Forelesning 5

LINEÆRTRANSFORMASJONER I

LINEÆRTRANSFORMASJONER

Definisjon 1 : 6.2

$T: V \to W$ der V, W vektorrom
kalles for lineærtransformasjon (lin. trans)

L1 $T(u+v) = T(u) + T(v)$
L2 $T(r \cdot u) = rT(u)$

$\forall$ skalarer r og vektorer $u, v \in V$

Teorem 1 6.2 - Bevaring av lineærkombinasjon

$T: V \to W$ er lineærtransformasjon mellom vektorrommene V, W
$v_1, \ldots, v_n \in V$ og $r_1, \ldots, r_n$ er skalarer

$$T(\underbrace{r_1 v_1 + \ldots + r_n v_n}_{V}) = \underbrace{r_1 T(v_1) + \ldots + r_n T(v_n)}_{W}$$

Bevis

Kommer direkte fra L1 og L2

$$T(\overbrace{r_1 v_1}^{u} + \overbrace{r_2 v_2 + r_3 v_3}^{v}) = T(u) + T(v)$$

$$= T(r_1 v_1) + T(\overbrace{r_2 v_2}^{w} + \overbrace{r_3 v_3}^{k})$$

$$= r_1 T(v_1) + T(w + k)$$

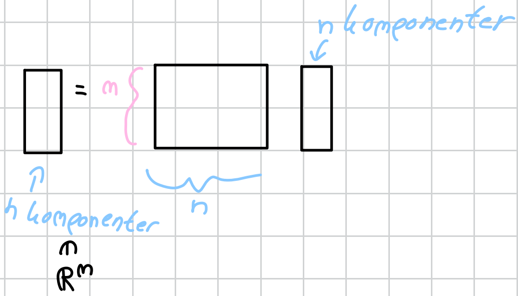
$$= r_1 T(v_1) + T(w) + T(k)$$

$$= r_1 T(v_1) + T(r_2 v_2) + T(r_3 v_3)$$

$$= r_1 T(v_1) + r_2 T(v_2) + r_3 T(v_3)$$

Eksempler

1) $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gitt av $T(u) = A(u)$
der A er en $m \times n$-matrise



$m = 3$ $\quad A \ 3 \times 2$
$n = 2$

$$T(u) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 + 2u_2 \\ 3u_1 + 4u_2 \\ 5u_1 + 6u_2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{R}^3} \qquad u = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{R}^n}$$

2) $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$

$T(u) = Bu$ $\quad B$ er en $m \times n$ kompleks matrise

3) La V være vektorrom av kontinuerlige funksjoner fra $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$T: V \to V$
$T(f) = \int_0^x f(s)\,ds \in V$

L1 $T(f+g) = \int_0^x (f(s) + g(s))\,ds = \int_0^x f(s)\,ds + \int_0^x g(s)\,ds$

L2 $T(\alpha f) = \int_0^x \alpha f(s)\,ds = \alpha \int_0^x f(s)\,ds = \alpha T(f)$

Teorem 2: 6.2 - Sende nullvektor til nullvektor

> $T: V \to W$ lin. trans. mellom vektorrom
>
> da $\underbrace{T(0)}_{V} = \underbrace{0}_{W}$

Eksempel

$$T(u) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} u \qquad u \in \mathbb{R}^2$$

$$u = 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad T(u) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Teorem 3

> Hvis T_1 og T_2 er lin.trans. fra V til W og $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ er en basis av V og $T_1(b_1) = T_2(b_2), \dots, T_1(b_n) = T_2(b_n)$ da er T_1 og T_2 like

Bevis

Anta $T_1(b_1) = T_2(b_2), \dots, T_1(b_n) = T_2(b_n)$

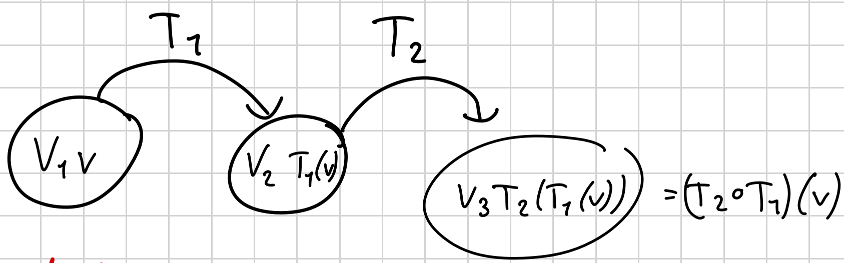
$v \in V$ da $v = \beta b_1 + \dots + \beta b_n$
der $\beta_1, \dots, \beta_n$ er skalarer

