75.12 ANÁLISIS NUMÉRICO I
FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

TRABAJO PRÁCTICO N° 2
2do Cuatrimestre 2018

Resolución de la Ley de Newton en ecuaciones diferenciales
Reproducción del viaje a la Luna de la sonda Apolo 11 en 1969

Introducción

La trayectoria orbital entre varios cuerpos no suele tener una solución cerrada. Para calcularla, se puede emplear la formulación en ecuaciones diferenciales de la Ley de Newton. Tal es el caso de una sonda atraída por dos cuerpos celestes los cuales, a su vez, giran en torno al centro de masa de ambos. Las fuerzas intervinientes sobre la sonda son la atracción gravitatoria que cada cuerpo ejerce sobre ella, y la fuerza centrífuga en el caso de adoptar un sistema de referencia rotante.

La predicción sucesiva de posición y velocidad a partir de datos de partida supone la resolución de un problema de valores iniciales. La trayectoria se va determinando por medio de métodos numéricos entre un instante y el que sigue, repitiendo el cálculo hasta un tiempo final determinado. Sin embargo, los pequeños errores cometidos por el algoritmo se van acumulando, limitando la precisión de este enfoque.

Sistema Tierra – Luna

El 20 de julio de 1969 el hombre hizo su primer viaje tripulado a la Luna, hazaña que repitió otras 5 veces. La Tierra y la Luna conforman un sistema cuyo centro de masa se encuentra dentro de la Tierra, pero notablemente desplazado de su centro. La relación de masas entre ambas es de 0.012, tomando un valor intermedio en comparación con otros sistemas como Plutón y su luna Caronte (0.12) o con otros satélites del sistema solar con sus respectivos planetas (0.00025).

En este Trabajo Práctico, recrearemos la trayectoria de la sonda Apolo 11 orbitando entre la Tierra y la Luna, considerando a su vez que el sistema gira alrededor de su centro de masa. Las fuerzas resultantes sobre la sonda serán entonces:

$\underline{F_1} = G\frac{M_1 m}{d_1^2}\underline{\breve{e}_1}$ fuerza que ejerce el cuerpo 1 (Tierra) sobre la sonda

$\underline{F_2} = G\frac{M_2 m}{d_2^2}\underline{\breve{e}_2}$ fuerza que ejerce el cuerpo 2 (Luna) sobre la sonda

$\underline{F_c} = m\omega^2 d_G \underline{\breve{e}_G}$ fuerza centrífuga que experimenta la sonda al encontrarse en un sistema rotante, donde

G	constante universal de gravitación
m	masa de la sonda
M_1	masa de la Tierra
M_2	masa de la Luna
d_1	distancia entre la sonda y la Tierra
d_2	distancia entre la sonda y la Luna
$\underline{\breve{e}_1}$	versor unitario en sentido a la Tierra
$\underline{\breve{e}_2}$	versor unitario en sentido a la Luna
ω	velocidad angular de giro del sistema Tierra – Luna alrededor de su centro de masa
d_G	distancia entre la sonda y el centro de masa del sistema (origen de coordenadas)
$\underline{\breve{e}_G}$	versor unitario en sentido opuesto al origen (saliente)

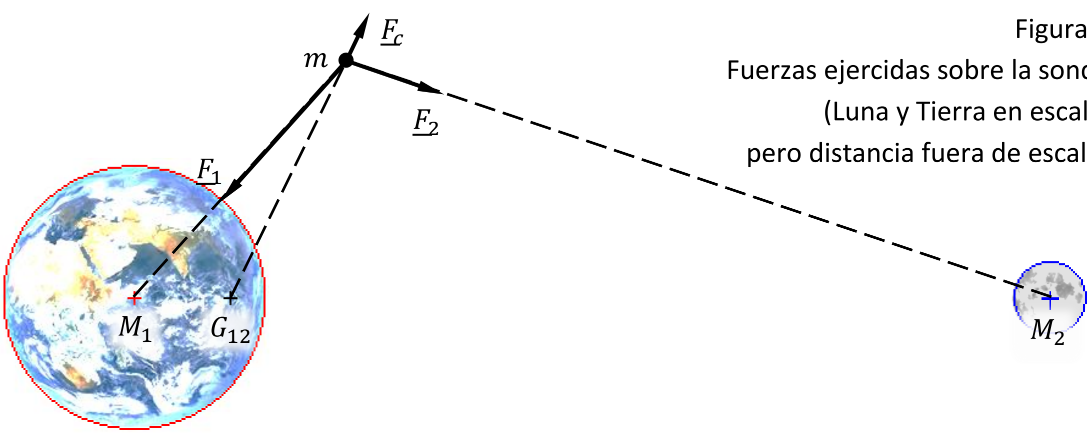

Figura 1
Fuerzas ejercidas sobre la sonda
(Luna y Tierra en escala,
pero distancia fuera de escala)

A su vez, las distancias se calculan como:

$$d_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}$$

$$d_G = \sqrt{x^2 + y^2}$$

donde

x, y	coordenadas de la sonda (incógnita, en función del tiempo)
x_1, y_1	coordenadas de la Tierra (dato, fijas)
x_2, y_2	coordenadas de la Luna (dato, fijas)

