Forelesning 17
KOMBINATORIKK

Innhold

- Multiplikasjonsprinsippet
- Permutasjoner
- Ordnede utvalg
- Uordnede utvalg
- Ordnede utvalg med repetisjon

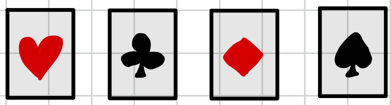
Multiplikasjonsprinsippet
Ordninger (permutasjoner)

Fire formler
trekning med/uten repetisjon
med/uten ordning

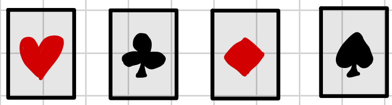
Multiplikasjonsprinsippet og ordninger

Vi har en "kortstokk" med 4 kort.

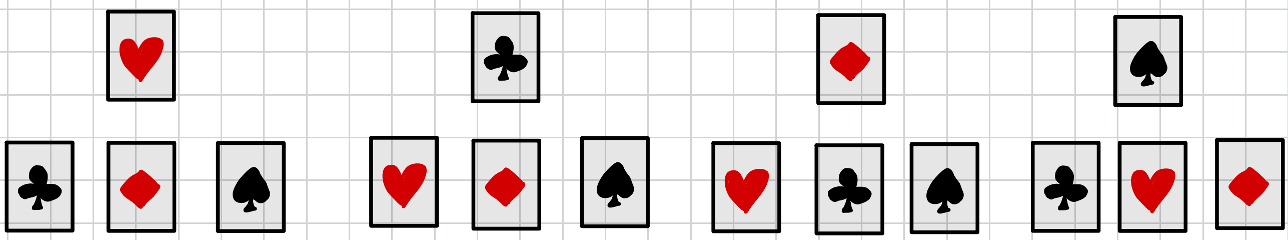
Trekke et kort:
- 4 muligheter:



Trekke to kort:
- 4 muligheter for det første:

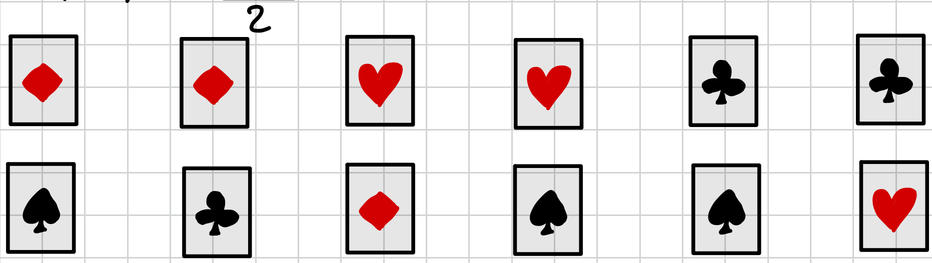


- Men 3 for det andre. Totalt $4 \cdot 3$ mulige utfall:

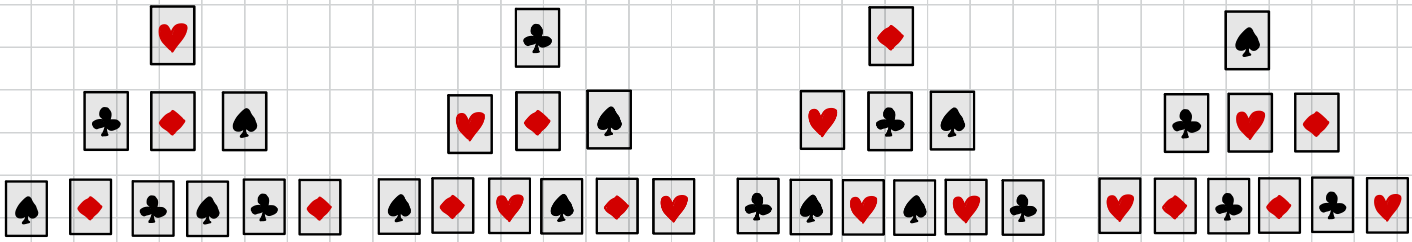


- Men om vi teller slik: Først ruter, så spar er et utfall. Og først spar, så ruter er et annet utfall. Samme kort i forskjellig rekkefølge er to forskjellige utfall.

