Teoriforelesning 9
FIKSPUNKTITERASJONER

- Fikspunktiterasjoner
- Konvergensanalyse
- Feilanalyse og konvergensorden
- Newtons metode
- Implisitt derivasjon

Eksempel

$x^2-2=0 \underset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} \Longleftrightarrow x = \underbrace{\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)}$

Dvs. $\sqrt{2}$ er et fikspunkt for funksjonen

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$$

Fpi: Initialverdi a_0

Rekursivt def: $a_{n+1}=f(a_n)$

$x^2-2=0 \Longleftrightarrow x^2=2 \Longleftrightarrow x=\frac{2}{x}$

Dvs. $x=\sqrt{2}$ er et fp for $g(x)=\frac{2}{x}$

La b_0 = initialverdi

$b_{n+1}=g(b_n)$

$a_{n+1}=f(a_n)$, $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$

$b_{n+1}=g(b_n)$, $g(x)=\frac{2}{x}$

Teorem 1

Anta at f er kontinuerlig og at følgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ er gitt rekursivt ved

$$a_{n+1} = f(a), \text{ med initialverdi } a_0.$$

Hvis følgen konvergerer og $\lim_{n\to\infty} a_n = r$, så er $f(r) = r$

Bevis (teorem 1):

$a_{n+1} = f(a_n)$, f kont

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = r$

Vil vise: $f(r) = r$

f kont, dvs $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

$$x_n \to a : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$$

Dermed har vi:

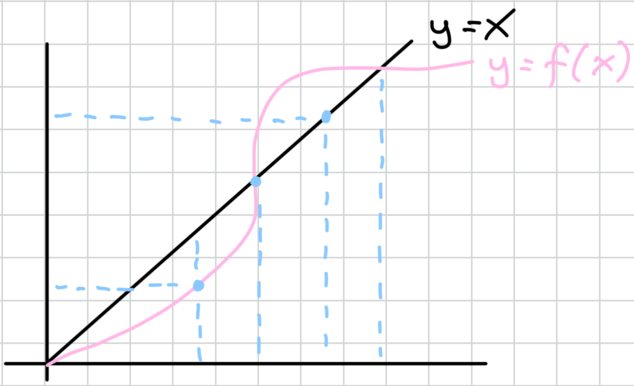
$$r = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(a_{n-1}) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_{n-1}\right) = f(r) \quad \blacksquare$$

Teorem 2

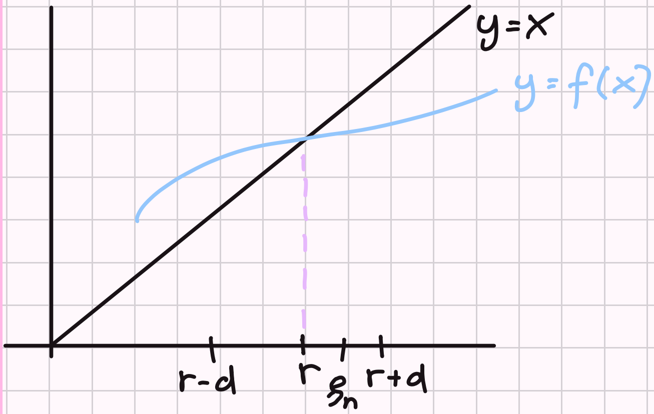
Anta at r er et fikspunkt for f, at f' er kontinuerlig i et åpent intervall $I = (r-d, r+d)$, og at det finnes en konstant a slik at

$$|f'(x)| \le a < 1$$

for alle $x \in I$. Da vil følgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ gitt rekursivt som $a_{n+1} = f(a_n)$ konvergere mot r for alle initialverdier $a_0 \in I$



Bevis (teorem 2)



a_0
$a_1 = f(a_0)$
$a_2 = f(a_1)$
$\vdots$
$a_{n+1} = f(a_n)$

Fra sekantsetningen har vi at

$$\frac{f(r)-f(a_n)}{r-a_n} = f'(g_n) \quad \text{for en } g_n \text{ mellom } a_n \text{ og } r$$