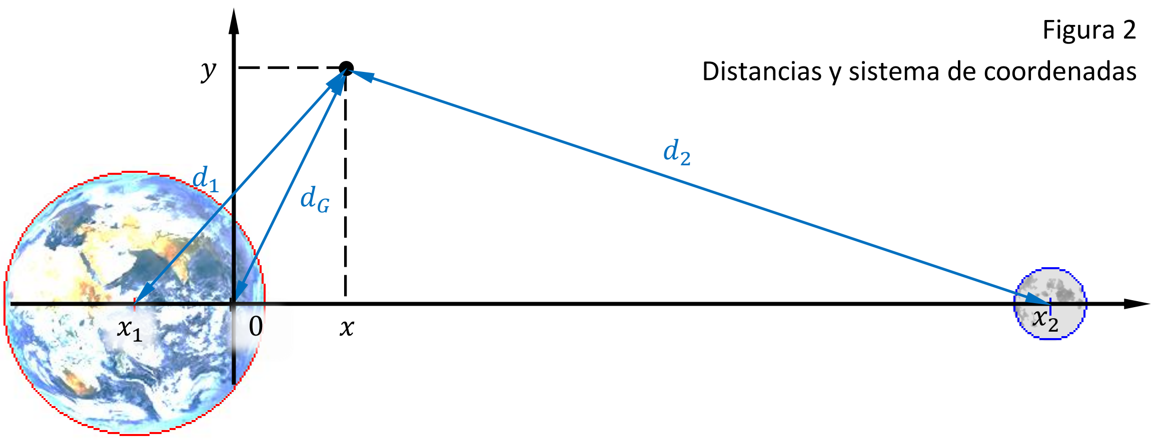

Figura 2
Distancias y sistema de coordenadas

La Ley de Newton establece:

$$\sum \underline{F} = \underline{F_1} + \underline{F_2} + \underline{F_c} = m\underline{a}$$

donde $\underline{a}$ es la aceleración de la sonda. Descomponiendo esta ecuación en sus componentes cartesianas, nos queda el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dv_x}{dt} = G\frac{M_1}{d_1^2}\cos\alpha_{f1} + G\frac{M_2}{d_2^2}\cos\alpha_{f2} + \omega^2 d_G \cos\alpha_{fc} \qquad \text{(ec. 1)}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = G\frac{M_1}{d_1^2}\operatorname{sen}\alpha_{f1} + G\frac{M_2}{d_2^2}\operatorname{sen}\alpha_{f2} + \omega^2 d_G \operatorname{sen}\alpha_{fc} \qquad \text{(ec. 2)}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x \qquad \text{(ec. 3)}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \qquad \text{(ec. 4)}$$

con condiciones iniciales

$$v_{x(t=0)} = v_0 \cos\alpha_{v0}$$

$$v_{y(t=0)} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_{v0}$$

$$x_{(t=0)} = x_0$$

$$y_{(t=0)} = y_0$$

donde

$$\alpha_{f1} = \operatorname{atan}\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

$$\alpha_{f2} = \operatorname{atan}\frac{y_2 - y}{x_2 - x}$$

$\alpha_{fc} = \operatorname{atan}\frac{y}{x}$

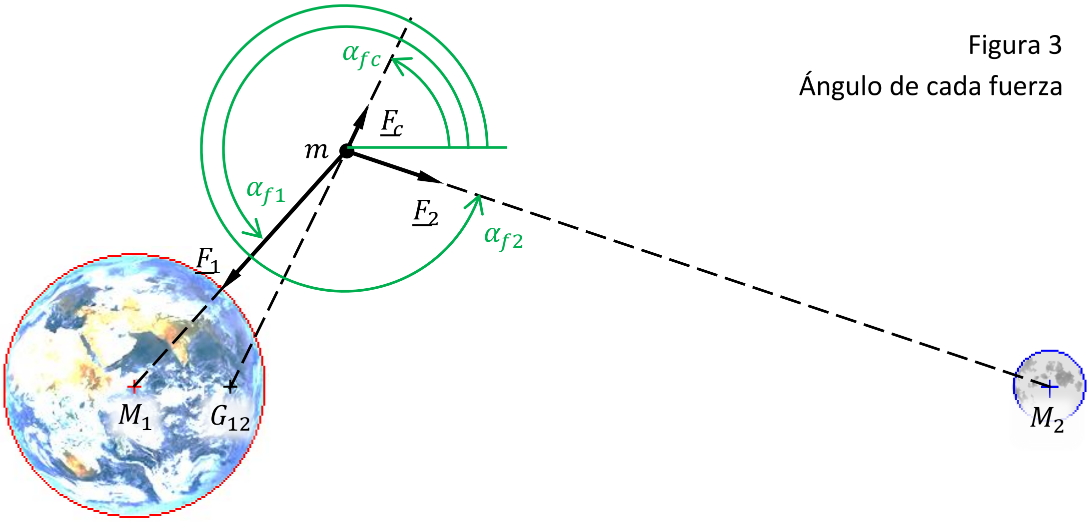

Figura 3
Ángulo de cada fuerza

Los datos para el sistema analizado son:

