Forelesning 1

VEKTORROM I

Reelle vektorrom

$\mathbb{R}^n$ er vår modell

- Vi er vant å tenke at elementene i $\mathbb{R}^n$ er vektorer

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ der } v_i \in \mathbb{R}$$

- Vi er vant til å beregne med vektorer
  - addisjon av vektorer
  - multiplikasjon med en skalar

$r \in \mathbb{R}$ $\quad ru = \begin{bmatrix} ru_1 \\ \vdots \\ ru_n \end{bmatrix}$

$u \in \mathbb{R}^n$

$uv \in \mathbb{R}^n$

$$u + v = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

Vi vil overføre disse regnereglene på andre matematiske objekter.
F.eks. matriser $n \times m$, polynomer, reelle funksjoner...

Definisjon

Et vektorrom er en mengde V der det er to operasjoner
- addisjon
- skalarmultiplikasjon

Disse operasjonene oppfyller 10 regneregler som kalles aksiomer

De 10 regnereglene:

A1 $u + v \in V$
A2 $ru \in V$
A3 Det fins en **nullvektor** $0 \in V$ slik at $u + 0 = u$ for alle $u \in V$
A4 For hver $v \in V$ finnes det $-v \in V$ s.a. $v + (-v) = 0$
A5 Kommutativ lov: $u + v = v + u$
A6 Assosiativ lov: $(u + v) + w = u + (v + w)$
A7 Assosiativ lov: $r(su) = (rs)u$
A8 Distributiv lov: $r(u + v) = ru + rv$
A9 Distributiv lov: $(r + s)u = ru + su$
A10 Multiplikasjon med 1: $1u = u$

Oppgave 1

$V = \mathbb{R}^n$ er et vektorrom

Løsning

A1 $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ $u+v = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$\uparrow$ $\mathbb{R}^n$ $\quad \uparrow$ $\mathbb{R}^n$

A1 er OK!

A2 $v \in \mathbb{R}^n$ $r \in \mathbb{R}$ $rv = \begin{bmatrix} rv_1 \\ \vdots \\ rv_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ok!

A3 Nullvektor

$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $0 + u = \begin{bmatrix} 0+u_1 \\ \vdots \\ 0+u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = u \in \mathbb{R}^n$ OK!

A4 For hver $v \in V$ finnes det $-v \in V$

s.a. $v + (-v) = 0$

$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ $-v = \begin{bmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{bmatrix}$ OK!

A5 Kommutativ lov

$$u+v = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1+u_1 \\ \vdots \\ v_n+u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = v+u$$

A6 Assosiativ lov

$u, v, w \in \mathbb{R}^n$ $(u+v)+w = u+(v+w)$

A7 $r, s \in \mathbb{R}$ $v \in \mathbb{R}^n$

$r(sv) = (rs)v$

A8 Distributiv lov $r \in \mathbb{R}$ $u, v \in \mathbb{R}^n$

$r(u+v) = ru + rv$

$$r\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(u_1+v_1) \\ \vdots \\ r(u_n+v_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ru_1+rv_1 \\ \vdots \\ ru_n+rv_n \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = ru + rv$$

A9 $r, s \in \mathbb{R}$ $v \in \mathbb{R}^n$

$$(r+s)v = rv + sv$$

A10 $1 \in \mathbb{R}$ $1v = v$

Oppgave 2

$V = M_{2\times2}$ 2×2 reelle matriser

Vis at $M_{2\times2}$ er et vektorrom

Løsning

A1 $A, B \in M_{2\times2}$ $A + B \in M_{2\times2}$

A2 $r \in \mathbb{R}$ $A \in M_{2\times2}$ $rA = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} \\ ra_{21} & ra_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times2}$

A3 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ $\quad 0 + A = A$

A4 $A \in M_{2\times2}$ $\quad -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A5 … A10 Sjekk selv

Teorem

$V + X = V \Rightarrow X = 0$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + x_1 \\ \vdots \\ v_n + v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_1 + x_1 &= v_1 \Rightarrow x_1 = 0 \\ v_2 + x_2 &= v_2 \Rightarrow x_2 = 0 \\ &\vdots \\ v_n + x_n &= v_n \Rightarrow x_n = 0 \end{aligned}$$

For matrise

$A + X = A$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + x_{11} & a_{12} + x_{12} \\ a_{21} + x_{21} & a_{22} + x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eksempel av mengder som ikke er vektorer

Eksempel 1

Positive reelle tall $(0,\infty)$
$\mathbb{R}$
Aksiomene A2 Multiplikasjon med skalar er ikke OK!
A3 Ikke OK!
A4 Ikke OK!

