Teoriforelesning 6
FØLGER II

Differenseligninger

- Hva menes med differenseligninger
- Ulike typer differensialligninger
  - Lineære og ikke-lineære
  - Homogene og inhomogene
- En differenselignings orden
- Hvorden kan vi finne løsning til differensligninger?
- Hva kan vi bruke differensligninger til?
  - Eksempler
- En modell som gir et lineært ligningssystem

Løsning av andre ordens differensligninger

La a, b, c være reelle tall, der $a \neq 0$. For å løse differensligningen

$$ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$$

kan man løse den tilhørende **karakteristiske ligningen**

$$ar^2 + br + c = 0$$

med hensyn på tallet r. Den generelle løsningen av diferensligningen er

$$x_n = \begin{cases} Cr_1^n + Dr_2^n & \text{hvis der er reelle røtter } r_1 \text{ og } r_2 \\ Cr^n + Dnr^n & \text{hvis der er en reell rot } r \\ \rho^n[C\cos(n\theta) + D\sin(n\theta)] & \text{hvis der er røtter } r = \rho e^{i(\pm\theta)} \end{cases}$$

Inhomogene ligninger

$$\boxed{ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f(n) \quad (7)}$$

Let etter en løsning x_n^s som ligner på $f(n)$ →

Anta at x_n^s er en eller annen spesiell ("partikulær") løsning av (7), og la x_n^h være den generelle løsningen av den **tilsvarende homogene ligningen**, altså ligningen der vi erstatter $f(n)$ med 0 og holder a, b, c uforandret. Den generelle løsningen av (7) er da

$$x_n = x_n^h + x_n^s$$

$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, $x_0 = 1$

- Ikke-lineær
- Homogen
- 1.orden

$\{x_n\}$, $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2}$

$$x_{n+1} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)}_{g(x_n)} = 0$$

Gjør den ikke-lineær

$x_{n+1} - 2x_n = 0$, $x_1 = 2$
$x_{n+1} = 2x_n$
$x_n = 2^n$

- Lineær
- Homogen
- 1.orden

$x_{n+2} + 2x_{n+1} - 35x_n = 0$ $\boxed{x_1 = 2,\ x_2 = 34}$

Leter etter løsning på formen $x_n = r^n$
Sett inn r^n i ligningen

$$r^{n+2} + 2r^{n+1} - 35r^n = 0$$

$$r^n\underbrace{(r^2+2r-35)}_{=0} = 0$$

$r \neq 0$, triviell 0-løsning

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4\cdot 35}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -7 \end{cases}$$

$$x_n^{(1)} = 5^n \quad x_n^{(2)} = (-7)^n$$

Generell løsning

$$x_n = A\cdot 5^n + B(-7)^n$$

$$x_1 = A\cdot 5 - B\cdot 7 = 2$$
$$x_2 = A\,25 + B\,49 = 34$$

$$\left.\begin{aligned} 5A - 7B &= 2 \\ 25A + 49B &= 34 \end{aligned}\right\} \text{ gir } A = \frac{4}{5},\ B = \frac{2}{7}$$

$x_{n+2} - 2x_{n-1} + 2x_n = 0$ $\boxed{x_1 = 1 \quad x_0 = 0}$

$x_n = r^n$ gir $r^{n+2} - 2r^{n+1} + 2r^n = 0$
$r^n(r^2 - 2r + 2) = 0$

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm \sqrt{-1}$$

$$= 1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$r_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
$r_2 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
$x_n^{(1)} = r_1^n$
$x_n^{(2)} = r_2^n$

Generell løsning

$$x_n = Ar_1^n + Br_2^n = A(\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}} + B(\sqrt{2})^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$$
$$= A(\sqrt{2})^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) + B(\sqrt{2})^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$
$$= (A+B)(\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i(A-B)(\sqrt{2})^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$
$$= C(\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + D(\sqrt{2})^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	1	2	2	0	-4

$$x_0 = C(\sqrt{2})^0\cos(0) + D(\sqrt{2})^0\sin(0) = C = 0$$
$$x_1 = D\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\pi}{4} = D\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = D = 1$$
$$x_n = (\sqrt{2})^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 2n^2 + 1 = f(n)$$

Prøv å finne $x_n^s = An^2 + Bn + C$

Sett inn $x_n^{(2)}$:

$$A(n+2)^2 + B(n+2) + C - 2(A(n+1)^2 + B(n+1) + C) + 2(An^2 + Bn + C)$$
$$= An^2 + Bn + 2A + C = 2n^2 + 1 \text{ for alle } n$$

Da må $A = 2, B = 0$ og $2A + C = 1 \Rightarrow C = -3$ $\boxed{x_n^2 = 2n^2 - 3}$

$$x_n = 2n^2 - 3 + (\sqrt{2})^n\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Temaforelesning 6
FØLGER II

Nøkkelbegrep

- Fikspunktiterasjon
- Banachs fikspunktteorem for matriser
- Jacobi-metoden

Fikspunktiterasjon

Følgen $x_{n+1} = F(x_n)$ med $F(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ og f.eks. $x_0 = 1$ konvergerer mot $\sqrt{2}$ (den positive løsningen av $x = F(x)$).

$F'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$, så $0 \leq |F'(x)| < 1$ når x er nær $\sqrt{2}$.