$$
\begin{aligned}
T(v) &= \beta_1 T_1(b_1) + \dots + \beta_n T_1(b_n) \\
&= \beta_1 T_2(b_2) + \dots + \beta_n T_2(b_n) \\
&= T_2(\beta_1 b_1 + \dots + \beta_n b_n) = T_2(v)
\end{aligned}
$$

dermed $T_1 = T_2$

Definisjon - Komposisjon av lineærtransformasjoner

> $T_1 : V_1 \to V_2 \quad T_2 : V_2 \to V_3 \quad V_1, V_2, V_3$ vektorrom
>
> T_1, T_2 lin.transf. Da
>
> $$(T_2 \circ T_1) : V_1 \to V_3$$
>
> definert av $(T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v))$
>
> Komposisjonen av T_1 og T_2



Teorem 1 6.3

> Hvis T_1 T_2 er lin.transf.
> $T_1 : V_1 \to V_2$ $T_2 : V_2 \to V_3$ da er $T_2 \circ T_1 : V_1 \to V_3$
> en lin.transf.

Bevis

L1 $u, v \in V_1$

$(T_2 \circ T_1)(u+v)$

$= T_2(T_1(u+v))$

$= T_2(T_1(u) + T_1(v))$

$= T_2(T_1(u)) + T_2(T_1(v))$

$= (T_2 \circ T_1)(u) + (T_2 \circ T_1)(v)$

L2 ...

Definisjon - Kjerne, rekkevidde

> $T: V \to W$ lin. transf.
>
> Kjerne: $Ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0, \text{nullvektor i } W\}$
>
> Rekkevidde $Ran(T) = \underset{\substack{\cap \\ W}}{T(V)} = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ s.a. } w = T(v)\}$

Teorem 4: 6.3

> $\underset{\substack{\cap \\ V}}{Ker(T)}$ og $\underset{\substack{\cap \\ W}}{Ran(T)}$ har underrom

Bevis: $Ker(T) \subset V$ er et underrom av V

Bruker PROP1

$Ker(T)$ er ikke tom. Det stemmer fordi $0 \in Ker(T)$

$T(0) = 0$, $0 \in V$ er også et element i $Ker(T)$

Anta nå $u, v \in Ker(T)$

$T(\alpha u + \beta v) = \alpha \underset{\substack{\| \\ 0}}{T(u)} + \beta \underset{\substack{\| \\ 0}}{T(v)}$ $\Rightarrow \alpha u + \beta v \in Ker(T)$

$= 0 \in W$

då har $Ker(T)$ underrom

$T: V \to W$ lin. transf. V, W vektorrom

Definisjon 1: Injektivitet

> Vi sier at T er injektiv hvis
>
> $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$

Definisjon 2: Surjektivitet

> Vi sier at T er surjektiv hvis
>
> $T(V) = Ran(T) = W$

Teorem 1 : 6.3

> $T: V \to W$ lin. transf.
>
> Injektiv $\Leftrightarrow$ $Ker(T) = \{0\}$ består bare av nullvektor i V

Bevis

1) $Ker(T) = \{0\} \Longleftrightarrow$ injektiv

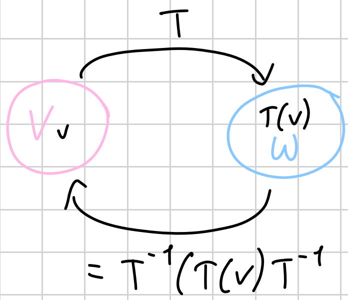
2) Injektiv $\Longleftrightarrow Ker(T) = \{0\}$

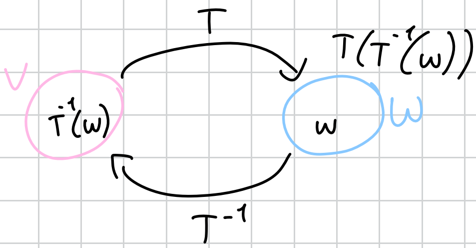
Bevis begge veier

INVERTERBARE LINEÆRTRANSFORMASJONER

Definisjon

> la $T: V \to W$
>
> T er inverterbar hvis det finnes en lin. transf.
>
> $T^{-1}: W \to V$
>
> slik at $T \circ T^{-1}: V \to V$ er identitet i V
>
> og $T \circ T^{-1}: W \to W$ er identitet i W





