Teoriforelesning 2

LINEÆRE LIGNINGSSYSTEMER I

Lineære ligningssystemer

- Lineær ligning, f.eks. $2x+y+z=7$
  - Løsning: Alle verdier av x,y og z som gir likhet mellom venstre og høyre side
  - På mengdeform: $L_1 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2x+y+z=7\}$

- Lineært ligningssystem, f.eks.

$$\begin{aligned} 2x+y+z&=7 \\ x-7y+z&=3 \\ 3x+4y+z&=11 \end{aligned}$$

  - Løsning: Alle verdier av x,y og z som gir likhet i **alle tre ligningene samtidig**
  - På mengdeform $L = L_1 \cap L_2 \cap L_3$

- Hvordan finne en løsning?
  - Finnes det alltid en løsning?
  - Kan det finnes mer enn en løsning?

- Innsettingsmetoden
  - Tungvint når vi har mange ligninger og mange ukjente

Gauss-eliminasjon

- Prinsipp: Omforme ligningssystemet uten å endre løsningsmengden

- Lovlige operasjoner:
  1. Bytte om rekkefølgen på ligningene
  2. Gange alle ledd i en ligning med et tall som ikke er null
  3. Erstatte en ligning med summen av denne ligningen og et multiplum ($\neq 0$) av en annen ligning

- Hvorfor vil ikke disse operasjonene endre løsningsmengden?

- Gauss-eliminasjon innebærer å bruke disse operasjonene på en systematisk ("lur") måte slik at vi kan "se" løsningsmengden

Eksempel

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -7 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 11 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{2},\,-\frac{3}{2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -\frac{15}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \cdot 2 \\ \cdot 2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \cdot 3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \cdot -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -15 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{\substack{R2-R3 \\ R1-R3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & -15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{15}R2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \overset{\substack{R1-R2 \\ \frac{1}{2}R1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\underline{\underline{x=4,\ y=0,\ z=-1}}$$

TEMAFORELESNING 2

Nøkkelbegrep:

- Utvidede matriser
- Pivotelementer
- Gauss-eliminasjon
- En, uendelig mange, ingen løsninger av lineære ligningssystem
- Lineære ligningssystem med kompelekse tall

Lineære ligningssystemer I

- Eksemepel polynomdivisjon
- Dimensjonstolkning av løsningsrom
- Linear (u)avhengighet
  - Geometrisk tolkning
- Lineære ligningssystemer med kompelekse tall

LINEÆRERE LIGNINGSYSTEMER

1. REPETISJON

I) $2x+3y=9$

II) $-x+6y=3$

Alternativ 1: Grafisk

Løsningen for ligningssystemet er koordinatene (x,y) til punktet der grafene krysser hverandre

Alternativ 2: Innsettingsmetoden

I) $2x+3y=9$

II) $-x+6y=3 \rightarrow x=6y-3$

I) $2(6y-3)+3y=9$

$15y=15$

$\underline{y=1}$

$\underline{x=3}$

Alternativ 3: Addisjonsmetoden

II) $-x+6y=3$

I) $2x+3y=9$ $+2\cdot\text{II})$ $\cancel{2x}+3y+2(\cancel{-x}+6y)=9+2\cdot 3$

$\underline{y=1}$

II) $-x+6y=3$ $-2\cdot\text{I})$

I) $2x+3y=9$ $-x+\cancel{6y}-2(2x+\cancel{3y})=3-2\cdot 9$

$-x-4x=-15$

$-5x=-15$

$\underline{x=3}$

Alternativ 4: Gauss-eliminasjon

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{array}\right] \cdot 2 \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 15 & 15 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{15} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \cdot (-6)$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \cdot (-1) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$1 \cdot x + 0 \cdot y = 3 \rightarrow \underline{x = 3}$

$0 \cdot x + 1 \cdot y = 1 \rightarrow \underline{y = 1}$

# løsninger	Kjennetegn	Eksempel
0	Inkonsistent/ selvmotsigelse	$\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $0 \neq 1$
Nøyaktig en	System er bestemt	$\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$
∞ mange	System er ubestemt	$\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$x + y = 3 \rightarrow x = 3 - y$

$0x + 0y = 0 \rightarrow y = y$

fri variabel → uendelig mange løsninger

2. DIMENSJONSTOLKNING

Ex 1:

Selvmotsigelse

$$x + y + z = 1$$
$$x + y + z = 2$$
$$2x - y + z = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdot(-1)} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad 0 \neq 1$$

INGEN LØSNING

(Geogebra:
To parallelle plan → ingen felles løsning)

Ex 2:

$$x + y + z = 3$$
$$x - y + z = 1$$
$$2x + z = 4$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$x = 2$
$y = 1$
$z = 0$

$(2, 1, 0)$

Entydig løsning
- et punkt

Ex 3:

$$x + y + z = 2$$
$$x - y + z = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$[0\ 0\ 0 \mid 0]$

$$x + z = 1$$
$$y = 1$$

$z = z,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$

vanlig å omdøpe

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - t \\ 1 \\ t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{punkt i rommet}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t}_{\text{skalar multipel}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

