Forelesning 18
KOMBINATORIKK

Innhold

- Litt repetisjon fra forelesning 17
- Ordnede utvalg med repetisjon
- Uordnede utvalg med repetisjon
- Overtelling og anagrammer
- Pascals trekant
- Binomer

Oppsummering så langt

Hovedprinsippene: Multiplikasjonsprinsippet og telling av ordninger/permutasjoner.
n elementer, vi skal velge k.

Vi har nå sett på:

ordnede utvalg uten repetisjon: $\frac{n!}{(n-k)!}$
og
uordnede utvalg uten repetisjon: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Vi så litt på: ordnede utvelg med repetisjon: n^k

Merk: med repetisjon/tilbakelegging kan vi $k>n$, men uten repetisjon gir formlene bare mening for $k \leq n$.

Ordnede utvalg, med repetisjon/tilbakelegging

Vi har en streng av k symboler, hvert symbol skal velges fra en mengde med n elementer, og vi tillater et samme element velges flere ganger (med repetisjon/tilbakelegging).

Da finnes n^k valg. Dette følger av multiplikasjonsprinsippet.

Eksempel

Antall bitstrenger av en lengde 3 er $2^3 = 8$ (og disse er 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111).

Eksempel

Antall bitstrenger av en lengde 6 er $2^6 = 64$.

Eksempel

Antall bokstavstrenger av lengde 3 med norske bokstaver er $29^3 = 24389$ (aaa, aab, aac, ..., ååå).

Eksempel (fra sist)

Hvor mange passord med 4 tegn, kan vi lage når vi velger tegn fra alfabetet

$$\{a,\ldots,z,0,\ldots 9,!,\$,\%,\#\}?$$

Det er $26+10+4=40$ mulige tegn.
Så antall passord:

$$40^4 = 2\,560\,000$$

Hva om minst en bokstav?
Antall uten bokstaver: $14^4 = 38416$.
Så totalt $40^4 - 14^4 = 2521\,584$ passord med minst en bokstav.

Eksempel fortsettelse

La oss nå si at passordet skal ha to tegn. Vi velger blant 40 (26 bokstaver, og 14 andre tegn), men minst ett av de må være en bokstav.

Metode 1: (som vi gjorde for 4 tegn):
$40^2 - 14^2 = 1600 - 196 = 1404$

Metode 2: Hvis første skal være bokstav (26 muligheter) og andre vilkårlig (40 muligheter): $26 \cdot 40 = 1040$ muligheter.

Hvis første vilkårlig og andre bokstav: Også $40 \cdot 26 = 1040$ muligheter

MEN: alle passordene som består av to bokstaver er nå telt 2 ganger!

Hvor mange passord med to bokstaver: $26 \cdot 26 = 676$

Og: $(2 \cdot 1040) - 676 = 1404$

Eksempel fortsettelse

Hva om to bokstaver (ikke nødvendigvis ulike), ett spesialsymbol og ett tall?

Spesialsymbolet: 4 måter.
Tallet: 10 måter.
Bokstavene: $26^2 = 676$ måter.

Hvis to ulike bokstaver: $676 - 26 = 26 \cdot 25 = 650$ valg.
Rekkefølger: $4! = 24$.
Gir $650 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 24 = 624000$.

Hvis to like bokstaver: 26 valg.
Rekkefølger: $4!/2 = 12$.
Gir $26 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 12 = 12480$.

Totalt: 636 480 passord.

Oppgaver tavle

En håndballklubb har 13 spillere.

1) Hvor mange måter kan et laguttak (7 spillere) gjøres på?

$$\binom{13}{7} = \frac{13!}{7!\,6!} = 1716$$

2) Laget har 3 målvakter, og 10 utespillere. Hvor mange måter kan et laguttak (1 målvakt og 6 utespillere) gjøres på?

$$3 \cdot \binom{10}{6} = 3 \cdot 210 = 630$$

3) Det er en av utespillerne, Henny, som må være med på laget. Hvor mange måter kan da et laguttak gjøres på?

$$3 \cdot \binom{9}{5} = 126 \cdot 3 = 378$$

4) Hvis du trekker fem kort fra en kortstokk (52 kort). Hva er sannsynligheten for at alle fem er røde?

$$\frac{\text{Rød: } \binom{26}{5}}{\text{Alle: } \binom{52}{5}} \approx 0{,}025$$

Uordnede utvalg, med repetisjon/tilbakelegging eksempel

Iskuler: Du vil ha to stykker og det er fire smaker (Sjokolade, Jordbær, Vanilje og Banan). Hvor mange muligheter?

Svar: 10: SS, SJ, SV, SB, JJ, JV, JB, VV, VB, BB

Vi merker oss: $10 = \binom{5}{3} = \binom{5}{2}$. Hvorfor??

Du har fire bokser merket S, J, V og B. Du har to kuler som du skal velge fra boksene. Du kan velge flere i en boks. Rekkefølgen teller ikke.

Stjerner og streker-metoden: Tre streker skiller de fire bokstavene, tre stjerner symboliserer de to iskulene.

Så *||*| symboliserer en kule fra boks 1, og en kule i boks 3, altså en sjokolade, og en vanilje.

