Escola de Matemática Aplicada

Prova 2

Julie P. S. dos Santos
Programa: *Doutorado em Modelagem Matemática*
Disciplina: *Análise Numérica e Simulação*
Professor: *Hugo Alexander de la Cruz Cancino*
Email: *julie.santos@fgv.edu.br*

Submission date: *December 17, 2021*

Problema 1

Seja a equação diferencial

$$x'(t) = f(t, x(t)) \; t \in [t_0, T], x \in \mathcal{R}^d \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

e o método numérico

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n)) \quad (3)$$

a) Prove que, para f suficientemente diferenciável em $[t_0, T]$, o método converge com ordem de convergência igual a 2. Justifique.

b) Considere a EDO (1) com $x(t) \in \mathcal{R}^2$ e

$$f(t, x(t)) = \begin{pmatrix} -x_1(t) + \frac{x_2^2(t)}{1+x_1^2(t)} - x_1^3(t) \\ -x_2(t) - \frac{x_1(t)x_2(t)}{1+x_1^2(t)} \end{pmatrix}$$

e considere que a condição inicial x(0) é selecionada aleatoriamente com $x_1(0) \sim \mathcal{N}(1, 1)$ e $x_2(0) \sim f(x(t)) = \begin{Bmatrix} e^{2x}, -\infty < x, 0 \\ e^{-2x}, 0 < x < \infty \end{Bmatrix}$

i. Proponha um algoritmo para calcular (via Monte Carlo e usando o método numérico (2)) a probabilidade de $x(2) \in B_{0.05}$, onde $B_r(0) := \{v \in \mathcal{R}^2 : ||v||_2 \leq r\}$.

ii. Implemente o algoritmo proposto e calcule essa probabilidade.

Solução:

a)

Considerando a segunda derivada de x contínua e usando expansão em séries de Taylor:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial x} f(t_n, x_n)\right) + \frac{h^3}{6}x'''(c) \qquad (4)$$

em que c é uma constante desconhecida que atende $t_n < c < t_{n+1}$. Considerando o método de um passo, faremos $w_n = x_n$ e vamos expandir o método em (3) em séries de Taylor

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= w_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)) \\ &= x_n + hf(t_n, x_n) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial x} f(t_n, x_n)\right) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

comparando a expansão (4) com a acima:

$$x_{n+1} - w_{n-1} = \mathcal{O}(h^3) \qquad (5)$$

De acordo com o teorema abaixo, o método numérico é de ordem dois.

Teorema: Assuma que $f(t, x)$ tem uma constante lipschitz L em x e que o valor x_n da solução do problema de valor inicial (1) em t_n é aproximado por w_n com erro de truncamento $e_n \leq ch^{k+1}$ para alguma constante c e $k0$. Então, para cada $a < t_1 < b$, a solução tem erro de truncamento global

$$g_n = |w_n - y_n| \leq \frac{ch^k}{L}(e^{L(t_i - a)} - 1). \qquad (6)$$

Se uma EDo satisfaz o teorema acima com $h \leftarrow 0$ dizemos que a solução tem ordem k. Pensando em convergência, o teorema é um teorema de convergência de métodos de soluções de EDO de um passo. Dado que o erro global depende de h, espera-se que o erro decresça com h, assim o erro pode ser tão pequeno quanto quisermos.

Concluindo que o método (3) é convergente para a equação (1) e é de ordem dois.

b)

O enunciado da questão está confuso e não compreendi a notação.

Problema 2

Considere a EDP do calor e o método numérico dado por:

$$-vU_{j-1}^{i} + (2+2v)U_j^i - vU_{j+1}^{i} = vU_{j-1}^{i-1} + (2-2v)U_j^{i-1} + vU_{j+1}^{i-1}; (v = \frac{ck}{h^2}) \qquad (7)$$

Demonstre que esse método é convergente.

Solution:

A equação do calor é da forma:

$$U_t = DU_{xx} \qquad (8)$$

em que D é o coeficiente de difusão.