Teorem 2 : 6.3

> $T: V \to W$ lin. transf. er inverterbar
>
> $\Longleftrightarrow$
>
> den er både injektiv og surjektiv

Forelesning 6

LINEÆRTRANSFORMASJONER I

Oppsummering fra forrige gang

- Definisjonen av lineærtransformasjoner
- Lineærtransformasjoner beverer lineærkombinasjoner
- Hvis to lineærtransformasjoner sammenfaller på en basis da er de like
- Komposisjon av lineærtransformasjoner
- Kjerne og rekkevidde, injektive og surjektive lineærtransformasjoner
- Injektiv $T \iff \ker(T) = \{0\}$
- Inverse av en lineærtransformasjon

Definisjon Rangen

$T: V \to W$ Lineær transformasjon

V, W endeligdimensjonale vektorrom

$\operatorname{rank}(T) = \dim(\operatorname{Ran}(T))$

Fundamental

Rangteoremet - TEOREM 6.3

La T lin. transf. $T: V \to W$

V, W vektorrom med endeligdimensjon

da $\dim(\operatorname{Ker}(T)) + \dim(\operatorname{Ran}(T)) = \dim(V)$

Bevis

Anta $\dim(V) = n$ og $\dim(\operatorname{Ker}(T)) = K$

Anta $u_1, \dots, u_k$ er basis for $\operatorname{Ker}(T)$

$u_1, \dots, u_k$ er lineært uavhengige da

$\exists\, u_{k+1}, \dots, u_n$ vektorer s.a. $u_1, \dots, u_k\, u_{k+1}, \dots, u_n$ er en basis for V (Teorem fra forrige uke)

Plan: Vi skal vise at

$\boxed{\begin{array}{l} T(u_{k+1}),\dots,T(u_n) \text{ er} \\ \text{en basis for } Ran(T) \end{array}}$

Da, $n = k$ er $\dim(Ran\, T)$
n $\dim(V)$
k $\dim(\ker T)$

$w \in \underbrace{T(V)}_{= Ran(T)}$ da $\exists v \in V$ s.a. $T(v) = w$

$v = r_1 u_1 + \dots + r_k u_k + r_{k+1} u_{k+1} + \dots + r_n u_n$

$T(v) = r_1 \underbrace{T(u_1)}_{=0} + r_k \underbrace{T(u_k)}_{=0} + r_{k+1} T(u_{k+1}) + r_n T(u_n)$

$T(V) = r_{k+1} T(u_{k+1}) + \dots + r_n T(u_n)$

$Ran(T) \subset Span\{T(u_{k+1}), \dots, T(u_n)\}$

men også hver $\tilde{w} = a_{k+1} T(u_{k+1}) + \dots + a_n T(u_n) = T(\underbrace{a\, u_{k+1} + \dots + a_n u_n}_{\in T(V)})$

$Span\{T(u_{k+1}), \dots, T(u_n)\} \subset Ran(T)$

da $Span\{T(u_{k+1}) \dots T(u_n)\} = Ran(T)$

Nå må vise at $T(u_{k+1}) \dots T(u_k)$

er lin. uavhengige

$\beta_{k+1} T(u_{k+1}) + \dots + \beta_n T(u_n) = 0$

$T(\underbrace{\beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_n u_n}_{\in Ker(T)}) = 0$

$\beta_{k+1} u_{k+1} + \dots + \beta_n u_n$

$= \beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k$

$\beta_1 u_1 + \dots + \beta_k u_k - \beta_{k+1} u_{k+1} + \dots - \beta_n u_n = 0$

$u_1 \dots u_n$ lin uavhengige

$\Rightarrow \beta_1 = 0 \quad \beta_k = 0 \quad \beta_{k+1} = 0 \dots \beta_n = 0$

da $T(u_{k+1}) \dots T(u_n)$ er lin. uavhengige

Rangteorem for matriser

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad V = \mathbb{R}^n \quad T(u) = Au \quad A_{m \times n}$ tall

$\text{Ran}\, T = \text{Col}(A)$

$\text{Ker}\, T = \text{Ker}(A)$

Rangteorem $\dim(\ker(A)) + \dim(\text{Col}(A)) = n$

La $T: V \to W$ lin. transf.

