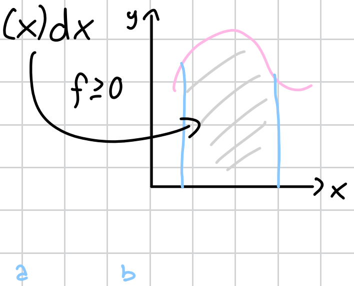
Teoriforelesning 12
INTEGRASJON I

Nøkkelbegreper

- Det bestemte integralet
- Egenskaper ved integralet
- Middelverditeoremet for integraler
- Arealet mellom to kurver
- Analysens fundamentalteorem
- Numerisk integrasjon

Det bestemte integralet I

$\int_a^b f(x)dx$



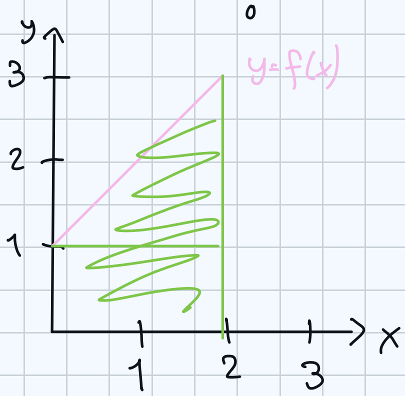
En begrenset funksjon f er integrerbar på $[a,b]$, og vi skriver

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

hvis:
For enhver $\varepsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ slik at hvis R er en Riemannsum for f med maksevidde mindre enn δ, så er $|R - I| < \varepsilon$.

Eksempel

$f(x) = x + 1$ $\qquad \int_0^2 f(x)dx = 2\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot 2 = 4$



Det bestemte integralet II

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} R(f,P)$$

Del $[a,b]$ opp i n deler $[x_{i-1}, x_i]$,
der $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Vi sier at $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ er en partisjon av $[a,b]$.

Delintervallet $[x_{i-1}, x_i]$ har bredde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

x_i^* = et vilkårlig punkt i

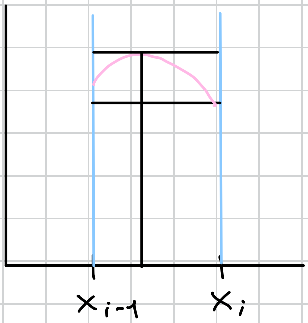
Riemannssummen til f gitt partisjonen $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ er

$R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x_i$

$= f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \dots f(x_n^*)\Delta x_n$

Maskevidden av P er $\|P\| = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$, dvs maksimal intervallbredde

Dvs: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_1 f(x_i^*)\Delta x_i$, gitt at denne grenseverdien eksisterer (for alle P).



Øvre Riemannssum $U(f,P)$
Nedre Riemannssum $L(f,P)$ slik at

$L(f,P) \le R(f,P) \le U(f,P)$

Det bestemte integralet III

La $L(f,P)$ være en nedre Riemannsum og $U(f,P)$ en øvre Riemannsum for partisjonen P. Hvis det finnes nøyaktig ett tall I slik at

$$L(f,P) \le I \le U(f,P)$$

for alle partisjoner P, så er f integrerbar på $[a,b]$ og

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

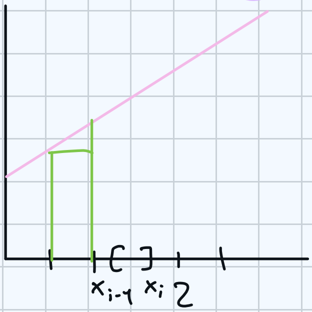
Eks fortsettelse

$f(x) = x+1$, $[0,2]$

$P = \{x_1, x_2, x_3, \dots x_{n-1}, x_n\}$

$\Delta x_i = \frac{2}{n} \left(= \frac{b-a}{n}\right)$

$x_i = x_{i-1} + \frac{2}{n} = \frac{2i}{n}$



$1+2+3+4+\dots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Vi ser at ved å velge $x_i^* = x_i$ får vi

