Forelesning 4
RELASJONER OG FUNKSJONER

Funksjoner

Eksemplene (fra slutten av forelesning 3) har til felles:

$$f : D \to V$$

For hver $x \in D$ finnes nøyaktig en $y \in V$, slik at $\langle x, y \rangle$ er i $f \subseteq D \times V$.

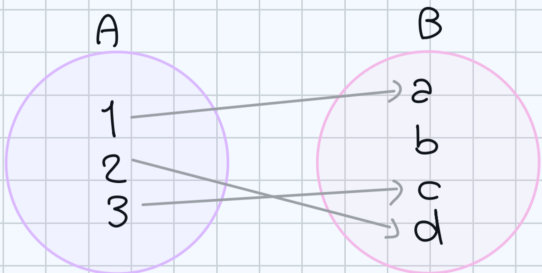
Sagt på en annen måte: Alle elementene i D må være i relasjon med nøyaktig ett element i V.

Definisjon

En relasjon $f \subseteq A \times B$ er en funksjon, hvis: for hvert element x (hver input) i definisjonsmengden A, finnes ett element y i verdimengden B slik at $\langle x, y \rangle \in f$, og vi skriver derfor $f(x) = y$.

Eksempel på funksjon

La $A = \{1, 2, 3\}$, og $B = \{a, b, c, d\}$.



Altså:

$f(1) = a$

$f(2) = d$

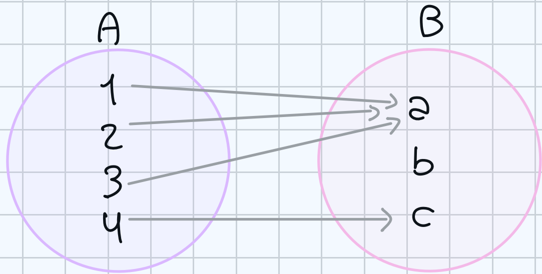
$f(3) = c$

Eller:

$f = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, d \rangle, \langle 3, c \rangle\} \subseteq A \times B.$

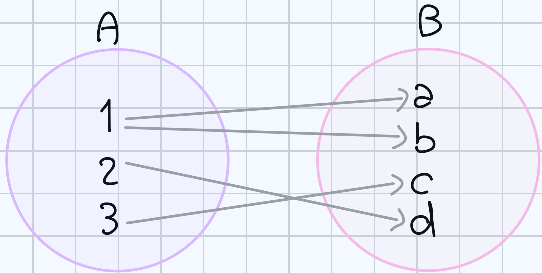
Nytt eksempel på funksjon

La $A = \{1,2,3,4\}$, og $B = \{a,b,c\}$.
La $f: A \to B$ være funksjonen:



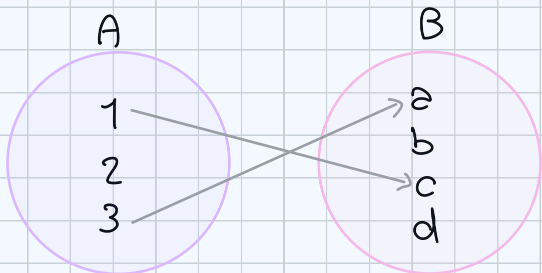
Eksempel på relasjon som ikke er en funksjon

La $A = \{1,2,3\}$, og $B = \{a,b,c,d\}$.
La $R = \{\langle 1,a\rangle, \langle 1,b\rangle, \langle 2,d\rangle, \langle 3,c\rangle\} \subseteq A \times B$.



Nytt eksempel på relasjon som ikke er en funksjon

La $A = \{1,2,3\}$, og $B = \{a,b,c,d\}$.
La $R' = \{\langle 1,c\rangle, \langle 3,a\rangle\} \subseteq A \times B$



Injektive funksjoner

Gitt en funksjon: $f: A \to B$, alternativt $f \subseteq A \times B$.

Vi sier at f er **injektiv** dersom vi **ikke kan ha at forskjellige input-verdier gir samme output**.