Para estudar a convergência do método vamos escrever a equação (7) na forma matricial:

$$AU_i = BU_{i-1} + v(s_{i-1} + s_i) \qquad (9)$$

com

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2+2v & -v & 0 & \cdots & 0 \\ -v & 2+2v & -v & \ddots & \vdots \\ 0 & -v & 2+2v & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -v \\ 0 & 0 & 0 & -v & 2+2v \end{bmatrix}; \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2-2v & v & 0 & \cdots & 0 \\ v & 2-2v & v & \ddots & \vdots \\ 0 & v & 2-2v & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & v \\ 0 & 0 & 0 & v & 2-2v \end{bmatrix}$$

e $s_i = [U_0^i, o, \cdots, 0, U_{m+1}^i]$.

Estudaremos a convergência do método pelo raio espectral de $A^{-1}B$. Para isso vamos definir uma matriz T que será útil no desenvolvimento dos cálculos.

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

Podemos agora escrever o método em termos da matriz T, $A = vT + (2+v)I$ e $B = -vT + (2-v)I$, em que I é a matriz identidade. Aplicando o termo $A^{-1}B$ ao j-ésimo autovalor ϕ_j de T:

$$A^{-1}B\phi_j = (vT + (2+v)I)^{-1}(-v\lambda_j\phi_j + (2-v)\phi_j) = \frac{-v\lambda_j + 2 - v}{v\lambda_j + 2 + v}\phi_j \qquad (10)$$

em que λ_j é o j-ésimo autovalor de T. Determinado assim os autovalores de $A^{-1}B$ como

$$\frac{-v\lambda_j + 2 - v}{v\lambda_j + 2 + v} = \frac{4 - (v(\lambda_j + 1) + 2)}{v(\lambda_j + 1) + 2} = \frac{4}{L} - 1 \qquad (11)$$

com $L = v(\lambda_j + 1) + 2 > 2$, desde que $\lambda_j > -1$. Torna-se necessário encontrar os autovalores de T. Para tanto enunciaremos e demonstraremos o seguinte teorema:

Teorema: Os autovetores da matriz T são vetores ϕ_j para $j = 1, \cdots, m$ com autovalores $\lambda_j = 1 - 2\cos\frac{\pi_j}{m+1}$.

Demonstração: Do seno da soma e do seno da diferença, temos

$$\sin(i-1)x = \sin ix \cos x - \cos ix \sin x$$

$$\sin(i+1)x = \sin ix \cos x + \cos ix \sin x$$

Combinando:

$$\sin(i-1)x + \sin(i+1)x = 2\sin ix \cos x \tag{12}$$

ou ainda:

$$\sin(i-1)x + \sin ix \sin(i+1)x = (1 - 2\cos x)\sin ix$$

A expressão acima pode ser visualizada como um fator sobre a multiplicação da matriz por T. Fixando j e definindo o vetor ϕ_j:

$$\phi_j = \left[\sin\frac{j\pi}{m+1}, \sin\frac{2j\pi}{m+1}, \cdots, \sin\frac{mj\pi}{m+1}\right]. \tag{13}$$

Observe que as entradas são da forma $\sin ix$ como na equação (12), com $x = \pi j/(m+1)$ e de (12) implica

$$T\phi_j = \left(1 - 2\cos\frac{\pi j}{m+1}\right)\phi_j \tag{14}$$

para $j = 1, \cdots, m$, em que o termo entre parenteses são os autovalores λ_j de T.

□

Logo, os autovalores são entre -1 e 1, o que implica que o método é incondicionalmente estável. Podemos enunciar, a partir da derivação realizada, o seguinte teorema.

Teorema: (Estabilidade incondicional) O método (7) aplicado à equação de calor (8) com $c > 0$ é estável para qualquer tamanho de passos h, $k > 0$.

Não faz sentido discutir estabilidade de um método que não converge, porém, para completeza da demonstração derivaremos o erro de truncagem, demonstrando assim a ordem de convergência do método.

