Forelesning 19

LITT KOMBINATORIKK OG GRAFTEORI

Innhold

- Kombinatorikk:
  - ↳ Mer om anagrammer
  - ↳ Pascals trekant og binomer
- Grafteori
  - ↳ Definisjoner
  - ↳ Komplement
  - ↳ Isomorfi

Telle anagrammer

Eksempel 1 eli har 6 anagrammer (eli, eil, iel, ile, lei, lie) og nils har 24.

Generelt: En streng med n ulike symboler har $n!$ anagrammer.

Eksempel 2 bob har 3 anagrammer (bbo, bob, obb)

Men om vi skiller mellom stor B og liten b, får vi seks anagrammer: (Bbo, bBo, Bob, boB, oBb, obB).

Eksempel 3 otto har 6 anagrammer (oott, otot, otto, ttoo, toto, toot)

Men OTto har 24 (når vi skiller mellom små og store bokstaver).
Merk $6 = \frac{24}{2 \cdot 2}$

Eksempel 4 papp har $4 = 24/6 = 24/(3!)$ anagrammer, men PapP har 24.

Anagrammer generelt

Generelt: En streng med $n = n_1 + n_2 + \dots n_t$ symboler, hvor av n_i er identiske for $i = 1, \dots, t$ har

$$\frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_t!}$$

anagrammer.

Eksempel

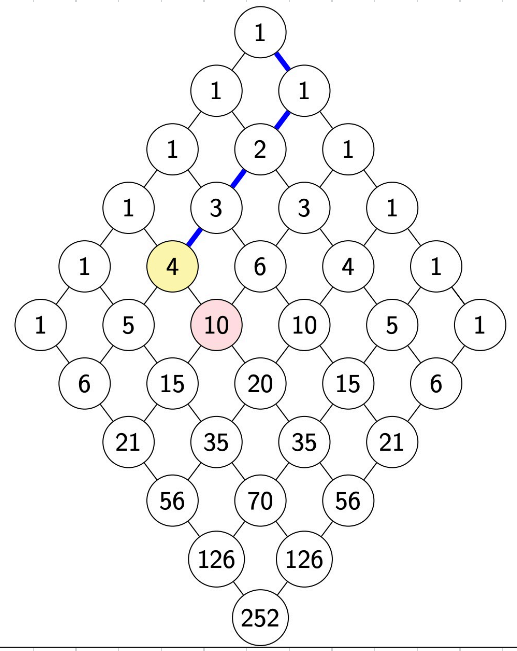
otto har $n = 4 = 2+2 = n_1 + n_2$ symboler. Vi har $\frac{4!}{2!2!} = 6$ anagrammer.

Oppgave

Hvor mange anagrammer har KULTURUKE?

Svar: $\frac{9!}{3!2!} = 30240$

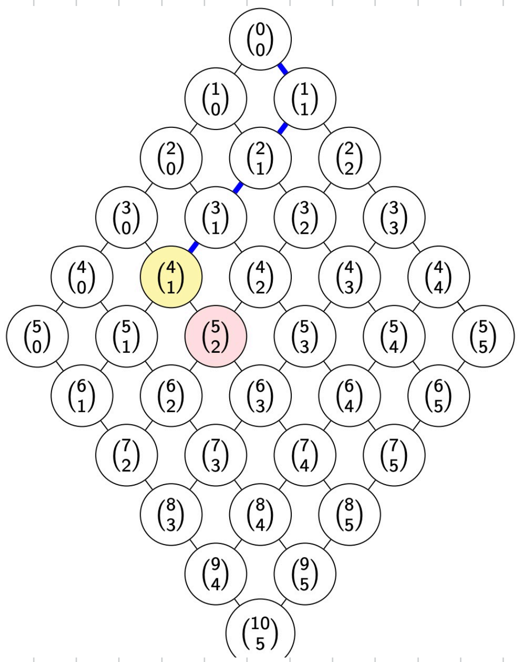
Mer om binomialkoeffisienter - Pascals trekant



Tallet i hver node er antall veier fra toppen til denne noden (vi kan bare gå nedover).

For å komme fra toppen til den gule noden, må vi ha fire kanter, tre må gå til venstre, en til høyre. Det finnes derfor $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$ veier.

For å komme fra toppen til den rosa noden, må vi ha fem kanter, tre må gå til venstre, to til høyre. Det finnes derfor $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$ veier.