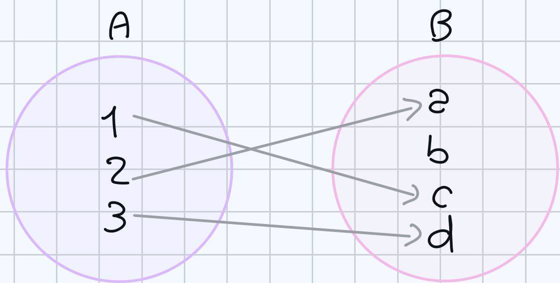
Altså: Hvis $f(x) = f(x')$, så må $x = x'$.

Eller: Hvis $\langle x, y \rangle \in f$ og $\langle x', y \rangle \in f$, så må $x = x'$.

Eller: For hvert element $y \in B$, så finnes **høyst** ett element $x \in A$, slik at $f(x) = y$.

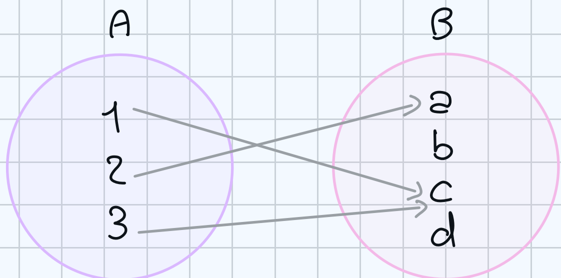
Eksempel på injektiv funksjon

La $A = \{1,2,3\}$, og $B = \{a,b,c,d\}$.
La $f: A \to B$ være funksjonen:



Eksempel på funksjon som ikke er injektiv

La $A = \{1,2,3\}$, og $B = \{a,b,c,d\}$.
La $f: A \to B$ være funksjonen:



Surjektive funksjoner

Gitt en funksjon: $f: A \to B$, alternativt $f \subseteq A \times B$.

Vi sier at f er **surjektiv** hvis det for hver $y \in B$, finnes **minst en** $x \in A$, slik at $f(x) = y$.

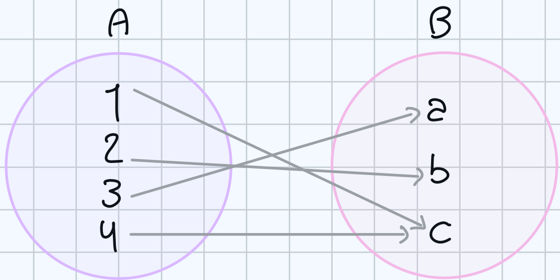
Alternativt: for hver $y \in B$, finnes **minst en** $x \in A$, slik at $\langle x, y \rangle \in f$.

[Husk, f er **injektiv** hvis det for hver $y \in B$, finnes **høyst en** $x \in A$, slik at $f(x) = y$]

Dermed: f er surjektiv og injektiv hvis det for hver $y \in B$, finnes **nøyaktig en** $x \in A$, slik at $f(x) = y$.

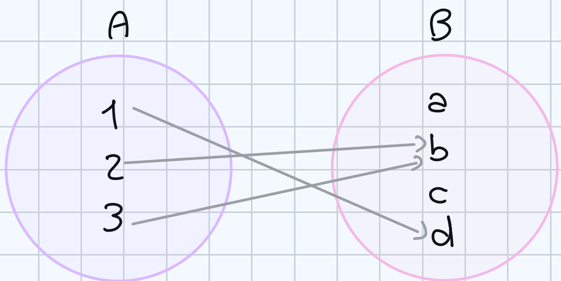
Eksempel på surjektiv funksjon

La $A = \{1,2,3,4\}$, og $B = \{a,b,c\}$.
La $f: A \to B$ være funksjonen:



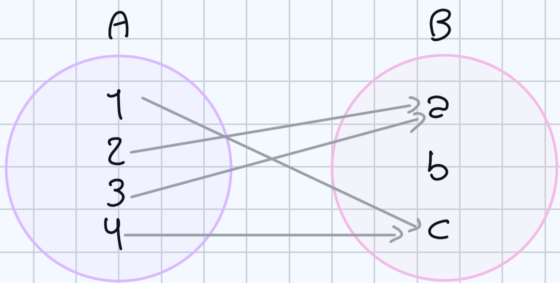
Eksempel på funksjon som ikke er surjektiv

La $A = \{1,2,3\}$, og $B = \{a,b,c,d\}$.
La $f: A \to B$ være funksjonen:



Nytt eksempel på funksjon som ikke er surjektiv

La $A=\{1,2,3,4\}$, og $B=\{a,b,c\}$.
La $f: A \to B$ være funksjonen:



Quiz

La $A=\{1,2,3\}$ og $B=\{1,2\}$.

