Reelle og komplekse vektorrom

Vektorrom

Vi skal bygge vår forståelse av begrepet **vektorrom** på det vi vet om $\mathbb{R}^n$ og om operasjoner med vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Vi tenker på $\mathbb{R}^n$ som mengde av alle vektorer med n reelle komponenter

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad v_j \in \mathbb{R}, \; j = 1, \ldots, n$$

Vi har lært at vi kan utføre visse operasjoner med vektorer i $\mathbb{R}^n$: addisjon av vektorer og multiplikasjon av vektorer med en skalar (= et reelt tall).

Vi vil overføre dette fra $\mathbb{R}^n$ til en abstrakt mengde V.

Definisjon av reell vektorrom

Et reell vektorrom er en mengde V med to operasjoner:
- vektoraddisjon
- multiplikasjon av en vektor med en skalar i $\mathbb{R}$

som oppfyller 10 regneregler (aksiomer).

Definisjon 1 - Reelle vektorrom

Et **reelt vektorrom** er en mengde V av objekter som kalles **vektorer**. På V skal det være definert to regneoperasjoner, nemlig **vektoraddisjon** og **skalarmultiplikasjon**. Disse to operasjonene skal oppfylle følgende 10 aksiomer for alle vektorer $v, u, w \in V$ og alle skalarer $r, s \in \mathbb{R}$:

A1 $u + v \in V$
A2 $ru \in V$
A3 Det fins en **nullvektor**
A4 For hver $u \in V$ fins en vektor $-u \in V$ slik at $-u \in V$
A5 Kommutativ lov: $u + v = v + u$
A6 Assosiativ lov: $(u+v)+w = u+(v+w)$
A7 Assosiativ lov: $r(su) = (rs)u$
A8 Distributiv lov: $r(u+v) = ru + rv$
A9 Distributiv lov: $(r+s)u = ru + su$
A10 Multiplikasjon med 1: $1u = u$

Teorem 1 - Egenskaper ved vektorrom

La V være et vektorrom. Da gjelder følgende:

(1) Den eneste vektoren $x \in V$ som oppfyller $v + x = v$ for alle $v \in V$, er vektoren $x = 0$

(2) Hvis $v \in V$ er gitt, så har ligningen $x + v = 0$ den unike løsningen $x = -v$ i vektorrommet V

(3) Hvis u, v og w er vektorer i V slik at $u + v = u + w$, så er $v = w$

(4) For alle vektorer $v \in V$ gjelder at $0v = 0$

(5) For alle skalarer $r \in \mathbb{R}$ gjelder at $r0 = 0$

(6) For alle $r \in \mathbb{R}$ og $v \in V$ gjelder at $(-r)v = r(-v) = -(rv)$

Definisjon - Lineærkombinasjon

Det er gitt k vektorer

$$v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$$

i et reelt vektorrom V. Vi sier at $x \in V$ er en **lineærkombinasjon** av $v_1, \ldots, v_k$ hvis det finnes skalare

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$$

slik at

$$x = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_k v_k$$

Definisjon - Lineær avhengighet og uavhengighet

Vi sier at k vektorer

$$v_1, v_2, \ldots, v_k$$

i vektorrommet V er **lineær avhengige** hvis det finnes skalarer

$$b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$$

og minst en av b-ene er ulik null, slik at

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_k v_k = 0$$

Hvis $v_1, \ldots, v_k$ ikke er lineær avhengige, sier vi de er **lineær uavhengige**

Definisjon - Spennet

La $S \subseteq V$ være en undermengde av V

$$\mathrm{Span}(S) \subseteq V$$

er mengden av alle lineære kombinasjoner av vektorer i S:

$$\mathrm{Span}(S) := \{x = r_1 v_1 + \ldots + r_c v_c \mid v_1, \ldots, v_c \in S, \quad r_1, \ldots, r_c \in \mathbb{R}\}$$

Vi sier at en undermengde $G \subseteq V$ er **lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon** hvis og bare hvis vi for alle $u, v \in G$ og $r \in \mathbb{R}$ har

$$u + v \in G, \quad ru \in G$$

Teorem 2 - Spennet er lukket

La V være et vektorrom, la $S \subseteq V$, og la $U = \mathrm{Span}\, S$. Hvis da $a, b \in U$ og $r \in \mathbb{R}$, så er også $a + b \in U$ og $ra \in U$.

Komplekse vektorrom

Vi kan definere rommet av vektorer med n komponenter, der hver komponent er et kompleks tall. Da har vi:

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n, \quad w_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \ldots, n$$

- For $\mathbb{R}^n$ er de skalare reelle tall, $r \in \mathbb{R}$
- For $\mathbb{C}^n$ er de skalare komplekse tall, $\alpha \in \mathbb{C}$

Definisjon av kompleks vektorrom

Et komplekst vektorrom er en mengde V med to operasjoner:
- Vektoraddisjon
- multiplikasjon av en vektor med en skaler i $\mathbb{C}$

som oppfyller 10 regneregler (aksiomer).

