

# Teoriforelesning 8

## DERIVASJON I

### Nøkkelbegreper

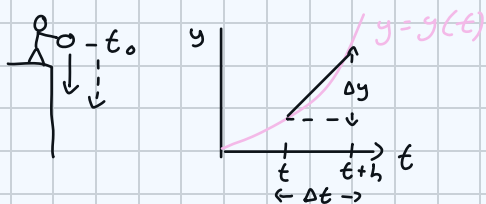
- Definisjonen av den deriverte
- Regneregler for derivasjon
- Derivasjon av trigonometriske funksjoner

### Intro/motivasjon

### Eksempel

En stein som slippes fra en klippe vil falle en distanse  $y$  som funksjon av tiden  $t$  gitt ved

$$y = y(t) = \frac{1}{2}gt^2, t \geq 0.$$



- Hva er gjennomsnittsfarten til steinen over tidsrommet  $[t, t+h]$ ?

$$\text{Gjennomsnittsfart} = \frac{\text{endring distanse}}{\text{endring tid}} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$= \frac{y(t+h) - y(t)}{(t+h) - t} = \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}gt^2 + gh t + \frac{1}{2}gh^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h} = gt + \frac{1}{2}gh$$

- Hva er den momentane farten til steinen ved tid  $t$ ?

$$\text{Momentanfart} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{(t+h) - t}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (gt + \frac{1}{2}gh) = gt$$

$$gt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} = y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}gt^2 \right)$$

### Definisjonen av den deriverte

Anta at  $f(x)$  er definert på  $(a, b)$ . Vi sier at  $f(x)$  er deriverbar i punktet  $x_0 \in (a, b)$  hvis grenseverdien

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

eksisterer. Vi kaller  $f'(x_0)$  den deriverte til  $f(x)$  i punktet  $x = x_0$ .

## Eksempel

Bestem den deriverte til  $f(x) = \sqrt{x}$  i punktet  $x = 4$ .

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} \cdot \frac{(\sqrt{4+h} + 2)}{(\sqrt{4+h} + 2)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(4) = \frac{1}{4}$$

Generelt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} \cdot \frac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

## Deriverbarhet medfører kontinuitet

Hvis  $f(x)$  er deriverbar i  $x = x_0$ , så er  $f(x)$  kontinuerlig i  $x = x_0$ .

### Bevis

Vet at:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  eksisterer.

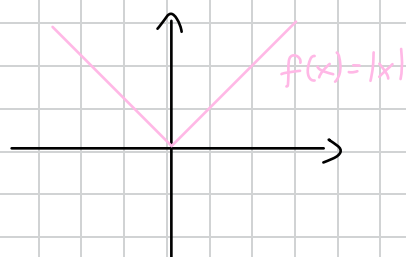
Dette betyr at  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ .

Altså er  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , så  $f$  er kontinuerlig i  $x = x_0$ .  $\square$

[Vi vil vise at  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ]

**Merk:**  $f(x)$  kontinuerlig  $\nRightarrow f(x)$  deriverbar.

F.eks:  $f(x) = |x|$  er kontinuerlig i  $x = 0$ ,  
men ikke deriverbar.



## Grunnleggende derivasjonsregler

L<sub>2</sub>  $x \in D_f$ . Hvis funksjonene  $u(x)$  og  $v(x)$  er deriverbare i  $x$ , så er funksjonen  $f(x)$  deriverbar i  $x$  og:

- i)  $f(x) = z \cdot u(x)$  gir  $f'(x) = z \cdot u'(x)$  ( $z$  konstant)
- ii)  $f(x) = u(x) \pm v(x)$  gir  $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
- iii)  $f(x) = u(x)v(x)$  gir  $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$  (produktregelen)
- iv)  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  gir  $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$  (kvotientregelen)

## Kjernerregelen

Hvis  $u$  er deriverbar i  $x$  og  $g$  er deriverbar i  $u(x)$ , så er  $f(x) = g(u(x))$  deriverbar i  $x$ , og  
 $f'(x) = g'(u(x))u'(x)$

## Eksempel

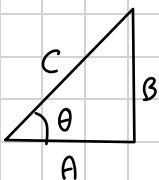
Finne  $f'(x)$  for  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

$$f(x) = g(u(x)), g(x) = \sqrt{x} \rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$u(x) = 1+x^2 \rightarrow u'(x) = 2x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

