

# Teoriforelesning 11

## DIFFERENSIALLIGNINGER

### Nøkkelbegreper

- Eksistens og entydighet for første ordens differensielligninger
- Andre ordens lineære differensielligninger
- Eulers eksplisitte og implisitte metoder
- Modellering

$$\text{IVP: } \begin{cases} y'(t) = f(t, y), & t_0 < t < T \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$



$$\int_{t_0}^t y'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$$

$$[y(s)]_{t_0}^t = y(t) - y(t_0) = y(t) - y_0.$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad *$$

↑  
Integrelligning

Merk: i) Separabel svarer til  
 $f(t, y) = g(t) \cdot h(y)$

ii)  $f(t, y) = q(t) - p(t)y$   
 her kan vi (noen ganger)  
 bruke integrerende faktor

funksjon  
 ↴  
 ↴  
 $y_0(t)$

$$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0(s)) ds$$

$$y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) ds$$

$$y_3(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_2(s)) ds$$

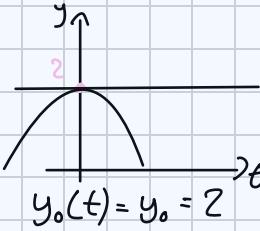
Pikariterasjoner

Vi får en følge av funksjoner  $\{y_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$  og hvis den konvergerer  
 så er det mot et fikkspunkt av (\*)  
 → En løsning av (\*)

## Eksempler

Løs  $\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

ved Picarditerasjon



$$\begin{aligned} y_1(t) &= 2 + \int_0^t f(s, y_0(s)) ds \\ &= 2 + \int_0^t 2s(1-2) ds \\ &= 2 - \int_0^t 2s ds = 2 - [s^2]_0^t = 2 - t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ y_0 &= y(t_0) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= 2 + \int_0^t f(s, y_1(s)) ds \\ &= 2 + \int_0^t 2s(1-(2-s^2)) ds \\ &= 2 + \int_0^t 2s(-1+s^2) ds \\ &= 2 - \int_0^t 2s ds + \int_0^t 2s^3 ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 - t^2 + \left[ \frac{2}{4} s^4 \right]_0^t \\ &= 2 - t^2 + \frac{1}{2} t^4 \\ y_3(t) &= \dots = 1 + 1 - t^2 + \frac{1}{2} t^4 - \frac{1}{3!} t^6 \end{aligned}$$

$$y_n(t) = 1 + \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m t^{2m}}{m!}$$

Dette er n'te ordens Taylorpolynom for  $e^{-t^2}$  (rundt 0).

$$y_n(t) \rightarrow \frac{1 + e^{-t^2}}{2} \text{ når } n \rightarrow \infty$$

Sjekk løsning

$$y(t) = 1 + e^{-t^2}$$

$$\begin{cases} y'(t) = 2t e^{-t^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$y(0) = 1 + 1 = 2 \quad \checkmark$$

$$y'(t) = -2t e^{-t^2} = -2t(y-1) = 2t(1-y) \quad \checkmark$$

## Eksistens og entydighet

Anta at funksjonen  $f(t, y)$  tilfredsstiller

- Det finnes en  $M$  slik at for alle  $t \in [a, b]$  og alle  $y \in [c, d]$  så er  $|f(t, y)| \leq M$ .
- Det finnes en  $L$  slik at for alle  $t \in [a, b]$  og alle  $y, \tilde{y} \in [c, d]$  så er

$$|f(t, y) - f(t, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|.$$

Da vil Picarditerasjonen for initialverdioproblemet

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Hvor  $a < t_0 < b$  og  $c < y_0 < d$  konvergere (lokelt) mot en funksjon  $y = y(t)$ . Denne funksjonen er den eneste løsningen av initialverdioproblemet.

