Teoriforelesning 10
DERIVASJON II

Nøkkelbegreper
- Globale og lokale ekstremalverdier
- Antiderivasjon og det ubestemte integralet
- Første ordens lineære differensiallигninger
- Seperable differensialligninger
- Integrerende faktor

Funksjonsdrøfting

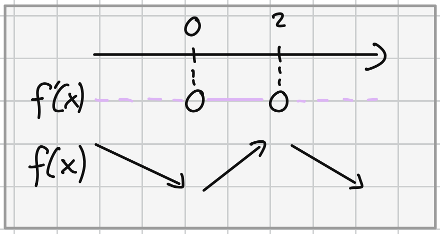
Husk! Hvis f har lokal maks/min i x_0, og f er deriverbar i x_0, så er $f'(x_0)=0$.

$f'(x_0)>0 \Rightarrow$ det finnes $\varepsilon>0$ slik at f er voksende på $(x_0-\varepsilon, x_0+x+\varepsilon)$ og motsatt f er synkende i intervallet dersom $f'(x_0)<0$.

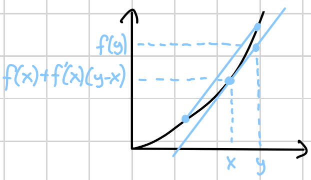
Eks: $f(x)=x^2e^{-x}$

$$f''(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=xe^{-x}(2-x)$$

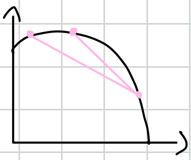
tegner fortegnslinje for å visualisere funksjonen:



Konveksitet og konkavitet



f er konveks dersom sekanten ligger over grafen til f for alle par av punkter på grafen. (tangenten ligger under)



f er konkav dersom sekanten ligger under grafen til f.

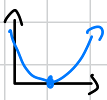
dette kan også bevises for konkav $f''(c)<0$.

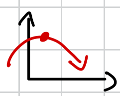
Det at f er konveks vil implisere at grafen til f vil ligge over tangenten.

$$f(y)=\underbrace{f(x)+f'(x)(y-x)}_{\text{se graf}}+\underbrace{\frac{\overset{\text{må være}>0}{f''(c)}}{2}(y-x)^2}_{0}$$

$f(y)>f(x)+f'(x)(y-x)$ dvs. at restleddet må være >0 og $\underline{f''(c)}$ må være positiv.

<u>Dette gir oss:</u>

min: $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$ gir oss minimum 

maks: $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$ gir oss maksimum 

Antiderivertstesten

Anta at f er to ganger deriverbar i x_0.

I) $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \rightarrow$ lokalt min i x_0

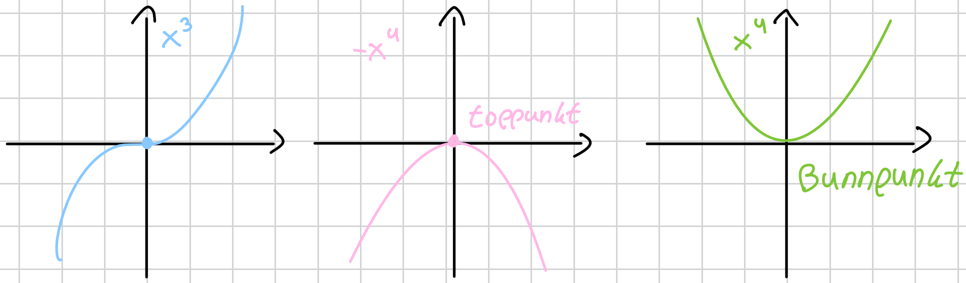
II) $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \rightarrow$ lokalt min i x_0

i $f'(x_0)=0, f''(x_0)=0$ "kan alt skje"

$f'(x_0)=f''(x_0)=0$:

I) $f(x)=x^3$
$f'(x)=3x^2$
$f''(x)=6x$

II) $f(x)=x^4 \quad g(x)=-x^4$
$f'(x)=4x^3 \quad g'(x)=-4x^3$
$f''(x)=12x^2 \quad g''(x)=-12x^2$



