# Teoriforelesning 4
## LINEÆRE LIGNINGSSYSTEMER III

### Lineære ligningssystemer

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- Ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning hvis og bare hvis
  - Søylevektorene til $A$ er lineært uavhengige
  - Determinanten til $A$ er forskjellig fra 0
  - $A$ har invers matrise, $A^{-1}$
- Måter å løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ på
  - Gauss-eliminasjon (evt. med delvis pivotering)
  - Bestemme $A^{-1}$ og sette $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$
  - Faktorisere $A = LU$. Sett $\mathbf{w} = U\mathbf{x}$, og løs $L\mathbf{w} = \mathbf{b}$. Løs så $U\mathbf{x} = \mathbf{w}$

### Egenverdier og egenvektorer

- Matrisen som en avbildning (funksjon) $A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$
  $$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$
- Eks:
  - $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 11 \end{bmatrix}$ $(m=3, n=2)$
  - $m = n$, kvadratisk matrise
  - Sett $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, og se på $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- Dersom $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, kalles $\lambda$ en egenverdi for $A$, og $\mathbf{x}$ en tilhørende egenvektor

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

$\vec{v} = A \cdot \vec{u}$

Egenvektorer:

$\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

### Egenverdier og egenvektorer

$A$ en $n \times n$ matrise

Dersom $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ for et tall $\lambda$ kalles $\lambda$ en **egenverdi** for $A$ og $\vec{x} \neq \vec{0}$ en tilhørende **egenvektor**

## Hvordan bestemme disse?

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$x + 4y = \lambda x$
$5x + 2y = \lambda y$

$(1-\lambda)x + 4y = 0$
$5x + (2-\lambda)y = 0$

$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A = \lambda I$ for $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Må ha $\det(A - \lambda I) = 0$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 20 = \lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0$

$A\vec{x} = \lambda \vec{x}$
$A^2\vec{x} = A(A\vec{x}) = A(\lambda\vec{x})$
$= \lambda A\vec{x} = \lambda^2\vec{x}$

Løs denne og få $\lambda_1 = 6$ og $\lambda_2 = 3$

$\lambda_1 = 6$

$-5x + 4y = 0$
$5x - 4y = 0$

$5x - 4y = 0$
$y = \frac{5}{4}x$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} t, t \neq 0$

$\lambda_2 = 3$

$4x + 4y = 0$
$5x + 5y = 0$

$x + y = 0$
$y = -x$

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t, t \neq 0$

- Dersom $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, er $A^n\mathbf{x} = \lambda^n \mathbf{x}$
- En matrise $A$ sies å være diagonaliserbar dersom det finnes en inverterbar matrise $P$ med egenvektorene til $A$ som søyler. Da er
  $$A^n\mathbf{x} = PD^nP^{-1}\mathbf{x}$$
  der $D$ er en diagonalmatrise med egenverdiene til $A$ langs diagonalen

### Diagnolisering

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ $\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$

$(4-\lambda)x + y = 0$
$6x + (3-\lambda)y = 0$

$\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$ er egenverdiene

$\lambda_1 = 6$

$-2x + y = 0$
$6x - 3y = 0$

$\boxed{y = 2x}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} t, t \neq 0$

$\lambda_2 = 1$

$3x + y = 0$
$6x + 2y = 0$

$\boxed{y = -3x}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} t, t \neq 0$

**1** Egenverdier $\lambda_1 = 6$ med egenvektor $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}t$

$\lambda_2 = 1$ med egenvektor $\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}t$

**2** Finn a og b slik at

$$\begin{bmatrix}1\\17\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}t + b\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$$

Egenvektorene er lineært uavhengig, derfor kan vi gjøre dette → Derfor vet vi at P har en invers matrise

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ 2a - 3b &= 17 \end{aligned} \quad \text{gir } a = 4 \text{ og } b = -3$$

$$\begin{bmatrix}1\\17\end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}}_{P}\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}P^{-1}\begin{bmatrix}1\\17\end{bmatrix}$$

$$= PP^{-1}\begin{bmatrix}1\\17\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\17\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix}1\\17\end{bmatrix}$$

Utregning gir $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & -1\end{bmatrix}$

**3** Se på $A^n\vec{x}$?

$$A^n\begin{bmatrix}1\\17\end{bmatrix} = 4A^n\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - 3A^n\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$$

Egenvektoren som hører til $\lambda_1 = 6$

Egenvektoren som hører til $\lambda_2 = 1$

$$= 4 \cdot 6^n\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - 3 \cdot 1^n\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$$

$D^n$ for $D = \begin{bmatrix}6 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 \cdot 6^n\\-3 \cdot 1^n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6^n & 0\\0 & 1^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6^n & 0\\0 & 1^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\17\end{bmatrix}$$

$$A^n\begin{bmatrix}1\\17\end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6^n & 0\\0 & 1^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & -1\end{bmatrix}}_{PD^nP^{-1}}\begin{bmatrix}1\\17\end{bmatrix}$$

$$A^3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6^3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6^3 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 \cdot 6^3\\1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 \cdot 6^3 + 1\\8 \cdot 6^3 - 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}173\\345\end{bmatrix}$$