For å komme fra toppen (rad 0) til en node i rad r, finnes $\binom{r}{h}$ veier, der h er antall av kantene som må gå til høyre.

Legg merke til følgende mønster

$\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ 4 6

$\binom{5}{2}$ 10

Vi har $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$.
Eller helt generelt for $n \geq k > 0$:

Vi har $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Altså: en rekursiv definisjon av binomial-koeffisienten.

Hvorfor binomialkoeffisienter?

Et polynom som består av to ledd kalles et binom, f.eks. er $x + y$ et binom.

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$

Generelt: Binomialkoeffisientene

Grafteori

Hva er grafteori?
- Studiet av strukturer som beskriver objekter og forbindelsene (relasjonene) mellom dem. Modellert ved hjelp av noder/(objekter), og kanter (forbindelser).

Hvorfor studere grafer?
- Gir språk og modeller for algoritmer og datastrukturer
- Modellering av datanettverk, transportnett, elektrisitetsnett, og sosiale nettverk osv.
- Optimalisering, f.eks i logistikk og økonomi
- Analyse av store datasett, søkemotorer, og kunstig intelligens.

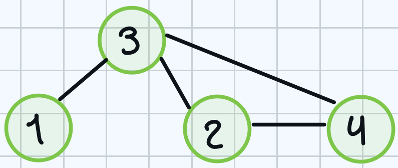
Læringsmål: begreper, klassiske teoremer og noen grunnleggende algoritmer

Definisjon

Graf
En graf $G=(V,E)$ er en mengde med noder V og en mengde med kanter $E \subseteq \{\{u,v\} \mid u,v \in V, u \neq v\}$ mellom nodene.
Kantene representeres ved uordnede par av noder.

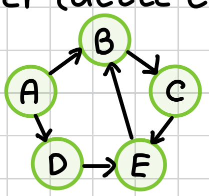
Eksempel

Grafen med $V=\{1,2,3,4\}$ og $E=\{\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ kan tegnes slik:



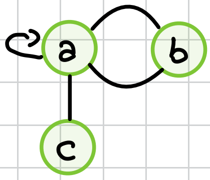
Grafer fra den virkelige verden

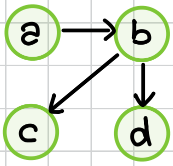
- Nettverk og kommunikasjon
- Noder = datamaskiner eller rutere
- Kanter = kommunikasjonslinjer
- Grafteori brukes for å analysere nettverkseffektivitet og robusthet
- Søkealgoritmer for nettsider
- Noder = nettsider
- Kanter = lenker (dette er en rettet graf, så kantene har retning)

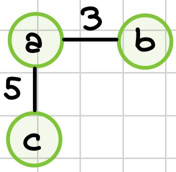


Varianter

- Multigraf: parallelle kanter mellom samme to noder.
- Pseudograf: tillater både parallelle kanter og løkker.
- Rettet graf: kantene har retning, så representeres ved piler (formelt: kanter - uordnede par $\{a,b\}$, piler $\langle a,b \rangle$)
- Vektet graf: hver kant har en vekt (et tall)

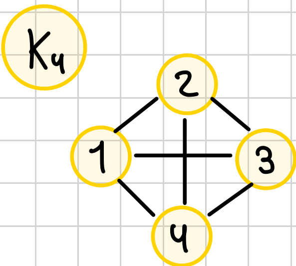


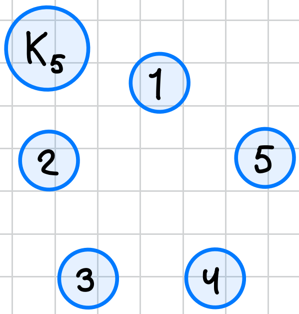


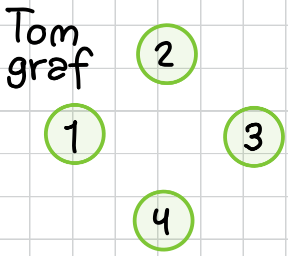


Komplette og tomme grafer

- K_n: n noder, alle mulige kanter er med.
- Tom graf: bare noder, ingen kanter.





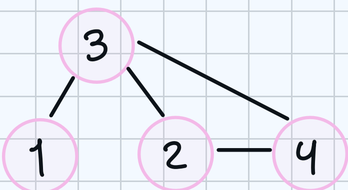


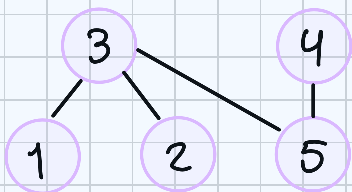
Komplement til en graf

For $G = (V, E)$ er komplementet $\bar{G} = (V, \{\{u,v\} \mid u \neq v\} \setminus E)$.

