Forelesning 3
RELASJONER OG FUNKSJONER

Ekvivalensrelasjoner

En relasjon som er refleksiv, symmetrisk og transitiv, kalles en ekvivalensrelasjon.

Eksempel 1

R= på en mengde av tall, f.eks. $\mathbb{Z}$ eller $A=\{1,2,3\}$.

Eksempel 2

Kongruens. Intuisjon: når vi snakker om tid regner vi modulo 12 (eller 24). Hvis klokka er 11, er den om tre timer $2=11+3-12$. For 20 timer siden var den $3=11-20+12$, for 76 timer siden var den $7=11-76+(6\cdot 12)$.

Vi sier at $a\equiv b \pmod{12}$ hvis $12\mid a-b$ ($\mid$ leses: er divisor i).
Altså: $2\equiv 14 \pmod{12}$, og $3\equiv -9 \pmod{12}$ og $7\equiv -65 \pmod{12}$.

Oppgave

Vis at kongruens modulo 12 er en ekvivalens-relasjon.

For $a,b\in\mathbb{Z}$ sier vi at

$$a\equiv b \pmod{12} \iff 12\mid(a-b)$$

Refleksivitet:
$a-a=0$, og $12\mid 0 \rightarrow a\equiv a \pmod{12}$

Symmetri
Hvis $12\mid(a-b)$, så $12\mid(b-a) \rightarrow a\equiv b \Rightarrow b\equiv a \pmod{12}$

Transitivitet
Hvis $12\mid(a-b)$ og $12\mid(b-c)$, så $a-c=(a-b)+(b-c)$
er også delelig med 12
$\rightarrow a\equiv c \pmod{12}$

Partielle ordninger

En relasjon som er refleksiv, anti-symmetrisk og transitiv kalles en partiell ordning.

Eksempel 1

Relasjonen $R_\leq$ på en mengde av tall.

Eksempel 2

La A være en mengde, og husk at $P(A)$ er mengden av alle delmengder. Da er relasjonen $R_\subseteq = \{\langle B,C\rangle \mid B \subseteq C\}$ på $P(A)$ en partiell ordning

Eksempel 3

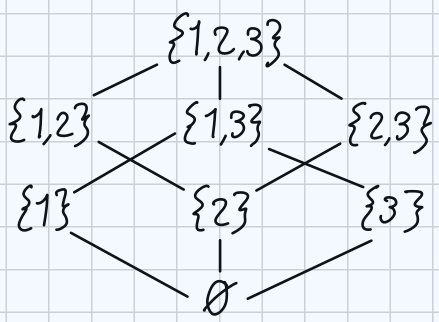
La A være mengden $\{1,2,3,\dots,12\}$. Da er relasjonen $R_{div} = \{\langle x,y\rangle \mid x \text{ divisor i } y\}$ en partiell ordning på A.

Hasse-diagram

Partielle ordninger framstilles ofte vha. Hasse-diagram.

Eksempel

Se på potensmengden $P(\{1,2,3\})$ med relasjonen $R_\subseteq$.



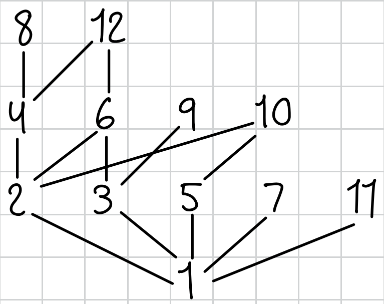
Denne relasjonen er en partiell ordning. Vi trenger ikke inkludere piler fra et element til seg selv, siden partielle ordninger er refleksive. Vi trenger ikke inkludere piler f.eks. $\{2\} - \{1,2,3\}$ siden den også er transitiv. Vi tegner ikke pilhoder, siden alle relasjoner "går i samme retning".

Hasse-diagram for divisor relasjonen

La $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$.

Da er relasjonen $R_{div} = \{\langle x,y\rangle \mid x \text{ divisor i } y\}$ en partiell ordning på A.

Hasse-diagram:



Hasse-diagram definisjon

En relasjon R på en mengde A som er en partiell ordning, kan beskrives vha. Hasse-diagrammet.

La a og b være ulike elementer i A, da har vi en kant ("pil uten pilhode") fra a til b, hvis:

- $\langle a,b\rangle \in R$
- $c \in A$ er ulik både a og b, har vi ikke at både $\langle a,c\rangle \in R$ og $\langle c,b\rangle \in R$

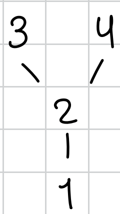
(Intuitivt: vi har ikke en kant fra a til b, hvis det finnes en c "mellom" a og b).

Oppgave

La $A = \{1,2,3,4\}$

La $R = R_{=} \cup \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle\} \subseteq A \times A$

Tegn Hasse diagrammet.



Funksjoner

$f(x) = x^2$
$g(x) = x + 1$

Vi trenger **tre** ting for å beskrive en funksjon:

- Hva kan vi putte inn (definisjonsområde)?
- Hvor kan output ligge (verdiområde)?
- Hva er **relasjonen**, eller sammenhengen mellom input og output?

Altså: Funksjoner er relasjoner fra definisjonsområdet D til verdiområdet V.

Vi kan skrive $f: D \to V$ eller $f \subseteq D \times V$.

Grafer

$f(x) = x^2 \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Punktene på grafen utgjør en delmengde av $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$f = \{\langle x, x^2 \rangle \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Dette er en relasjon på $\mathbb{R}$.
For eksempel er altså $\langle -3, 9 \rangle \in f$, men $\langle 0, 2 \rangle \notin f$.

Endelig eksempel

$f: \{1,2,3\} \to \{\bullet, \circ\}$
$f \subseteq \{1,2,3\} \times \{\bullet, \circ\}$
Altså $D = \{1,2,3\}$ og $V = \{\bullet, \circ\}$

$f(1) = \bullet$
$f(2) = \circ$
$f(3) = \bullet$

$f = \{\langle 1, \bullet \rangle, \langle 2, \circ \rangle, \langle 3, \bullet \rangle\} \subseteq D \times V$.