Oppgave

Vis at

1) P_n = mengde av alle polynomer av grad $\leq n$ er et vektorrom

2) mengden av alle polynomer av grad nøyaktig n er ikke et vektorrom

Lineære kombinasjoner av vektorer

Definisjon

Det er gitt $v_1, \ldots, v_k$ k vektorer i V

Vi sier at x er en lineærkombinasjon av $v_1, \ldots v_k$ hvis det finnes $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ s.a. $x = a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k$

Lineær avhengighet

Definisjon

Gitt $v_1, \ldots, v_k$ k vektorer i V

Vi sier at de er lineær avhengige hvis og bare hvis det finnes skalarer $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$ og ikke alle er null s.a.

$$b_1 v_1 + \ldots + b_k v_k = 0$$

Spenn

Definisjon

Gitt $S \subseteq V$, $\text{spenn}(S) \subseteq V$

er submengde av V gitt av alle linearkombinasjoner

$$x = a_1 v_1 + a_k v_k \quad \text{der } v_1, \ldots, v_k \in S$$
$$a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$$
$$k \text{ positiv heltall}$$

$$\text{spenn}(S) = \left\{ x = a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k \;\middle|\; \begin{array}{l} v_1, \ldots, v_k \in S \\ a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R} \\ k \text{ positiv heltall} \end{array} \right\}$$

s.o

Vi sier at en mengde $G \subseteq V$ er **lukket** under addisjon og skalermultiplikasjon

$$\Leftrightarrow \quad u, v \in G, \; r \in \mathbb{R} \qquad \text{vi har } u + v \in G, \; u \cdot v \in G$$

Teorem 2

Spennet $\text{spenn}(S) \subseteq V$ $S \subseteq V$ er lukket under "+" "·"

$$x = a_1 v_1 + a_k v_k \qquad v_1, \ldots, v_k \in S$$
$$y = b_1 w_1 + b_\ell w_\ell \qquad w_1, \ldots, w_\ell \in S$$

$$x + y = a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k + \ldots + b_1 w_1 + \ldots + b_\ell w_\ell \in \text{spenn}(S)$$

Forelesning 2

VEKTORROM I

Definisjon

Vi sier at k vektorer

$$v_1, v_2, \ldots, v_k$$

i vektorrommet V er **lineær avhengige** hvis det finnes skalarer

$$b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$$

og minst en av b-ene er ulik null, slik at

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_k v_k = 0$$

Hvis $v_1, \ldots, v_k$ ikke er lineær avhengige, sier vi de er **lineær uavhengige**

Proposisjon

Hvis $v_1, \ldots, v_k$ er lineær avhengige
da finnes det en indeks j mellom 1 og k slik at

$$v_j = r_1 v_1 + \ldots + r_{j-1} v_{j-1} + \ldots + r_k v_k$$

Bevis

$v_1, \ldots, v_k$ lin avhengige

da finnes det $b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$

s.a. $b_1 v_1 + \ldots + b_k v_k = 0$ og $b_1, \ldots, b_k$ er

ulike 0

da finnes det j s.a $b_j \neq 0$

$$\frac{b_j v_j}{b_j} = \underbrace{-\frac{b_j}{b_j}}_{r_j} v_j - \ldots - \underbrace{\frac{b_{j-1}}{b_j}}_{r_{j-1}} v_{j-1} - \frac{b_{j+1}}{b_j} v_{j+1} - \frac{b_k v_k}{b_j}$$

$$v_j = r_1 v_1 + \ldots + r_{j-1} v_{j-1} + r_{j+1} v_{j+1} + \ldots + r_k v_k$$

MERKNAD

$v_1, \dots, v_k$ er lineær uavhengige vektorer hvis lineær kombinasjonen

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$$

kan skje bare når

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$$

Komplekse vektorrom

Hvis $\mathbb{R}^n$ er mengde av $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ $u_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$

På samme måte kan vi definere $\mathbb{C}^n$

$\mathbb{C}^n$ er mengde av alle $w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$ der $w_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$

Dette er også et vektorrom der skalarene er komplekse tall.