Dvs:

$$\underbrace{f(r)-f(a_n)}_{|r-a_{n+1}|} = \underbrace{|f'(g_n)|}_{\le \alpha < 1}|r-a_n| \Rightarrow |r-a_{n+1}| < |r-a_n| \text{ for alle } n \geq 0$$

$$|r-a_{n+1}| = |f'(g_n)| \cdot |r-a_n|$$
$$\leq \alpha|r-a_n| \leq |r-a_n| \text{ hvis } a_n \in I$$

$$|r-a_1| \leq \alpha|r-a_0|$$
$$|r-a_2| \leq \alpha|r-a_1|$$
$$\vdots$$
$$|r-a_{n+1}| \leq \alpha|r-a_n|$$

$$|r-a_{n+1}| \leq \alpha|r-a_n|$$
$$\leq \alpha \cdot \alpha|r-a_{n+1}| = \alpha^2|r-a_{n-1}|$$
$$\leq \alpha\alpha^2|r-a_{n-2}| = \alpha^3|r-a_{n-2}|$$
$$\vdots$$
$$\leq \alpha^{n+1}|r-a_0| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Dvs:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = r$$

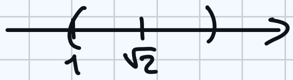
(fordi $\lim_{n\to\infty}|r-a_{n+1}| = 0$) ∎

Eks (retur)

$a_{n+1} = f(a_n)$, $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

$b_{n+1} = g(b_n)$, $g(x) = \frac{2}{x}$

Vi ser at



$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ for $x \geq 1$

$g'(x) = -\frac{2}{x^2}$, $g(\sqrt{2}) = -1$

Altså kan betingelsen $|g'(x)| \leq \alpha < 1$ umulig være oppfylt i et intervall om $x = \sqrt{2}$

Feilanalyse og konvergensorden

Gitt en fpi

$a_{n+1} = f(a_n)$, med initialverdi a_0

(konv. mot et fikspunkt $f(r) = r$),

er feilen i steg n av iterasjonen gitt ved

$e_n = |r - a_n|$

$\frac{e_{n+1}}{e_n}$ eller $\frac{e_{n+1}}{e_n^q}$ $(q > 1)$

Definisjon

Hvis det finnes et positivt tall q slik at

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^q}$$

eksisterer og er ulik null så kalles dette <u>konvergensorden</u> til fp-iterasjonen.

<u>Dvs:</u> $e_{n+1} \approx C e_n^q$

$q = 1$, $e_n \sim 0{,}1 \rightarrow e_{n+1} \sim 0{,}09$
$C = 0{,}9$

$q = 2$, $e_n^2 \sim 0{,}01 \rightarrow e_{n+1} \sim 0{,}009$

F.eks: $\underbrace{|a_{n+1}|}_{e_{n+1}} = |f'(q_n)|\underbrace{|a_n - r|}_{e_n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = |f'(q_n)| \quad \text{(der } q_n \text{ ligger mellom } r \text{ og } a_n\text{)}$$

$$= |f'(r)|$$

Dvs: Hvis $0 < |f'(r)| < 1$ så er konv.orden til fp-iterasjonen lik 1.

Merk: Hvis $|f'(r)| = 0$ blir konv.orden større.

Eks (retur)

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} \leftarrow f'(\sqrt{2}) = 0$$

$$\left[f''(x) = \frac{1}{2x^3}\right]$$

Taylors teorem

Anta at f er $(n+1)$ ganger kontinuerlig deriverbar på et åpent interall om punktet a. Da finnes det, for alle x i intervallet, et punkt c mellom a og x slik at

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Ikke samme
n som tidligere

Fra Taylors teorem anvendt med $a=\sqrt{2}$ (og $n=1$)

$$f(x) = f(\sqrt{2}) + \cancel{f'(\sqrt{2})(x-\sqrt{2})} + \frac{f''(\xi)}{2}(x-\sqrt{2})^2$$