Merk:

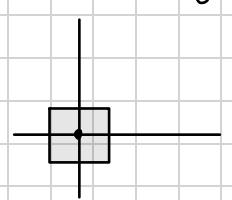
i) Med lokalt mener vi at  $y(t)$  er en unik løsning av IVP'et for  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

ii) IVP'et  $f(y)$

$$\begin{cases} y'(t) = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = 0$$

$$\begin{aligned} y(t) &= t^3, y'(t) = 3t^2 \\ &= 3(t^3)^{2/3} = 3y^{2/3} \end{aligned}$$



Andre ordens lineære Dler (9.5)

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \leftarrow \text{homogen ligning}$$

$$= f(t) \quad \leftarrow \text{inhomogen ligning}$$

↙ Gjett

Eksempel:  $y'' - 2y' - 35y = 0$

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{rt} \\ y'(t) &= re^{rt} \\ y''(t) &= r^2 e^{rt} \end{aligned}$$

$$r^2 e^{rt} + 2re^{rt} - 35e^{rt} = 0$$

$$e^{rt}(r^2 + 2r - 35) = 0$$

↙ Dette må bli 0

$$r^2 + 2r - 35 = 0 \rightarrow r_1 = -7$$

$$r_2 = 5$$

Konklusjon:

$$y_1(t) = Ae^{5t}$$

$$y_2(t) = Be^{-7t}$$

Den generelle løsningen av differensialligningen

$$ay'' + by' + cy = 0$$

bestemmes av røttene til det karakteristiske polynomet  $ar^2 + br + c$ :

$$y(t) = \begin{cases} Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} & \text{gitt reelle røtter } r_1 \text{ og } r_2 \\ Ae^{rt} + Bte^{rt} & \text{gitt en reell rot } r \\ Ae^{ut} \cos vt + Be^{ut} \sin vt & \text{gitt kompleks røtter } r = u \pm iv \end{cases}$$

## Eksempel (feil i bokse)

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \\ (r+2)^2 = 0 \Rightarrow r = -2$$

$$y(t) = Ae^{-2t} + Bte^{-2t}, \quad y'(t) = -2Ae^{-2t} + Be^{-2t} - 2Bte^{-2t}$$

$$y(0) = A = 1$$

$$y'(0) = -2A + B = 1 \\ = -2 + B = 1 \Rightarrow B = 3$$

$$y(t) = e^{-2t} + 3te^{-2t}$$

## Inhomogene ligninger

Anta at  $y_s(t)$  er en (spesiell) løsning av

$$ay'' + by' + c = f(t),$$

og la  $y_h(t)$  være en løsning av den tilsvarende homogene ligningen.  
Den generelle løsningen (1) er da

$$y(t) = y_h(t) + y_s(t)$$

• Hvis  $f(t) = \text{poly}$ , f.eks

$$f(t) = t^2 + 2,$$

$$\text{gjett } y_s(t) = Ct^2 + Dt + E$$

• Hvis  $f(t) = e^{\alpha t} \overset{\text{poly}}{\underset{\rho(t)}{\sim}}$ ,

$$\text{f.eks } f(t) = e^{2t} t^2$$

$$\text{gjett } y_s(t) = e^{2t} (Ct^2 + Dt + E)$$

• Hvis  $f(t) = e^{\alpha t} (\beta \cos \omega t + \gamma \sin \omega t)$

$$\text{f.eks } f(t) = e^{-2t} \cos t,$$

$$\text{gjett } y_s(t) = e^{-2t} (C \cos t + D \sin t)$$

# Temaforelesning 11

## DIFFERENSIALLIKNINGER

Dagens tema  
Eulers eksplisitte og implisitte metode  
Modellering

Hva er modellering?