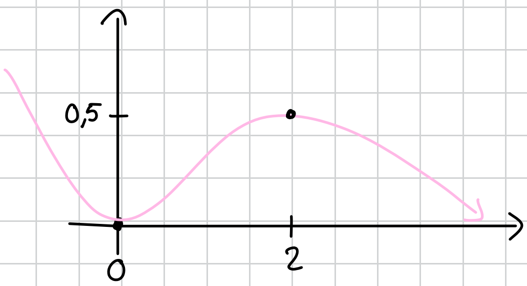
Funksjonsdrøfting

Eks: $f(x)=x^2e^{-x}$
$f'(x)=e^{-x}(2x-x^2)$
$f''(x)=e^{-x}(2-4x+x^2)$
$\quad = e^{-x}(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})$

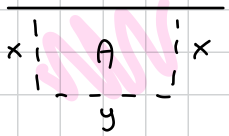
$f(0)=0,\ f(2)=4e^{-2}$, ekstremalpunkt

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ ser på start/grenseverdi,

kan bruke dette til å skissere $f(x)$.



Ekstremalverdier

Eks: 

Hva bør a og b være for å få maksimalt areal?

$A = x \cdot y$, $L = 2x + y$, $y = L - Lx$ for å finne toppunkt

$A(x) = x(L-2x)$
$\quad = xL - 2x^2$

$A'(x) = \frac{dA}{dx} = L - 4x = 0 \iff x = \frac{L}{4}$, $y = 2$

argumenter for at d er ett toppunkt

I) $A(0) = 0$, ser på endepunktene, $A(\frac{L}{2}) = 0$, 0 i begge og $A(x) > 0$ for alle andre x_0 må ha toppunkt.

II) $\left.\begin{matrix} A(0) \\ A(\frac{L}{2}) \end{matrix}\right\} = 0$ og

$A''(x) = -4$, konkav så må h toppunkt

Det ubestemte integralet

Definisjon

> En antiderivert av f er en deriverbar funksjon F hvor $F'(x) = f(x)$

Eks: $f(x) = x^3$, $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + konst = \frac{1}{4}x^4 + C$
dvs. vi her et ubestemt integral

> Det ubestemte integralet
>
> $\int f(x)dx$ er det generelle uttrykket for en antiderivert.

f.eks: $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

! Merk: Vi kan ikke alltid finne en eksplisitt antiderivert, f.eks. $\int e^{-2x} dx$, $\underbrace{\int \frac{\sin x}{x} dx}_{F(x)}$, bruker hele notasjonen som F(x) instead.

Temaforelesning 10
DERIVASJON II

1. REPETISJON

Definisjon

En antiderivert av f er en deriverbar funksjon F hvor
$$F'(x) = f(x)$$

Ex: $f(x) = x^3 \rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$

Definisjon

Det ubestemte integralet
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$
er det generelle uttrykket for en antiderivert

2. INNLEDNING

Definisjon

Diff.likn

En differensiallikning er en likning som inneholder en ukjent funksjon og en/flere deriverte av funksjonen

Ex: $y'(t) = y(t)$ $\quad y' = y$

$\hookrightarrow y(t) = e^t$ én løsning

Ex 2: $y' = 5y$

$y(t) = e^{5t}$ $\quad y'(t) = 5e^{5t} = 5y(t)$

$y(t) = 7e^{5t}$

$y(t) = -8e^{5t}$

$y(t) = Ce^{5t}$ GENERELL LØSNING

Integrasjons-
konstanten

2.1 Initialverdiproblemer (IVP)

Ex: $y'' = -y$ IVB: $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

Initial-verdi-betingelser

Gjett: $y(t) = A\sin(t) + B\cos(t)$

$y(0) = A\sin(0) + B\cos(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1 = 1 \Rightarrow \underline{B = 1}$

$y'(t) = A\cos(t) - B\sin(t)$

$y'(0) = A\cos(0) - B\sin(0) = A \cdot 1 - B \cdot 0 = 2 \Rightarrow \underline{A = 2}$

