

# FORELESNING 6

## MER OM UTSAGNSLOGIKK

### Eksempel (Ekvivalens og sannhetsverditabeller)

Bruk en sannhetsverditabell til å vise at

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Lik sannhetsverdi for alle tilordninger av P, Q og R,

$$\text{Så } P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

På lignende måte, kan vi vise at

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

Disse kalles distributive lover

### Noen flere logiske lover

Vi kan også vise at

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P \text{ og } P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$$

("Kommutative lover")

Og at

$$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

$$\text{og } P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$$

("Assosiative lover")

Men!

Ikke alt som er kommutativt  $\ddot{}$

F.eks  $P \rightarrow Q \not\equiv Q \rightarrow P$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

$\Delta$  Ikke alltid lik verdi!

Men Men!

Vi kan vise at

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

Dette danner grunnlaget for kontrapositive bevis  
Forrige gang viste vi også at

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P) \vee Q$$

Konsekvens: Alle formler som bruker  $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow\}$  kan skrives med  $\{\neg, \vee, \wedge\}$ .  
(Bare bytt ut  $P \rightarrow Q$  med  $(\neg P) \vee Q$ )

## De Morgans lover

I ØFI så vi at  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$  og  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$   
(for mengder)

Disse kalles De Morgans lover, og vi har noe lignende for utsagnslogikk:

$$\begin{aligned}\neg(P \wedge Q) &\Leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q) \\ \neg(P \vee Q) &\Leftrightarrow (\neg P) \wedge (\neg Q)\end{aligned}$$

Konsekvens:  $P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg(P \wedge Q)) \Leftrightarrow \neg((\neg P) \vee (\neg Q))$

Så  $\wedge$  kan skrives med  $\neg$  og  $\vee$  og vi trenger da bare  $\{\neg, \vee\}$ .

## Eksempel

$$\begin{aligned}(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \wedge S &\Leftrightarrow (P \rightarrow ((\neg Q) \vee R)) \wedge S \\ &\Leftrightarrow ((\neg P) \vee ((\neg Q) \vee R)) \wedge S \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg((\neg P) \vee ((\neg Q) \vee R)) \vee (\neg S))\end{aligned}$$

## Digresjon

Egentlig trengs bare ett konnektiv, som heter  
"NAND"/"ikke både-og" med symbol  $\uparrow$   
Og sannhetsverditabell

P	Q	$P \uparrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

F.eks. er  $\neg P \Leftrightarrow P \uparrow P$

Men det blir fort stygt:

$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)) \uparrow ((P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q))$

## Logisk konsekvens

La  $S$ : "sola skinner"  $G$ : "jeg er glad"

$I$ : "jeg spiser is"

Anta at det følgende er sant

$S, S \rightarrow (G \vee I), \neg G$

S er sann og  $S \rightarrow (G \vee I)$ , så da må  $(G \vee I)$

være sann.

Siden  $\neg G$  er sann så må  $I$  være sann.

Altså spiser jeg is (men jeg er ikke glad).

Vi sier at  $I$  er en logisk konsekvens av

formlene i mengden  $M = \{S, S \rightarrow (G \vee I), \neg G\}$

## Definisjon

La  $M$  være en mengde med utsagnslogiske formler, og  
la  $F$  være en utsagnslogisk formel.

Hvis  $F$  er sann for alle valusjoner som gjør  
alle formlene i  $M$  sanne samtidig så er  $F$   
en (logisk) konsekvens av formlene i  $M$ .

Vi skriver da  $M \models F$ .

## Eksempel

Vis at  $M = \{S, S \rightarrow (G \vee I), \neg G\} \models I$

S	G	I	$\neg G$	$G \vee I$	$S \rightarrow (G \vee I)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

I er sann for alle valusjoner som gjør formlene i M sanne  
Samtidig (skjer kun i rad 6)  
Så  $M \models I$

## Tautologier og motsigelser

La  $F$  være en utsagnslogisk formel.

Hvis det finnes en valusjon som gjør  $F$  sann, kaller vi  $F$  oppfyllebar. Eks:  $P \vee Q$  er oppfyllebar.

Hvis alle valusjoner gjør  $F$  sann, kaller vi  $F$  en tautologi.

Hvis ingen valusjoner gjør  $F$  sann, kaller vi  $F$  en motsigelse eller kontradiksjon.

## Eksempel

$P \vee \neg P$  er en tautologi

$P \wedge \neg P$  er en motsigelse

$P \vee Q$  er ingen av delene

Når vi forenkler formler, kan vi erstatte tautologier og motsigelser med egne symboler for "sann" og "usann".

$T = \text{"sann"/"top"}$     $\perp = \text{"usann"/"bottom"}$

Dissy mbolene er utsagnslogiske formler

## Eksempel

$$\begin{aligned}(P \vee Q) \vee \neg P &\Leftrightarrow (Q \vee P) \vee \neg P \\&\Leftrightarrow Q \vee (P \vee \neg P) \\&\Leftrightarrow Q \vee T \\&\Leftrightarrow T\end{aligned}$$

## Uavhengighet av formler

### Definisjon

La  $F$  og  $G$  være utsagnslogiske formler.  
Vi sier at  $G$  er uavhengig av  $F$  hvis hverken  $G$  eller  $\neg G$  er en logisk konsekvens av  $F$ .  
( $F \not\models G$  og  $F \not\models \neg G$ )

## Eksempel

$P \vee Q$  er uavhengig av  $Q \vee R$ .

$P$	$Q$	$R$	$Q \vee R$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0

Hverken  $P \vee Q$  eller  $\neg(P \vee Q)$  er konsekvenser av  $Q \vee R$ , fordi det finnes valusjoner som gjør  $P \vee Q$  og  $\neg(P \vee Q)$  usanne selv om  $Q \vee R$  er sann.