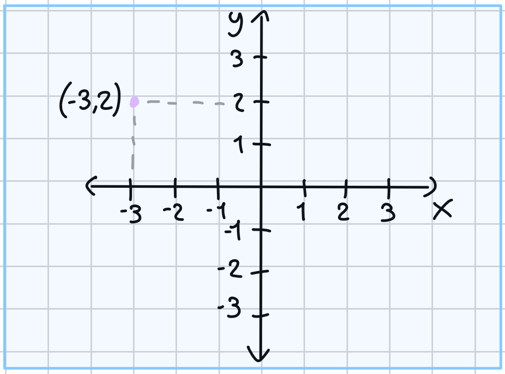
Forelesning 2
MENGDER OG RELASJONER

Kartesisk plan

Det reelle plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (kalles også kartesisk plan).

Eksempel



$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ er en mengde. Elementene i $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, altså punktene i planet er par $\langle a,b \rangle$ der $a,b \in \mathbb{R}$.

Altså: $\{\langle a,b \rangle \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Merk: Vi bruker slike parenteser $\langle \rangle$, vinkelparenteser, om ordnede par. Viktig å skille fra $\{\}$, som vi bruker om mengder.

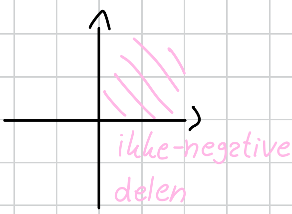
Merk at $\langle -3,2 \rangle$ og $\langle 2,-3 \rangle$ er to forskjellige punkter.

Oppgave

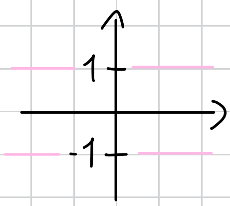
La $\mathbb{R}^{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Hva er den geometriske tolkningen av

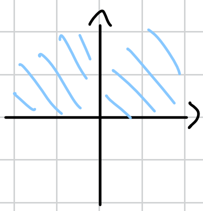
i) $\mathbb{R}^{\geq 0} \times \mathbb{R}^{\geq 0}$



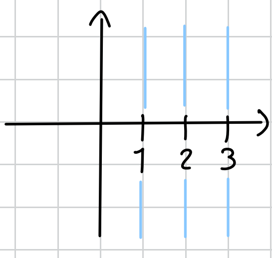
iii) $\mathbb{R} \times \{-1,1\}$



ii) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\geq 0}$



iv) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$



Kartesisk produkt

Vi kan danne kartesiske produkt $A \times B$ av vilkårlige mengder A, B.

Elementene i $A \times B$ er ordnede par av elementer, det første i A, og det andre i B.

Altså: det kartesiske produkt $A \times B$ er mengden av alle slike par

$$A \times B = \{\langle a,b \rangle \mid a \in A \text{ og } b \in B\}$$

Eksempel

La $A = \{1,2\}$ og la $B = \{5,6,7\}$, da er

$$A \times B = \{1,2\} \times \{5,6,7\}$$
$$= \{\langle 1,5 \rangle, \langle 1,6 \rangle, \langle 1,7 \rangle, \langle 2,5 \rangle, \langle 2,6 \rangle, \langle 2,7 \rangle\}$$

Oppgave

Hvis A har m elementer og B har n elementer, hvor mange elementer har da $A \times B$?
$A \times B$ har $m \cdot n$ elementer

Kartesisk produkt

Eksempel

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ er det reelle rommet. Alle punkter (elementer) bestemmes av tre koordinater

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\langle a,b,c \rangle \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

Vi kan danne kartesiske produkt $A \times B \times C$ av vilkårlige mengder A, B, C

$$A \times B \times C = \{\langle a,b,c \rangle \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$

Oppgave

La $A = \{1,2\}$, la $B = \{2,3\}$, og la $C = \{1,2,3\}$. Hvor mange elementer har $A \times B \times C$?
$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ elementer

Hvor mange elementer har $A \times B \times \emptyset$?
$2 \cdot 2 \cdot 0 = 0$ elementer

Kartesisk produkt

Elementene $\langle a,b,c\rangle$ i $A\times B\times C$ kalles ordnede tripler.

For n mengder (der n er et positivt heltall) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kan vi definere mengden av alle n-tupler

$$A_1 \times A_2 \times \ldots A_n = \{\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \mid a_i \in A_i\}$$

Oppgaver

La $A=\{1,2\}$, la $B=\{1,3\}$ og la $C=\{7,8\}$.

✓ eller ✗

- $\langle 2,1\rangle \in A\times B$ ✓
- $A\times B = B\times A$ ✗
- $A\times B$ og $B\times A$ har like mange elementer ✓

Hvor mange elementer har:

- $A\times B\times C$? 8
- $A\cup B\cup C$? 5
- $(A\cup B)\times C$? 6

Kjente relasjoner

Noen matematiske relasjoner:

$$< \quad > \quad = \quad \neq \quad \leq \quad \geq$$

Vi er vant med å tenke på en relasjon som en regel som sammenligner to tall, altså et par av tall.