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}+1\right)$$

$$= \left(\frac{2}{n}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) \frac{2}{n} n = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + 2 \quad (*)$$

$$= \frac{4^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 2$$

$$= \frac{2}{n}(n+1) + 2 = \underline{4 + \frac{2}{n}}$$

Vi ser at ved å velge $x_i^* = x_{i-1}$ får vi

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2}{n}(i-1)\right)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n}(i-1)+1\right)$$

$$= \dots = 4 - \frac{2}{n}$$

$$4 - \frac{2}{n} \le A \le U(f,P) = 4 + \frac{2}{n}$$

$$\overset{n \to \infty}{\Longrightarrow} A = 4 = \int_0^2 f(x)\,dx$$

Merk

$\int f(x)dx$ er en <u>funksjon</u>

$\int_a^b f(x)dx$ er et <u>tall</u>

Analysens fundamentalteorem

Anta at $f(x)$ er kontinuerlig for alle $x \in I$, og at $a \in I$.

1. Da er
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \text{ for alle } x \in I.$$

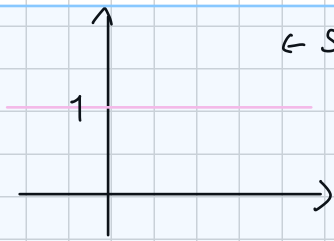
2. Dersom F er antiderivert til f, så er
$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Teorem

> Hvis f er kontinuerlig på $[a,b]$, så er f integrerbar på $[a,b]$.

Eksempel

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{hvis } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$



← Skisse

er <u>ikke</u> integrerbar på noe intervall,

f.eks $[0,1]$: $\left.\begin{array}{l} L(f,P) = 0 \\ U(f,P) = 1 \end{array}\right\}$ for enhver partisjon P, så vi kan umulig ha en I slik at

$$L(f,P) \leq I \leq U(f,P).$$

Eksempel

Bestem grenseverdien

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + i\frac{1}{n}\right)^5 \frac{1}{n}$$

Dette kan tolkes som en Riemannsum:

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x_i$$

Hva er: $f = x^5$

$\Delta x_i = \frac{1}{n}$

$x_i^* = x_i = 1 + \frac{i}{n}$

$$P = \{\underset{1}{\underset{\shortparallel}{x_0}}, x_1, x_2, \ldots, \underset{2}{\underset{\shortparallel}{x_n}}\}$$

Dvs:

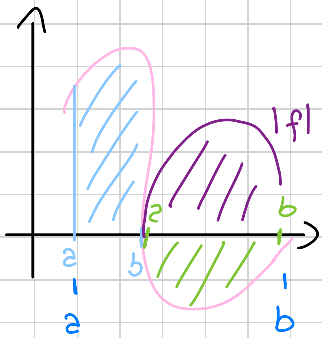
$$S = \int_1^2 x^5 \, dx \quad = \int_0^1 (x+1)^5 \, dx$$

Alt: $f(x) = (x+1)^5$ $[0,1]$

$$= \left[\frac{1}{6}x^6\right]_1^2 = \frac{1}{6}(2^6 - 1)$$

$$= \underline{\frac{21}{2}}$$

Egenskaper



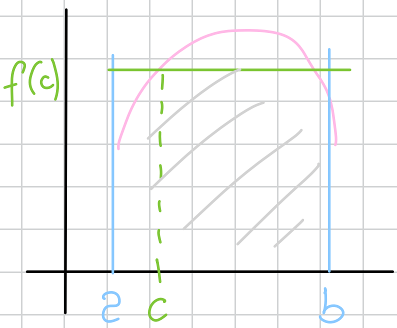
- $f \geq 0$: $\int_a^b f(x)dx$ = areal mellom grafen til f og x-aksen
- $f \leq 0$: $-\int_a^b f(x)dx$ = areal mellom grafen til f og x-aksen
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
- For $a \leq b \leq c$ så er $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

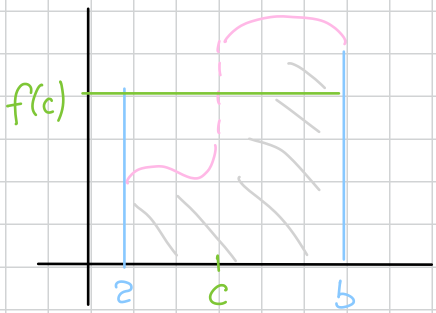
MVS for integraler

Teorem

Hvis f er kontinuerlig på $[a,b]$ så finnes et tall c mellom a og b slik at

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

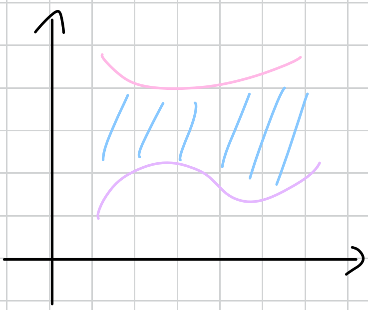




Areal mellom grafer

Hvis f og g er integrerbare og $f \geq g$, sa er arealet mellom grafene til f og g gitt ved

