Teoriforelesning 3
LINEÆRE LIGNINGSSYSTEMER II

Lineære ligningssystemer og matriser

Ligningsform

$2x + y + z = 7$
$x - 7y + z = 3$
$3x + 4y + z = 11$

Matriseform

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Vektorform

$$x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Inhomogent ligningssystem

Tall på HS som ikke alle er lik 0

Vi vet at dette har entydig løsning

$x = 4, y = 0, z = -1$

Ligningsform

$2x + y + z = 0$
$x - 7y + z = 0$
$3x + 4y + z = 0$

Matriseform

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vektorform

$$x\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Homogent ligningssystem

Bare nuller på HS når det står på standardform

Dette må også da ha entydig løsning

$x = 0, y = 0, z = 0$

Inhomogene og homogene ligningssystemer

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -7 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad x = 4, y = 0, z = -1 \qquad \text{Inhomogent}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad x = 0, y = 0, z = 0 \qquad \text{Homogent}$$

- Et homogent ligningssystem har alltid $x = 0, y = 0, z = 0$
- Det kan ha uendelig mange løsninger (men altså aldri ingen løsning)

Lineært avhengige og uavhengige vektorer

Mengden av vektorer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sies å være **lineært uavhengig** dersom
$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ hvis og bare hvis $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

I motsatt fall sies mengden å være **lineært avhengig**. Dvs. da finnes $a_1, a_2, \dots, a_n$, der ikke alle er lik 0 slik at

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ligningssystemet har entydig løsning hvis og bare hvis mengden av søylevektorer
$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right\}$ er **lineært uavhengig**

- Kan to vektorer i $\mathbb{R}^3$ være lineært uavhengige?
- Kan tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ være lineært uavhengige?
- Kan fire vektorer i $\mathbb{R}^3$ være lineært uavhengige?

Matrisemultiplikasjon

- Hvordan kan vi definere produkt av to matriser?
- Hvis matrisene ikke er kvadratiske?
  - Hva går an?
  - Hva går ikke an?

Regneregler for matriser

La A, B og C være matriser av slikt format at regneoperasjonene nedenfor er definert. Da gjelder

(1) $A(B+C) = AB + AC$
(2) $A(B-C) = AB - AC$
(3) $(A+B)C = AC + BC$
(4) $(A-B)C = AC - BC$
(5) $(AB)C = A(BC)$ (Dvs. matrisemultiplikasjon er assosiativt)
(6) $A + B = B + A \qquad A + (B+C) = (A+B) + C$
(7) $A(aC) = (aA)C = a(AC)$ (hvis a er et reelt tall)

NB! Matrisemultiplikasjon er IKKE kommutativt

Determinanter

- Kun definert for kvadratiske matriser
- 2x2 (to-radet determinant)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \overset{def}{=} ad - cd$$

- 3x3 (tre-radet determinant)

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \overset{def}{=} 2\begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2(11) - (-2) + 25 = 5$$

- Ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning hvis og bare hvis $\det A \neq 0$ (se kap. 3.4)

Den inverse til en matrise

- I tallverdenen
  $ax = b$ gir at $x = \frac{1}{a}b = a^{-1}b$ dersom $a \neq 0$
- I matriseverdenen:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- La A være en kvadratisk matrise
  Definer A^{-1} som matrisen som er slik at $AA^{-1} = 1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
  (Da er også $A^{-1}A = 1$)
- Da får vi $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$
- Hvordan finne A^{-1} (dersom den finnes)?

$A \cdot I = A$

På jakt etter:

$AA^{-1} = I$

$A\vec{x} = \vec{b}$

$(A^{-1}A)\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

$I\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Eksempel

$$AA^{-1} = I \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -\frac{3}{2} \; -\frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \\ \frac{1}{3} \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -3 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{3}{2} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & 2 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \\ \\ -1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & -6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{15} \\ \\ \end{array} \sim \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -\frac{22}{5} & \frac{6}{5} & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{5} & \frac{3}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -11 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & -1 \\ 25 & -5 & -15 \end{bmatrix} \qquad AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x = -\frac{11}{5}$ $\quad y = \frac{2}{5}$ $\quad z = 5$

$x = \frac{3}{5}$ $\quad y = -\frac{1}{5}$ $\quad z = -1$

$x = \frac{8}{5}$ $\quad y = -\frac{1}{5}$ $\quad z = -3$

Oppsummering

- Ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning hvis og bare hvis
  - Søylevektorene til A er lineært uavhengige
  - Determinanten til A er forskjellig fra 0
  - A har invers matrise, og vi kan finne løsningen $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

TEMAFORELESNING 3

Nøkkelbegrep:

- Matrisemultiplikasjon
- Regneregler for matriser
- Determinanter til 2x2 og 3x3-matriser
- Homogene og inhomogene lineære ligningssystemer
- Eksistens og entydighet av løsninger til lineære ligningssystemer
- LU-faktorisering
- Delvis pivotering

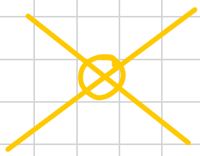
REPETISJON

$$\begin{aligned} \text{I)}\quad & 2x + 3y = 9 \\ \text{II)}\quad & -x + 6y = 3 \quad \rightarrow x = 3 - 6y \end{aligned}$$

2

Løsningsmetoder

1) Grafisk



2) Innsettingsmetoden

3) Addisjonsmetoden

4) Gauss-eliminasjon

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 9 \\ -1 & 6 & 3 \end{array}\right]$$

5) LU-faktorisering

GAUSS-ELIMINASJON

✓ Små systemer (2×2, 3×3, 4×5, ...) med enkle tall ($\mathbb{R}$)