# Temaforelesning 4
## LINEÆRE LIKNINGSSYSTEMER III

## 1 REPETISJON

① Utfordringer ved Gauss-eliminasjon

i) Nullpivotelementer

ii) Flyttallfeil

Forbedring: Delvis pivotering

② LU-faktorisering

$$\underbrace{A}_{LU}\vec{x} = \vec{b}$$

$$L\underbrace{U\vec{x}}_{\vec{y}} = \vec{b}$$

$L\vec{y} = \vec{b}$ løs for $\vec{y}$

$U\vec{x} = \vec{y}$ løs for $\vec{x}$

Numerisk stabilt og effektivt

Invers ved LU: $A\underset{[x_1\ x_2\ x_3]}{\underset{\shortparallel}{A^{-1}}} = I$

$$I = \begin{array}{c} \begin{matrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Løse 3 systemer samtidig via LU
$$\begin{cases} Ax_1 = \vec{b}_1 \\ Ax_2 = \vec{b}_2 \\ Ax_3 = \vec{b}_3 \end{cases}$$

I dag: Spesielle matriser

i) Tridiagonale
ii) Diagonaldominante
iii) Overgangs-

} matriser

# 2 SPESIELLE MATRISER

## 2.1 TRIDIAGONALE MATRISER

**Definisjon**

En matrise er TRIDIAGONAL hvis den er på formen

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Ex 2:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

DISKUTER: Hvorfor er det enklere å regne med tridiagonale matriser?

En generell $n \times n$-matrise har $n^2$ elementer

i) LU-faktorisering

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} (-3) \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \left(\frac{2}{8}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{4} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \left(-\frac{4}{13}\right) \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13/4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{23}{13} \end{bmatrix}$$

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$a_k$ diagonale

$b_k$ over

$c_k$ under

$$\det(A_0) = 1$$

$$\det(A_1) = |a_1|$$

$$\det(A_n) = a_n \cdot \det(A_{n-1}) - b_{n-1} \cdot c_{n-1} \det(A_{n-2}) \quad k \geq 2$$

iii) For tridiagonale matriser på formen

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & & \vdots \\ 0 & b & a & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a & b \\ \vdots & \vdots & \cdots & b & a \end{bmatrix}$$

er alle egenvektorer og egenverdier på formen

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_k &= a + 2b\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \\ \vec{v}_k &= \left[\sin\left(\frac{ik\pi}{n+1}\right)\right]_{i=1}^{n} \end{aligned}}$$

## 2.2 DIAGONALDOMINANTE MATRISER

**Definisjon**

En matrise er (STRENGT) DIAGONALDOMINANT dersom absoluttverdien av diagonalelementene er (strengt) større enn summen av absoluttverdiene av resten av raden

større : $\geq$

strengt større : $>$

Ex:

diagonalelementer

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 3 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$|5| > |1| + |1|$

$|10| > |0| + |3|$

$|8| > |3| + |-2|$

Strengt diagonal-dominant matrise

OPPGAVE: Lag en diagonaldominant 4×4 matrise

Ex: $\begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $|6| = |1| + |2| + |3|$

Delvis pivotering unødvendig ved strengt diagonal-dominante matriser

i) Unngår nullpivotelementer

ii) Unngår numerisk feil

$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{12} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$ $1 \cdot \frac{10^{12}}{1}$

TEOREM

Alle komplekse egenverdier av $A_{n \times n}$ er i en sirkel med radius $\sum_{i \neq k} |A_{k,i}|$ rundt $A_{kk}$

Gerschgorins sirkelteorem

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$R_1 = |-1| + |2| = 3$

$R_2 = |1| + |2| = 3$

$R_3 = |0| + |0| = 0$

Strengt diagonaldominant

$|4| > 3 \quad |4| > 3 \quad |9| > 0$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 9-\lambda \end{bmatrix}$$