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$



Temaforelesning 12
INTEGRASJON

Innhold
- Analysens fundamentalteorem
- Numerisk integrasjon

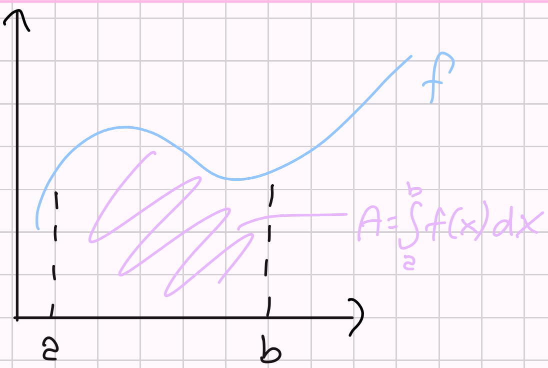
1. REPETISJON

DEFINISJON

f begrenset på $[a,b] \subseteq D_f$. DET BESTEMTE INTEGRALET av f på $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Tolkning:



$\int_a^b f(x)\,dx$ definert som grensen av Riemannsum med stadig finere partisjoner

I praksis: $\int_a^b f(x)\,dx \overset{*}{=} F(b) - F(a)$

antiderivert
$F'(x) = f(x)$

MÅL: Rettferdiggjøre (*)

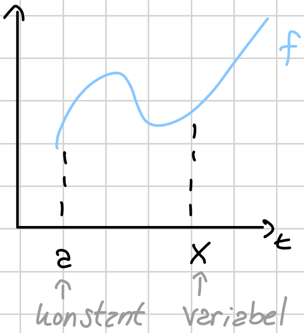
SPØRSMÅL:

1) Hvordan finne $\int_a^b x^5\,dx$ uten å regne ut en grense?
$= \frac{1}{6}(b^6 - a^6)$

2) Hvis vi tenker på $\int_a^x f(t)\,dt$ som en funksjon av x, hva er den deriverte?

2. ANALYSENS FUNDAMENTALTEOREM (AFT)

2) La $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$



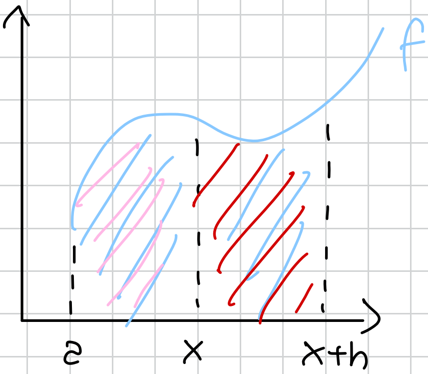
Vi har

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^{x} f(t)\,dt\right)$$

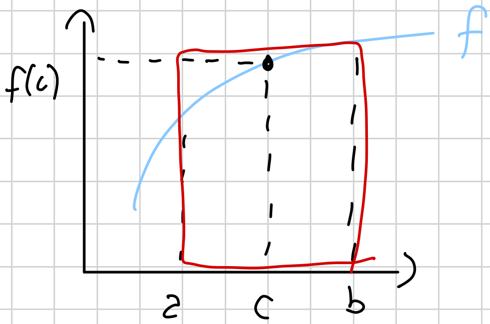
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$$\int_a^{x+h}-\int_a^{x}=\int_x^{x+h}$$



MIDDELVERDISETNINGEN (MVS) for integraler

$\boxed{\text{f kontinuerlig på } [a,b]. \text{ Da } \exists c\in[a,b] \text{ s.a. } \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)}$