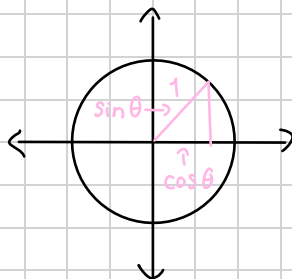
## Trig-reg



$$\sin \theta = \frac{B}{C}$$

$$\cos \theta = \frac{A}{C}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{B}{A}$$



$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$$

[Vi husker (?) fra plenumsregning at  
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} = 1$  og  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cosh - 1}{h} = 0$ ]

## Eksempel

i)  $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$\left( \begin{aligned} & [\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a] \\ & \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cosh + \sin h \cos x - \sin x}{h} \end{aligned} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sin x \cdot \frac{\cosh - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right)$$

$$= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\left( \frac{\cosh - 1}{h} \right)}_{\rightarrow 0} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\left( \frac{\sin h}{h} \right)}_{\rightarrow 1}$$

$$= \cos x$$

ii)  $f(x) = \cos(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$\left( \begin{aligned} & [\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b] \\ & \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cosh - \sin x \cdot \sin h}{h} \end{aligned} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \cos x \cdot \underbrace{\left( \frac{\cosh - 1}{h} \right)}_{\rightarrow 0} - \sin x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1} \right)$$

$$= -\sin x$$

## Eksempel

L2 f være gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

For  $x \neq 0$  har vi:

$$f'(x) = 2x \cdot \cos \frac{1}{x} + x^2 \cdot \left( -\sin \frac{1}{x} \right) \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right)$$

$$= 2x \cdot \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$$

For  $x = 0$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos \frac{1}{h} - 0}{h}$$

svinger mellom 1 og -1

$$f'(0) = \dots = \lim_{h \rightarrow 0} h \cos \frac{1}{h} = 0$$

$$-|h| \leq h \cos \frac{1}{h} \leq |h|$$

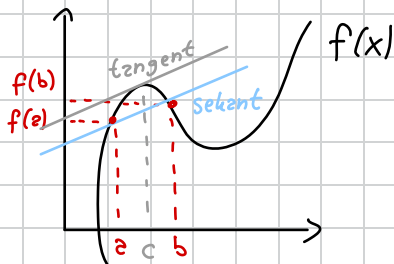
# Forelesning 8

## DERIVASJON I

### 1. REPETISJON

#### Teorem: sekantsetningen

Anta  $f(x)$  kontinuerlig på  $[a, b]$  og deriverbar  $(a, b)$ . Da finnes en  $c \in (a, b)$  slik at  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



sekant: gjennomsnittlig endringsrate

tangent: momentan endringsrate

I dag:

- ① Bevis Taylor
- ② Numerisk derivasjon

#### Taylor's teorem

$e^x, \sin(x), \ln(1+x), \dots$  definert/tilnærmet av  $\infty$  rekker

Eks:  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$   $0! = 1$

**Taylor's teorem:** laget et polynom som ligner på  $f$  i et område rundt et spesifikt punkt (tilnærming til  $f$  lokelt).

Anta  $f(x)$  og dens deriverte av orden  $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$   $f^{(n)}(x)$  er kontinuerlig på et åpent intervall  $I$  om punktet  $a$ .

Da er  $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$

Taylor-rekken/Taylorpolynomet

Restleddet

$\forall x \in I$  hvor  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$  for en  $c$  mellom  $x$  og  $a$ .

Eks:  $f(x) = e^x$  Taylor rundt  $a=0$

$n=1$   $T_1(x) = f(0) + f'(0)(x-0) = e^0 + e^0(x-0) = 1+x$

$n=2$   $T_2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 = 1+x + \frac{e^0}{2} \cdot x^2 = 1+x + \frac{x^2}{2!}$

$n=3$   $T_3(x) = 1+x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

## Bævis

Ide: Cauchy's middelverdisetning

Ønsker å vise:  $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$

① Definer en funksjon  $R_n(t)$

$$R_n(t) := f(t) - T_n(t)$$

$$T_n(t) = f(a) + f'(a)(t-a) + \frac{f''(a)}{2!}(t-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(t-a)^n$$

Siden  $T_n(t)$  inneholder de n første deriverte til  $f$  i  $a$ , får vi  $R_n(a) = R_n'(a) = \dots = R_n^{(n)}(a) = 0$  \*

Hvorfor?  $R_n(t) := f(t) - T_n(t)$   $R_n'(a) = f'(a) - T_n'(a)$   $T_n'(a) = f'(a)$