Definisjon 1 - Komplekse

Et **komplekst vektorrom** er en mengde V av objekter som kalles **vektorer**. På V skal det være definert to regneoperasjoner, nemlig **vektoraddisjon** og **skalarmultiplikasjon**. Disse to operasjonene skal oppfylle følgende 10 aksiomer for alle vektorer $v, u, w \in V$ og alle skalarer $r, s \in \mathbb{C}$:

A1 $u + v \in V$
A2 $ru \in V$
A3 Det fins en **nullvektor**
A4 For hver $u \in V$ fins en vektor $-u \in V$ slik at $-u \in V$
A5 Kommutativ lov: $u + v = v + u$
A6 Assosiativ lov: $(u+v)+w = u+(v+w)$
A7 Assosiativ lov: $r(su) = (rs)u$
A8 Distributiv lov: $r(u+v) = ru + rv$
A9 Distributiv lov: $(r+s)u = ru + su$
A10 Multiplikasjon med 1: $1u = u$

Definisjon - Lineær avhengighet og uavhengighet

Vi sier at k vektorer

$$w_1, w_2, \ldots, w_k$$

i vektorrommet W er **lineær avhengige** hvis det finnes skalarer

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \mathbb{C}$$

og minst en av β-ene er ulik null, slik at

$$\beta_1 w_1, \beta_2 w_2, \ldots, \beta_k w_k = 0$$

Hvis $w_1, \ldots, w_k$ ikke er lineær avhengige, sier vi de er **lineær uavhengige**.

Teorem 5 - Ulike egenverdier gir lineært uavhengige egenvektorer

La M være en $(n \times n)$-matrise, la $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ være k ulike egenverdier for M, og la $v_1, \ldots, v_k$ være egenvektorer til hver av de k egenverdiene. Da er disse egenvektorene lineært uavhengige.

Underrom, basis og dimensjon

Definsjon av underrom

Et underrom U av et vektorrom V er en delmengde $U \subseteq V$ som selv er et vektorrom.

Dette betyr:
- $U \subseteq V$
- $u \in U, v \in U$, da $u+v \in U$
- r skalar, $u \in U$, da $ru \in U$

Og addisjon og skalarmultiplikasjon i U oppfyller de 10 aksiomene for vektorrom.

Proposisjon

La V være et vektorrom. $U \subseteq V$ (ikke-tom delmengde) er et underrom av V hvis og bare hvis

$$u \in U, v \in U \Rightarrow \alpha u + \beta v \in U, \quad \forall \alpha, \beta \text{ skalarer}$$

Teorem 6 - Egenskaper ved underrom

En delmengde U av et vektorrom V er et underrom av V hvis og bare hvis $0 \in U$ og U er lukket under de to vektorromsoperasjonene i V, dvs. hvis vi for alle $u, v \in U$ og alle $r \in \mathbb{R}$ har at $u+v \in U$ og $ru \in U$.

Underrom forbundet med matriser

Det er gitt en $m \times n$ reell (kompleks) matrise

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Kolonnerom (søylerom) er underrommet av $\mathbb{R}^m$ ($\mathbb{C}^m$)

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Range}(A) := \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right\}$$

- Radrommet er underrommet av $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)

$$\mathrm{Rad}(A) := \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right\}$$

- Nullrommet av A, $\ker(A) := \{ v \in \mathbb{R}^n \mid Av = 0 \}$, er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

Definisjon av basis

La V være et vektorrom. En **basis** av V er en mengde $S \subset V$ slik at
- $\text{Span}(S) = V$
- S er lineær uavhengig

Teorem 3 - Unikhet av basiskoeffisienter

La V være et vektorrom, og la $\mathcal{B}$ være en basis for V. Anta at vektoren $v \in V$ kan skrives

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k \quad \text{og} \quad v = b_1 v_1 + \ldots + b_k v_k$$

der vektorene $v_1, \ldots, v_k$ ligger i $\mathcal{B}$ og er de samme i begge uttrykkene. Da er $a_i = b_i$ for alle $1 \leq i \leq k$.

Teorem 4

La V være et vektorrom og $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ være en basis med k vektorer (med k positiv heltall). Da har alle basiser av V nøyaktig k vektorer.

Dimensjon

- For et vektorrom med basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ der k er et positivt heltall kalles k **dimensjonen** til V.
- Hvis basis $\mathcal{B}$ til V består av uendelig mange vektorer, da sier vi at V er uendeligdimensjonalt.
- Hvis $V = \{0\}$ (V består bare av nullvektoren) da er $\dim(V) = 0$.

Teorem 5 - Utvidelse til basis

Hvis S er en lineært uavhengig samling vektorer i et endeligdimensjonalt vektorrom V, så fins en basis for V der alle vektorene fra S er med.

Teorem 7 - Underrom arver endelig dimensjon

Hvis V er et vektorrom av endelig dimensjon r og $U \subseteq V$ et underrom, så er U også endeligdimensjonalt, og $\dim U \leq r$.

Teorem 3 - Underrom inneholdt i et annet underrom av samme dimensjon

Anta at U og V er to underrom av $\mathbb{R}^n$ med samme dimensjonen k. Hvis da $U \subseteq V$, så er $U = V$.

Definisjon 2 - Karakteristisk polynom

Med **det karakteristiske polynomet** $p(\lambda)$ til en $(n \times n)$-matrise M med elementer a_{ij} menes determinantuttrykket

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$