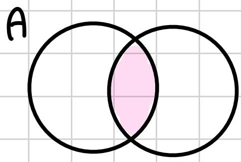
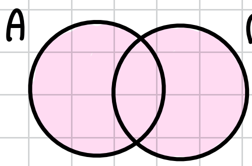
Forelesning 1
KOMPLEKSE TALL

Mengder

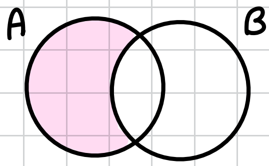
- Tallmengder: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
- Notasjon, f.eks. $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
- Operasjoner på mengder (A og B er to mengder)
    - snitt, $A \cap B$



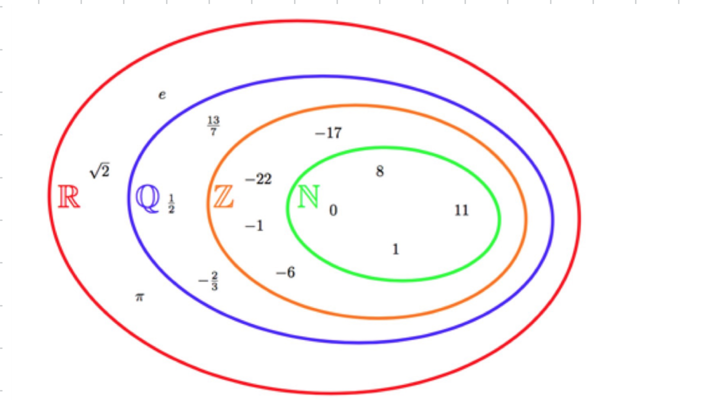
    - union, $A \cup B$



    - differense, $A \setminus B$



- Delmengde, $A \subseteq B$
    - Eks: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$



- Mengder bestående av reelle tall
    - Intervaller: $[a,b], (a,b), [a,b), [a,\infty)$
    - En mengde bestående av reelle tall kan (men må ikke) ha et største eller minste element

Komplekse tall (Mengden $\mathbb{C}$)

- Hva er komplekse tall?
  - $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$
  - Finnes det flere "tall" enn dem som er i $\mathbb{R}$?
  - Hvis ja, i hvilken forstand?
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
- Hvorfor oppstod komplekse tall?
  - Teoretiske formål
    - Løse algebraiske ligninger (polynomligninger)

Eksempel

$$x^2 + 3x + 3 = 0$$

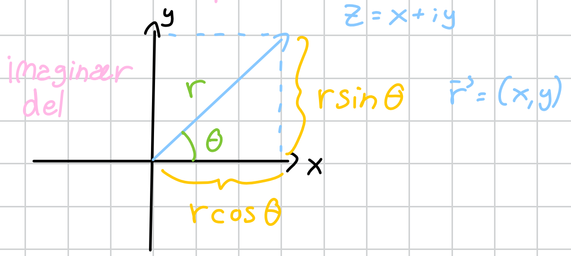
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} \rightarrow \text{Ingen løsning}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2} \leftarrow \text{Definer } i = \sqrt{-1}$$

- Definer i som det "tallet" som er slik at $i^2 = -1$
- Praktiske formål
  - Landmåling - sammenheng med vektorer
  - Signalteori - sammenheng med periodiske funksjoner
- Hvordan skriver vi komplekse tall?
  - Kartesisk form
  - Polarform

Kartesisk form

komplekst tall
$z = x + iy$



$\vec{r} = (x, y)$

Kan beskrive punktet med x og y, men også med lengden og vinkelen

(x,y) kartesiske koordinater
(r,θ) polarkoordinater

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sammenheng
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

- Hvordan regner vi med komplekse tall?
  - Addisjon og multiplikasjon

Addisjon

$z_1 = x_1 + iy_1$
$z_2 = x_2 + iy_2$

$z_3 = z_1 + z_2$
$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Likt som vektoraddisjon

Multiplikasjon

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$ $\quad i \cdot i = i^2 = -1$
$= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_2y_1 + x_1y_2)$

$= r_1r_2(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2)$
$+ ir_1r_2(\cos\theta_2 \cdot \sin\theta_1 + \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2)$
$= r_1r_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) + ir_1r_2\sin(\theta_1 + \theta_2)$
$= r_1r_2 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$

Definer $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
$e^z = e^{x+iy} = e^x + e^{iy}$

Operasjoner på mengder

A, B mengder

A: studenter i forelesning

B: studenter i fadderuka

union: $A \cup B$ 

$= \{x \mid x \in A \text{ eller } x \in B\}$

snitt: $A \cap B$ 

$= \{x \mid x \in A \text{ og } x \in B\}$

differanse: $A \setminus B$ 

$= \{x \mid x \in A \text{ og } x \notin B\}$

Definisjon

En mengde A er en DELMENGDE av B dersom alle elementene i A også finnes i B.

$$A \subseteq B$$

Intervaller, maksimum og minimum

Se på delmengder av $\mathbb{R}$.

