

PROVA 2. Análise Numérica e Simulação Computacional. FGV EMAP 2021

Data limite para entrega no eclass: 17 de Dezembro, 13 : 00 hrs

1. Seja a equação diferencial

$$\begin{aligned}x'(t) &= f(t, x(t)) \quad t \in [t_0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d \\x(t_0) &= x_0\end{aligned}\tag{1}$$

e o método numérico

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n))\tag{2}$$

- (a) Prove que, para f suficientemente diferenciável em $[t_0, T]$, o método converge com ordem de convergência igual a 2. Justifique.
- (b) Considere a EDO (1) com $x(t) \in \mathbb{R}^2$ e

$$f(t, x(t)) = \begin{pmatrix} -x_1(t) + \frac{x_2^2(t)}{1+x_1^2(t)} - x_1^3(t) \\ -x_2(t) - \frac{x_1(t)x_2(t)}{1+x_1^2(t)} \end{pmatrix},$$

e considere que a condição inicial $x(0)$ é selecionada aleatoriamente com $x_1(0) \sim \mathcal{N}(1, 1)$ e $x_2(0) \sim f(x) = \begin{cases} e^{2x}, & -\infty < x < 0 \\ e^{-2x}, & 0 \leq x < \infty \end{cases}$

- i. Proponha um algoritmo para calcular (via Monte Carlo e usando o método numérico (2)) a probabilidade de $x(2) \in B_{0.05}(0)$, onde $B_r(0) := \{v \in \mathbb{R}^2 : \|v\|_2 \leq r\}$.
- ii. Implemente o algoritmo proposto e calcule essa probabilidade.

2. Considere a EDP do calor é o método numérico dado por:

$$-vU_{j-1}^i + (2 + 2v)U_j^i - vU_{j+1}^i = vU_{j-1}^{i-1} + (2 - 2v)U_j^{i-1} + vU_{j+1}^{i-1}; \quad (v = \frac{ck}{h^2})$$

Demonstre que esse método é convergente.

3. Considere a equação diferencial estocástica (EDE)

$$\begin{aligned}dx(t) &= \alpha x^3(t) dt + \beta x^2(t) dW(t) \\x(0) &= 1\end{aligned}\tag{3}$$

- (a) Implemente o método weak de Euler-Maruyama para desenhar a curva da evolução temporal da média da solução no intervalo $[0, T]$. Isto é, $E(x(t))$ em $[0, T]$. Use como parâmetros de entrada do seu programa os parâmetro α, β , o tamanho de passo h , o tempo de integração T , e o número M de simulações.
- (b) Para $\alpha = -\frac{1}{4}$ e $\beta = \frac{1}{2}$, pode se provar que a solução satisfaz: $E(x(t)) = -\frac{1}{4}t + 1$. Plote na mesma figura e para diferentes valores de h o valor exato da média no intervalo $[0, 3]$ e o valor obtido numericamente com os diferentes valores de h .