Teoriforelesning 7

KONTINUERLIGE FUNKSJONER

Nøkkelbegreper

- Kontinuitet
- Grenseverdier
- Ekstremalverdisetningen for lukkede interveller
- Inverse funksjoner

Injektiv/invers funksjon

$y = f(x)$ injektiv betyr til hver $y \in V_f$ finnes en og bare en $x \in D_f$.
Det betyr at x er en funksjon v y.

$x = f(y)$ kalles den inverse funksjonen til f.

$x \in D_f \xrightarrow{f} y = f(x) \in V_f \xrightarrow{f^{-1}} x$

i) $y = 2x + 1$

$x = \frac{y-1}{2}$

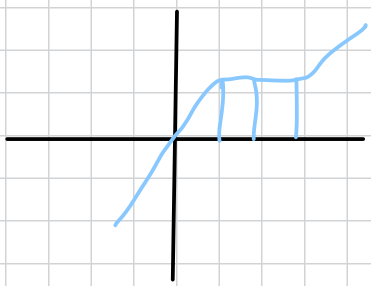
ii) $y = x^2 \quad D_f = \mathbb{R}$

Ingen invers funksjon

Hvis vi lar $D_f = [0, \rightarrow)$
så vil $x = \sqrt{y}$

Strengt voksende

$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ Strengt voksende → ekte større



voksende, ikke strengt voksende

Grenseverdier

Definisjon

i) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ betyr at til gitt $\varepsilon > 0$ finnes en x_ε slik at når $x > x_\varepsilon$ så er $|f(x) - L| < \varepsilon$

Eksempel

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x \geq 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

$$|f(x) - 1| = \left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{x+1} \right| = \frac{1}{x+1}$$

Velg $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Hva blir x_ε? $x_\varepsilon = 9$

$\varepsilon = \frac{1}{100}$ $x_\varepsilon = 99$

Eksempel

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ betyr at
til gitt $\varepsilon > 0$ finnes $\delta_\varepsilon > 0$
slik at når $0 < |x-a| < \delta_\varepsilon$
så er $|f(x) - L| < \varepsilon$

Kontinuerlig funksjon definisjon

f kontinuerlig i $x = a$ dersom

i) $f(a)$ eksisterer

ii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Bevis for (i)

Sett $c = \sup\{x \in [a,b] \mid f \text{ er begrenset på } [a,c]\}$

Anta $c < b$. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Det betyr at gitt $\varepsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ slik at
$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ for
$0 < |x - c| < \delta$
eller for $x \in [c + \delta)$

Bevis for (ii)

Vet at f er begrenset ved (i)

$M = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$

Anta at $f(x) < M$ for alle $x \in [a,b]$

$g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ kontinuerlig

Da er g begrenset ved (i)

$$\frac{1}{M-f(x)} < C$$

$$M - f(x) > \frac{1}{C}$$

$$f(x) < M - \frac{1}{C} < M$$

Temaforelesning 7
KONTINUERLIGE FUNKSJONER

Nøkkelbegreper
- ε-δ-definisjonen av kontinuerlige funksjoner
- Inverse funksjoner

Repetisjon fra teoritimen

Vi sier at $\lim_{x\to a} f(x) = L$ hvis vi for enhver $\varepsilon>0$ kan finne $\delta>0$ slik

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$$

Vi sier at $f(x)$ er kontinuerlig i punktet $x=a$ hvis

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Definisjon av kontinuitet

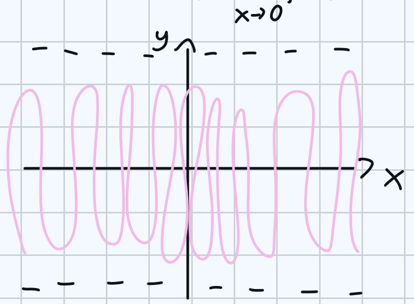
Anta at f er definert i punktet $x=a$. Vi sier at f er kontinuerlig i $x=a$ hvis vi for alle $\varepsilon>0$ kan finne en $\delta>0$ slik at

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

Eksempel

a) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$

i) Hva kan vi si om $\lim_{x\to 0} f(x)$?



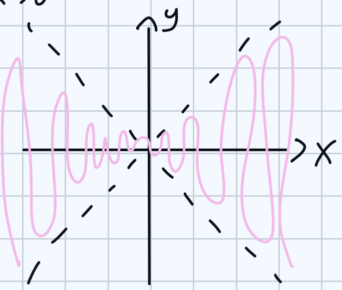
Ingen grenseverdi

ii) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

Er f kontinuerlig i $x=0$?
Nei!

b) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, $x\neq 0$

$\lim_{x\to 0} f(x)$?