$\Rightarrow \underline{y(t) = 2\sin(t) + 1\cos(t)}$

SJEKK: $y(t) \overset{?}{=} -y''(t)$

2.2 Ulike typer difflikninger

Skiller på

1) ORDEN
   - i) Førsteorden Ex: $y' = k \cdot y$ (tall)
   - ii) Andreorden Ex: $y'' + y = 0$

2) TYPE
   - i) Linear
   - ii) Separable

Ulike løsningsteknikker

3 SEPARABLE DIFFLIKNINGER

Definisjon

> En førsteordens separabel diffl.likn. kan skrives på formen
>
> $$p(y) \cdot y' = q(t) \qquad p(y) \cdot \frac{dy}{dt} = q(t)$$
>
> $p(y), q(t)$ gitte, kontinuerlige funksjoner

Ex: $y \cdot y' = t$ 　　 Ex 2: $y' = t(1+y) \;\Big|\cdot \frac{1}{1+y}$

$$y'\left(\frac{1}{1+y}\right) = t$$

Løsningsmetode:

1. Skriv likningen på separabel form
2. Regn ut integralene $\int p(y)dy = \int q(t)dt$
3. Løs resultatene m.h.p. y

HUSKEREGEL for ②: $p(y)\cdot\frac{dy}{dt} = q(t)$

$$\Rightarrow p(y)dy = q(t)dt$$

Matematisk begrunnelse: Substitusjon (variabelskifte)

$$p(y(t))y'(t) = q(t) \to \int p(\underbrace{y(t)}_{y(t)=u})\underbrace{y'(t)dt} = \int q(t)dt$$

$$u' = y'(t) = \frac{dy}{dt} \qquad \frac{dy}{dt}dt = \frac{du}{dt}dt$$

$$\Rightarrow \int p(u)du = \int q(t) + C$$

$$\int p(y(t))y'(t)dt = p(u)\frac{du}{dt}dt$$

$$= \int p(u)du$$

$u = y$

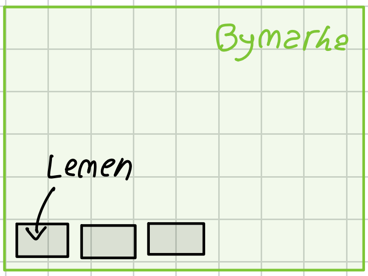
$du = dy$

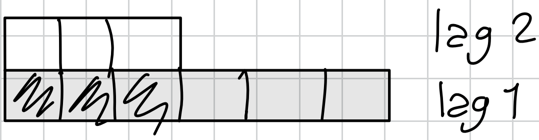
$$\Rightarrow \underline{\int p(y)dy = \int q(t)dt + C}$$

Ex: Den logistiske likningen

$y' = ay(B-y) = aBy - ay^2$ 　　 $a > 0,\ B > 0$

$y(t)$: Størrelsen til en populasjon, f.eks. # lemen i Bymarka





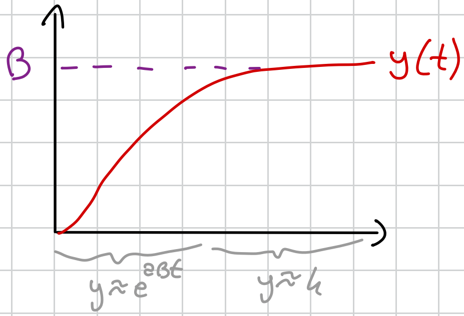
y liten $\to$ $y' = a\beta y - ay^2$ ≈ 0

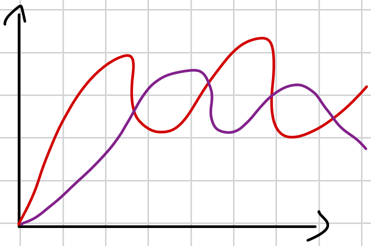
$y' = a\beta y$

$\to y(t) \approx e^{a\beta t}$

$y \approx \beta \to y' = a\beta y - ay^2$

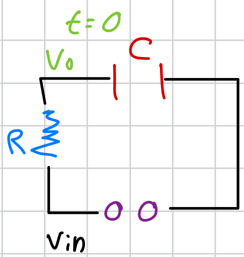
$y' \approx a\beta^2 - a\beta^2 \approx 0$ $\qquad$ $y(t) \approx k$





