Forelesning 10
INDUKSJONSBEVIS

- Et par eksempler på rekursive funksjoner
- Induksjonsbevis
  - → "Vanlig" induksjon
  - → Strukturell induksjon
  - → Sterk induksjon

Forrige gang

- Induktivt definerte mengder
  - ↳ Basismengde M
  - ↳ Operasjoner $f_1, \dots f_k$
  - ↳ Tillukning: Finn den minste mengden som inneholder M og som er lukket under f_i-ene
- Rekursivt definerte funksjoner
  - ↳ Definer hva f gjør med basismengden
  - ↳ For andre elementer: gå bakover til du havner i basismengden

Eksempel på rekursivt definerte funksjoner

① $f(n) = n!$ (sist)

② Fibonacci-tallene ← $0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) =$ "det $(n+1)$-te Fibonacci-tallet"

Basismengde $\{0, 1\}$

Definer $f(0) = 0$ og $f(1) = 1$

Definer rekursivt
$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ for $n \geq 2$

③ La S være mengden av de <u>symmetriske bitstrengene</u>

Basismengde $\{\Lambda, 0, 1\}$

Hvis $s \in S$ så er $0s0 \in S$ og $1s1 \in S$.

Eks: 0, 1, 010, 11011, 10101 er med i S.

La $f: S \to \mathbb{N}$ være gitt ved
$f(\Lambda) = 0$, $f(0) = 1$ og $f(1) = 0$

$$\forall s \in S: \begin{aligned} f(0s0) &= f(s) + 2 \\ f(1s1) &= f(s) \end{aligned}$$

Denne teller antall nuller i s.

$$\begin{aligned} f(01000010) &= f(100001) + 2 \\ &= f(0000) + 2 \\ &= f(00) + 4 \\ &= f(\Lambda) + 6 = \underline{\underline{6}} \end{aligned}$$

Induksjonsbevis

Først: matematisk ("vanlig") induksjon
↳ Kraftig bevisteknikk for å vise at en påstand holder for alle naturlige tall (eller andre induktivt definerte mengder)

Eksempel

Vis at $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Prøv først:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \frac{1(1+1)}{2} = 1 \\ 1+2 &= 3 = \frac{2(2+1)}{2} \\ 1+2+3 &= 6 = \frac{3(3+1)}{2} \end{aligned}\right\}$$

Ser ut til å stemme men kan ikke sjekke alle naturlige tall

Et induksjonsbevis gjør slik:

1. Vis at påstanden stemmer for $n=1$ (eller et annet basistilfelle)
2. Anta at det stemmer for en vilkårlig $n=k$
3. Vis at de stemmer den også for $n=k+1$

Da kan vi si at siden den stemmer for $n=1$, må den stemme for $n=2$. Men da må den stemme for $n=3$ osv...

For vårt eksempel $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ får vi:

1. $n=1$ ok!
2. Anta at $1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ for en $k \geq 1$
3. Vis at det stemmer for $n=k+1$, altså at
$$1+2+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

Vi får
$$1+2+\ldots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2} \quad \blacksquare$$

Litt mer generelt

La $A \subseteq \mathbb{N}$ være en induktivt definert mengde med basismengde M og operasjon f.

1. Vis at påstanden stemmer for alle elementer i M
2. Anta at påstanden stemmer for en vilkårlig $k \in A$
3. Bruk antagelsen til å vise at da må den også holde for $f(k)$ ← "neste element"

Eksempel

Vis at $n! > 2^n$ for $n \geq 4$ $(n \in \mathbb{N})$
La basismengden være $\{4\}$

1. $4! = 24 > 16 = 2^4$ ✓ (basismengde ok)
2. Anta at $k! > 2^k$ for en vilkårlig $k \geq 4$
3. Vis at da må $(k+1)! > 2^{k+1}$

   Vi får
   $$(k+1)! = k! \cdot (k+1) > 2^k \cdot (k+1) > 2^k \cdot 2 = 2^{k+1} \quad \blacksquare$$

Strukturell induksjon

Kort og godt: Induksjon over induktivt definerte mengder som ikke nødvendigvis består av heltall.