(for ξ mellom x og $\sqrt{2}$)

$$\parallel$$

$$f(a_n) = \sqrt{2} + \frac{f''(\xi_n)}{2}(a_n-\sqrt{2})^2 \quad (\text{for } \xi_n \text{ mellom } a_n \text{ og } \sqrt{2})$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{|a_{n+1}-\sqrt{2}|}_{e_{n+1}} = \frac{|f''(\xi_n)|}{2}\underbrace{|(a_n-\sqrt{2})|^2}_{e_n^2} \rightarrow \frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{|f''(\xi_n)|}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n^2} \overset{\lim_{n\to\infty}}{=} \frac{|f''(\xi_n)|}{2} = \frac{|f''(\sqrt{2})|}{2}$$

$$= \frac{1/4\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \approx (0{,}35355\ldots)$$

$q=2$
er konv.orden

Newtons metode

Finn løsning av $f(x)=0$ (f kontinuerlig, deriverbar, $f'(x)\neq 0$ i nærheten av nullpunktet)

Sett $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Da vil $f(x)=0 \iff g(x)=x$

Med startverdi x_0 definer iterasjonen

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,\dots$$

$f(x)=0$

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

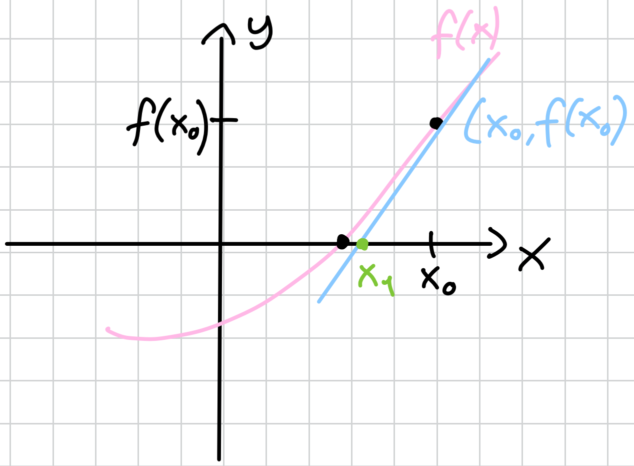
Fikspunktet av $g(x)$:

$$x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x \iff f(x)=0$$

Nullpunkt for $f(x)$ er et fikspunkt for g

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n=0,1,\dots$$

Gitt x_0.



$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

$$T_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

$$x-x_0=\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Lokal konvergens

Anta at f er (minst) to ganger deriverbar med kontinuerlige deriverte.

Dersom $f(a) = 0$ og $f'(x) \neq 0$ i et intervall omkring a, så konvergerer Newtons metode for enhver startverdi i dette intervallet, og

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} \leq C = \frac{|f''(a)|}{2|f'(a)|}$$

(konvergensorden 2)

Eksempel på lokal konvergens

Sett $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

$f(x) = 0$ i hvert av intervallene $(-4,0)$, $(0,1)$ og $(1,2)$

$f'(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

Dvs. $f'(x) = 0$ for $x = 1$ og $x = -2$

$f(-4) = \frac{-29}{6} < 0$

$(-4,0)$

$f(0) = \frac{1}{2} > 0$

$(0,1)$

$f(1) = -\frac{2}{3} < 0$

$(1,2)$

$f(2) = \frac{7}{6} > 0$

Global konvergens

Anta at f er (minst) to ganger deriverbar med kontinuerlige deriverte, og i tillegg at $f'(x) > 0$ og $f''(x) > 0$, og at f har nøyaktig ett nullpunkt $x = a$.

