Teoriforelesning 5
FØLGER I

Følger

- Følger av tall: $f(n) = a_n$
- Følger av vektorer
- Egenskaper en følge av reelle tall kan ha
  - Begrenset/ubegrenset
  - Voksende/avtakende
  - Konvergent/divergent

Eksempler

1) $a_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

$1 \geq a_n > 0$

Begrenset
Avtagende

2) $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$

$1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

$0 < a_n < 1$
Begrenset

$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0$

Voksende

3) $a_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \dots$

$-1, 1, -1, 1, -1, \dots$

$-1 \leq a_n \leq 1$
Begrenset

Verken voksende
eller avtagende

Ikke monotom

4) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$

$-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

$-1 < a_n < 1$
Begrenset

$|a_n| < 1$
Verken voksende
eller avtagende

5) $a_n = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$

$2, 4, 8, 16, \dots$
Voksende
Begrenset
nedover

6) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$, $n = 1, 2, \dots$

$-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \dots$

$|a_n| = \frac{n}{n^2+1}$ $\qquad \frac{1}{2} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2+1-2n}{2(n^2+1)} = \frac{(n-1)^2}{2(n^2+1)} > 0$

$0 < |a_n| \leq \frac{1}{2}$ $\qquad \underbrace{-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}}$ Begrenset

Ikke monotom

Begrepene sup og inf til en mengde M

sup M: Minste øvre skranke for M
inf M: Største nedre skranke for M

Teorem

Hvis M er begrenset delmengde av $\mathbb{R}$
så har M både en minste og øvre skranke
og en største nedre skranke.

Dvs både $\sup M$ og $\inf M$ eksisterer.
Dette kaller vi at $\mathbb{R}$ er **komplett**

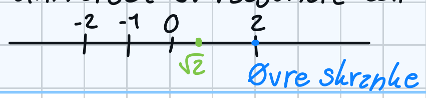
Eksempel 1

$M_1 = (0,1)$ $\quad \sup M_1 = 1 \notin M_1$
$\inf M_1 = 0 \notin M_1$

$M_2 = (-\infty, 1)$ $\quad \sup M_2 = 1$

Eksempel 2

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$
Ingen minste øvre skranke innenfor universet av rasjonale tall



Konvergere

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ betyr for

ethvert tall $\varepsilon > 0$ finnes en N slik at når $n > N$ så er
$$0 < |a_n - L| < \varepsilon$$

Eksempler

1) $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad L = 0$ $\quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ $\quad \varepsilon = \frac{1}{10}$, $N = 10$ $\quad \varepsilon = \frac{1}{100}$, $N = 100$

2) $a_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad L = 1$

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$\varepsilon = \frac{1}{10}$ $\quad \varepsilon = \frac{1}{100}$
$N = 9$ $\quad N = 99$

6) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

$|a_n| = \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{10}$

$10n < n^2 + 1$
$n^2 - 10n + 1 > 0$
$N = 10$

Teorem $a_n \in \mathbb{R}$

Dersom $\{a_n\}$ er monotont voksende (avtagende) og begrenset oppover (nedover) så er $\{a_n\}$ konvergent

Bevis

$\mathbb{R} \supset M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Anta $a_{n+1} \geq a_n$ (voksende).

Sett $L = \sup M$ vil vise $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Temaforelesing 5
FØLGER I

Nøkkelbegrep:
- Kompletthetsegenskapen for reelle tall
- Følger
- Grenseverdier
- Konvergens og divergens av følger
- Minste øvre skranke og største minste skranke (supremum og infimum)
- Fikspunktiterasjon

KOMPLETTHETSEGENSKAPEN, FIKSPUNKTITERASJONER OG $\sqrt{2}$

Husk: Som følge av kompletthetsegenskapen til $\mathbb{R}$:

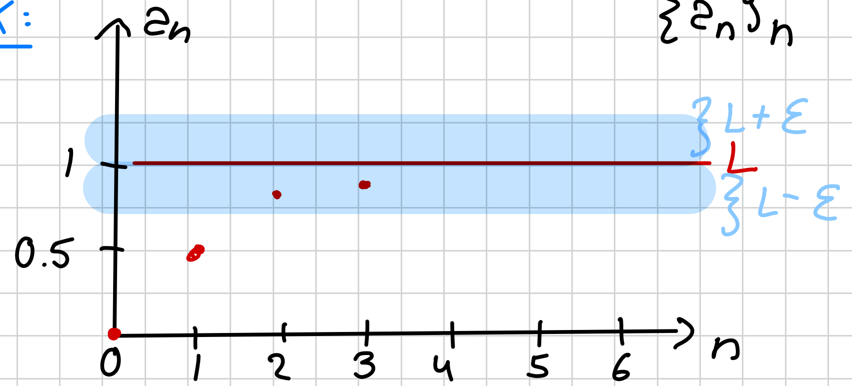
En følge $\{a_n\}_n$ av reelle tall som er avtagende $(a_{n+1} \leq a_n)$ og nedad begrenset $(a_n \geq M \; \forall n)$ vil alltid konvergere.