Ser vi på ligningen

$$T(x) = 0$$

(Finn $x \in V$ s.a. $T(x) = 0$)

Kalles for homogen ligning

En annen type ligning er

$$T(x) = b \qquad b \in W$$

der b er gitt og vi må finne

$x \in V$ hvis de eksisterer s.a. $T(x) = b$

Kalles inhomogen ligning

Teorem 6: 6.3 Løsninger til inhomogen ligning

Anta $T: V \to W$ lin. transf. og
$b \in W$ og vi ser på $T(x) = b$

Da hvis $a \in V$ er løsning av $T(x) = b$
(dvs. $T(a) = b$) Da er

$a + u$ løsning med $u \in \text{Ker}(T)$

$T(a+u) = T(a) + T(u) = b + 0 = b$

Oversett dette for

$$Ax = b \qquad Ax = 0$$

Neste uke

Sek 6.4 Koordinatvektor i basis $\mathcal{B}$

$v \in V$ Vi har en basis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$

$v = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

vektor
v i basis $\mathcal{B}$

Eksempel

$p(x) = 1 + 2x + x^2 \in P_2$

$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ $\tilde{\mathcal{B}} = \{1, 1+x, (1+x)^2\}$

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [p]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Forelesning 7

LINEÆRTRANSFORMASJONER II

6.4 Koordinater og matriserepresentasjonen

La V være et vektorrom av dimensjon n.

Basis for V: $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

Et hvert element i V kan uttrykkes entydig ved tall $v_1, \ldots, v_n$ som

$$v = v_1 b_1 + v_2 b_2 + \ldots + v_n b_n$$

v_i kalles koordinater. Vektoren i $\mathbb{R}^n$ av disse v_i

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Basis
- utspenner hele rommet
- basiselementene er lineært uavhengig

Teorem 6.4.1

Vi kan tenke på $[v]_{\mathcal{B}}$ som en lineæravbildning fra V til $\mathbb{R}^n$. $T(v) = [v]_{\mathcal{B}}$

$T(v)$ er en **isomorfi**
En isomorfi mellom to vektorrom er en lineærtransformasjon som er både injektiv og surjektiv

Eksempel

La $V \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ være 2×2-matriser A slik at $a_{21} = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}. \text{ En basis } \mathcal{B} = \left\{ \overset{b_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}, \overset{b_2}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}, \overset{b_3}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

$$A = \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3$$

Hvis $v \in V$ er $v = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vektorrom av dimensjon 3

Matriserepresentasjoner

La oss innføre to vektorrom V og V' og la T være en lineæravbildning

$$T: V \to V'$$

La V og V' ha basiser

$$B = \{b_1, \dots, b_n\} \text{ og } B' = \{b_1', \dots, b_n'\}$$

Spesielt kan vi anvende T på b_i.

$T(b_i)$ må ha et entydig sett av koordinater.

$$T(b_i) = a_{1i} b_1' + a_{2i} b_2' + \dots + a_{mi} b_m', \; i = 1, \dots, n$$

slik at

$$[T(b_i)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}, \; i = 1, \dots, n$$

Definer $m \times n$-matrisen (A) der søyle i er $[T(b_i)]_{B'}$

$$[T]_{B' \leftarrow B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Hvis $V = V'$ og $B = B'$ skriver vi kun

$$[T]_B \text{ for } [T]_{B \leftarrow B}$$

La oss beskrive $T(v)$ for vilkårlig v. Vi skriver

$$v = v_1 b_1 + v_2 b_2 + \dots + v_n b_n$$

Fordi T er en lineæravbildning

$$T(v) = T(v_1 b_1 + \dots + v_n b_n) = v_1 T(b_1) + v_2 T(b_2) + \dots + v_n T(b_n)$$

$$= v_1(a_{11} b_1' + a_{21} b_2' + \dots + a_{m1} b_m') + v_2 (a_{12} b_1' + a_{22} b_2' + \dots + a_{m2} b_m') + \dots + v_n(a_{1n} b_1' + a_{2n} b_2' + \dots + a_{mn} b_m')$$

$$= (a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \dots + a_{1n} v_n) b_1' + (a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{2n} v_n) b_2'$$

$$+ \dots + (a_{m1} v_1 + a_{m2} v_2 + \dots + a_{mn} v_n) b_m'$$

Dette belyses i Teorem 6.4.2

$$[T(v)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} v_1 + a_{12} v_2 + \dots + a_{1n} v_n \\ a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \dots + a_{2n} v_n \\ \vdots \\ a_{m1} v_1 + a_{m2} v_2 + \dots + a_{mn} v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [T]_{B' \leftarrow B} \cdot [v]_B$$

