

FORELESNING 6

MER OM UTSAGNSLOGIKK

Eksempel (Ekvivalens og sannhetsverditabeller)

Bruk en sannhetstverditabel til å vise at

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Lik sannhetsverdi for alle tilordninger av P, Q og R,

$$\text{Så } P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

På lignende måte, kan vi vise at

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Disse kallas distributive lover

Noen flere logiske lover

Vi kan også vise at

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P \text{ og } P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$$

("Kommutative lover")

Og at

$$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R \quad (\text{"Assosiativ lover"})$$

$$\text{og } P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$$

Men!

Ikke alt som er kommutativt ☹

F.eks $P \rightarrow Q \Leftrightarrow Q \rightarrow P$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Δ Ikke alltid lik verdi!

Men Men!

Vi kan vise at

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

Dette danner grunnlaget for kontrapositive bevis

Forrige gang viste vi også at

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P) \vee Q$$

Konsekvens: Alle formler som bruker $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$ kan skrives med $\{\neg, \vee, \wedge\}$.

(Bare bytt ut $P \rightarrow Q$ med $(\neg P) \vee Q$)

De Morgans lover

I ØF1 så vi at $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ og $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$
(for mengder)

Disse kallas De Morgans lover, og vi har noe lignende for utsagnslogikk:

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$$

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

Konsekvens: $P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg(P \wedge Q)) \Leftrightarrow \neg((\neg P) \vee (\neg Q))$

Så \wedge kan skrives med \neg og \vee og vi trenger da bare $\{\neg, \vee\}$.

Eksempel

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \wedge S \Leftrightarrow (P \rightarrow ((\neg Q) \vee R)) \wedge S$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P) \vee ((\neg Q) \vee R)) \wedge S$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg((\neg P) \vee ((\neg Q) \vee R))) \vee (\neg S))$$

Digresjon

Egentlig trengs bare ett konnektiv, som heter "NAND"/"ikke både-og" med symbol \uparrow
 Og sannhetsverditablell

P	Q	$P \uparrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

F.eks. er $\neg P \Leftrightarrow P \uparrow P$

Men det blir fort stygt:

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q))$$

Logisk konsekvens

La S : "sol skinner" G : "jeg er glad"

I : "jeg spiser is"

Anta at det følgende er sant

$$S, S \rightarrow (G \vee I), \neg G$$

Ser sann og $S \rightarrow (G \vee I)$, så da må $(G \vee I)$

være sann.

Siden $\neg G$ er sann så må I være sann.

Altså spiser jeg is (men jeg er ikke glad).

Vi sier at I er en logisk konsekvens av formlene i mengden $M = \{S, S \rightarrow (G \vee I), \neg G\}$

Definisjon

La M være en mengde med utsagnslogiske formler, og la F være en utsagnslogisk formel.

Hvis F er sann for alle evaluasjoner som gjør alle formlene i M samtidig sanne så er F en (logisk) konsekvens av formlene i M .

Vi skriver da $M \models F$.

Eksempel

Vis at $M = \{S, S \rightarrow (G \vee I), \neg G\} \models I$

S	G	I	$\neg G$	$G \vee I$	$S \rightarrow (G \vee I)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

I er sann for alle valuerasjoner som gjør formlene i M sanne samtidig (skjer kun i rad 6) så $M \models I$

Tautogier og motsigelser

La F være en utsagnslogisk formel.

Hvis det finnes en valuerasjon som gjør F sann, kaller vi F oppfyllbar. Eks: $P \vee Q$ er oppfyllbar.

Hvis alle valuerasjoner gjør F sann, kaller vi F en tautologi.

Hvis ingen valuerasjoner gjør F sann, kaller vi F en motsigelse eller kontradiksjon.

Eksempel

$P \vee \neg P$ er en tautologi

$P \wedge \neg P$ er en motsigelse

$P \vee Q$ er ingen av delene

Når vi forenkler formler, kan vi erstatte tautogier og motsigelser med egne symboler for "sann" og "usann".

$T = \text{"sann"}/\text{"top"}$ $\perp = \text{"usann"}/\text{"bottom"}$

Dessy mbolene er utsegnslagiske formler

Eksempel

$$\begin{aligned}(P \vee Q) \vee \neg P &\Leftrightarrow (Q \vee P) \vee \neg P \\&\Leftrightarrow Q \vee (P \vee \neg P) \\&\Leftrightarrow Q \vee T \\&\Leftrightarrow T\end{aligned}$$

Uavhengighet av formler

Definisjon

La F og G være utsagnslogiske formler.
Vi sier at G er uavhengig av F hvis hverken
 G eller $\neg G$ er en logisk konsekvens av F .
 $(F \not\models G \text{ og } F \not\models \neg G)$

Eksempel

$P \vee Q$ er uavhengig av $Q \vee R$.

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0

Hverken $P \vee Q$ eller $\neg(P \vee Q)$ er konsekvenser av $Q \vee R$, fordi det finnes valueringer som gjør $P \vee Q$ og $\neg(P \vee Q)$ usenne selv om $Q \vee R$ er sann.