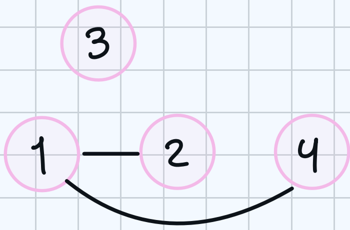
Eksempel

Komplementet til K_5 er den tomme grafen med 5 noder.

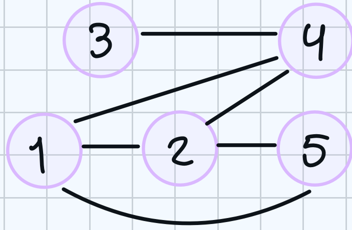




har komplement:

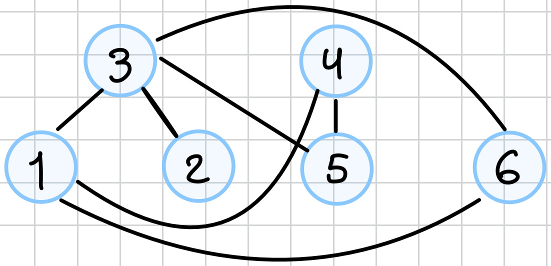


har komplement:

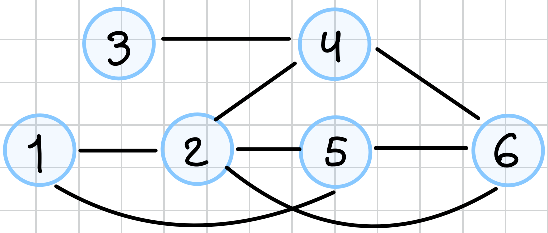


Komplement oppgave

Finn komplementet til grafen:



Svar:

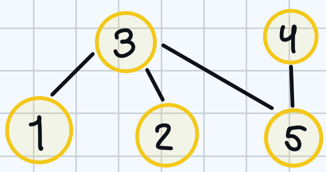


Gradene til noder

Definisjon

Graden deg(v) til en node v er antall kanter som er koblet til (boka: ligger inntil) noden.

Eksempel



Nodene 1,2 og 4 har grad 1 (kalles blader, bladnoder), node 3 har grad 3 og node 5 har grad 2.

Merk: Grafen har 4 kanter, og summen av gradene er $8 = 4 \cdot 2$.

Sum av grader

Hver kant bidrar med 2, når vi summerer opp gradene til alle hjørnene, altså

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

der $|E|$ er antall kanter i grafen (V,E).

Konsekvens
Antallet noder med oddetalls grad er alltid partall.

Begrunnelse
Summen av et odde antall oddetall er et oddetall (eks: $3+7+9=19$).
Summen av vilkårlig mange partall er et partall.
oddetall + partall = oddetall

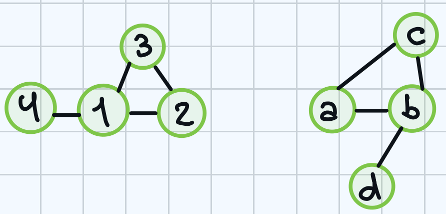
Isomorfi av grafer

To grafer kan se ulike ut men være isoforfe: samme struktur, ulik navngivning, ulik representasjon/tegning.

Isomorf = formlik

Eksempel

La $f: \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c,d\}$ være bijeksjonen slik at $f(1)=b$ $f(2)=c$ $f(3)=a$ og $f(4)=d$.



Definisjon

Vi sier at to noder a og b er naboer, hvis $\{a,b\}$ er en kant i grafen.

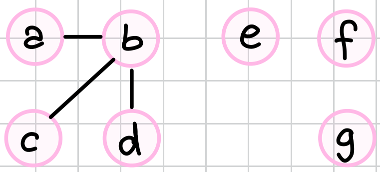
Ismorfi
To grafer $G=(V,E)$ og $G=(V',E')$ er isomorfe hvis det finnes en bijeksjon $f: V \to V'$ som er slik at a og b er naboer i G hvis og bare hvis $f(a)$ og $f(b)$ er naboer i G'.
Vi sier da at bijeksjonen bevarer kanter.