$f(x)=\begin{cases}x\sin x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$

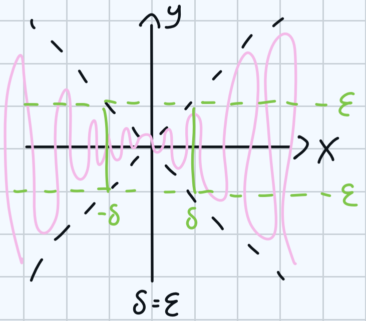
Funksjonen er kontinuerlig i $x=0$ hvis vi for enhver $\varepsilon>0$ kan finne $\delta>0$ slik at

$$0<|x-0|<\delta$$
$$\Downarrow$$
$$|f(x)-f(0)|<\varepsilon$$

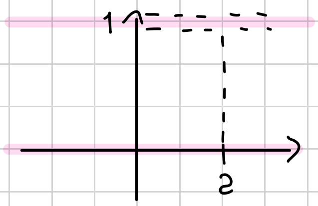
(Gitt $|x|<\delta$) $|f(x)|=|x\sin\frac{1}{x}|<\varepsilon$

Vi ser at $|x\sin\frac{1}{x}|\leq|x|$

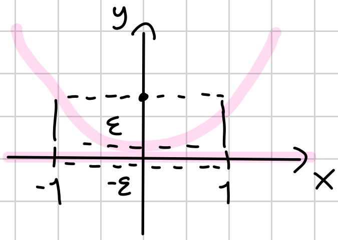
Så for $\varepsilon>0$ kan vi velge $\delta=\varepsilon$. Da vil $|x|<\delta \Rightarrow |x\sin\frac{1}{x}|\leq|x|<\delta=\varepsilon$



c) i) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$



ii) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$



Vi ser at hvis $|x-0| < \varepsilon$ så er

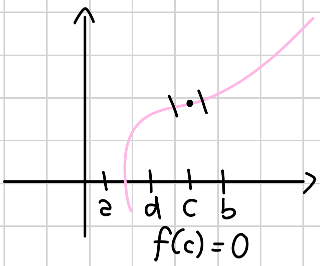
$$|f(x) - \underset{0}{f(0)}| = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

I begge tilfeller så er $|f(x)| < \delta^2$ $\boxed{\delta = f(\varepsilon)}$

Så gitt $\varepsilon > 0$ kan vi velge $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

Skjæringssetningen

Anta at $f(x)$ er kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ og $f(a)f(b) > 0$. Da er $f(c) = 0$ for minst en $c \in (a,b)$.



i) f kontinuerlig

ii) $f(a) < 0 < f(b)$

$(f(a) > 0 > f(b))$

Lemma

Anta at f er kontinuerlig i $x = c$ og at $f(c) \lessgtr 0$. Da finnes $\delta > 0$ slik at $f(x) \lessgtr 0$ for alle $x \in (c-\delta, c+\delta)$

Bevis

Anta at f er kontinuerlig i $x = c$ og at $f(c) > 0$.
For enhver $\varepsilon > 0$ finnes da $\delta > 0$ slik at
$0 < |c-x| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$ for alle $x \in (c-\delta, c+\delta)$.

Velg nå f.eks. $\varepsilon = \frac{f(c)}{2}$. Da finnes $\delta > 0$ slik at

$$x \in (c-\delta, c+\delta) \Leftrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

$$-\frac{f(c)}{2} < f(x) - f(c) < \frac{f(c)}{2} \Rightarrow \frac{f(c)}{2} < f(x) < \frac{3f(c)}{2}$$

Anta at $f(x)$ er kontinuerlig på intervallet $[a,b]$ og $f(a)f(b)<0$. Da er $f(c)=0$ for minst en $c\in(a,b)$.

Alternativt

Anta at $f(x)$ er kontinuerlig på intervallet $[a,b]$. Hvis k er et tall mellom $f(a)$ og $f(b)$, så finnes $c\in(a,b)$ slik at $f(c)=k$.

Bevis

Anta at $f(a)<0$ og $f(b)>0$.
Sett $S=\{x\in[a,b]: f(x)\leq 0\}$ og
$c=\sup S$ (minste øvre skranke).

Anta først at $f(c)>0$. Ved lemmaet er da $f(x)>0$ for $x\in(c-\delta,c+\delta)$ [evt. hvis $c=b$ så er $f(x)>0$ for $x\in(c-\delta,c+\delta)$].

I så fall er $c-\delta$ en øvre skranke for S. Dette er en motsigelse, for c er den minste øvre skranken for S.

Anta først at $f(c)<0$. Ved lemmaet er da $f(x)<0$ for $x\in(c-\delta,c+\delta)$

I så fall finnes $x>c$ slik at $f(x)<0$. Dette er en motsigelse, fordi c er en øvre skranke for S. ∎

$g(x)=f(x)-k$
$g(a)=f(a)-k$
$g(b)=f(b)-k$
$g(c)=f(c)-k=0 \Rightarrow f(c)=k$

Eksempel

Anta at f er kontinuerlig på $[0,1]$ og at $0\leq f(x)\leq 1$ for $x\in[0,1]$. Da finnes en $c\in[0,1]$ slik at

$$f(c)=c$$

Fikspunkt

Bevis

Bruk skjæringssetningen på funksjonen $g(x)=f(x)-x$