Assumindo a existência de derivadas de ordem superior de U e fazendo a fórmula do métodos das diferenças *backward*:

$$U_t(x,t) = \frac{U(x,t) - U(x,t-k)}{k} + \frac{k}{2}U_t t(x,t) - \frac{k^2}{6}U_{ttt}(x,t_1) \tag{15}$$

em que $t - k < t_1 < t$, Assumindo que as derivadas parciais existem. Expandindo U_{xx} em série de Taylor em t:

$$U_{xx}(x,t-k) = U_{xx}(x,t) - kU_{xxt}(x,t) + \frac{k^2}{2}U_{xxtt}(x,t_2) \tag{16}$$

em que $t-k < t_2 < t$. A diferença dividida centrada para a segunda derivada dá:

$$U_{xx}(x,t) = \frac{U(x+h,t) - 2U(x,t) + U(x-h,t)}{h^2} + \frac{h^2}{12}U_{xxxx}(x_1,t) \tag{17}$$

e

$$U_{xx}(x,t-k) = \frac{U(x+h,t-k) - 2U(x,t-k) + U(x-h,t-k)}{h^2} + \frac{h^2}{12}U_{xxxx}(x_2,t-k) \tag{18}$$

com x_1 e x_2 entre x e $x+h$. Substituindo na equação do calor (8):

$$U_t = c\left(\frac{1}{2}U_{xx} + \frac{1}{2}U_{xx}\right) \tag{19}$$

Usando (15) para substituir U_t e a combinação de (16), (17) e (18) do lado direito da equação, resulta:

$$\begin{gathered}\frac{U(x,t) - U(x,t-k)}{k} + \frac{k}{2}U_{tt}(x,t) - \frac{k^2}{6}U_{ttt}(x,t_1) = \\ \frac{1}{2}c\left[\frac{U(x+h,t) - 2U(x,t) + U(x-h,t)}{h^2} + \frac{h^2}{12}U_{xxxx}(x_2,t-k)\right] + \frac{1}{2}c\times \\ \left[kU_{xxt}(x,t) + \frac{k^2}{2}U_{xxtt}(x,t_2) + \frac{U(x+h,t-k) - 2U(x,t-k) + U(x-h,t-k)}{h^2} + \frac{h^2}{12}U_{xxxx}(x_2,t-k)\right]\end{gathered} \tag{20}$$

o erro é a quantidade remanescente

$$-\frac{k}{2}U_{tt}(x,t) + \frac{k^2}{6}U_{ttt}(x,t_1) + \frac{ch^2}{24}U_{xxxx}(x_2,t-k) + \frac{ch^2}{24}U_{xxxx}(x_2,t-k) + \frac{ck}{2}U_{xxt}(x,t) - \frac{ck^2}{4}U_{xxtt}(x,t_2)$$

sabendo, pela equação do calor (8) $U_t = cU_{xx} \rightarrow cU_{xxt} = U_{tt}$, o que possibilita eliminar alguns termos, restando:

$$\frac{k^2}{6}U_{ttt}(x,t_1) + \frac{h^2}{24}U_{tt}(x_2,t-k) + \frac{ch^2}{24}U_{tt}(x_2,t-k) - \frac{k^2}{4}U_{ttt}(x,t_2)$$

Expandindo em t:

$$U_{tt}(x_2,t-k) = U_{tt}(x_2,t) - kU_{ttt}(x_2,t_4). \tag{21}$$

Logo, o erro de truncagem é de ordem $\mathcal{O}(h^2) + \mathcal{O}(h^2)$ + ordem superiores. Desta forma, o método é de convergência de segunda ordem e incondicionalmente estável para a equação do calor.

Problema 3

Considere a equação diferencial estocástica (EDE)

$$dx(t) = \alpha x^3(t)dt + \beta x^2(t)dW(t) \tag{22}$$

$$x(0) = 1 \tag{23}$$

(a) Implemente o método weak de Euler-Maruyama para desenhar a curva de evolução temporal da média da solução no intervalo $[0, T]$. Isto é, $E(x(t))$ em $[0, T]$. Use como parâmetros de entrada do seu programa os parâmetros α, β, o tamanho do passo h, o tempo de integração T, e o número M de simulações.

(b) Para $\alpha = -\frac{1}{4}$ e $\beta = \frac{1}{2}$, pode se provar que a solução satisfaz: $E(x(t)) = -\frac{1}{4}t + 1$. Plote ma mesma figura e para valores diferentes de h o valor exato da média no intervalo $[0, 3]$ e o valor obtido numericamente com os diferentes valores de h.

Solution:

A implementação foi feita em python e o notebook com os resultados encontra-se disponível no github no link https://github.com/juliezousa/Numerical-analysis-PhD-FGV/blob/main/P2/euler-maruyama.ipynb.