Definisjon kompleks vektorrom

Et kompleks vektorrom er en mengde V med to operasjoner

- addisjon
- multiplikasjon med en skalar
- der skalarene er i $\mathbb{C}$

og som oppfyller 10 regneregler

Eksempel

$\mathbb{C}^n$ eks $n = 2$

$$\begin{bmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{bmatrix} \qquad i = \sqrt{-1}$$

Eksempel 2 matriser n x n med komplekse elementer

$$\begin{bmatrix} a_{11} + ib_{11} & a_{12} + ib_{12} \\ a_{21} + ib_{21} & a_{22} + ib_{22} \end{bmatrix} \qquad i = \sqrt{-1}$$

Linearkombinasjoner
Lineær avhengighet
Linear uavhengighet

er som før men skalarene er i $\mathbb{C}$

Definisjon

Vi sier at k vektorer

$$w_1, w_2, \dots, w_k$$

i vektorrommet W er **lineær avhengige** hvis det finnes skalarer

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \in \mathbb{C}$$

og minst en av β-ene er ulik null, slik at

$$\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \dots + \beta_k w_k = 0$$

Hvis $w_1, \dots, w_k$ ikke er linear avhengige, sier vi de er **linear uavhengige**

Eksempler av reelle og komplekse vektorrom

1) Vi ser på mengder av alle polynomer av grad $\leq n$ med reelle koeffisienter.

$n = 1$ grad 1

$p = a_1 x + b_1$ $\quad q = a_2 x + b_2$ $\quad a_1 b_1, a_2 b_2 \in \mathbb{R}$

aksiomene

A1 $p + q = (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)$

A2 $r \in \mathbb{R}$ $\quad rp = (ra_1)x + (rb_1)$

⋮

2) Nå bytter vi reelle polynomer med polynomer med komplekse koeffisienter

$p = \alpha_1 x + \beta_1$ $\quad q = \alpha_2 x + \beta_2$

A1 $\alpha_2 = \mathrm{Re}(\alpha_1) + i\,\mathrm{Im}(\alpha_1)$

⋮

3) Vektorrom av reelle funksjoner

Mengde av alle funksjoner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dette er et reelt vektorrom med

- addisjon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(f+g): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

- $r \in \mathbb{R}$ $rf: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(rf)(x) = r \cdot f(x)$

4) Vektorrom av komplekse funksjoner $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

- $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(f+g): \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

- $\alpha \mathbb{C}$ $\alpha \cdot f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$

Forelesning 3

VEKTORROM II

Underrom

Definisjon

Et underrom U av et vektorrom V er en delmengde $U \subseteq V$ som selv er et vektorrom.

M.a.o.:
1) $U \subseteq V$
2) $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$
3) r skalar, $u \in U \Rightarrow r \cdot u \in U$
4) "+" og "·" oppfyller de to aksiomene for vektorrom

Proposisjon 1:

For å sjekke at U er et underrom av V. (Enklere enn å sjekke alle aksiomene)
La V være et vektorrom.
$U \subseteq V$ er et underrom hvis og bare hvis:
$u, v \in U \Rightarrow \alpha u + \beta v \in U$ ($\forall \alpha \beta$ skalarer)

Bevis for proposisjon 1:

Anta at hvis $u, v \in U \Rightarrow \alpha u + \beta v \in U$
$\forall \alpha \beta$ skalarer

A1: Hvis $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$ $(\alpha = \beta = 1)$
A2: r skalar, $u \in U \Rightarrow ru \in U$ $(\beta = 0, \alpha = 1)$
A3: $r = 0, u \in U \Rightarrow ru = 0 \in U$ $(\alpha = 0, \beta = 0)$
nullvektor er i U
A4: $u \in U, \alpha = -1, \beta = 0 \Rightarrow (-1) \cdot u = -u \in U$
A5, A6, …, A10: følger direkte fra egenskapene av "+" og "·" i V.