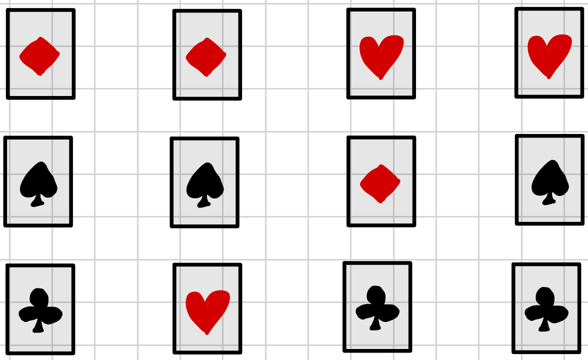
- Så antall muligheter for å trekke to kort, hvis rekkefølge ikke teller, er: $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.



- Trekke tre kort: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ muligheter:



- Trekke tre kort og ignorere rekkefølge: $\frac{3 \cdot 4 \cdot 2}{3!} = 4$:



- Vi deler på $3!$, siden det er $3! = 6$ mulige rekkefølger for tre kort.
- Antall måter å stokke en kortstokk på blir $52! \approx 8 \cdot 10^{67}$.
  ↳ Hvis rekkefølge ikke teller: 1 mulig utfall

Multiplikasjonsprinsippet - uavhengige valg

Multiplikasjonsprinsippet. Anta at vi gjør t uavhengige valg, og at for valg i, er det n_i muligheter.

Da er det totale antall muligheter

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_t = \prod_{i=1}^{t} n_i$$

Eksempel

En referansegruppe skal velges med ett medlem fra MTDT (med 100 studenter), ett medlem fra MTING (60 studenter), og ett medlem fra MLREAL (40 studenter).

Da finnes $100 \cdot 60 \cdot 40 = 240000$ muligheter)

Eksempel

La A være en mengde med 5 elementer, og B en mengde med 7 elementer.

Da vil mengden $A \times B$ ha $5 \cdot 7 = 35$ elementer.

Husk at elementene i $A \times B$ er ordnede par $\langle a, b \rangle$ der $a \in A$ og $b \in B$.

Multiplikasjonsprinsippet - eksempel

La A være en mengde med 5 elementer. Hvor mange elementer har potensmengden $P(A)$?

Når vi skal velge en delmengde av A, må vi for hvert av de 5 elementene velge om elementet skal være med i delmengden eller ikke.

Altså 5 uavhengige valg, hvert med to muligheter.

Totalt $2^5 = 32$ valg. Dermed 32 delmengder.

Hvor mange (binære) relasjoner finnes det på A?

En binær relasjon på A er en delmengde av $A \times A$, som har $5 \cdot 5 = 25$ elementer.

Da finnes det 2^{25} delmengder av $A \times A$, altså 2^{25} relasjoner.

Permutasjoner - ordninger

En permutasjon er en måte å ordne en mengde på, altså velge en rekkefølge på elementene.

Hvis en mengde har n elementer, finnes det

$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ ordninger.

Eksempel

Mengden A med 5 elementer, kan ordnes på $5! = 120$ måter.
Se på $A = \{a,b,c,d,e\}$. En ordning kan være cdaeb.

Vi kan definere en funksjon $f: A \to A$ ved
$$f(a) = c,\ f(b) = d,\ f(c) = a,\ f(d) = e,\ f(e) = b.$$

Dette er en bijektiv funksjon.

Og omvendt: Enhver bijektiv funksjon $g: A \to A$ vil gi opphav til en ordning. To bijeksjoner er like hvis og bare hvis de tilhørende ordningene er like.
Altså: Det finnes like mange bijektive funksjoner $A \to A$ som ordninger av A.

Permutasjoner - eksempel

Hvis 8 personer skal plasseres ved et bord med 8 stoler, kan det gjøres på $8! = 40320$ måter.

La oss anta at bordet er rundt, og vi sier at en plassering X er en rotasjon av en plassering Y dersom man kan komme fra X til Y ved at alle flytter seg t plasser med klokka, $t \in \{0, \dots 7\}$.

Hvis vi ikke skiller mellom to plasseringer hvis de kan roteres fra hverandre, hvor mange forskjellige plasseringer får vi da?
Svar: Da finnes $8!/8 = 7! = 5040$ plasseringer.

Merk: Vi kan tenke på rotasjon som en ekvivalensrelasjon på mengden av plasseringer.
Husk, ekvivelensrelasjon: refleksiv, transitiv, symmetrisk.
Det finnes 5040 ekvivalensrelasjoner og hver ekvivalensklasse inneholder 8 elementer.

