $\{y_{2,n}\}_n$ $A_{2 \times 2}$

4 IMPLISITT EULER

$$y'(t) = F(t, y(t)) \quad y(t_0) = y_0$$

$$t_n = t_0 + n \cdot h \quad h > 0$$

$$y_n \approx y(t_n) \leftarrow \text{Ofte ukjent}$$

↑ prøver å beregne

Husk: Differensformler for den deriverte

$$\text{Forover: } y'(t_n) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$$

$$\text{Bakover: } y'(t_n) \approx \frac{y(t_n) - y(t_{n-1}))}{h}$$

↑ t_{n+1}

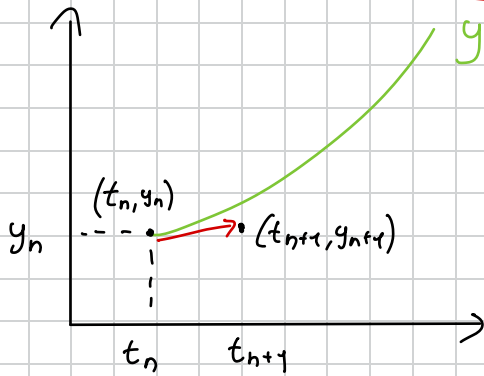
$$y'(t_{n+1}) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$$

Eksplicit Euler ("forover")

$$y'(t) = F(t, y(t))$$

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} \approx F(t_n, y(t_n))$$

$$\rightarrow y_{n+1} = y_n + h \cdot F(t_n, y_n)$$

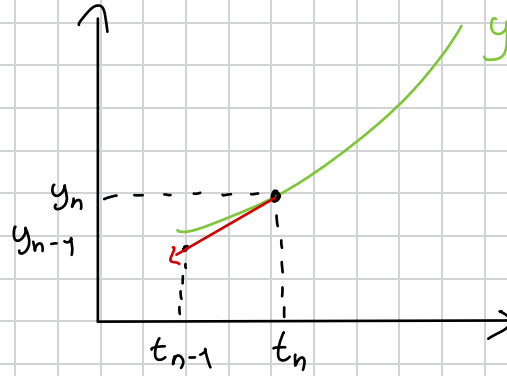


Implicit Euler ("bakover")

$$y'(t) = F(t, y(t))$$

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} \approx F(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

$$\rightarrow y_{n+1} = y_n + h \cdot F(t_{n+1}, y_{n+1})$$



Fordel: Enkel å implementere
Ulempe: Ustabil for store h

Fordel: Stabil
Ulempe: Mer komplisert å implementere

Ex: $y'(t) = -2y$

IVB: $y(0) = 1$

Ekstakt løsning: $y(t) = e^{-2t}$

Implicit Euler: $y_{n+1} = y_n + h F(t_{n+1}, y_{n+1})$

Her: $F(t, y) = -2y$

$$y_{n+1} = y_n + h(-2y_{n+1}) \rightarrow y_{n+1} = \frac{y_n}{1+2h}$$

L2 $h=1$ $y_{n+1} = \frac{y_n}{3}$

$t_0 = 0$

$t_1 = t_0 + h = 0 + 1 = 1$

$t_2 = 2$

$t_3 = 3$

$y_0 = 1$

$y_1 = \frac{y_0}{3} = \frac{1}{3}$

$y_2 = \frac{y_1}{3} = \frac{1}{9}$

$y_3 = \frac{1}{27}$

IVB

t	Ekstakt løsning	Implicit	Explicit
0	1	1	1
1	0,135	0,333	-1
2	0,018	0,111	-1
3	0,0025	0,037	-1

overskyter
men stabil

oscillerer
USTABIL