Forelesning 9

INDREPRODUKTROM I

Lengde av v ∈ $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$

$v = (v_1, v_2)$ $\quad$ $\text{lengde}(v) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

$v = (v_1, v_2, v_3)$ $\quad$ $\text{lengde}(v) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Lengde av v i $\mathbb{R}^n$

$v = (v_1, \dots, v_n)$ $\quad$ $\text{lengde}(v) = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$

$\|v\|$ norm av v

Avstand mellom to vektorer i $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$

$u, v \in \mathbb{R}^n$ $\quad$ $\|u - v\|$

Indreprodukt i $\mathbb{R}^2$

$v = (v_1, v_2)$ $\quad$ $u = (u_1, u_2)$

$\langle v, u \rangle = v \cdot u = u_1 v_1 + u_2 v_2$

Indreprodukt i $\mathbb{R}^n$

$v = (v_1, \dots, v_n)$ $\quad$ $u = (u_1, \dots, u_n)$

$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$

Normen

$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Vinkel

Cosinussetning

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\cos\theta \, \|u\| \cdot \|v\|$$

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$$

$$= \|u\|^2 - 2\langle u, v \rangle + \|v^2\|$$

$$2\cos\theta \, \|u\| \cdot \|v\| = 2\langle u, v \rangle$$

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}\right)$$

Indreproduktrom

Indreproduktrom er et vektorrom der det er definert et indreprodukt

Indreprodukt

$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$

I1 $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle \quad \forall u,v \in V$ Symmetrisk

I2 $\langle u, \cdot \rangle : V \to \mathbb{R}$ lineærtransformasjon

dvs. $\langle u, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\rangle = \lambda_1 \langle u, v_1\rangle + \lambda_2 \langle u, v_2\rangle$

dvs. $v_1 v_2 \in V \quad \lambda_1 \lambda_2 \in \mathbb{R}$

I3 $\langle \cdot , v\rangle : V \to \mathbb{R}$ er en lineærtransformasjon

dvs. $\langle \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2, v\rangle$

$= \mu_1 \langle u_1, v\rangle + \mu_2 \langle u_2, v\rangle$

der $\mu_1 \mu_2 \in \mathbb{R} \quad u_1 u_2 \in V$

I4 $\langle u,u\rangle \geq 0$ i tillegg $\langle u,u\rangle = 0 \iff u = 0$

Eksempel

$\mathbb{P}_3$ polynomer av grad ≤ 3

Indreprodukt $f,g \in \mathbb{P}$ $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

I1 Symmetri

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 g(x)f(x)\,dx = \langle g,f\rangle$$

I2
$$\begin{aligned}\langle f, \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2\rangle &= \int_0^1 f(x)\big(\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)\big)\,dx \\ &= \lambda_1 \int_0^1 f(x)\, g_1(x)\,dx + \lambda_2 \int_0^1 f(x) g_2(x)\,dx \\ &= \lambda_1 \langle f, g_1\rangle + \lambda_2 \langle f, g_2\rangle\end{aligned}$$

I3 $\langle \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2, g\rangle = \ldots = \mu_1 \langle f_1, g\rangle + \mu_2 \langle f_2, g\rangle$

I4 $\langle f,f\rangle = \int_0^1 (f(x))^2\,dx \geq 0 \qquad \langle f,f\rangle = 0 \iff f = 0$

Norm og avstand

V er et vektorrom med indreprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$

Normen til $v \in V$ $\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$ eks. $f \in [0,1]$ $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}$

Avstand mellom $v,u \in V$ $\|u-v\|$ eks. $f \in [0,1]$, $g \in [0,1]$ $\|f-g\| = \sqrt{\int_0^1 (f(x)-g(x))^2 dx}$

Indreprodukt i $\mathbb{R}^n$ som matrise-matriseprodukt

$a \in \mathbb{R}^n$ $b \in \mathbb{R}^n$ $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

$$a^T b = \underbrace{[a_1, \dots, a_n]}_{\substack{1 \times n \\ \text{matrise}}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\substack{n \times 1 \\ \text{matrise}}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j}_{1 \times 1 \text{ matrise}} \in \mathbb{R}$$