En fri variabel → En LINJE

Ex 4:

$$\begin{aligned} x+2y-z&=3 \\ -2x-4y+2z&=-6 \\ 3x+6y-3z&=9 \end{aligned} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 2 & -6 \\ 3 & 6 & -3 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot 2 \\ \cdot(-3) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

multipler av øverste rad

$$\begin{aligned} x+2y-z&=3 \\ y&=t \\ z&=s \end{aligned} \qquad t,s\in\mathbb{R}$$

2 frie variabler → Et PLAN

3 frie variabler → Et ROM

$$\begin{aligned} x&=s \\ y&=t \\ z&=u \end{aligned} \qquad s,t,u\in\mathbb{R} \qquad [0\ 0\ 0\,|\,0]$$

3. LINEÆR (U)AVHENGIGHET

Ex:

$p(x)=ax^2+bx+c \qquad a,b,c$

a) Finne a,b,c slik at p går gjennom $\begin{cases} \begin{array}{c} x\ \ y \end{array} \\ (1,2) \\ (2,3) \\ (3,1) \end{cases}$

$p(1)=2 \rightsquigarrow a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=2 \qquad a+b+c=2$

$p(2)=3 \rightsquigarrow a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=3 \qquad 4a+2b+c=3$

$p(3)=1 \rightsquigarrow a\cdot 3^2+b\cdot 3+c=1 \qquad 9a+3b+c=1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 11/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} a=-3/2 \\ b=11/2 \\ c=-2 \end{cases}$$

↳ Bestemt ligningssystem $p(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{2}x-2$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \cdot(-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$ $0 \neq 1$

c) $Q = (0,-2)$ $\quad p(0) = -2 \quad a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -2$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 11/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

OVERBESTEMT LIGNINGSSYSTEM

2 muligheter

i) Inkonsistent → b)

ii) LINEÆRT AVHENGIG → c)

$R_4 = 3 \cdot R_1 - 3R_2 + R_3$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{osv...}$$

Ex:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{array}\right] \cdot(-2) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$R_2 = 2R_1$

Ex:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$$

$R_3 = R_1 + R_2$

Lineært avhengig

Ex:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 11/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Lineært uavhengig
- ingen rader er lineære kombinasjoner av hverandre

Definisjon

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ er LINEÆRT UAVHENGIGE
dersom $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$

ikke har andre løsninger enn den trivielle (enkleste)
$(c_1 = c_2 = c_3 = 0)$

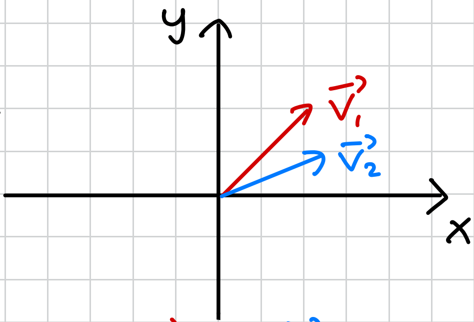
I motsatt tilfelle er de LINEÆRT AVHENGIGE

Geometrisk tolkning

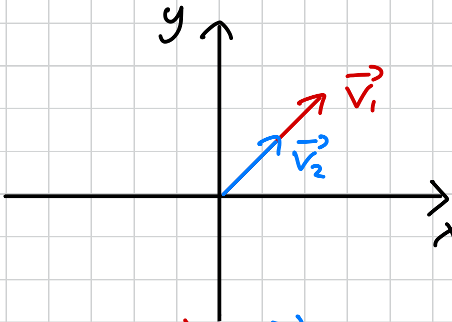
LINEÆRT UAVHENGIGE

LINEÆRT AVHENGIGE

$\mathbb{R}$

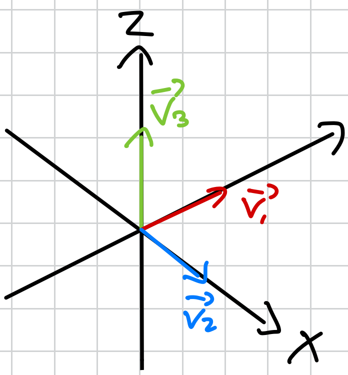


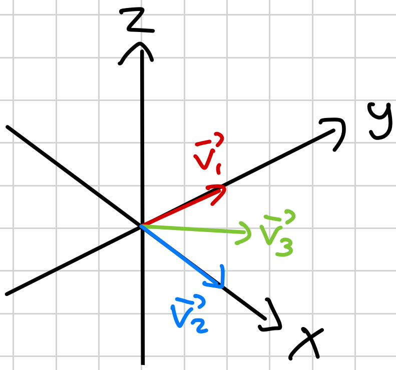
$\vec{v}_1 \neq c\vec{v}_2$



$\vec{v}_1 = c\vec{v}_2$

$\mathbb{R}^3$





$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ligger alle i samme plan

$\vec{v}_3 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2$

$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$

<u>ikke</u> alle $c_1, c_2, c_3 = 0$

4. LIGNINGSSYSTEMER MED KOMPLEKSE TALL

Ex:

$$\left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & -1 \\ 1 & i & i \end{array}\right] 2 \sim \left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & -1 \\ 0 & 2i & 0 \end{array}\right] (-2i)$$

Reelt tall

$$\left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{4} \sim \left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] (-1)$$

1

Reelt

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} i & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] (-i) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$x = i$

$y = 0$