Anta nå at $U \subseteq V$ er et underrom av V.
Fra aksiomene A1 og A2 har vi følgende:

- α skalar, $u \in U \Rightarrow \alpha u \in U$
- β skalar, $v \in U \Rightarrow \beta v \in U$

$\Big\} \ \alpha u + \beta v \in U$

Eksempler

1) Spennet er et underrom

$$S \subset V, \ \text{span}(S) = \left\{ x = r_1 v_1 + r_k v_k \ \middle| \ \begin{array}{l} v_1, \dots, v_k \in S \\ r_1, \dots, r_k \text{ skalarer} \\ k: \text{positivt heltall} \end{array} \right\}$$

$\text{span}(S) \subset V$ og $u, v \in \text{span}(S)$ da $\alpha u + \beta v \in \text{span}(S)$

$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_e u_e$

$v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k$

$\alpha u + \beta v = (\alpha \alpha_1) + \dots + (\alpha \alpha_e u_e) + (\beta \beta_1) v_1 + \dots + (\beta \beta_k) v_k$

2) $U = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ er et underrom av $\mathbb{R}^4$

Matriser 2x2 med komplekse elementer

3) $U = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ er et underrom av $M_2(\mathbb{C})$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, A = A^T$

4) Er de reelle symmetriske 2x2 matriser et underrom av alle matriser et underrom av $M_2(\mathbb{R})$?

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$

$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \alpha a_{12} + \beta b_{12} \\ \alpha a_{12} + \beta b_{12} & \alpha a_{22} + \beta b_{22} \end{pmatrix}$ Symmetrisk 2x2 matrise

Påstanden er sann.

$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix}, A = -A^T$

5) Er de skjev-symmetriske reelle 2x2-matriser et underrom av $M_2(\mathbb{R})$?

$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ -b_{12} & 0 \end{pmatrix}$

$\alpha A + \beta B =$ skjev-symmetrisk matrise $\rightarrow$ påstanden er sann

Viktige underrom forbundet med matriser

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kolonnerom (søylerom): $Col(A) = Span\left\{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2}\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{bmatrix}\right\}$ er et underrom av $\mathbb{R}^m$

$Ran(A) = Col(A)$ Range av A

Radrommet er et underrom av $\mathbb{R}^n$

$$Row(A) = Span\left\{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n}\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{bmatrix}\right\}$$

Radene til matrisen

Nullrommet (også kalt kjerne)

$$Ker(A) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au = 0\}$$

Bevis for at $Ker(A)$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$

1) $Ker(A) \subset \mathbb{R}^n$

2) $u, v \in Ker(A)$
$A(\alpha u + \beta v) = \alpha \overbrace{Au}^{0} + \beta \overbrace{Bv}^{0} \Rightarrow \alpha u + \beta v \in Ker(A)$

Eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Col(A) = Ran(A) = Span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$Row(A) = Span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$Ker(A) = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad | \cdot A^{-1}$$

A er inverterbar

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Forelesning 4

VEKTORROM II

Basis

Definisjon

La V være et vektorrom. En basis for V er en mengde $B \subset V$ s.a.

- $\text{Span}(B) = V$
- B er lineært uavhengig

Eksempel

Standard basis er

$V = \mathbb{R}^n$ er en basis av $\mathbb{R}^n$ er:

$$\underset{e_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \underset{e_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \cdots \underset{e_n}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}$$

For $\mathbb{R}^3$: $\overset{e_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, \overset{e_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \overset{e_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$ $\quad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = ae_1 + be_2 + ce_3$

$\mathbb{R}^3 = \text{Span}\{e_1, e_2, e_3\}$ og e_1, e_2, e_3 er lineært uavhengige

$b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eneste løsning på ligningen er den trivielle løsningen

Teorem 3 (B2 : 6.1)

V er et vektorrom med basis $B = \{v_1, \dots, v_k\}$.