MVS:
$b=x+h$
$a=x$

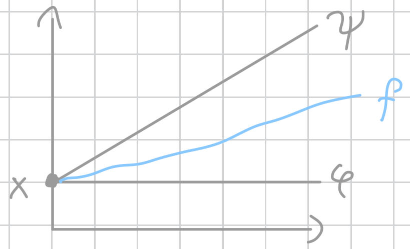
$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cancel{h}}\left(f(c)(\cancel{x}+\cancel{h}-\cancel{x})\right)$$

$$=\lim_{h\to 0} f(c)$$

"Ksi"
$\psi(h) = x + h$

"Fi"
$\varphi(h) = x$

$c(h)$



MVS

$$x \leq c(h) \leq x + h$$

$$\rightarrow \lim_{h \to 0} f(c) = f\left(\lim_{h \to 0} c(h)\right) = \underline{f(x)}$$

f kontinuerlig

"Skviseargumentet": $\lim_{h \to 0} c(h) = x$

Konklusjon: $F'(x) = f(x)$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)}$$

1. Del av AFT

M.a.o. Integrasjon og derivasjon er MOTSATTE PROSESSER

1) $\int_a^b x^5\,dx$

La $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ $\quad F'(x) = f(x)$

og la $G(x)$ være en vilkårlig antiderivert av f
dvs. $G'(x) = f(x)$

7.1

$$G(x) = F(x) + C \qquad C \text{ konstant}$$

i) $x = a$: $G(a) = F(a) + C = \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{= 0 \text{ per def}} + C \Rightarrow \underline{G(a) = C}$

ii) $x = b$: $G(b) = F(b) + C = \int_a^b f(t)\,dt + G(a)$

$$\boxed{\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)}$$

2. del av AFT

ANALYSENS FUNDAMENTALTEOREM (AFT)

Anta $f(x)$ kontinuerlig $\forall x \in I$, og at $a \in I$.

① Da er
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \quad \forall x \in I$$

② Dersom F er en antiderivert til f, så er
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Ex: $F(x) = \int_1^x \underbrace{e^{-t^2}}_{f(t)}\,dt$, $\frac{d}{dx}F(x) = ?$

Nedre grense irrelevant $\int_0^x$ samme

AFT ①: $\frac{d}{dx}F(x) = f(x) = \underline{e^{-x^2}}$

Ex: $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$, $F'(x) = ?$

$G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \rightarrow F(x) = G(x^2) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$

$G'(x) = e^{-x^2}$

KJERNEREGELEN

$F(x) = G(h(x))$

$\rightarrow F'(x) = \left(G(h(x))\right)' = G'(h(x)) \cdot h'(x)$

$$F'(x) = \left(G(x^2)\right)' = G'(x^2)\,2x$$
$$= e^{-(x^2)^2}\,2x = \underline{\underline{2xe^{-x^4}}}$$

Generelt: $\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x)$

Ex: $\frac{d}{dx}F(x) = \int_{2x}^{x^2} e^{-t^2}\,dt = e^{-(x^2)^2}\,2x - e^{-(2x)^2}\,2$

$$= \underline{\underline{2xe^{-x^4} - 2e^{-4x^2}}}$$

3 NUMERISK INTEGRASJON

AFT gir en måte å finne $\int_a^b f(t)dt$ hvis f har en eksplisitt antiderivert.

