Forelesning 9

REKURSJON OG INDUKSJON

- Lukkede mengder og tillukninger av mengder
- Induktivt definerte mengder
  - → Mengder av heltall, formelle språk, ...
- Rekursivt definerte funksjoner
  - → Med en del eksempler, inkludert fakultetsfunksjonen og Fibonacci-tall

Endelige mengder er enkle å beskrive:

$A = \{a, b, c\}$ ← Kan liste opp alle elementer

Det samme for funksjoner og endelige mengder:

$$f: \quad a \to b, \quad b \to a, \quad c \to c$$

← Kan beskrive f ved å si hvordan den virker på hvert element

Uendelige mengder og funksjoner på disse er typisk verre

Viktige verktøy:

- Induktivt definerte mengder ← Bygge mengder steg for steg
- Rekursivt definerte funksjoner ← Følger strukturen til en induktivt definert mengde

Induktivt definerte mengder

Eksempel

La $A = \{1,3,5,7,\ldots\} \subseteq \mathbb{N}$ (Mengden av positive oddetall)

Vi kan "bygge" A med følgende oppskrift

1. Bevis-steg: Start med tallet 1
2. Induksjons-steg: Hvis n er med, ta og så med $n+2$

} Dette er en induktiv definisjon av A

Operasjoner og tilordninger

Over lagde vi nye tall fra gamle slik: $n \mapsto n+2$
Dette er en funksjon $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gitt ved $f(n) = n+2$, og er et eksempel på en operasjon på $\mathbb{N}$

funksjon hvor "input" og "output" er i samme mengde

Vi ser at for alle $a \in A$, så er $f(a) \in A$
Vi sier da at A er lukket under denne operasjonen

Eksempel

La $M = \{0,1,2\} \subseteq \mathbb{R}$.

La $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være operasjonen $f(x) = x+1$

M er ikke lukket under f, fordi $f(2) = 3$, og $3 \notin M$.

Den minste delmengden av $\mathbb{R}$ som inneholder M og som er lukket under f, er de naturlige tallene $\mathbb{N}$

Vi sier at $\mathbb{N}$ er tillukningen av M under operasjonen $f(x) = x+1$

Eksempel

Tillukningen av $M = \{1,3,5\}$ under $f(x) = x+2$ er mengden av positive oddetall

Uformell definisjon

En induktivt definert mengde er den minste mengden som inneholder en gitt basismengde, og som er lukket under én eller flere operasjoner

Mer formelt:

"univers"

① Velg en basismengde $M \subseteq U$ (Basis-steg)

② Velg en mengde operasjoner $f_1, f_2, \ldots f_n$ (Induksjonssteg)

③ Ta den minste mengden som inneholder M og som er lukket under operasjonene (Tilordningen)

Alternativt ③: finn en minste mengde $L \subseteq U$ slik at $M \subseteq L$ og $\forall x \in L, \forall i \in \{1,2,\ldots k\}: f_i(x) \in L$

Eksempeler på induktivt definerte mengder

$\mathbb{N}$ er induktivt definert:

Basismengde $M = \{0\}$ og operasjon $f(x) = x+1$

$\mathbb{Z}$ er induktivt definert:

Basismengde $M = \{0\}$ og operasjoner $f_1(x) = x+1$ og $f_2(x) = x-1$

Mengden av ikke-negative tall delelig med 42:

Basismengde $M = \{0\}$ og operasjon $f(x) = x+42$

Mengden av heltall større enn 2:

Basismengde $M = \{3\}$ og operasjon $f(x) = x+1$

Formelle språk

La A være en endelig mengde, som vi kaller et alfabet.

Eks: $A=\{a,b,c\}$

En streng av lengde $n \in \mathbb{N}$ er et n-tuppel av symboler fra A.

Eks: abba ← Skrives som "ord" istedet for som $\langle a,b,b,a \rangle$

Den tomme strengen $(n=0)$ kaller vi for Λ
↑ den greske bokstaven "Lambda"

Mengden av alle endelige strenger over alfabetet A kaller vi A^*

Eks: Hvis $A=\{0,1\}$ er $A^*=\{\Lambda,0,1,00,01,10,11,000,001,\ldots\}$

Definisjon

La A være et alfabet.

Da er S et formelt språk over A, dersom

$$S \subseteq A^*$$

Eksempel

Mengden av utsagnslogiske formler med opptil n variabler, er et språk over

$$A=\{P_1,P_2,\ldots P_n,\to,\wedge,\vee,\neg,(,)\}$$

Formelle språk defineres gjerne induktivt.

Da trenger vi <u>konkatenering</u> (sammenslåing) av strenger.

La $s \in A^*$ og $t \in A^*$ være strenger av hhv. lengde n og lengde m.

Da er st en streng av lengde $n+m$.

Skrives noen ganger som $s||t$

Eks: Konkateneringen av abba og cd er abbacd.

Eksempel på et induktivt definert formelt språk

La $A = \{a, b, c, \ldots, æ, ø, å\}$.

La basismengden være $M = \{\Lambda, a, \ldots, å\}$.

La $S \subseteq A^*$ være den minste mengden slik at

$$\forall \alpha \in A (\sigma \in S \rightarrow \alpha\sigma\alpha \in S)$$

"alfa" "sigma"

Hvilket formelt språk er dette?

Svar: Palindromene!

Eks: abba $\in S$ pop $\in S$ otto $\in S$

regninger $\in S$ morten $\notin S$ mnopqponm $\in S$

Rekursivt definerte funksjoner

<u>Tommelfingerregel</u>: På induktivt definerte mengder kan vi definere funksjoner rekursivt.

<u>Ide</u>: Definer hva funksjonen gjør med bevismengden.
For andre elementer, definer funksjonen <u>rekursivt</u>
(gå bakover til vi treffer bevismengden)

Eksempel

Fakultetsfunksjonen $n!$, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gitt ved $f(n) = n!$

Husk: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ for $n \geq 1$ og $0! = 1$

Rekursiv definisjon:

Basismengde $\{0\}$.
Definer $f(0) = 1$ og $f(n+1) = (n+1) \cdot f(n)$

$$f(3) = 3 \cdot f(2) = 3 \cdot 2 \cdot f(1) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot f(0) = 6$$