Forelesning 5

UTSAGNSLOGIKK

- Utsagn
- Atomære og sammensatte formler
- Logiske konnektiver ($\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$)
- Tilordninger og valuasjoner
- Sannhetsverditabeller
- Logisk ekvivalens

Utsagnslogikk

Definisjon

Et utsagn er "noe" som enten er sant eller usant

Eksempel

- $\sqrt{4} = 2$ (Sant)
- Summen av to partall er et partall (Sant)
- $2+2=7$ (Usant)

Utsagn

- Hei
- Hva er klokka?
- $6+2$
- $x+3=9$

Ikke utsagn!

Formler og sammensatte utsagn

Vi ønsker å gjøre "algebra" med utsagn.
Bruker ofte bokstavene $P, Q, R, S, \ldots$ som utsagnsvariabler.
En variabel kalles også en atomær formel.

La nå P og Q være to utsagn.
Vi kan kombinere P og Q til nye utsagn slik:

- $P \vee Q$: "P eller Q" — "disjunksjon"
- $P \wedge Q$: "P og Q" — "konjunksjon"
- $P \to Q$: "P impliserer Q", "hvis P, så Q" — "implikasjon"
- $\neg P$: "ikke P" — "negasjon"

Vi kaller $\neg, \wedge, \vee, \to$ for logiske konnektiver
(Det finnes flere, men vi trenger bare disse fire)
(Egentlig kunne vi klart oss med færre)

Eksempel

La P: "det regner", Q: "bakken er våt", S: "sola skinner"
Da har vi:

$P \vee Q$: det regner eller bakken er våt
$P \wedge Q$: det regner og bakken er våt
$P \to Q$: hvis det regner så er bakken våt
$\neg P$: det regner ikke

Vi kan sette sammen flere variabler enn to:
$(P \wedge Q) \vee S$: "det regner og bakken er våt, eller sola skinner"
$\neg S \wedge (P \to Q)$: "sola skinner ikke, og hvis det regner så er bakken våt"

OBS! Pass på parenteser!
(Sett heller for mange parenteser enn for få)

Eksempel

Hvordan skal vi tolke $\neg P \wedge Q$?
$\neg$ binder sterkere enn $\wedge$, så dette skal tolkes som $(\neg P) \wedge Q$ og ikke som $\neg(P \wedge Q)$.

La P og Q være som over.
$(\neg P) \wedge Q$: "det regner ikke og bakken er våt"
$\neg(P \wedge Q)$: "det er ikke slik at det både regner og bakken er våt"

Predensreglene (rekkefølgen) er:
først $\neg$, så $\wedge$, så $\vee$ og til slutt $\to$

Evaluering av formler

La P og Q være to utsagn som vi vet om er sanne eller ikke
(dvs. vi kjenner sannhetsverdiene til P og Q)

Da har vi:

- $P \wedge Q$ er sann hvis både P og Q er sanne
  (og usann ellers)
- $P \vee Q$ er sann hvis P er sann eller Q er sann
  (eller begge er sanne)
- $\neg P$ er sann hvis P er usann
- $P \to Q$ er sann så lenge det ikke er slik at P er sann og Q er usann

Hvorfor gir den siste mening?
"Hvis P, så Q" betyr at i alle situasjoner hvor P er sann så er Q også sann.

Tilfellene hvor P er usann er irrelevante.
Det eneste som kan gå "galt" er hvis P er sann og Q er usann.

Eksempel

Se på påstanden
"hvis jeg får rett på alle oppgavene, så får jeg A på eksamen"

La P: "rett på alle oppgavene"
Q: "A på eksamen"

Hvordan tolke $P \to Q$?
En "lovnad" om at alt rett på eksamen gir en A.
Usant hvis man får alt rett, men ikke får A.
(P er sann og Q er usann)

Sannhetsverdier, tilordninger og sannhetsverditabeller

Hvis en formel er sann, sier vi ofte at den har sannhetsverdi 1 (og 0 for usann)

Gitt en mengde $M = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ med atomære formler så er en <u>tilordning</u> av sannhetsverdier et valg av usann/sann (1 eller 0) for alle elementer i M.

Da kan vi bestemme sannhetsverdien til alle formler som består av utsagn fra M.

Når vi tilordner sannhetsverdier til utsagnsvariabler, kaller vi det også en <u>valuesjon</u>

Eksempel

Vi undersøker sannhetsverdiene til formler bygd opp av to variabler P og Q.

Kan sette opp alle muligheter/<u>tilordninger</u> i en <u>sannhetsverditabell</u>

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \to Q$	$(\neg P) \vee Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Kolonne 3-6 forteller hvordan vi skal tolke $\neg, \vee, \wedge$ og $\to$

Merk! Hvis vi har n atomære utsagn, så har vi 2^n mulige tilordninger på disse

Oi! $P \to Q$ og $(\neg P) \vee Q$ sine kolonner er helt like!

Disse formlene er logisk ekvivalente

Definisjon

La F og G være to utsagnslogiske formler, over en mengde med atomære utsagn.

Hvis F og G har samme sannhetsverdi for enhver tilordning av de atomære formlene i M, sier vi at F og G er <u>logisk ekvivalente</u>.

Vi skriver da $F \Leftrightarrow G$