Hvis ikke, tilnærme $I = \int_a^b f(t)dt$ numerisk

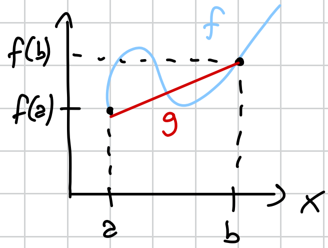
$$f(x) \approx g(x)$$

$$\int_a^b f(t)dt \overset{?}{\approx} \int_a^b g(t)dt$$

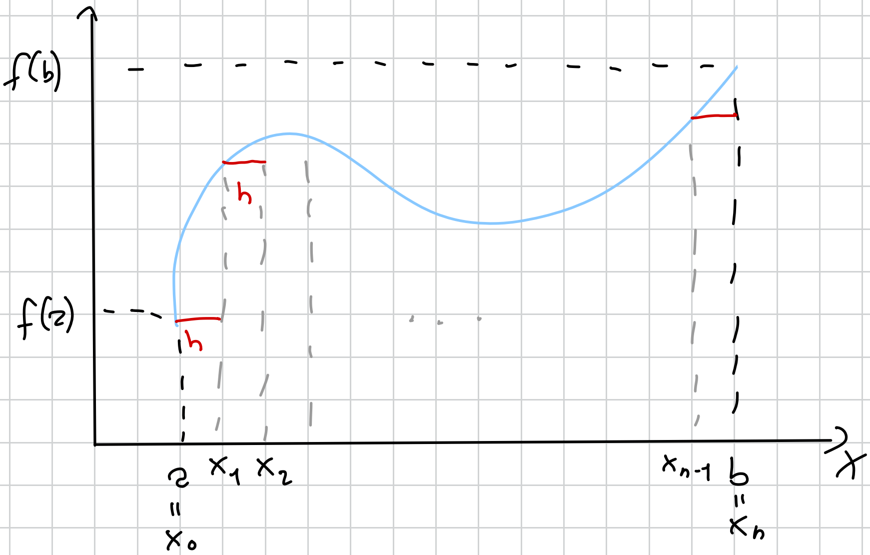
Taylors teorem: $f(x) = \underbrace{T_n(x)}_{\text{Taylorpol.}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Feil}}$, $c \in [a, x]$ (om a)

La $g(x) = f(a)\frac{b-x}{b-a} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$

- Lineær
- $g(a) = f(a)$
- $g(b) = f(b)$



$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b g(x)dx = \ldots = \frac{b-a}{2}\left(f(b) + f(a)\right)$$



$x_0 = a$
$x_n = b$

$h = \frac{x_n - x_0}{n}$ nodene

$x_{i+1} = x_i + h$

$i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$$\sum(\text{rektanglene}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)h \quad \text{Riemannsum}$$

$$= h\left(f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(b-h)\right)$$

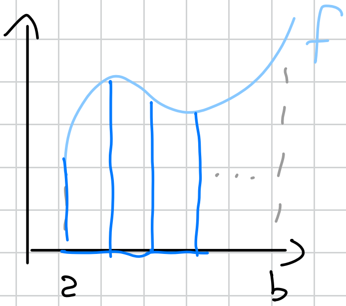
TEOREM: Feilestimat for rektangelmetoden

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ og anta $|f'(x)|\le K$ for $x\in[a,b]$.
Da er

$$E_n = \Big|\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{eksakt løsning}} - \underbrace{R_n}_{\text{rektangel-metoden}}\Big| \le \frac{K(b-a)^2}{2n}$$

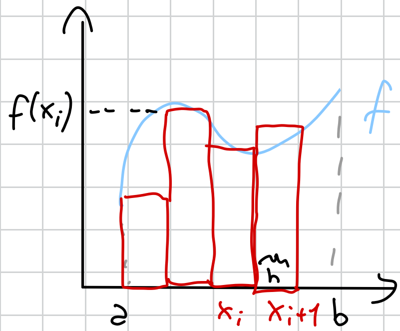
Bevis

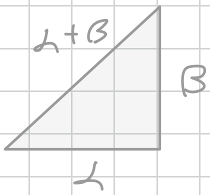
$$E_n = \Big|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)h\Big|$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$f(x_i)h = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)\,dx$$





$$\Rightarrow E_n = \Big|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(f(x)-f(x_i)\big)\,dx\Big|$$

Δ-ulikheten

$$\le \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)-f(x_i)|\,dx \quad (*)$$

Taylors teorem: $f(x) = f(x_i) + f'(c)(x-x_i)$ $\quad c\in[x_i,x]$

$$|f(x)-f(x_i)| = |\overbrace{f'(c)}^{a}\overbrace{(x-x_i)}^{b}|$$

$$= \underbrace{|f'(c)|}_{\le K}\cdot|x-x_i|$$

$$\le K|x-x_i|$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)-f(x_i)|\,dx \le \sum_{i=0}^{n-1} K\int_{x_i}^{x_{i+1}} |x-x_i|\,dx$$

$[x_i, x_{i+1}]$ $\qquad x\ge x_i$ ← Se vekk fra abs

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)\,dx$$

$u = x-x_i$
$u' = 1$

$$\int_0^h u\,du = \frac{h^2}{2}$$

$h = \frac{b-a}{n}$

Sier noe om feilen konvergerer med en viss hastighet og tilsvarer $\frac{1}{n}$

$$\Rightarrow E_n \le \sum_{i=0}^{n-1} K\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} K\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}K\frac{h^2}{2}\cdot n = \frac{K(b-a)^2}{2n} \qquad \square$$