Sammenhengskomponenter

Definisjoner

- Vi sier at en graf er sammenhengende hvis det for hvert par av noder a og b finnes en vandring (vei) (en sammensetning av kanter) fra a til b.
- En sammenhengskomponent i en graf er en maksimal mengde noder hvor det finnes en sti mellom to vilkårlige noder i mengden, og ingen noder utenfor mengden er koblet til noen av nodene i mengden gjennom en kant.
- En sammenhengende graf har altså en sammenhengskomponent.

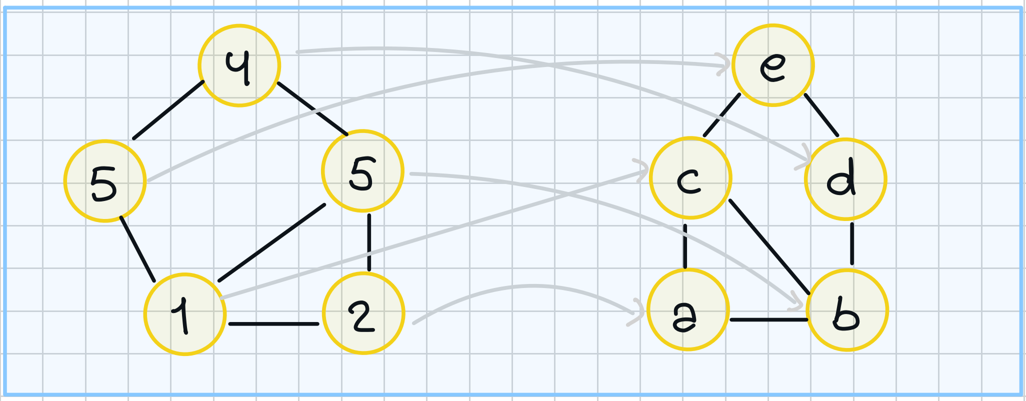
Eksempel: Graf med tre sammenhengskomponenter



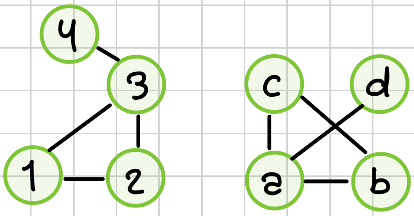
Bevise at grafer er isomorfe

Må finne eksplisitt bijeksjon som beverer kanter!

Eksempel

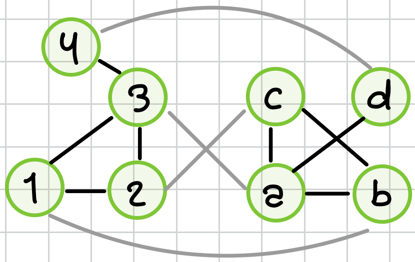


Oppgave



-> Hvor mange bijeksjoner mellom nodegradene $\{1,2,3,4\}$ og $\{a,b,c,d\}$
$4! = 24$

-> Finn en isomorfi mellom grafene



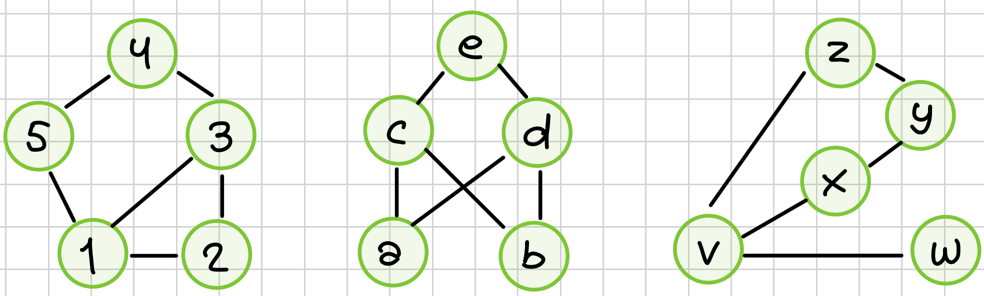
-> Hvor mange isomorfier mellom grafene?
2

Bevise at grafer ikke er isomorfe

Gitt to grafer G og H. Er det mulig at de er isomorfe?

Sjekkliste

-> Har de samme antall noder, kanter, sammenhengskomponenter?
-> Er det en korrespondanse mellom gradene til nodene i G og i H?
-> Sammenlign syklene i G og H.



Ingen av disse grafene er isomorfe. Hvorfor?