Eksempel fortsetter

De 10 mulighetene symboliseres da slik

SS	**|||	SJ	*|*||
SV	*||*|	SB	*|||*
JJ	|*||*	JV	|*|*|
JB	|*||*	VV	||**|
VB	||*|*	BB	|||**

Altså: 5 posisjoner, og du skal velge hvor de stjernene (iskulene) eller de tre strekene (skille mellom boksene) skal plasseres. Det gir

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10 \text{ muligheter.}$$

Nytt eksempel

Iskuler: Du vil ha tre kuler og det er fire smaker (Sjokolade, Jordbær, Venilje og Banan). Hvor mange muligheter?

De 20 mulighetene symboliseres da slik:

SSS	* * * | | |	SSJ	* * | * | |
SSV	* * | | * |	SSB	* * | | | *
SJJ	* | * * | |	SJV	* | * | * |
SJB	* | * | | *	SVV	* | | * * |
SVB	* | | * | *	SBB	* | | | * *
JJJ	| * * * | |	JJV	| * * | * |
JJB	| * * | | *	JVV	| * | * * |
JVB	| * | * | *	JBB	| * | | * *
VVV	| | * * * |	VVB	| | * * | *
VBB	| | * | * *	BBB	| | | * * *

Det er $\binom{6}{3} = 20$ muligheter siden du har 6 posisjoner, og skal velge tre av de å putte skillet mellom boksene | i, eller velge de tre av de å putte skillet mellom boksene | i, eller velge de tre å putte * i

Uordnede utvalg, med repetisjon/tilbakelegging

Formel: Du skal gjøre k valg av n objekter med repetisjon/tilbakelegging, da finnes

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

muligheter (Tenk på k iskuler, $n-1$ vegger mellom boksene).

Eksempel

Du har 5 servere, som du skal fordele 4 (like) jobber på. Altså, du har 5 bokser (servere) som du skal fordele 4 kuler (jobber) på. Så $n=5$ og $k=4$. Vi får da $\binom{5+4-1}{4} = \binom{8}{4} = 70$ valg.

Oppgaver

Du vil ha fire stykker og det er fem smaker (Sjokolade, Jordbær, Vanilje, Banan og Pistasj)

Du vil ha minst fire forskjellige smaker. Hvor mange muligheter?

Av hver smak vil du ha maks tre kuler. Hvor mange muligheter?

Av hver smak vil du ha maks to kuler. Hvor mange muligheter?

Du vil ha minst tre forskjellige smaker. Hvor mange muligheter?

$k=$ 4 kuler / $n=$ 5 smaker

4 like	$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = \frac{5!}{4!1!} = 5$
3 like + 1	$5 \cdot 4 = 20$
2 like + 2 like	$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$
2 like + 1 + 1	$5 \cdot \binom{4}{2} = 30$
4 like + (1+1+1+1)	5

Oppsummering

Ordnet utvalg uten repetisjon/tilbakelegging:

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Uordnet utvalg uten repetisjon/tilbakelegging

$$\binom{n}{k}$$

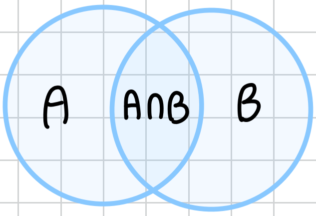
Ordnet utvalg med repetisjon/tilbakelegging

$$n^k$$

Uordnet utvalg med repetisjon/tilbakelegging

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Induksjons-eksklusjonsprinsippet (for to mengder)



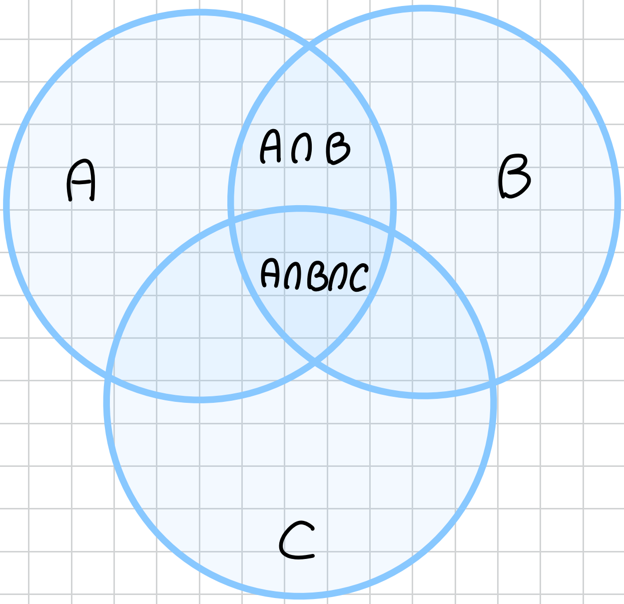
Hvordan telle antall elementer i $A \cup B$?
(La $|M|$ være antall elementer i en mengde M).

Da er $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Eksempel

I passord-eksempelet vårt (med 40 tegn, hvorav 26 bokstaver), la A være mengden av passord med bokstav som første tegn og vilkårlig andre tegn, og B mengden av passord med vilkårlig første tegn og bokstav som andre tegn.
Da er
$|A \cup B| = |A + B) - |A \cap B| = (26 \cdot 40) + (40 \cdot 26) - (26 \cdot 26) = 1404$.

Induksjons-eksklusjonsprinsippet (for tre mengder)



Hvordan telle antall elementer i $A \cup B \cup C$?

(La $|M|$ være antall elementer i en mengde M).

Da er
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$