Egenskaper ved normer

1) $r \in \mathbb{R}$ $u \in V$ da er $\|ru\| = |r|\,\|u\|$

Dette er fordi: $\|ru\| = \sqrt{\langle ru, ru \rangle} \overset{\text{I2+I3}}{=} \sqrt{r^2 \langle u,u \rangle} = |r| \sqrt{\langle u,u \rangle} = |r|\,\|u\|$

2) Cauchy-Schwarz ulikhet $|\langle u,v \rangle| \le \|u\| \cdot \|v\|$

Bevis

$a = \langle u,u \rangle$
$b = 2 \cdot \langle u,v \rangle$
$c = \langle v,v \rangle$

$$0 \le \|tu+v\|^2 = \langle tu+v, tu+v \rangle = t^2 \langle u,u \rangle + 2t\langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle$$
$$= at^2 + bt + c$$

da diskriminanten er $\le 0 \Rightarrow b^2 - 4ac \le 0$

$$4\langle u,v \rangle^2 - 4\|u\|^2 \|v\|^2 \le 0$$
$$\langle u,v \rangle^2 \le \|u\|^2 \|v\|^2$$
$$|\langle u,v \rangle| \le \|u\|\,\|v\|$$

3) Trekantulikheten $\|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$

Fordi $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v \rangle + \|v\|^2$
$\le \|u\|^2 + 2|\langle u,v \rangle| + \|v\|^2 \le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2$

Da $\|u+v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$
$\Rightarrow \|u+v\| \le \|u\| + \|v\|$

Vinkel mellom $u,v \in V$ ← Indreproduktrom

$\theta = \arccos\left(\frac{\langle u,v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}\right)$ $\langle u,v \rangle = 0$ u,v ortogonale

Forelesning 10

INDREPRODUKTROM I

Ortogonale og ortonormale basiser

En basis B i indreproduktrom V kalles for ortogonal hvis basisvektorene er parvis ortogonale.

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$
$\langle b_i, b_j \rangle = 0 \quad i \neq j$
$\langle b_i, b_j \rangle \neq 0 \quad i = j$

Basisen kalles ortonormal hvis $\|b_i\| = 1$ for $i = 1, \dots, n$

Eksempel

$B = \{ \overset{b_1}{(1,0)}, \overset{b_2}{(0,1)} \}$ er en ortonormal basis av $\mathbb{R}^2$

$\langle b_1, b_2 \rangle = 0$ ortogonal
$\left.\begin{array}{l} \|b_1\| = \sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle} = 1 \\ \|b_2\| = \sqrt{\langle b_2, b_2 \rangle} = 1 \end{array}\right\}$ ortonormal

Hvordan finne en ortonormalbasis?

$b \in V$
$\|b\| \neq 1$ og $\|b\| \neq 0$
$\tilde{b} = \frac{b}{\|b\|}$ ortonormal basisvektor

$$\|\tilde{b}\| = \sqrt{\langle \tilde{b}, \tilde{b} \rangle} = \sqrt{\left\langle \frac{b}{\|b\|}, \frac{b}{\|b\|} \right\rangle} = \frac{1}{\|b\|}\sqrt{\langle b, b \rangle} = \frac{\|b\|}{\|b\|} = 1$$

Komponenter av en vektor i ortonormale basiser

V er et indreproduktrom med $\dim(V) = n$.

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$ er en ortonormal basis for V.

$v \in V$
$v = \langle v, b_1 \rangle b_1 + \dots + \langle v, b_n \rangle b_n$
$[v]_B = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, b_n \rangle \end{bmatrix}$

når $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ er en ortonormal basis

Bevis

Siden B er en basis eksisterer $c_1, \dots, c_n$ (skalarer) slik at $v = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$.

Ta indreprodukt av v med $b_1, \dots, b_n$

$$\langle b_1, v\rangle = \langle b_1 \sum_{i=1}^{n} c_i b_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle b_1, b_i\rangle$$

Skrevet på en annen måte:

$$\langle b_1, v\rangle = c_1 \underbrace{\langle b_1, b_1\rangle}_{1} + c_2 \underbrace{\langle b_1, b_2\rangle}_{0} + \dots + c_n \underbrace{\langle b_1, b_n\rangle}_{0} = c_1$$

$$\langle b_2, v\rangle = c_2$$

$$\vdots$$

$$\langle b_n, v\rangle = c_n$$

$$v = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_n b_n = \langle b_1, v\rangle b_1 + \langle b_2, v\rangle b_2 + \dots + \langle b_n, v\rangle b_n$$

Indreprodukt i en ortonormalbasis

B er en ortonormalbasis.