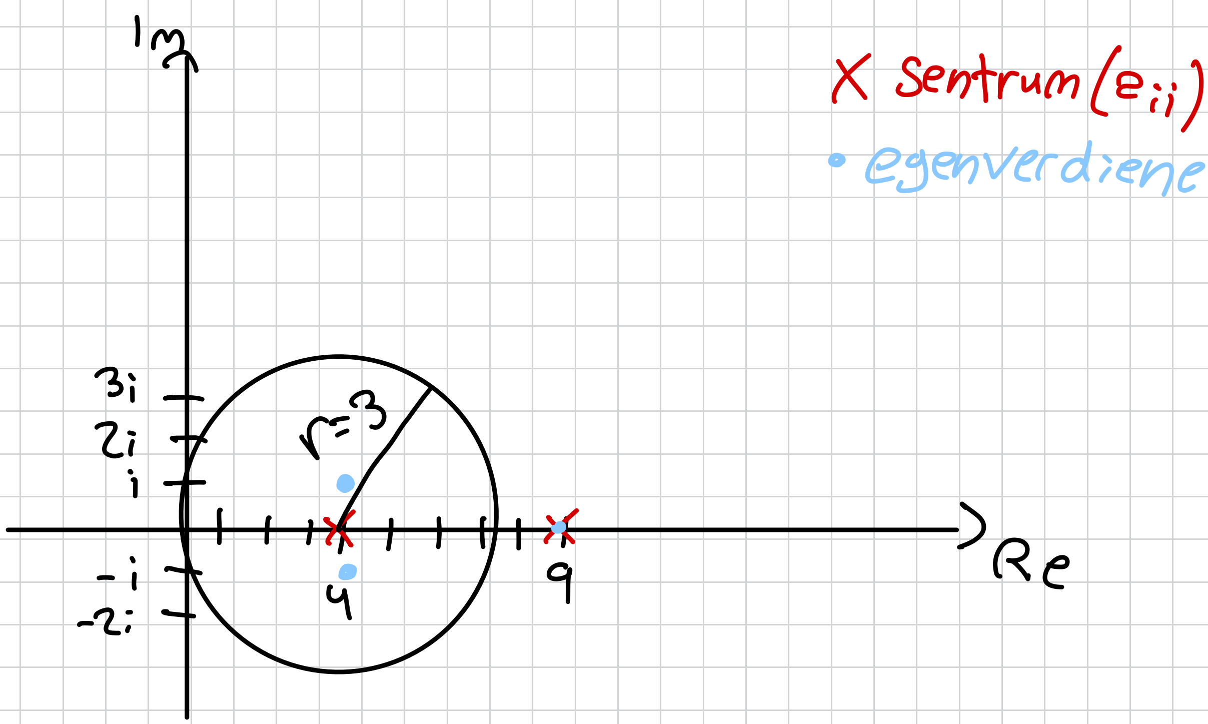
$+ \quad - \quad +$

$$\det(A - \lambda I) = (9-\lambda)\left[(4-\lambda)^2 - (-1)\cdot 1\right]$$
$$= (9-\lambda)\underbrace{(\lambda^2 - 8\lambda + 17)}_{\text{abcformel}} = 0$$

$\lambda_1 = 9$

$\lambda_2 = 4 + i$

$\lambda_3 = 4 - i$



# 2.3 OVERGANGSMATRISER

## Husk:

$A_{n \times n}$

$\vec{v} \neq 0$

$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$ $\qquad \lambda$ skaler

Diagoniserbar $A = PDP^{-1}$ $\quad P$ inverterbar $\quad D$ diagonal

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$$

$A^{137}$ - vanskelig $\quad D^{137}$ - ikke så vanskelig

## Diskre dynamiske systemer

$t = 0, 1, 2, 3 \dots$ (tiden)

Tilstanden til systemet ved tiden $t = n$ er gitt ved vektoren

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

$x_n$ — # barn

$y_n$ — # voksne

Ex: Befolkning

Vi kan regne ett hakk frem i tiden ved å gange tilstandsvektoren med $M$

$M$ — OVERGANGS-MATRISEN

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

# Ex: EKSAMEN V2019 TMA4115

Linear algebra
2 paralleller $\begin{cases} S_7 \\ S_8 \end{cases}$

$B$ = "Å bytte parallell"

$P(B)$ = "sannsynligheten for å bytte parallell" $= 0.4$

① Finne en overgangsmatrise $M$ som beskriver prosessen

| Går til \ Går i | S7 | S8 |
|---|---|---|
| S7 | $S7 \to S7$ | $S8 \to S7$ |
| S8 | $S7 \to S8$ | $S8 \to S8$ |

$$M = \begin{bmatrix} P(S7 \to S7) & P(S8 \to S7) \\ P(S7 \to S8) & P(S8 \to S8) \end{bmatrix}$$

$P(S7 \to S7) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$
$P(S7 \to S8) = P(B) = 0.4$
$P(S8 \to S7) = P(B) = 0.4$
$P(S8 \to S8) = 0.6$

$$M = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

② Finne fordelingen etter 14 uker

Ved start $\begin{cases} 180 \text{ studenter i S7} \\ 140 \text{ studenter i S8} \end{cases}$

$t = 14$ ($t$ tiden i uker)

Totalt antall studenter: $180 + 140 = 320$

MÅL: $\boxed{M^{14}\vec{x}_0}$ $\quad \vec{x}_0$ tilsandsvektor ved start

$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} \text{andel studenter i S7} \\ \text{— || — i S8} \end{bmatrix}$ ved tiden $t_0$ (start)

$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 180/320 \\ 140/320 \end{bmatrix}$

Strategi: Diagonalisering, $M = PDP^{-1}$

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/5 \end{bmatrix} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$M^{14} = PD^{14}P^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^{14} & 0 \\ 0 & (1/5)^{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\approx \underline{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}}$$

$$\vec{x}_{14} = M^{14}\vec{x}_0 \approx \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 180/320 \\ 140/320 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 160/320 \\ 160/320 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{S7} \\ \text{S8} \end{matrix}$$

Ved semesterslutt er det omtrent lik fordeling