$x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{x}$

$x = \underbrace{\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)}_{g(x)}, \; x \neq 0$

$x_{n+1} = g(x_1)$, x_0 gitt

Banachs fikspunktteorem for matriser

Del 1

La M være en diagonaliserbar $n \times n$ matrise med reelle egenverdier i intervallet $(-1,1)$. Da vil

$$\lim_{k \to \infty} M^k x = 0$$

Del 2

La M være en diagonaliserbar $n \times n$ matrise med reelle egenverdier i intervallet $(-1,1)$. Definer $a_k = M a_{k-1} + c$.
Da vil a_k konvergere mot den entydige løsningen til

$$x = Mx + c$$

$M\vec{x}$

$$\vec{x}_{n+1} = M^k \vec{x}_n \qquad M = PD_EP^{-1} \qquad D_E^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \qquad |\lambda_i| < 1$$

$$M^k\vec{x} = PD_E^k(\underbrace{P^{-1}\vec{x}}_{=\vec{y}}) = PD_E^k\vec{y}$$

$$= P\begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} \lambda_1^k y_1 \\ \lambda_2^k y_2 \\ \lambda_3^k y_3 \end{bmatrix} = P\left(\begin{bmatrix} \lambda_1^k y_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_2^k y_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n^k y_n \end{bmatrix}\right)$$

$$= \lambda_1^k P\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2^k P\begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \lambda_n^k P\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Hva skjer når $k \to \infty$?
- Alle ledd går mot 0
- Alle λ er mindre enn 1 i absoluttverdi

$$\vec{a}_k = Ma_{k-1} + \vec{c}$$

$\vec{a}_0$ gitt ; $\vec{a}_1 = M\vec{a}_0 + \vec{c}$

$$\vec{a}_2 = M\vec{a}_1 + \vec{c} = M^2\vec{a}_0 + \vec{c}$$
$$\vdots$$
$$\vec{a}_k = M\vec{a}_k + \vec{c} = M^k\vec{a}_0 + \vec{c}$$

$\vec{a}_k$ konvergerer mot den entydige løsningen til $\vec{x} = M\vec{x} + \vec{c}$

Hvordan kan vi vite at det er en entydig løsning?
- Determinanten til matrisen er ikke lik 0. Da er den inverterbar.

$$I\vec{x} = M\vec{x} + \vec{c}$$
$$(I-M)\vec{x} = \vec{c}$$
$$\det(I-M) \neq 0$$
$$\det(\lambda I - M) = 0$$

Hvordan kan vi være sikker på at den ikke er lik 0?
- Fordi $\lambda = 1$ er <u>ikke</u> egenverdi

Jacobi-metoden

Skal løse $Ax = b$

Skriv $A = D + L + U$ som gir at $Ax + b$ kan skrives som

$$Dx = b - (L+U)x \quad \text{eller} \quad x = D^{-1}(b - (L+U)x)$$

Med $M = -D^{-1}(L+U)$ og $c = D^{-1}b$ kan dette skrives som

$$x = Mx + c$$

Samme struktur som i Banachs fikspunktteorem

D = diagonalelementene i A
L = lower triangle
U = upper triangle

Eksempel

$3x + y = 5$
$x + 2y = 5$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = D + L + U = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = (D+L+U)\vec{x} = D\vec{x} + (L+U)\vec{x} = \vec{b}$$
$$\vec{x} + D^{-1}(L+U)\vec{x} = D^{-1}\vec{b}$$
$$\vec{x} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{M}\vec{x} + \underbrace{D\vec{b}}_{\vec{c}}$$

$x = 1$
$y = 2$

Eksempel

Løs $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

Eksakt løsning $x = 1, y = 2$

Finn $M = -D^{-1}(L+U)$ og $c = D^{-1}b$

Sjekk at M har egenverdier i $(-1,1)$

Sett opp iterasjonsskjemaet $x_{n+1} = Mx_n + c$, med $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og løs med algoritmene i Jupyter Notebook.

Bytt om radene, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$, og prøv med Jupyter Notebook.

$$M = -D^{-1}(L+U) = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Regn ut egenverdiene

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{6} = 0 \text{ for } \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Regn ut egenvektorer

$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$-\frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{1}{3}y = 0$$
$$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{\sqrt{6}}y = 0$$
$$\frac{1}{3}y = -\frac{1}{\sqrt{6}}x$$
$$y = -\frac{3}{\sqrt{6}}x$$

$\begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ -3 \end{bmatrix} t, t \neq 0$

$\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

$$\frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{1}{3}y = 0$$
$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y = 0$$

$\begin{bmatrix} \sqrt{6} \\ 3 \end{bmatrix} t, t \neq 0$

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \quad D_E = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad C = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$M = PD_EP^{-1}$ ← For å regne ut dette må P være inverterbar (og det er den)

$$x_{n+1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\vec{x}_n + \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}, \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$x + 2y = 5$$
$$3x + y = 5$$

$A_{ny} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$M_{ny} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6 = 0$

$\lambda = \pm\sqrt{6}$

$\xrightarrow{j} \begin{bmatrix} a_{ij} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $\quad |a_{ii}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{ik}|$ Diagonal-dominant