La $x, y \in \mathbb{R}$

1) $x < y$ 3) $x \leq y$ 5) $x = y$

2) $x > y$ 4) $x \geq y$

$<, >, \leq, \geq$ ulikheter $>, <$ streng ulikhet

↳ gir ikke mening ved komplekse tall

Definisjon

$U \subseteq \mathbb{R}$ er et INTERVALL hvis det har følgende egenskaper:

Hvis a og b er vilkårlige tall i U, så inneholder U også alle tall mellom a og b.

Temaforelesning 1

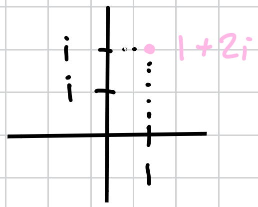
MENGDER OG ALGEBRAENS FUNDAMENTALTEOREM

Nøkkelbegrep:

- Regneregler for komplekse tall
- Komplekse tall på polar form
- Snitt og union av mengder
- Øvre og nedre begrensning av mengder
- Algebraens fundamentalteorem

Tallsystemer

- 1, 2, 3, 4, 5, ... naturlige tall $\mathbb{N}$
- 0, -1, -2, -3, ... heltall $\mathbb{Z}$
- $\frac{5}{7}, \frac{1}{3}, -\frac{9}{4}, \ldots$ rasjonale tall $\mathbb{Q}$ – de som ikke kan skrives som brøk med heltall
- $\frac{O}{d} = \pi \quad \sqrt{2}$ reelle tall $\mathbb{R}$
- $i^2 = -1 \quad a + bi$ komplekse tall $\mathbb{C}$ – eks: $1 + 2i$



Det komplekse planet

$\Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$ har alltid løsning i $\mathbb{C}$

$a_n x^2 + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = 0$

bruk av komplekse tall:

reelle problem → kompleks mellomregning → reelt sluttsvar

↳ differensiallikninger

Mengder

Definisjon og eksempler

En mengde er en samling med objekter

↳ "sett" på engelsk — "elementes"

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q} = \{$alle brøker av heltall$\}$

$= \{\frac{p}{q} \mid p, q \text{ heltall}, q \neq 0\}$

↳ "slik at" alt: ":"

$\emptyset = \{\} =$ den tomme mengden

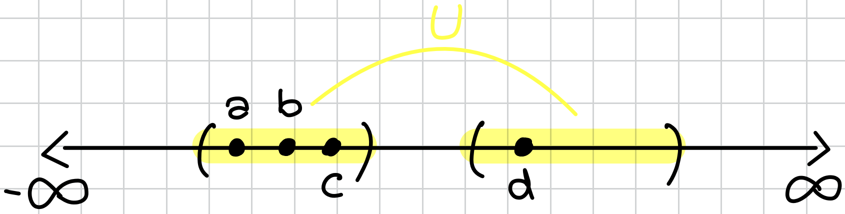
$x \in M$ "x er element i M"

eks: $\{2, 4, 6, 8\}$

$\{$alle partallene$\}$

$\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2n \text{ for } n \in \mathbb{Z}\}$

eks: $x + y = 5$, $x - y = 1$ ⇝ $L = \{x = 3, y = 2\}$



La $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ Lukket intervall

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ Åpent intervall

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

Halvåpent intervall

Definisjon

La M være en delmengde av $\mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$.

1) Et element $m \in M$ er det MINSTE ELEMENTET (minimum) hvis $m < n$ for alle andre $n \in M$.

2) Et element $m \in M$ er det STØRSTE ELEMENTET (maksimum) hvis $m > n$ for alle andre $n \in M$.

Eks: $M = \{1, 2, 3\}$

1: minste element
3: største element

Eks: $M = [1, 2)$ 1.99 1.999...