✗ Større systemer (100-vis, 1000-vis, ukjente) med "stygge tall"

↳ Vi trenger datamaskiner

pivot-argument

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] (-2)\ (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] (-\tfrac{1}{9})$$

→ 0

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}111,\ldots \end{array}\right]$$

Mulige utfordringer

1. Nullpivotelementer
2. Flyttallfeil

Ex: Nullpivotelementer

$$A_{2\times 2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} (-\tfrac{1}{0})$$ ✗

Naiv gauss-eliminasjon

Løsning: $R_1 \leftrightarrow R_2$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ex: Flyttallfeil

For hånd

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-12} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 10^{-12} & 1 & 1 \end{array}\right] (-10^{-12}) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-10^{-12} & 1-2\cdot(10^{-12}) \end{array}\right]$$

$\approx 0.9999...9$

Kode

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-12} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] (-10^{12}) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-12} & 1 & 1 \\ 0 & 1-10^{12} & 2-10^{12} \end{array}\right]$$

$\approx -10^{12}$ $\quad \approx -10^{12}$

Avrundingsfeil som følge av stor innbyrdes forskjell mellom elementene i matrisen

↳ Algoritmen trenger modifikasjon

GAUSS-ELIMINASJON MED DELVIS PIVOTERING

- Unngår problemer med nullpivotelementer og flyttallfeil
- Sammenligner elementer i samme kolonne før eliminering

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{Velger } a_n \text{ med størst absoluttverdi som pivot}}$

Ex:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-12} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 10^{-12} & 1 & 1 \end{array}\right] (-10^{-12})$$

$|1| > |10^{-12}|$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-10^{-12} & 1-2\cdot 10^{-12} \end{array}\right]$$

$$\approx \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Feilen her er veldig liten, derfor foretrekker vi gauss-eliminasjon med delvis pivotering

Delvis pivotering

1) Addresserer nullpivoteringer så vi ikke deler på 0
2) Reduserer numeriske feil

LU-FAKTORISERING

Nyttig når vi skal løse samme ligningssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ for flere ulike $\vec{b}$

- Deler opp problemet og effektiviserer

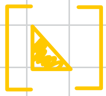
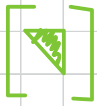
Ex:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned} \;\rightarrow\; \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\vec{b}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

MÅL: Løse $A\vec{x} = \vec{b}$ for $\vec{x}$

IDE: FAKTORISERER A og løser vi andre ligningssystemer

PLAN:

① La $A = LU$ $L =$  $U =$ 

② Finn L og U ved hjelp av LU-faktorisering

③ Substituer $A\vec{x} = \vec{b} \rightarrow L\underbrace{U\vec{x}}_{\vec{y}} = \vec{b}$

④ La $U\vec{x} = \vec{y}$

⑤ Substituer $L\vec{y} = \vec{b} \rightarrow L\vec{y} = \vec{b}$

⑥ Løs $L\vec{y} = \vec{b}$ for $\vec{y}$

⑦ Sett inn for $\vec{y}$ i $U\vec{x} = \vec{y}$

⑧ Løs $U\vec{x} = \vec{y}$ for $\vec{x}$

Ex:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

① La $A = LU$

② $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} (-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right) \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 13/3 \end{bmatrix}}_{U}$

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$ P: $A \stackrel{?}{=} LU$

③ $A\vec{x} = \vec{b} \rightarrow \underbrace{U\vec{x}}\, L = \vec{b}$

④ $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

⑤ $L\vec{y} = \vec{b}$

⑥ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{I)} & y_1 = 4 \\ \text{II)} & y_1 + y_2 = -6 \\ \text{III)} & 2y_1 - \frac{1}{3}y_2 + y_3 = 7 \end{cases}$

II) $4 + y_2 = -6 \rightarrow y_2 = -10$

III) $y_3 = 7 - 2y_1 + \frac{1}{3}y_2 = 7 - 2\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot(-10) = \underline{-\frac{13}{3}}$

$\vec{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \\ -13/3 \end{bmatrix}$

⑦ $U\vec{x} = \vec{y}$

⑧ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 13/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \\ -13/3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{I)} & x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ \text{II)} & -3x_2 + 4x_3 = -10 \\ \text{III)} & \frac{13}{3}x_3 = -\frac{13}{3} \end{cases}$

$\underline{x_3 = -1}$

II) $x_2 = \frac{-10 - 4x_3}{-3} = \frac{-10 - 4\cdot(-1)}{-3} = \underline{2}$

III) $x_1 = 4 - x_2 + x_3 = 4 - 2 + (-1) = \underline{1}$

$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

P: $A\vec{x} \stackrel{?}{=} \vec{b}$

INVERS-MATRISER MED LU-FAKTORISERING

I tallverden $ax = b \rightarrow x = \frac{1}{a} \cdot b = a^{-1} \cdot b$

Definisjon

La $A_{n \times n}$. A er INVERTERBAR dersom det finnes en matrise $B_{n \times n}$ slik at

$$A \cdot B = I = B \cdot A$$

B er entydig og kalles INVERSEN til A, skriver A^{-1}

$$\underbrace{A^{-1}A}\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$I \cdot \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$[A \mid I] \sim [I \mid A^{-1}]$$

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IDE: Dele opp i 3 mindre systemer

1. $$A \cdot \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   $L\underbrace{U\vec{x}}_{\vec{y}} = \vec{b} \rightarrow$ Løs $L\vec{y} = \vec{b}$ for $\vec{y} \rightarrow U\vec{x} = \vec{y}$ for $\vec{x}$

2. $$A \cdot \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ $\rightarrow$ Løs ved LU for $\vec{x}$

3. $$A \cdot \begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ $\rightarrow$ Løs ved LU for $\vec{x}$