1. Hvor mange relasjoner finnes fra A til B?
Svar: $64 \; (=2^6)$

2. Hvor mange funksjoner finnes fra A til B?
Svar: $8 \; (2^3)$

3. Hvor mange injektive funksjoner finnes fra A til B?
Svar: 0

4. Hvor mange injektive funksjoner finnes fra B til A?
Svar: $6 \; (=3 \cdot 2)$

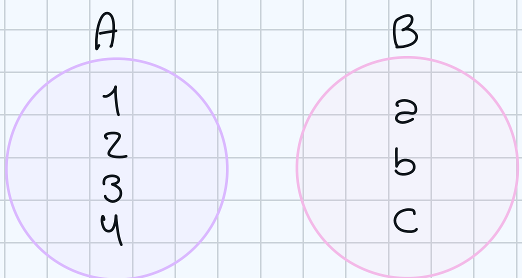
5. Hvor mange surjektive funksjoner finnes fra A til B?
Svar: $6 \; (=8-2)$

Bijeksjoner

En funksjon som er både surjektiv og injektiv kalles en **bijeksjon** (eller en bijeksjon).

Eksempel

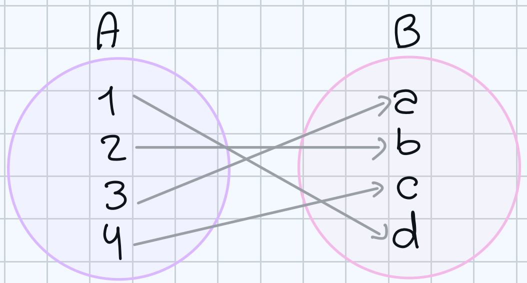
Det finnes ingen bijeksjoner fra A til B når:



Det finnes heller ikke noen injektive funksjoner fra A til B.

Eksempel på bijeksjon

La $A = \{1,2,3,4\}$, og $B = \{a,b,c,d\}$.
La $f: A \to B$ være funksjonen:



Eksempel

La $f(x) = x^2$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f er ikke surjektiv, siden det f.eks. ikke finnes noen $a \in \mathbb{R}$ slik at $f(a) = -1$.

f er heller ikke injektiv, siden $f(2) = f(-2) = 4$.

$g(x) = x^2$ $\quad g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

g er heller ikke surjektiv, siden det f.eks. ikke finnes noen $a \in \mathbb{N}$ slik at $f(a) = 3$.

Men: $g(x) = x^2$ $\quad g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ er injektiv!

Eksempel

La $f(x) = x + 1$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f er injektiv: Hvis $f(a) = f(b)$, har vi altså $f(a) = a + 1 = b + 1 = f(b)$, og dermed $a = b$.

f er surjektiv: La $c \in \mathbb{R}$. Hvordan kan vi finne $b \in \mathbb{R}$ slik at $f(b) = c$? La $b = c - 1$. Da er $f(b) = b + 1 = c - 1 + 1 = c$.

La $f(x) = x + 1$ $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Denne er injektiv, men ikke surjektiv.

Sammensetning av funksjoner

Gitt mengder A,B,C og
funksjoner

$f: A \to B$ og
$g: B \to C$ kan vi definere sammensetningen
$g \circ f: A \to C$.

Eksempel

$A = B = C = \mathbb{R}$, og $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

La $f(x) = x^2$ og $g(x) = x + 1$.

Da er $g \circ f(x) = x^2 + 1$, og

$f \circ g(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Inverser

Funksjoner som er bijektive har inverser!
La $f: A \to B$ være en bijeksjon.

Vi vil definere en funksjon $g: B \to A$, slik at:

- $g \circ f(a) = a$ for alle $a \in A$
- $f \circ g(b) = b$ for alle $b \in B$

og kalle g for inversen f.

$g: B \to A$ er da også en bijeksjon.

Oppgave

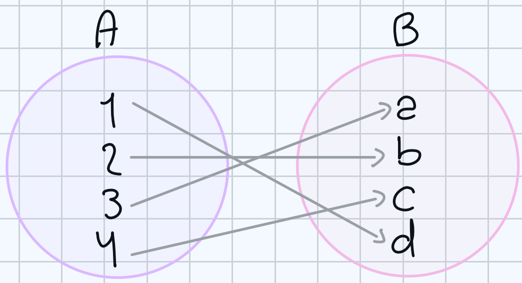
Hvorfor er inversen til en bijeksjon, selv en bijeksjon?
Fordi "en til en og på" bevares begge veier.