Oppgaver

La $A = \{1,2,3\}$ og $B = \{8,9\}$.
1. Hvor mange elementer har $A \times B$?
Svar: $3 \cdot 2 = 6$

2. Hvor mange delmengder har $A \times B$?
Svar: $2^6 = 64$

3. Hvor mange elementer har $(A \cup B) \times A$?
Svar: $5 \cdot 3 = 15$

4. Hvor mange permutasjoner finnes på $(A \cup B)$?
Svar: $5! = 120$

Ordnede utvalg - eksempel

Hvor mange spillelister med 6 sanger kan du lage fra et "album" med 10 låter?

Ingen låt mer enn en gang, og rekkefølge teller.

$$10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = \frac{10!}{4!} = 151200$$

Hva om en låt må være med?

De fem andre velges på $\frac{9!}{4!}$ måter. Favorittlåten kan settes inn på 6 måter.

Totalt: $6\cdot\frac{9!}{4!} = 90720$.

Ordnede utvalg

Gitt en mengde med n elementer. Et utvalg av $k \leq n$ av disse i en gitt rekkefølge kalles et ordnet utvalg.

Det finnes

$$\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}_{k \text{ tall}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ordnede utvalg med k elementer.

Eksempel

Det finnes

$$52\cdot 51\cdot 50 = \frac{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}{49\cdot 48\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1} = \frac{52!}{49!}$$

ordnede utvalg av tre kort fra en kortstokk (med 52 kort).

Utvalg og binomialkoeffisienten

Gitt n elementer.
Vi har: Antall uordnede utvalg med k elementer · antall ordninger av k elementer = antall ordnede utvalg av k elementer.

Altså:

$$\text{antall (uordnede) utvalg med } k \text{ elementer} = \frac{\text{antall ordnede utvalg av } k \text{ elementer}}{\text{antall ordninger av } k \text{ elementer}}$$

Vi har sett: Antall ordnede utvalg er $\frac{n!}{(n-k)!}$

Antall ordninger av k elementer er $k!$

Dermed må antall utvalg med k elementer være $\frac{n!}{(n-k)!k!}$

Vi kaller dette binomialkoeffisienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Utvalg

Altså formelen

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

gir oss antall måter å velge k av n elementer på.

Eksempel

5 studenter fra MTDT (med 100 studenter) skal velges til å delta i et eksperiment.

Det finnes da $\binom{100}{5}$ mulige utvalg, og $\binom{100}{5} = \frac{100!}{95!5!} = 75287520$

Eksempel

La A være en mengde med 10 elementer. Hvor mange delmengder med maksimalt 3 elementer finnes det?

Svar: $\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} = 1 + 10 + 45 + 120 = 176$

Symmetri

Legg merke til at siden $k = (n-(n-k))$ har vi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

Eksempel

$$\binom{10}{2} = \binom{10}{8} = 45.$$

Hvis A har 10 elementer, er det 45 delmengder med 2 elementer og 45 med 8 elementer.

Utvalg - uten repetisjon/tilbakelegging

Symbolet $\binom{n}{k}$ uttales ofte "n velg k" (eng: n choose k), og teller altså antall delmengder med k elementer, av en mengde n elementer. Vi kaller disse delmengdene uordnede utvalg, siden rekkefølgen de velges i, ikke teller. (Boka kaller uordnede utvalg for kombinasjoner).

Når vi skal velge en delmengde, kan vi ikke velge et element mer enn en gang. Derfor brukes ofte termene repetisjon eller uten tilbakelegging, om slike utvalg.

Tilsvarende, når vi så på ordnede utvalg av k elementer fra en mengde av n elementer, var det også utvalg uten repetisjon eller tilbakelegging. Antall ordnede utvalg: $\frac{n!}{(n-k)!}$.

I andre situasjoner kan vi velge samme element flere ganger (altså: med repetisjon/tilbakelegging).

Eksempel

Hvor mange passord med 4 tegn, kan vi lage når vi velger tegn fra alfabetet

$$\{a, \dots, z, 0, \dots 9, !, \$, \%, \#\}?$$

Det er $26+10+4 = 40$ mulige tegn.
Så antall passord:

$$40^4 = 2\,560\,000$$

Hva om minst en bokstav?
Antall uten bokstaver: $14^4 = 38416$.
Så totalt $40^4 - 14^4 = 2\,521\,584$ passord med minst en bokstav.