1: minste element
M har ikke største element

Definisjon

$M \in \mathbb{R}$

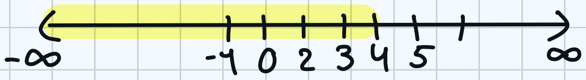
1) $x \in \mathbb{R}$ er en ØVRE SKRANKE ("begrensning") for M hvis $x \geq m$ for alle $x \in M$

2) $x \in \mathbb{R}$ er en NEDRE SKRANKE for M hvis $x \leq m$ $\forall$ ("for alle") $m \in M$

❗ Merk: Største/minste må være i M, men øvre/nedre trenger ikke det

Eksempel

$U = (-\infty, 4]$



4 og 5 er øvre skranke

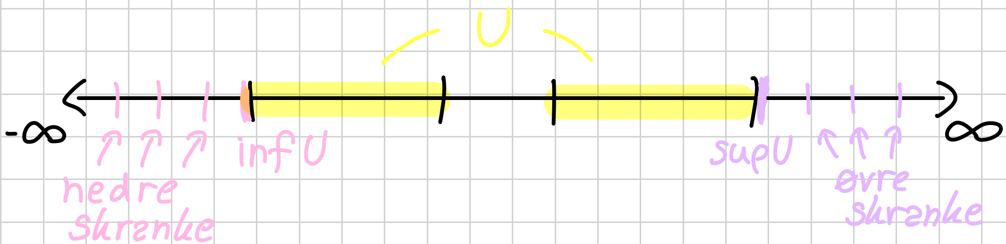
Ingen nedre skranke

Definisjon

$U \subseteq \mathbb{R}$. Vi definerer

1) Supremum til U, $\sup U$, er den minste øvre skranken for U (hvis den finnes)

2) Infimum til U, $\inf U$, er den største nedre skranken for U (hvis den finnes)



Eks: $U = (0, 2]$ 2, 5, 17 øvre skranke for U

$\sup U = 2$

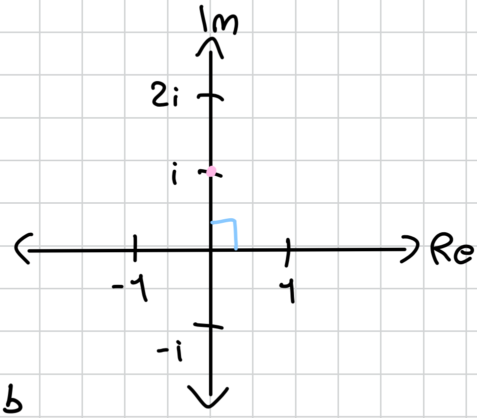
0, -1, -100 nedre skranke for U

$\inf U = 0$

! Merk: $\inf U \notin U$

$\sup U \in U$

Algebraens fundamentalteorem



$x^2+1=0 \quad x^2=-1 \rightsquigarrow \mathbb{C}$

$\boxed{\sqrt{i}=?}$ ← Tips: polarform $z=re^{i\theta}$

Ser av figuren:

$r=1$

$\theta=\frac{\pi}{2} \quad i=1e^{\frac{\pi}{2}i}=e^{\frac{\pi}{2}i}$

Alt: $i=\overset{a}{0}+\overset{b}{1}i$

$r=\sqrt{a^2+b^2}$

$\boxed{\theta=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)}$

$\sqrt{i}=?$ <=> Finne alle z slik at $\boxed{z^2=i}$

$z=\rho e^{i\theta}$

$(\rho e^{i\theta})^2=1\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}$

$\rightarrow \rho^2 e^{i2\theta}=1\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}$

i) $\rho^2=1 \rightarrow \rho=\sqrt{1}=1$

ii) $e^{i2\theta}=e^{i\frac{\pi}{2}+2\pi k} \rightarrow 2\theta=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

$\theta=\frac{\pi}{4}+\pi k$

$z_0=1e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi\cdot 0)}=e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_1=1e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi\cdot 1)}=e^{i\frac{5\pi}{4}}$

Algebraens fundamentalteorem ver 1 (AFT 1)

> For alle komplekse tall $a_{n-1},\dots,a_0$ så har likningen
>
> $$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$
>
> en kompleks løsning

↑ EKSISTENS

Abels teorem: BEGRENSNING - kan ikke alltid finne løsningene algebraisk

AFT 2

For alle komplekse tall $a_{n-1}, \dots a_0$ finnes komplekse tall $z_1, \dots z_n$ slik at

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x-z_1)(x-z_2)\dots(x-z_n)$$

Eksempel

$z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$

<u>Gjett</u>: $(z-1)$ er en rot

Polynomdivisjon:

$$(z^3 - z^2 - 4z - 4) : (z-1) = z^2 + 4$$

$$\begin{array}{l} -\;(z^3 - z^2) \\ \hline \quad\quad 4z - 4 \\ \quad -(4z - 4) \\ \hline \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

abc-formel:

$$z = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{\sqrt{i^2 \cdot 4^2}}{2}$$

$$= \frac{\pm 4i}{2} = \pm 2i$$

$(z+2i)$ $(z-1)$

$(z-2i)$