FORELESNING 8

- LITT MER OM PREDIKATLOGIKK + NOEN BEVISTEKNIKKER

Predikater og relasjoner

La A være en mengde.

<u>Husk</u>: En n-ær relasjon over A er en delmengde av $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ ganger}} = A^n$

Dette kalles også en relasjon av <u>aritet</u> n.

"Binærrelasjon" = relasjon av aritet 2.

Som regel dette vi mener når vi sier "relasjon"

Relasjoner av aritet n og predikater av aritet n henger tett sammen.

Hvis R er en relasjon av aritet n, over A, så kan vi tenke på R som et predikat:

$$P_R(a_1, a_2, \ldots a_n) := (\langle a_1, a_2, \ldots a_n \rangle \in R)$$

$P_R(a_1, a_2, \ldots a_n)$ har sannhetsverdi "sann" hvis og bare hvis $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ er i relasjonen R.

Husk: en relasjon er en mengde

Eksempel

La $A \subseteq \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}}_{\mathbb{N}^3}$ være definert som

$$A = \{\langle a,b,c\rangle \in \mathbb{N}^3 \mid a \cdot b = c\}$$

Da er A en relasjon av aritet 3 (over $\mathbb{N}$) og vi har f.eks.

$$\langle 1,1,1\rangle \in A, \quad \langle 2,3,6\rangle \in A, \quad \langle 1,2,4\rangle \notin A$$

Hvis vi definerer

$$P_A(a,b,c) := (\langle a,b,c\rangle \in A \Leftrightarrow a \cdot b = c)$$

så er P_A et <u>predikat</u> av aritet 3.

Lar vi universet være $\mathbb{N}$ så er f.eks.

$$\exists a \forall b \exists c (a \cdot b = c)$$

et utsagn som er sant.

"Det finnes $a \in \mathbb{N}$, slik at for alle $b \in \mathbb{N}$, så finnes det en $c \in \mathbb{N}$ slik at $a \cdot b = c$"

Sant: Hvis vi lar $a = 1$, vil det for alle b finnes en c slik at $a \cdot b = c$, nemlig $c = b$.

Men f.eks $\exists c \forall a \forall b (a \cdot b = c)$ er usann.

Motsatt, kan vi for et predikat P (av aritet n) over et univers U, definere en n-ær relasjon over U.

Hvis P er et slikt predikat, så kan vi definere relasjonen

$$R_P = \{\langle x_1, x_2, \ldots x_n\rangle \in U^n \mid P(x_1, x_2, \ldots x_n)\}$$

Tolkning av setninger

Sannhetsverdien til en utsagnslogisk formel
(f.eks $P \wedge Q \to R$)
avhenger av en valgt tilordning på $\{P, Q, R\}$

På samme måte må et uttrykk (eller en setning)
i predikatlogikk <u>tolkes</u> før vi kan bestemme en
sannhetsverdi

For å bestemme sannhetsverdien til f.eks.
$\forall x P(x)$
så må vi
① Velge et univers U
② Velge et konkret predikat P

Dette er en tolkning av setningen

Eksempel

La φ "phi" $= \forall x \forall y (P(x,y) \to P(y,x))$

To ulike <u>tolkninger</u> av φ er

① La $U = \mathbb{Z}$ og la $P(x,y) := (x \leq y)$
(eller som relasjon $R_P = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\}$)

② La $U = \{1,2,3\}$ og la P være gitt
ved $R_P = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

I ① så er φ usann
F.eks $P(1,2)$ er sann men $P(2,1)$ er usann

I ② så er φ sann.
Sjekk hvert element i R_P
F.eks. vil $P(1,2) \to P(2,1)$ fordi både
$\langle 1,2\rangle \in R$ og $\langle 2,1\rangle \in R$

Bevis og bevisteknikker

La oss bevise påstanden

"Summen av to partall er et partall"

Et heltall n er et <u>partall</u> dersom det finnes et heltall m slik at $n = 2 \cdot m$

Vi kan nå vise at for to heltall x og y så vil
"x og y er partall" → "$x+y$ er et partall"

Anta at x og y er partall.

Da er $x = 2n$ og $y = 2m$ for heltall x og y

Videre er $x+y = 2n+2m = \underbrace{2(n+m)}_{\text{partall siden } n+m \text{ er et heltall}}$ ■ ↖ "bevis slutt"

Dette er et eksempel på et <u>direkte bevis</u> hvor vi starter med P og deduserer oss frem til Q.

Eksempel

Vis det følgende.

La $n \in \mathbb{Z}$. Hvis n^2 er et partall så er n et partall.

Prøv med direkte bevis:

Anta at $n^2 = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Vi får at $n = \sqrt{2m}$, men kommer ikke videre.

Noen ganger vanskelig å vise $P \to Q$ direkte.

Men:

$$P \to Q \iff \neg P \lor Q \iff Q \lor \neg P \iff \neg(\neg Q) \lor \neg P \iff (\neg Q) \to (\neg P)$$

$(\neg Q) \to (\neg P)$ kalles den kontrapositive formelen til $P \to Q$.

"n^2 partall" → "n partall" kan vises ved å vise

"n er odde" → "n^2 er odde"

Anta at n er et oddetall.

Da er $n = 2m+1$ for et heltall m.

Da er $n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$

$$= 2(2m^2+2m)+1 = \underbrace{2m'+1}_{\text{oddetall}}, \text{ der } m' = \underbrace{2m^2+2m}_{\text{heltall}}$$

■

Motsigelsesbevis

Ønsker å vise en påstand P.
Kan vise at P er sann ved å vise at P umulig kan være usann.
M.a.o. at $\neg P$ fører til en motsigelse.

$$\neg P \to \bot \iff \neg(\neg P) \vee \bot$$
$$\iff P \vee \bot \iff P$$

Eksempel

Vis at $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall, altså $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
Altså, vis at det ikke finnes heltall a og b slik at $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

Bevis

Anta at $\sqrt{2}$ er rasjonalt, altså at $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ for $a, b \in \mathbb{Z}$, og der a og b ikke har noen felles faktorer.
Siden $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ må $2 = \frac{a^2}{b^2}$ eller $a^2 = 2b^2$.
Da er a^2 et partall og da er a et partall.
La $a = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$.
Da er $2b^2 = a^2 = (2m)^2 = 4m^2$
eller $b^2 = 2m^2$
Da er b^2 et partall og da er b et partall.
Da er både a og b partall, som går mot antagelsen om at de ikke har felles faktorer.
Så det kan <u>ikke</u> stemme at $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$
Så $\sqrt{2}$ er irrasjonalt. ■