Definisjon

En følge $\{a_n\}$ KONVERGERER mot tallet L, vi skriver $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, dersom det

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \text{ s.a. } n > A \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Ex: $\{a_n\}_n \quad a_n = \frac{n}{n+1}$



$n \geq 3 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

$\sqrt{2} = ?$

Definisjon

$\sqrt{2}$ er en positiv løsning til ligningen $x^2 - 2 = 0$

Vet: AFT $\Rightarrow x^2 - 2 = 0$ har en løsning

TEOREM

$x^2 - 2 = 0$ har ingen løsning i $\mathbb{Q}$

Bevis:

Ide: Motsigelsesbevis

Anta: $x_0 \in \mathbb{Q}$, $x_0 = \frac{p}{q}$ $p, q \in \mathbb{N}$ og $q \neq 0$

x_0 tilfredsstiller $x_0^2 - 2 = 0$ (*)

2 muligheter:

① p, q HAR felles faktor

② p, q har INGEN felles faktor

$\boxed{\text{Vi kan anta at } p, q \text{ IKKE har noen felles faktor. Hvorfor?}}$

$p = p'r \quad q = q'r \quad r \neq 0$

$\frac{p}{q} = \frac{p'\cancel{r}}{q'\cancel{r}} = \frac{p'}{q'}$

Sette inn for $x_0 = \frac{p}{q}$ i (*):

$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2 = 0 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} - 2 = 0 \quad | \cdot p^2 \rightarrow p^2 - 2q^2 = 0$

$\Rightarrow p^2 = 2q^2$

p er et partall. Hvorfor?

oddetall^2 = oddetall

(lemma)

$\Rightarrow p^2$ (partall) kan deles på $2^2 = 4$

$\Rightarrow q^2 = \frac{p^2}{2}$ er et partall

$\Rightarrow$ q er et partall

Altså både p og q er partall $\Rightarrow$ p og q har 2 felles faktor ↯ Motsigelse

$\Rightarrow$ Påstand er feil $\Rightarrow x^2 - 2 = 0$ har IKKE en rasjonal løsning $\square$
$\left(x_0 = \frac{p}{q}\right)$

REPETISJON

Egenskaper ved $\mathbb{R}$

① $\forall a,b \in \mathbb{R}$ er $a+b=b+a$ og $ab=ba$ (kommutativitet)

② $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$ er $a+(b+c)=(a+b)+c$ og $a(bc)=(ab)c$ } (assosiativitet)

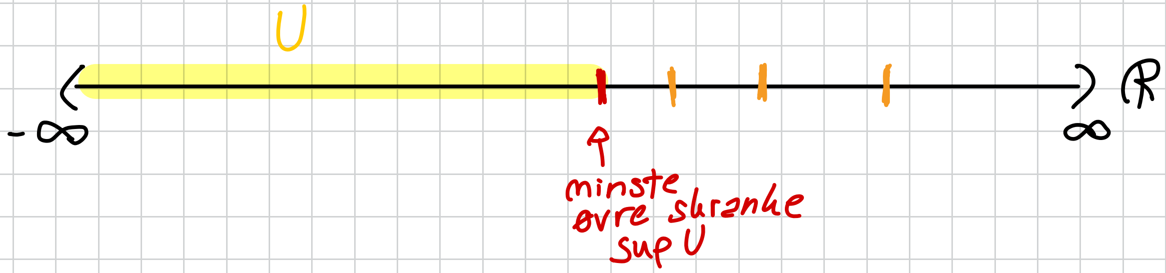
⋮

(egenskapen)

⑪ Kompletthetsprinsippet: Hvis U er en ikke-tom oppad begrenset mengde av $\mathbb{R}$ så eksisterer $\sup U$

har en øvre skranke

minste øvre skranke



$U \neq \emptyset$ nedre skranke $\Rightarrow \inf U$
$\cap$
$\mathbb{R}$

Uformelt: "Den reelle tallinja har ingen hull"

$\mathbb{Q}$ derimot har det, eks: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

En (REELL) følge er en uendelig lang liste av tall

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$

Formelt: En FØLGE er en funksjon $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, der vi sier

$$f(n) = a_n$$ ← Det n-te leddet i følgen

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

Ex:

$\{a_n\}_n \qquad a_n = \dfrac{n}{n+1}$

$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

LEMMA

> Hvis p^2 er et partall, så er også p et partall

<u>Bevis:</u>

Ide: Kontrapositivt bevis

A: p^2 er et partall
B: p er et partall

Ønsker å vise: $A \Rightarrow B$
Viser: $\neg B \Rightarrow \neg A$

"ikke"