Eksempel

La B være mengden av endelige bistrenger.

$$B = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 001, 010, \ldots\}$$

For $b \in B$, la $f(b) = (\text{antall forekomster av } 10 \text{ i } b) - (\text{antall forekomster av } 01 \text{ i } b)$

Eks: $f(11001010) = 3 - 2 = 1$

Vis at hvis $b = \underbrace{1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1} 0}$, så er $f(b) = 1$

streng som starter med 1 og slutter med 0

La B' være mengden av bistrenger på formen $1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1} 0$

B' kan defineres induktivt:
Basismengde $\{10\}$

To operasjoner:

$$\left.\begin{aligned} g(1b_2 \ldots b_{n-1}0) &= 1b_2 \ldots b_{n-1}00 \\ h(1b_2 \ldots b_{n-1}0) &= 1b_2 \ldots b_{n-1}10 \end{aligned}\right\}$$

Setter inn 0 eller 1 rett før siste bit i strengen

For basismengden har vi
$f(10) = 1$

La nå $b = 1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1} 0$. Anta at $f(b) = 1$

Anta først at $b_{n-1} = 0$. Da er antall 10-ere og antall 01-ere uforandret når vi setter inn 0 etter b_{n-1}

Setter vi inn 1, vil både antall 10-ere og 01-ere øke med 1. Så $f(b')$ er fortsatt 1, der
$b' = g(b)$ eller $b' = h(b)$

Anta så at $b_{n-1} = 1$
Da vil antall 10-ere og 01-ere være uforandret om vi setter inn 0 eller 1 etter b_{n-1}. Så $f(b') = 1$ ■

Sterk induksjon

Noen ganger er det praktisk å anta at en påstand gjelder for alle $k \leq n$ og ikke for bare en vilkårlig k.

Dette kalles <u>sterk induksjon</u>

Eksempel (TMA4140 eksamen H23, oppgave 2)

Definer en tallrekke t_i som følger

$t_0 = 0, t_1 = 0, t_2 = 1$ og $t_i = t_{i-1} + t_{i-2} + t_{i-3}$ for $i \geq 3$

a) Finn det minste naturlige tallet m slik at

$3m < t_m < 2^m$

b) Vis at $3n < t_n < 2^n$ for alle $n \geq m$

<u>Løsning</u>

a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3n$	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
t_n	0	0	1	1	2	4	7	13	24	44

Minste <u>$m = 9$</u>

b) Vi kan vise ulikhetene hver for seg.

Vi starter med $3n < t_n$ for $n \geq 9$.

Merk at $t_{n+1} \geq t_n$ og $t_{n+1} - t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$

For $n \geq 9$ får vi $t_{n+1} - t_n \geq t_8 + t_7 = 37$

Så t_{n+1} er minst 37 større enn t_n når $n \geq 9$.

Da viser vi at $3n < t_n$ for $n \geq 9$.

Basis-tilfellet $(n=9)$: $3 \cdot 9 = 27 < 44 = t_9$ ✓

Induksjonssteg:

Anta $t_k > 3k$, for en vilkårlig $k \geq 9$.

Må vise at $t_{k+1} > 3(k+1)$

$t_{k+1} \geq t_k + 37 > 3k + 37 > 3k + 3 = 3(k+1)$

Så viser vi at $t_n < 2^n$ for $n \geq 9$.

Basistilfeller: $t_9 = 44 < 512 = 2^9$ ✓

$t_{10} = 81 < 1024 = 2^{10}$ ✓

$t_{11} = 149 < 2048 = 2^{11}$ ✓

Induksjonshypotesen:

Anta at for $k \geq 11$ så er $t_n < 2^m$ for alle $9 \leq m \leq k$

Vi ønsker å vise at $\boxed{t_{k+1} < 2^{k+1}}$

$$
\begin{aligned}
t_{k+1} = t_k + t_{k-1} + t_{k-2} &< 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} \\
&= 4 \cdot 2^{k-2} + 2 \cdot 2^{k-2} + 2^{k-2} \\
&= 7 \cdot 2^{k-2} < 8 \cdot 2^{k-2} \\
&= 2^3 \cdot 2^{k-2} = 2^{k+1} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$