Anta at $v \in V$: $v = a_1v_1 + \dots + a_kv_k$ da er $b_i = a_i$ for $i = 1, \dots, k$
$v = b_1v_1 + \dots + b_kv_k$

Bevis for teorem 3:

$a_1v_1 + \ldots + a_kv_k = b_1v_1 + \ldots + b_kv_k = 0$
$(a_1-b_1)v_1 + \ldots + (a_k-b_k)v_k = 0$
Siden $v_1,\ldots,v_k$ er lineært uavhengige da er den trivielle løsningen den eneste løsningen. *Viktig
$a_1-b_1=0,\ a_2-b_2=0,\ldots,\ a_k-b_k=0$
$a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ldots,\ a_k=b_k$

Teorem 4 (s.201)

V er et vektorrom med basis $B=\{v_1,\ldots,v_k\}$ med k vektorer (k er et positivt heltall).
Da har alle basiser av V nøyaktig k vektorer.

Bevis for teorem 4:

Anta $B=\{v_1,\ldots,v_k\}$ som basis og $\{u_1,\ldots,u_k\}$ er en annen basis med $r\neq k$.
$r<k$
$v_1 = a_{11}u_1 + \ldots + a_{r1}u_r$
$v_2 = a_{21}u_1 + \ldots + a_{r2}u_r$
$\vdots$
$v_k = a_{k1}u_r + \ldots + a_{rk}u_r$

$b_1v_1 + \ldots + b_kv_k = 0$
$(b_1a_{11} + \ldots + b_ka_{k1})v_1 + \ldots + (b_1a_{1r} + \ldots + b_ka_{kr})v_r = 0$
Siden $v_1,\ldots,v_r$ er lineært uavhengig:

$b_1a_{11} + \ldots + b_ka_{k1} = 0$
$\vdots$
$b_1a_{1r} + \ldots + b_ka_{kr} = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & & \\ a_{1r} & \cdots & \cdots & a_{kr}\end{bmatrix}}_{T_1\ r\times r \quad T_2\ r\times(k-r)}\begin{array}{c} b_u \\ \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} b_d \end{array} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

r ligninger
k ukjente

Finnes ikke trivielle løsninger

$$[T_1 \mid T_2]\cdot\begin{bmatrix} b_u \\ \hline b_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$T_1b_u + T_2b_d = 0$
$T_1b_u = -T_2b_d$
$b_u = -T_1^{-1}T_2b_d$

Da er $b_1,\ldots,b_k$ ikke alle null og $v_1,\ldots,v_k$ er lineært avhengige. (selvmotsigelse)
Da $r \not< k$.
På samme måte resonerer man for $k<r$. Da må $k=r$.

Definisjon - dimensjon

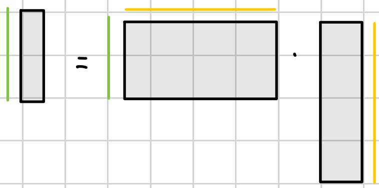
For et vektorrom med basis $B=\{v_1,\ldots,v_k\}$ der k er et positivt heltall kalles k dimensjonen til V.
Hvis basis B til V består av uendelig mange vektorer da sier vi at V er uendeligdimensjonale.
Hvis $V=\{0\}$ (V består bare av nullvektoren) da er $\dim(V)=0$.

Lineærtransformasjoner

Definisjon

En lineærtransformasjon er en funksjon fra V til W der V og W er vektorrom $T: V \to W$ s.a.
L_1 $T(u+v) = T(u) + T(v)$
L_2 $T(ru) = r \cdot T(u)$
$\forall v, u \in V$ og r er en skalar

A: $n \times m$-matrise (reell)
Vi kan definere $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som $T(x) = Ax$



Egenverdier av lineærtransformasjoner

$T: V \to V$
Vi sier at $\lambda \in \mathbb{C}$ er egenverdi til T hvis og bare hvis det finnes $v \in V$, $v \neq 0$ s.a. $T(v) = \lambda v$

Egenrom, E_λ

Består av alle $v \in V$ slik at $T(v) = \lambda v$ samt 0 (nullvektor)

Teorem 1 (B2: 6.2)

E_λ er et underrom av V

Definisjon av kjerne og rekkevidde

La $T: V \to W$.
Kjernen til T: $\text{Ker}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$
Rekkevidde til T: $\text{Ran}(T) = T(v) = \{w \in W \mid w = T(x), x \in V\}$

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
A: $(m \times n)$-matrise
$T(x) = Ax$
nullrommet til A: $\text{Nul}(A) = \text{Ker}(T)$
. . . (Mer fra innlevering 1)