Ide: vi vil tenke på en relasjon som en mengde av par av tall.
Altså en relasjon på A er en delmengde av $A\times A$.

Eksempel

Relasjonen $<$ på mengden av hele tall $\mathbb{Z}$ beskrives som

$$R = R_< = \{\langle a,b\rangle \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

Altså $\langle 2,5\rangle \in R$, men $\langle 2,2\rangle \notin R$ og $\langle 5,2\rangle \notin R$.

Relasjoner - generelt

Definisjon

En relasjon R på en mengde A er en delmengde av $A \times A$.

Eksempel

Hvis $A = \{1,2,3,4\}$ er $R = \{\langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ en relasjon.

Siden $A \times A$ har $4 \cdot 4 = 16$ elementer, har vi $2^{16} = 65536$ forskjellige relasjoner på A.

Flere eksempler

Hvis $A = \{1,2\}$ er
$A \times A = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,1\rangle\}$.

Da finnes det $2^4 = 16$ relasjoner på A.
Noen eksempler:

$R_< = \{\langle 1,2\rangle\}$

$R_= = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$R_\leq = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\} = R_< \cup R_=$

$R_\neq = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\} = R_< \cup R_>$

$R_\emptyset = \emptyset$

$R_{all} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle = R_= \cup R_\neq = R_\leq \cup R_\geq =$
$R_\leq \cup R_\geq = R_< \cup R_> \cup R_=$

$R' = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$

Relasjoner mellom mengder

En relasjon fra en mengde A til en mengde B er en delmengde av $A \times B$.

Eksempel

La $A = \{1,2\}$ og $B = \{a,b,c\}$.

$R = \{\langle 2,b\rangle, \langle 2,c\rangle\}$ er en relasjon fra A til B, siden $R \subseteq A \times B$.

Siden $A \times B$ har $2 \cdot 3$ elementer, finnes det $2^6 = 64$ forskjellige relasjoner fra A til B.

Beskrive relasjoner grafisk

Relasjoner beskrives ofte ved hjelp av diagrammer. Et element $\langle x,y\rangle$ illustreres ved en pil $x \to y$.

Eksempel

Relasjonen $\leq$ på mengden $A = \{1,2,3\}$.

Altså $R_\leq = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\} \subseteq A \times A$ kan beskrives ved figuren:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[loop left] \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & 2 \arrow[loop above] \arrow[r] & 3 \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

Relasjonen $R = \{\langle 2,b\rangle, \langle 2,c\rangle\} \subseteq \{1,2\} \times \{a,b,c\}$ kan beskrives slik:

$$\begin{tikzcd}
1 & 2 \arrow[d] \arrow[dr] & \\
a & b & c
\end{tikzcd}$$

Infiksnotasjon og binær relasjon

Hvis $R \subseteq A \times B$ er en relasjon, og $\langle a,b\rangle \in R$, skriver vi noen ganger aRb heller enn $\langle a,b\rangle \in R$. Dette kalles infiksnotasjon.

Eksempel

$\leq$ er en binær relasjon på $\mathbb{Z}$.
Vi skriver $1 \leq 3$ heller enn $\langle 1,3\rangle \in \leq$.
[Eller vi erstatter $\leq$ med $R_\leq$ og skriver $\langle 1,3\rangle \in R_\leq$].

Hvis A og B er mengder, kaller vi noen ganger, kaller vi noen ganger relasjoner på A (altså delmengder av $A \times A$) for binær relasjoner på A, og relasjoner fra A til B (altså delmengder av $A \times B$) for binær relasjoner fra A til B.

[Dette siden vi også kan snakke om f.eks. trinære relesjoner på A, altså delmengder av $A \times A \times A$].

Egenskaper ved relasjoner

En relasjon er

- refleksiv hvis $\langle a,a\rangle \in R$ for alle $a \in A$
- symmetrisk hvis $\langle a,b\rangle \in R$ bare hvis $\langle b,a\rangle \in R$ for alle $a,b \in R$
- anti-symmetrisk hvis $\langle a,b\rangle \in R$ og $\langle b,a\rangle \in R$ bare hvis $a=b$
- transitiv hvis $\langle a,b\rangle \in R$ og $\langle b,c\rangle \in R$ bare hvis $\langle a,c\rangle \in R$
- irrefleksiv hvis $\langle a,a\rangle \notin R$ for alle $a \in A$

Eksempler, relasjoner på $\mathbb{Z}$

- $R_{\leq}$ er refleksiv, transitiv og anti-symmetrisk
- $R_{<}$ er transitiv, irrefleksiv og anti-symmetrisk
- relasjonen $R = \{\langle 2,2\rangle \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,4\rangle\}$ på $\{1,2,3,4\}$ er hverken refleksiv, irrefleksiv, symmetrisk eller anti-symmetrisk

Oppgave

La $A = \{1,2,3\}$.

Hvilke egenskaper har relasjonen

$$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,1\rangle\}$$

på A?

Anti-symmetrisk og transitiv