Ex: Krets

Batteri
Motstand R
Kondensator C
IVB: $V(0) = V_0$



$V(t)$ tilfredstiller:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{RC}(V_{in} - V) \quad \Big| \cdot \frac{1}{(V_{in}-V)}$$

① $$\underbrace{\frac{1}{V_{in}-V}}_{p(V)} \, dV = \underbrace{\frac{1}{RC}}_{q(t)}$$

② $$\int \frac{1}{V_{in}-V} \, dV \, dt = \int \frac{1}{RC} \, dt$$

$u = V_{in} - V$

$u' = -V'(t) = -\frac{dV}{dt}$

③ $$\int \frac{1}{u}(-du) = \int \frac{1}{RC} dt$$

$$-\ln|u| = \frac{1}{RC} t + C_1$$

$$-\ln(u) = \frac{t}{RC} + C_1$$

$$\ln(u) = \frac{-t}{RC} + C_2 \qquad C_2 = -C_1$$

$$e^{\ln(u)} = e^{-\frac{t}{RC} + C_2} = e^{-\frac{t}{RC}} \cdot e^{C_2} \quad C_3$$

$$\underline{u = C_3 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}}$$

$$\underline{V_{in} - V(t)} = u = \underline{C_3 e^{-\frac{t}{RC}}}$$

forenkler og kaller $C_3 = C$

$$\Rightarrow \underline{V(t) = V_{in} - C e^{-\frac{t}{RC}}}$$

IVB: $V_0 = 2V$ $\rightsquigarrow V(0) = 5 - Ce^{-0} \Rightarrow 5 - C = 2$

$C = 3$

$R = 10\,k\Omega$

$C = 100\,k^F$

$V_{in} = 5V$

$$V(t) = 5 - 3e^{-\frac{t}{10 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}} = \underline{5 - 3e^{-t}}$$

4 FØRSTEORDENS LINEÆRE DIFFLIKNINGER

Definisjon

> En FØRSTE ORDENS LINEÆR DIFFLIKNING er på formen
>
> $$y' + p(t) \cdot y = q(t) \quad (*)$$
>
> $p(t), q(t)$ gitte funksjoner

Løsningsmetode

1. Finne antiderivert $P(t)$ og regn ut INTEGRERENDE FAKTOR (IF): $e^{P(t)}$

   $\int p(t)\,dt$ "

2. $(*) \cdot$ IF:

$$(y' + p(t)y)e^{P(t)} = q(t)e^{P(t)}$$

$$\Rightarrow y'e^{P(t)} + p(t)e^{P(t)}y = q(t)e^{P(t)}$$

3. PR: $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

$v = e^{P(t)}$ $\qquad u = y$

$v' = p(t)e^{P(t)}$ $\qquad u' = y'$

④ $\int \frac{d}{dt}\left(y(t)e^{P(t)}\right)dt = \int q(t)\cdot e^{P(t)}\,dt$

$\Downarrow$ AFT (analysens fundamentalteorem)

$y(t)e^{P(t)} = \int q(t)e^{P(t)}\,dt + C \quad \Big| \cdot e^{-P(t)}$

⑤ $$\boxed{y(t) = e^{-P(t)}\left(\int q(t)e^{P(t)}\,dt + C\right)}$$

Ex: Eksamen 2019 TMA4100

Løs

$y(t) = (t+1)(y'(t) - t)$ IVB: $y(0) = 4$

Anta $t > -1$

<u>Løsning:</u>

$y = (t+1)(y'-t)$ Regn selv

$y = y'(t+1) - t(t+1)$

$y' \underbrace{- \frac{1}{t+1}}_{p(t)} y = \underbrace{t}_{q(t)}$ lin. 1. ordens diff.likning

① $P(t) = ?$ $P'(t) = p(t) \rightarrow P(t) = \int p(t)\,dt$

$= \int -\frac{1}{t+1}\,dt = -\ln|t+1|$

$t > -1 \Rightarrow P(t) = -\ln(t+1)$

Bruk formel ⑤

Gjør stegene 1-5 da!