Eksempel

La V være 2.gradspolynomer med basis

$$B = \{ \overset{b_1}{1}, \overset{b_2}{x}, \overset{b_3}{x^2} \}$$

Hvis $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$[p(x)]_B = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Definerer en lineæravbildning $T: V \to V$

$$T(p(x)) = p(x) + p'(x)$$

Hva står foran

$$[T(b_1)]_B = [1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 1 + 0x + 0x^2$$

$$[T(b_2)]_B = [x+1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 1 + x + 0x^2$$

$$[T(b_3)]_B = [x^2 + 2x]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad 0 + 2x + x^2$$

$$[T]_{B \leftarrow B} = [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagram

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "v \mapsto [v]_B"'] & V' \arrow[d, "v' \mapsto [v']_{B'}"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "[T]_{B' \leftarrow B}"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$\dim V = n$

$\dim V' = m$

Nullrom til en $m \times n$-matrise

$\mathrm{Nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ Nullrommet til A

$\mathrm{Col}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : y = Ax, x \in \mathbb{R}^m\}$ Søylerommet til A

Fra tidligere i kurset

$\mathrm{Ran}(T) = \{y \in V' : y = Tx, x \in V\}$

$\mathrm{Ker}(T) = \{x \in V : T(x) = 0\}$

$\mathrm{Col}([T]_{B' \leftarrow B}) = \{[y]_{B'} : y \in \mathrm{Ran}(T)\}$

$\mathrm{Nul}([T]_{B' \leftarrow B}) = \{[x]_B : x \in \mathrm{Ker}(T)\}$

Oppsummering

Vi oppsummerer et resultat vi har utledet

Teorem 6.4.3 - Søylevektorene i matrisen

$[T]_{B' \leftarrow B}$. La $T : V \to V'$ være en lineæravbildning.

La $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ og $B' = \{b_1', b_2', \dots, b_m'\}$ dvs $\dim V = n$ og $\dim V' = m$.

Søyle j i $[T]_{B' \leftarrow B}$ er koordinatvektorene til $T(b_j)$ i basis B. Det vil si

$$[T]_{B' \leftarrow B} = \left[[T(b_1)]_{B'}, [T(b_2)]_{B'}, \dots, [T(b_n)]_{B'} \right]$$

Matrise til sammensetning

$$\begin{array}{lcccccc} & V & \xrightarrow{T_1} & V' & \xrightarrow{T_2} & V'' \\ \text{Basis} & B & & B' & & B'' \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} T = T_2 \circ T_1 \\ T(v) = T_2(T_1(v)) \end{array}$$

$$[T(v)]_{B''} = [T_2(\overbrace{T_1(v)}^{w})]_{B''} = [T_2(w)]_{B''} = [T_2]_{B' \leftarrow B''} \cdot [w]_{B'}$$

$$[w]_{B''} = [T_1(v)]_{B'} = [T]_{B' \leftarrow B} \cdot [v]_B$$

$$[T(v)]_{B''} = [T_2]_{B'' \leftarrow B'} [T]_{B' \leftarrow B} \cdot [v]_B$$

Siden $[T(v)]_{B''} = [T]_{B'' \leftarrow B} \cdot [v]_B$

Derfor er $[T]_{B'' \leftarrow B} = [T_2]_{B'' \leftarrow B'} \cdot [T_1]_{B' \leftarrow B}$

Forelesning 8

LINEÆRTRANSFORMASJONER II

Rakk ikke sist

$[T^{-1}]_{B' \leftarrow B} = \left([T]_{B \leftarrow B'}\right)^{-1}$

6.5 Overgangsmatriser

La $id: V \to V$ være identitestransformasjon på V
som oppfyller $id(v) = v$ for alle $v \in V$.

La både B og B' være basiser for V.
Så tar vi $T = id$

$[id(v)]_{B'} = [id]_{B' \leftarrow B} \cdot [v]_B$

Men $id(v) = v$

$[v]_{B'} = [id]_{B' \leftarrow B} \cdot [v]_B$ Skifter basis

Så $[id(v)]_{B' \leftarrow B}$ er matrisen som gjør om koordinatvektoren
i B-basis til koordinatvektor i B'-basis.

Teorem 6.5.1 – Finne overgangsmatrise

La nå $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ og $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ være basiser for V.

Alternativ 1: Bruker tidligere resultat på $T = id$.