Oppgave

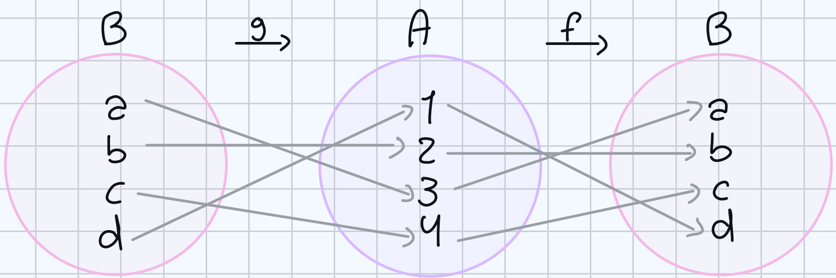
Hvorfor kan vi snakke om inversen til en funksjon, og
ikke bare en invers?
Fordi den er entydig bestemt av f.

Eksempel på invers

La $A = \{1,2,3,4\}$, og $B = \{a,b,c,d\}$.
La $f: A \to B$ være funksjonen:



Da er $g: B \to A$ den inverse funksjonen:



Oppgave

La $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = 2x + 1$. Hva er den inverse funksjonen til f?

Svar: $g(y) = (y-1)/2$

NB! Hvis vi lar domenet og verdimengden være $\mathbb{Z}$, vil funksjonen IKKE være surjektiv. Og dermed har vi ingen invers.

Kardinalitet

Hvis det finnes en injektiv funksjon $A \to B$, så må B ha minst like mange elementer som A.

Hvis det finnes en surjektiv funksjon $A \to B$, så må A ha minst like mange elementer som B.

Altså: hvis A og B er endelige mengder, og det finnes en bijeksjon fra A til B, må A og B ha like mange elementer.

Generelt: hvis A og B er mengder (ikke nødvendigvis endelige), og det finnes en bijeksjon fra A til B, sier vi at A og B har samme kardinalitet.

Altså: hvis A og B begge er endelige, betyr det bare at de har like mange elementer.

Kardinalitet for uendelige mengder

Eksempel

$\mathbb{N}$ og $\mathbb{Z}$ har samme kardinalitet.
Definer $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ som følger:

$f(1) = 1$
$f(2) = 3$
$f(3) = 5$
...
$f(0) = 0$
$f(-1) = 2$
$f(-2) = 4$
$f(-3) = 6$
...

Altså $f(z) = \begin{cases} 2z-1 & \text{hvis } z>0 \\ -2z & \text{hvis } z\leq 0 \end{cases}$

Da er f surjektiv og injektiv, altså en bijeksjon.

Invers

Eksempel

Hva er inversen g til $f(z) = \begin{cases} 2z-1 & \text{hvis } z>0 \\ -2z & \text{hvis } z\leq 0 \end{cases}$

Altså en funksjon $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ slik at:

$g(1) = 1$
$g(3) = 2$
$g(5) = 3$
...
$g(0) = 0$
$g(2) = -1$
$g(4) = -2$
$g(6) = -3$
...

Altså $g(t) = \begin{cases} \frac{t+1}{2} & \text{hvis } t \text{ er odde} \\ -\frac{t}{2} & \text{hvis } t \text{ er like (partall)} \end{cases}$

Kardinalitet for uendelige mengder II

Vi har sett at det finnes bijeksjoner $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ og $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, altså har disse to mengdene samme kardinalitet.

Fakta

- $\mathbb{Q}$ - de rasjonale tall - har også samme kardinalitet som $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{N}$.
- Vi sier at en mengde A er tellbar hvis det finnes en injektiv funksjon $A \to \mathbb{N}$. Så alle endelige mengder, samt $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{Q}$ er tellbare
- $\mathbb{R}$ - har høyere kardinalitet enn $\mathbb{Z}$, altså, det finnes ingen injektiv funksjon $\mathbb{R} \to \mathbb{N}$ (men det finnes en injektiv funksjon $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$).