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \quad T_n'(t) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot k(t-a)^{k-1} = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!} (t-a)^{k-1}$$

$$T_n'(a) = \frac{f'(a)}{(1-1)!} \underbrace{(a-a)}_{0=1} + \frac{f''(a)}{(2-1)!} \underbrace{(a-a)^{2-1}}_0 + \frac{f'''(a)}{(3-1)!} \underbrace{(a-a)^{3-1}}_0 + \dots \quad T(a) = f(a) \quad R_n(a) = 0 \quad R_n(a) = R_n'(a) = R_n''(a) = \dots = R_n^{(n)}(a) = 0$$

② Hjelpesfunksjon

$$g(t) = (t-a)^{n+1} \quad g(a) = (a-a)^{n+1} = 0 \quad **$$

③ Cauchy's middelverdisetning (CMVS)

For  $g$  og  $R_n$  kontinuerlige på  $[a, x]$  og deriverbare på  $(a, x)$ , så finnes et punkt  $c \in (a, x)$  slik at:

$$\frac{R_n(x) - R_n(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{R_n'(c)}{g'(c)}$$

Frå \* og \*\* vet vi at  $R_n(a) = 0$  og  $g(a) = 0$ , altså vi kan skrive

$$\frac{\overset{=0}{R_n(x) - R_n(a)}}{\underset{=0}{g(x) - g(a)}} \stackrel{\text{CMVS}}{\underset{\text{1. gang}}{=}} \frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)} \quad c_1 \in (a, x)$$

#### ④ Iterasjon

$$* R_n(z) = R_n'(z) = 0$$

$$** g(z) = g'(z) = 0$$

Fordi  $R_n'(z) = 0$  og  $g'(z) = 0$  kan vi skrive  $\# = \frac{R_n'(c_1) - R_n'(z)}{g'(c_1) - g'(z)} \stackrel{\text{CMVS}}{=} \frac{R_n''(c_2)}{g''(c_2)}$  for en  $c_2 \in (z, c_1)$

:

Gjør til  $n+1$ :  $\# = \frac{R_n^{(n)}(c_n) - R_n^{(n)}(z)}{g^{(n)}(c_n) - g^{(n)}(z)} \stackrel{\text{CMVS}}{=} \frac{R^{(n+1)}(c_{n+1})}{g^{(n+1)}(c_{n+1})} \quad c_{n+1} \in (z, c_n)$

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n'(c_1)}{g'(c_1)} = \frac{R_n''(c_2)}{g''(c_2)} = \dots = \frac{R^{(n+1)}(c_{n+1})}{g^{(n+1)}(c_{n+1})} \Rightarrow \frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R^{(n+1)}(c_{n+1})}{g^{(n+1)}(c_{n+1})}$$

$$\text{Hush ①: } R_n(t) := f(t) - T_n(t) \quad R_n^{(n+1)} = f^{(n+1)}(t)$$

$$\text{Kall } c_{n+1} \text{ for } c, \text{ s\aa vi f\aa } \frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)} \quad (T^{(n+1)}(t) = 0 \text{ for } T_n \text{ polynom av grad } n)$$

#### ⑤ Sett inn for g:

$$\Leftrightarrow \frac{R_n(x)}{(x-z)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \Leftrightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-z)^{n+1}$$

#### ⑥ Konklusjon

$$R_n(t) := f(t) - T_n(t)$$

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-z)^{n+1} = f(x) - T_n(x) \Leftrightarrow f(x) = T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-z)^{n+1}}_{R_n(x) \text{ restleddet}}$$

## 2. NUMERISK DERIVASJON

### Differensseformler via Taylor

Ved å utvide  $f(x \pm h)$  med Taylor rundt  $x$  får vi

1) Forover:  $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  med feil  $O(h)$

2) Bakover:  $f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$  med feil  $O(h)$

3) Sentral:  $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$  med feil  $O(h^2)$

### 1) Forover

Utvid  $f(x+h)$  med Taylor om  $x$ :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)(x+h-x) + R_1(x+h)$$

$$= f(x) + h \cdot f'(x) + R_1(x+h)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{R_1(x+h)}{h} \quad f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{Feil: } R_1(x+h) = 2! (x+h-x)^2 = \frac{h^2}{2} f''(c)$$

$$\frac{R_1(x+h)}{h} = \frac{(\frac{h^2}{2}) f''(c)}{h} = \frac{h}{2} f''(c) \quad \text{1.orden } O(h)$$

### 2) Bakover

Utvid  $f(x-h)$  med Taylor rundt  $x$

### 3) Sentral

Utvid  $f(x+h)$  og  $f(x-h)$  med Taylor rundt  $x$