Da konvergerer Newtons metode mot a uansett valg av startverdi

Taylors teorem

For vilkårlig x og y gjelder

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \underbrace{\frac{f''(x)}{2}(y-x)^2}_{\geq 0}$$

fordi $f''(x) > 0$

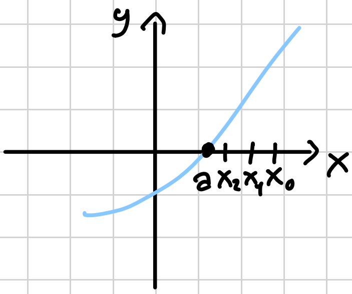
$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$$

Sett $y = a$

$$0 = f(a) \geq f(x) + f'(x)(a-x)$$

$$* \quad \boxed{f(x) + f'(x)(a-x) \leq 0}$$

Konvergerer uansett av startverdi



① Velg $x_0 > a$. Da er $f(x_0) > 0$ og $f'(x_0) > 0$

Fra $*$: $f(x_0) + f'(x_0)(a - x_0) \leq 0$

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + (a - x_0) \leq 0$$

$x_1 < x_0$
$x_1 \geq a$

Newton!

$$a \leq x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$$

Ved induksjon

$$a \leq x_{n+1} < x_n$$

- Avtagende følge $x_{n+1} < x_n$
- Nedtil begrenset $x_n \geq a$

Dette gir konvergens.

② $x_0 < a$

$$* \quad \boxed{f(x) + f'(x)(a-x) \leq 0}$$

$f(x_0) \leq 0$

$$f'(x_0)(a - x_0) \leq -f(x_0)$$

$$a - x_0 \leq -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$a \leq x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$$

Temaforelesning 9
NEWTONS METODE OG IMPLISITT DERIVASJON

Nøkkelbegrep

- Fikspunktiterasjoner
- Konvergensanalyse
- Feilanalyse og konvergensorden
- Newtons metode
- Implisitt derivasjon

Fikspunktiterasjon (repetisjon fra teoritimen)

Fikspunktiterasjon går ut på å finne løsninger til ligningen $x = g(x)$ for en kontinuerlig funksjon g (fikspunkt til g).

Teorem 1

Gitt a_0, definer $a_{n+1} = g(a_n)$. Dersom $\lim_{n\to\infty} a_n = r$, så er $g(r) = r$, dvs. r er et fikspunkt for g.

Teorem 2

Anta at r er et fikspunkt for g og at g' er kontinuerlig i et åpent intervall I om r. Dersom $|g'(x)| \leq \alpha < 1$, for en konstant α for alle $x \in I$, så vil følgen $a_{n+1} = g(a_n)$ konvergere mot r for alle initialverdier $a_0 \in I$.

Dette vil da være det eneste fikspunktet i I.

Konvergensorden (repetisjon fra teoritimen)

Med $a_{n+1} = g(a_n)$ og $\lim_{n\to\infty} a_n = r$, definer $e_n = |a_n - r|$.

La q være det positive tallet som er slik at $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{(e_n)^q} = C \neq 0$.

Da kalles konvergensordenen til den gitte fikspunktiterasjonen.
- Jo større q, jo raskere konvergens.
- Fikspunktiterasjonen har generelt konvergensorden 1 (dersom $g'(r) \neq 0$)

Eksempel på global konvergens

Sett $f(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} - 2$. $f(x) = 0$ for $x = a = 2\ln 4 \approx 2{,}77$

Jupyter notebook

Implisitt derivasjon

Å bestemme tangenten i et punkt

Eksempel 1

$x^2 + y^2 = 1$

$y = -x + \sqrt{2}$ er tangent i punktet $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$

$x^2 + (y(x))^2 = 1$

Derivere med hensyn på x på begge sider:

$2x + \boxed{2y(x) \cdot y'(x)} = 0$ Brukte kjerneregelen

$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$ $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$

$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -1\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$y = -x + \sqrt{2}$

Eksempel 2

$x^3 + \boxed{3x^2y} + xy^2 = 5$ Produktregelen

$3x^2 + \boxed{6xy + 3x^2y'(x)} + y^2 + x2y \cdot y'(x) = 0$

$y'(x) = \frac{3x^2 + 6xy + y^2}{3x^2 + 2xy}$

$y'(1) = \frac{-3 + 6 + 1}{3 + 2} = -2$