Forstå et virkelig problem

Definere variabler og

Forenkle

Løse

Velge og anvende representasjoner

Teste og tolke - sammenligne resultatet med virkeligheten  
forbedre modellen

## 1. REPETISJON

DIFFLIKNING: ukjent funksjon  $y$  og  $y', y'', y''', \dots$

ORDEN	TYPE	STRATEGI
FØRSTE $y'$	i) Separabel, $p(y)y' = q(t)$ ii) Lineær, $y' + p(t)y = q(t)$	Substitusjon IF: $e^{\int p(t) dt}$
ANDRE $y''$	$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$	i) Teorem ii) Skrive om til system av 1. ordens

1 DAG:

Eulers metode

- 1) Eksplisitt ("forover")
  - 2) Implisitt ("bakover")
- } Modellering

## 2. INNLEDNING

Generelt:  $y'(t) = F(t, y)$

$\downarrow$   
variabel  
↑ ukjent funksjon

Ex:  $F(t, y) = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}t$   
↳ Lineær

### Motivasjon:

Forrige gang Ex lemenpopulasjon

$$y' = \alpha y (B - y)$$

$\underbrace{\alpha}_0 < \alpha: \text{Velstkhoeffisient}$   
 $\underbrace{B}_0 > B, y' > 0 \quad 0 < B: \text{øvre bæreevne}$

Ny modell:  $y' = \alpha y (B - y) \underbrace{\left(\frac{y}{A} - 1\right)}_{\text{Allee-effekt}}$   $0 < A < B$

$$y < A \rightarrow \left(\frac{y}{A} - 1\right) < 0$$

$$\rightarrow y' < 0 \rightarrow y \text{ minner}$$

L2  $\alpha = 0.1$   
 $B = 1000$   
 $A = 200$   
 $y(0) = y_0$

$$y' = 0.1y(1000 - y)\left(\frac{y}{200} - 1\right)$$

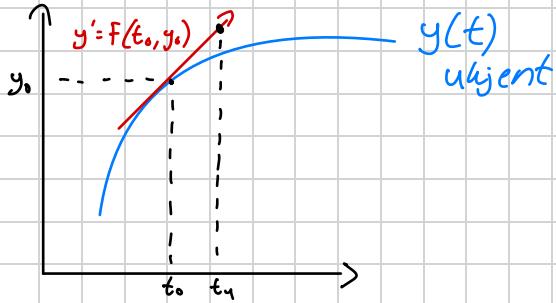
↳ Separabel

## 3. EULERS METODE

↳ Numerisk løsning  $\{y_n\}_n$   
 ↳ Grunnleggende metode

$$\frac{dy}{dt} = y' = F(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

Idé: Starte i ukjent punkt  $(t_0, y_0)$  og følger tangenten fremover



$$\text{Hush: } y'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

$$t_1 = t_0 + h \quad y_1 = y_0 + h F(t_0, y_0)$$

$$t_2 = t_1 + h \quad y_2 = y_1 + h F(t_1, y_1)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$\boxed{t_{n+1} = t_n + h \quad y_{n+1} = y_n + h F(t_n, y_n)} \quad \text{Eulers metode}$$

Resultat  $\{(t_0, y_0), (t_1, y_1), \dots, (t_n, y_n)\}$

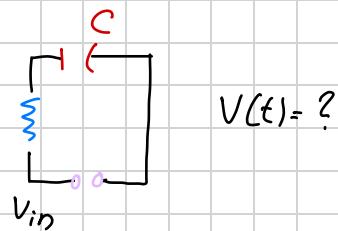
Ex: RC-krets

Batteri

Motstand  $R$

Kondensator  $C$

IVB:  $V(0) = V_0$



$$V(t) = ?$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{RC} (V_{in} - V)$$

$$\text{Eksakt lösning: } V(t) = V_{in} - (V_{in} - V_0) e^{-t/RC}$$

$$V_0 = 2V$$

$$R = 10k\Omega$$

$$C = 100 \mu F$$

$$V_{in} = 5V$$

$$\left. \begin{array}{l} V(t) = 5 - 3e^{-t} \\ \end{array} \right\}$$

$$V(1) = ?$$

MÅL: Löse numerisk

Euler:

$$\frac{dV}{dt} = V' = F(t, V)$$

Her:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{RC} (V_{in} - V(t))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{n+1} = t_n + h \\ V_{n+1} = V_n + h F(t_n, V_n) = V_n + h \left( \frac{1}{RC} (V_{in} - V_n) \right) \end{array} \right.$$

$$V_n \approx V(t_n)$$

Velg  $h=0,5$

IVB:  $(t_0, V_0)$

$$t_0 = 0$$

$$V_0 = 2$$

$$t_1 = t_0 + h = 0 + 0,5 = 0,5$$

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 + h \left( \frac{1}{RC} (V_{in} - V_0) \right) \\ &= 2 + 0,5 \left( \frac{1}{10 \cdot 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} (5 - 2) \right) \\ &= 3,5 \end{aligned}$$

$$t_2 = 0,5 + 0,5 = 1$$

$$V_2 = V_1 + h (V_{in} - V_1) = 4,25$$

$t$ (sek)	0	0,5	1
$V$ (volt)	2	3,5	4,25

$$\text{Eksakt: } V(1) = 5 \cdot 3e^{-1} \approx 3,89636\dots$$

$$\text{Feil: } e_n = |y(t_n) - y_n|$$

$$\text{Her: } e_n = |V(1) - V_2| = |3,89636 - 4,25| = 0,35364$$

$$\frac{4,25 \cdot 100\%}{3,89636} \approx \pm 9,1\%$$

### DISKUSJON

- 1) Hva kan være årsaker til feil?
- 2) Hvordan kan vi redusere feil?

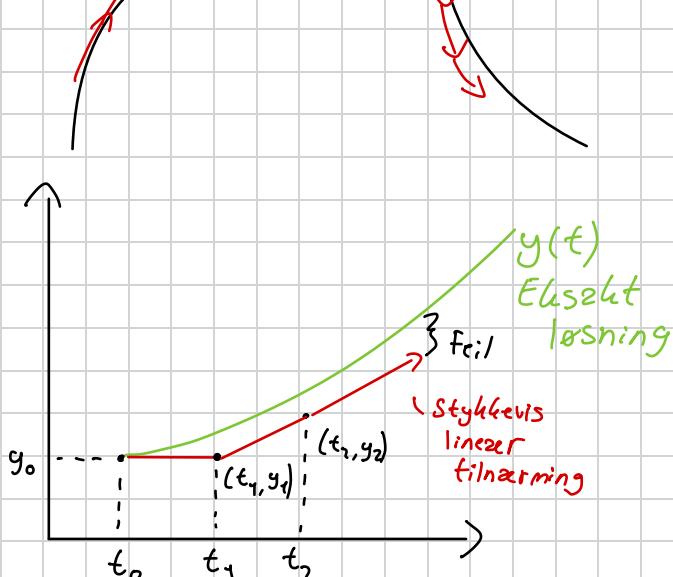
$$h=0,1 \quad h=0,01$$

Flere steg, men mer nøyaktig løsning enn  $h=0,5$

$$h=10^{-14} \quad h=10^{-6}$$

Kanskje ikke så mye så viktig  
på det

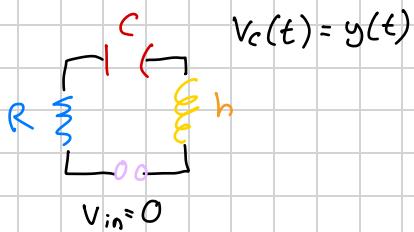
Mindre  $h$



## Varianter av Eulers metoder:

- \* Eksplisitt  $\{O(h)\}$
- \* Implisitt  $\{O(h)\}$
- \* Midtpunktmetoden  $O(h^2)$  (ikke den; bokstav)