$[id]_{C \leftarrow B} = \left[[b_1]_C, [b_2]_C, \ldots, [b_n]_C\right]$ $id(b_1) = b_1$

Alternativ 2: Går via en tredje basis som
vi kaller standardbasis S. Vi har

$$\begin{aligned}
[id]_{C \leftarrow B} &= [id]_{C \leftarrow S} \cdot [id]_{S \leftarrow B} \\
&= \left([id]_{S \leftarrow C}\right)^{-1} \cdot [id]_{S \leftarrow B} \\
&= \left[[c_1]_S, [c_2]_S, \ldots, [c_n]_S\right]^{-1} \cdot \left[[b_1]_S, [b_2]_S, \ldots, [b_n]_S\right]
\end{aligned}$$

Digresjon

Basisvektor

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad [b_1]_S = 1c_1 + (-1)c_2 + 2c_3 + 3c_4$$

$$= 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eksempel 6.5.1

Finne overgangsmatrisen $[id]_{C\leftarrow B}$ fra $B = \{b_1, b_2\}$ til $C = \{c_1, c_2\}$ for $V = \mathbb{R}^2$, der $b_1 = (2,1)$, $b_2 = (1,3)$, $c_1 = (-1,0)$, $c_2 = (0,-1)$.

Merk at B og C er uttrykt i standardbasis

$$S = \{e_1, e_2\} = \{(1,0), (0,1)\}$$

Så $b_1 = 2 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2$, $b_2 = 1 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2$

$$c_1 = (-1) \cdot e_1 + 0 e_2, \quad c_2 = 0 e_1 + (-1) \cdot e_2$$

$$[id]_{S\leftarrow C} = \left[[c_1]_S, [c_2]_S\right] = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[id]_{S\leftarrow B} = \left[[b_1]_S, [b_2]_S\right] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[id]_{C\leftarrow B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Dette betyr at hvis en vektor $v \in V$ $(=\mathbb{R}^2)$ er representert som

$$v_B = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$v = v_1 b_1 + v_2 b_2$, så vil den kunne skrives om som
$v = w_1 c_1 + w_2 c_2$ ved at

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}}_{\text{Overgangsmatrisen}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Eksempel Basisskifte på polynomer

La $\mathbb{P}_4$ være polynomer av grad ≤ 4.
$\mathbb{P}_4$ er et vektorrom

En basis for $\mathbb{P}_4$
$B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$, $\dim \mathbb{P}_4 = 5$

En annen basis er
$B' = \{1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3, (1+x)^4\}$

Vi vil finne

$$[id]_{B' \leftarrow B}$$

Bruker alternativ 1 i Teorem 6.5.1

$$[id]_{B' \leftarrow B} = \left[[1]_{B'}, [x]_{B'}, \dots, [x^4]_{B'} \right]$$

Kan bruke $[id]_{B' \leftarrow B} = \left([id]_{B \leftarrow B'} \right)^{-1}$

For

$$[1]_B = [\overset{b_1}{1}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\overset{b_2'}{1+x}]_B = [\overset{1}{1} \cdot b_1 + \overset{x}{1} \cdot b_2]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\overset{b_3'}{(1+x)^2}]_B = [\overset{b_1}{1} + \overset{2b_2}{2x} + \overset{b_3}{x^2}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\overset{b_4'}{(1+x)^3}]_B = [\overset{b_1}{1} + \overset{3b_2}{3x} + \overset{3b_3}{3x^2} + \overset{b_4}{x^3}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[(1+x)^4]_B = [1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[id]_{B \leftarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Må finne den inverse fordi $[id]_{B' \leftarrow B} = \left([id]_{B \leftarrow B'} \right)^{-1}$

Den inverse blir
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.5 Geometrisk blikk på indreprodukt, norm og produksjon i $\mathbb{R}^n$

Vektorer $v=(1,2) \in \mathbb{R}^2$ og $u=(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$

Lengden av en vektor (euklids lengde)

(lengden av v) $= \|v\| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

$\|u\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$

Generalisering til $\mathbb{R}^n$

$w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$

$\|w\| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_n^2}$

Indreprodukt

Hvis $v=(v_1,v_2)$, $u=(u_1,u_2)$

$\langle v,u \rangle = v_1u_1 + v_2u_2$

i $\mathbb{R}^n$

$\langle v,u \rangle = v_1u_1 + v_2u_2 + \ldots + v_nu_n$

$\langle v,v \rangle = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2$

$\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$ Normen/lengden