$\underbrace{p \text{ IKKE partall}}_{\text{oddetall}}$ $\qquad$ p^2 $\underbrace{\text{IKKE partall}}_{\text{oddetall}}$

Partall: $n = 2k, \quad k \in \mathbb{Z}$
oddetall: $n = 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}$

Anta: $p = 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}$ $\qquad$ Vil <u>vise $p^2 = 2m+1, m \in \mathbb{Z}$</u>

Se på $p^2 = (2k+1)^2$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 4(k^2+k) + 1$$

$$= 2 \cdot \underbrace{2(k^2+k)}_{m \in \mathbb{Z}} + 1$$

$\Rightarrow p^2 = 2 \cdot m + 1 \qquad m = 2(k^2+k) \in \mathbb{Z}$

p^2 oddetall $\qquad \square$

TEOREM

> $x^2 - 2 = 0$ har en positiv løsning i $\mathbb{R}$

Bevis:

2 muligheter:

① $x = 0$

② $x \neq 0$

① $x = 0$: $0^2 - 2 = 0$ ↯ Motsigelse $x = 0$ umulig

② $x \neq 0$:

$$x^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{x}$$

$$2x \underbrace{-2x + x} = \frac{2}{x}$$

$$2x - x = \frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

$\Rightarrow$ Løsningene til $x^2 - 2 = 0$ er lik fikspunktene til funksjonen $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

samme løsning $\begin{cases} x - 2 = 0 \\ f(x_0) = x_0 \end{cases}$

Definisjon

> En funksjon $f(x)$ har x_0 som et FIKSPUNKT hvis $f(x_0) = x_0$

FIKSPUNKTITERASJON

Vi velger $a_0 \in \mathbb{R}$ og danner en følge $\{a_n\}_n$:

$a_1 = f(a_0)$, $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$, ... $a_{n+1} = f(a_n)$, ...

Under visse betingelser vil følgen konvergere mot et av fikspunktene til f.

Se på jupyter

PÅSTAND

For $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$, om $a_0^2 \geq 2$, så er

① $a_n^2 \geq 2$ — begrenset

② $a_{n+1} \leq a_n$ — avtagende

Bevis:

Se på $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

Anta: $a_0^2 \geq 2$

Vil vise: ① $a_n^2 \geq 2$

② $a_{n+1} \leq a_n$

① Ide: Induksjonsbevis

i) Basistilfellet: $\boxed{n=0}$ $P: a_n^2 \geq 2$

$a_0^2 \geq 2$ (følger av antagelse)

ii) Induksjonssteget

Anta: P holder for n, a_n

Vil vise: P holder for $n+1$, a_{n+1} $\boxed{a_{n+1}^2 \geq 2}$

Se på $a_{n+1}^2 = (f(a_n))^2 = \left(\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2\cancel{a_n} \cdot \frac{2}{\cancel{a_n}} + \left(\frac{2}{a_n}\right)^2\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(\underbrace{a_n^2}_{a} + 4 + \underbrace{\left(\frac{2}{a_n}\right)^2}_{b}\right)$$

2□-setning

$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

$$= \frac{1}{4}(a^2+b^2+4) \geq \frac{1}{4}(2ab+4) = \frac{1}{4}\left(2\cancel{a_n}\cdot\frac{2}{\cancel{a_n}}+4\right)$$

$$= \frac{1}{4}(4+4) = \underline{2}$$

$$\boxed{a_{n+1}^2 \geq 2}$$

② $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

<u>Anta:</u> $a_0^2 \geq 2$

<u>Vil vise:</u> $a_{n+1} \leq a_n$

Vi viser: $a_{n+1}^2 \leq a_n^2$

Se på $a_n^2 \geq 2$ (fra ①)

$2a_n^2 \geq 2\cdot 2$ OG $(a_n^2)^2 \geq 2^2$

$\boxed{2a_n^2 \geq 4}$

$$\frac{a_n^4}{a_n^2} \geq \frac{4}{a_n^2}$$

$$\boxed{a_n^2 \geq \frac{4}{a_n^2}}$$

Se på $a_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(a_n^2 + \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\leq$} \\ 2a_n^2}}{4} + \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\leq$} \\ a_n^2}}{\frac{4}{a_n^2}}\right)$

$$\leq \frac{1}{4}(a_n^2 + 2a_n^2 + a_n^2) = \underline{a_n^2}$$

$\Rightarrow \underline{a_{n+1}^2 \leq a_n}$ □

KOMPLETTHETSEGENSKAPEN $\{a_n\}_n$ konvergere

til et positivt tall x_0. x_0 fikspunkt av $f(x)$

$$x_0 = \lim a_{n+1} = \lim f(a_n) = \lim\left(\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim a_n + \frac{2}{\lim a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right)$$

Dermed er $x_0^2 - 2 = 0$ og $x_0 = \sqrt{2}$