$B = \{b_1, \dots, b_n\}$

$\langle v, u\rangle = [v]_B^T [u]_B$

Bevis

$v = v_1 b_1 + \dots + v_n b_n$

$u = u_1 b_1 + \dots + u_n b_n$

$$\langle v, u\rangle = \langle v_1 b_1 + \dots + v_n b_n, u_1 b_1 + \dots + u_n b_n\rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{n} v_i b_i, \sum_{j=1}^{n} u_j b_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \langle b_i, \sum_{j=1}^{n} u_j b_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i u_j \langle b_i, b_j\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i u_i \cdot 1 = v_1 u_1 + \dots + v_n u_n$$

$$= [v]_B^T [u]_B$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad [u]_B = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Norm i ortonormale basiser

indreproduktrom

$v \in V$

B er en ortonormalbasis

$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{[v]_B^T [v]_B} = \|[v]_B\|$

Ortonalitet gir lineær uavhengighet

Teorem 7.1.5

V er et indreproduktrom.
$S = \{v_1, \dots, v_k\}$
pervis ortogonale: $\langle v_i, v_j \rangle = 0, i \neq j$
Da er S lineært uavhengig.

Bevis med selvmotsigelse

La $c_1, \dots, c_k$ være skalarer slik at $c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0$.

$\langle v_1, \overbrace{c_1 v_1 + \dots + c_k v_k}^{0} \rangle = 0$

$\langle u, \bar{0} \rangle = \langle u, 0 \cdot \bar{0} \rangle = 0 \cdot \langle u, \bar{0} \rangle = 0$

$c_1 \langle v_1, v_1 \rangle + c_2 \underbrace{\langle v_1, v_2 \rangle}_{0} + \dots + c_k \underbrace{\langle v_1, v_k \rangle}_{0} = 0$

$c_1 \langle v_1, v_1 \rangle = 0$ MEN $\langle v_1, v_1 \rangle \neq 0$ og $c_1 \neq 0$ hvis v er lineært avhengig.

Gjenta for $v_2, \dots, v_k$

Resultat: $c_1 = \dots = c_k = 0$ og $v_1, \dots, v_k$ er lineært uavhengige. ■

Ortogonal komplement

V er et indreproduktrom og $U \subset V$ er et underrom.

Det ortogonale komplementet er $U^\perp$ som er gitt av alle vektorer som er ortogonale på alle vektorer i U.

$U^\perp = \{ v \in V \mid v \perp w \ \forall w \in U \}$

Egenskaper ved det ortogonale komplementet

1) $U^\perp$ er et underrom av V

2) U er endeligdimensjonal

$\rightarrow \forall v \in V \quad v = v_u + v_{U^\perp}$

Vektor i U

Vektor i $U^\perp$

Normen av $\|v\|^2 = \|v_u\|^2 + \|v_{U^\perp}\|^2$

Bevis del 1

Vi skal vise at $U^\perp$ ikke er tom (nullvektor $\in U^\perp$).

Nullvektoren er ortogonal til alle elementer i U.

Vi viser at $u, v \in U^\perp$ fører til at $\lambda u + \mu v \in U^\perp$.

$\forall w \in U \quad \langle w, \lambda u + \mu v \rangle = \lambda \underbrace{\langle w, u \rangle}_{0} + \mu \underbrace{\langle w, v \rangle}_{0} = 0$

Dette impliserer at $U^\perp$ er et underrom av V (egenskap 1)

Bevis del 2

La $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ være en ortonormal basis for U (f.eks. laget ved Gram-Schmidt).

La $v \in V$.

$v_U = \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i \rangle b_i \in U$

$v_{U^\perp} = v - v_U \Rightarrow v = v_U + v_{U^\perp}$

Er $v_{U^\perp}$ i $U^\perp$?

$\langle v_{U^\perp}, b_j \rangle = \langle v - v_U, b_j \rangle = \langle v, b_j \rangle - \langle v_U, b_j \rangle$

$= \langle v, b_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i \rangle \langle b_i, b_j \rangle$

$= \langle v, b_j \rangle - 1 \cdot \langle v, b_j \rangle = 0$