Ex: RLC-krets  $\downarrow$  ukjent



$$\Rightarrow LCy'' + RCy' + y = V_{in}(t)$$

$\underbrace{\phantom{LCy'' + RCy' + } = 0}$

Ide: Omskrive til  $\vec{y}' = A\vec{y}$   $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$   $\vec{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$  To tallfolger  $\{y_{1,n}\}_n$  og  $\{y_{2,n}\}_n$   $A_{2 \times 2}$

## Y IMPLISITT EULER

$$y'(t) = F(t, y(t)) \quad y(t_0) = y_0$$

$$t_n = t_0 + n \cdot h \quad h > 0$$

$$y_n \approx y(t_n) \leftarrow \text{oftest ukjent}$$

$\nwarrow$  prøver å beregne

Hush: Differanseformuler for den deriverte

$$\text{Forover: } y'(t_n) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$$

$$\text{Bakover: } y'(t_n) \approx \frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{h}$$

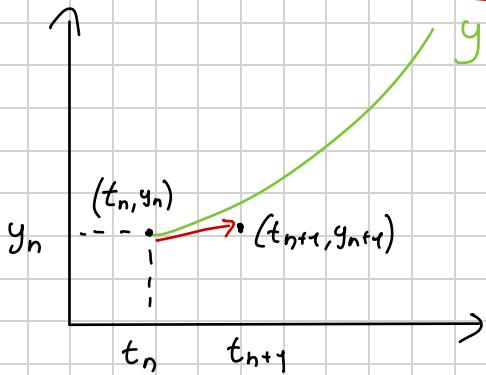
$$y'(t_{n+1}) \approx \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h}$$

## Eksplisitt Euler ("forever")

$$y'(t) = F(t, y(t))$$

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} \approx F(t_n, y(t_n))$$

$$\rightarrow y_{n+1} = y_n + h \cdot F(t_n, y_n)$$



Fordel: Enkel å implementere  
Ulempe: Ustabil for store  $h$

$$\text{Ex: } y'(t) = -2y$$

$$\text{IVB: } y(0) = 1$$

$$\text{Eksakt løsning: } y(t) = e^{-2t}$$

$$\text{Implisitt Euler: } y_{n+1} = y_n + h F(t_{n+1}, y_{n+1})$$

$$\text{Her: } F(t, y) = -2y$$

$$y_{n+1} = y_n + h(-2y_{n+1}) \rightarrow y_{n+1} = \frac{y_n}{1+2h}$$

$$\text{Lå } h = 1 \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{3}$$

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = t_0 + h = 0 + 1 = 1$$

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = \frac{y_0}{3} = \frac{1}{3}$$

$$t_2 = 2$$

$$y_2 = \frac{y_1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$t_3 = 3$$

$$y_3 = \frac{1}{27}$$

$t$	Eksplisitt løsning	Implisitt	Eksplisitt
0	1	1	1
1	0,135	0,333	-1
2	0,018	0,111	1
3	0,0025	0,037	-1

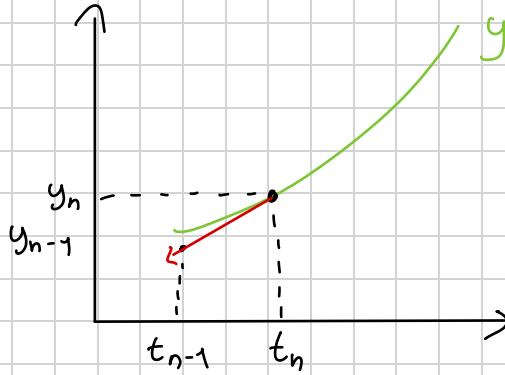
overskyter  
men stabilt

## Implisitt Euler ("baker")

$$y'(t) = F(t, y(t))$$

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} \approx F(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

$$\rightarrow y_{n+1} = y_n + h \cdot F(t_{n+1}, y_{n+1})$$



Fordel: Stabil

Ulempe: Mer komplisert å implementere