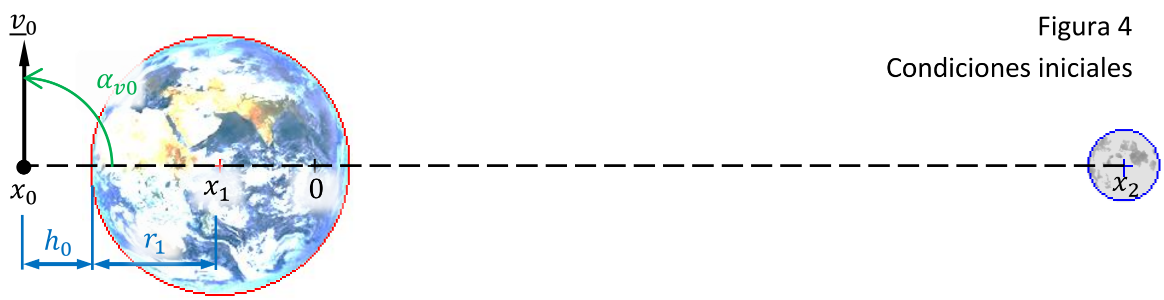

Figura 4
Condiciones iniciales

Distancia inicial entre la sonda y la superficie de la Tierra: $h_0 = 0.ABC * 10^6 m$, donde ABC son los últimos 3 dígitos del número de padrón. Por ejemplo, para padrón 98765, $h_0 = 0.765E6\ m$, y para padrón 123456, $h_0 = 0.456E6\ m$.

Sonda:	$x_0 = x_1 - r_1 - h_0$	$y_0 = 0\ m$	v_0: varias	$\alpha_{v0} = \frac{\pi}{2}$
Tierra:	$x_1 = -4.670E6\ m$	$y_1 = 0\ m$	$r_1 = 6.731E6\ m$	$M_1 = 5972E21\ kg$
Luna:	$x_2 = 379.7E6\ m$	$y_2 = 0\ m$	$r_2 = 1.738E6\ m$	$M_2 = 73.48E21\ kg$

$G = 6.674E\text{-}11\ kg^{-1}m^3s^{-2}$ r_i: radio de cada astro

$\omega = 4.236E\text{-}7\ s^{-1}$

Desarrollo del Trabajo Práctico

Resolver el sistema de las ec. 1 a 4 con el método de Euler y con Runge-Kutta orden 2. Expresar las ecuaciones en diferencias que surgen de aplicar cada método y programar un código computacional.

Parte 1: estimación del error de cada método (aplicar a Euler y Runge-Kutta orden 2)

a) Modelar una vuelta entera de la sonda alrededor de la Tierra considerando únicamente la masa de la Tierra y sin tener en cuenta la rotación entre Tierra y Luna, es decir $M_1 = 5972E21\ kg$, $M_2 = 0$ y $\omega = 0$. El módulo de la velocidad de órbita circular es $v_o = \sqrt{GM_1/r}$ y el período $T = 2\pi r/v_0$ donde $r = r_1 + h_0$.
b) Si los métodos numéricos tuvieran precisión infinita, la trayectoria descrita debería presentar una distancia constante al centro de la tierra. Evaluar qué sucede con esa distancia en función del tamaño de paso para cada método.
c) Verificar si se conserva la energía mecánica específica:

$$E_m = E_c + E_p \qquad \text{(ec. 5)}$$

donde

E_m energía mecánica específica
$E_c = \frac{1}{2}v^2$ energía cinética específica
$E_p = -G\frac{M_1}{d_1}$ energía potencial específica con respecto a la Tierra solamente

Parte 2: utilización del código para simular distintos casos

Elegir uno de los métodos probados en la parte 1 para continuar con el análisis. Considerar ahora ambos cuerpos incluyendo el efecto de la rotación entre ellos, es decir $M_1 = 5972E21\ kg$, $M_2 = 73.48E21\ kg$ y $\omega = 4.236E\text{-}7\ s^{-1}$. Encontrar la velocidad inicial v_o o el rango de velocidades para los cuales:

a) la sonda adquiere una órbita en forma de 8
b) la sonda adquiere una órbita elipsoidal que pasa por fuera de la Tierra y la Luna
c) órbitas adicionales que le parezcan "curiosas"

Modificar el tiempo total de cada simulación para que dure como mínimo una vuelta. Graficar las órbitas obtenidas. Si ahora consideramos la energía potencial específica de cada astro $E_p = E_{p1} + E_{p2} = -G\frac{M_1}{d_1} - G\frac{M_2}{d_2}$, graficar para cada caso la evolución temporal de las energías intervinientes en la ec. 5. Verificar si se conserva E_m.

Parte 3: elección de la órbita más conveniente para el viaje

En base a las órbitas modeladas en el punto 2, elija cuál de ellas juzga como más conveniente para el viaje a la Luna, en base a parámetros tales como: tiempo total de viaje, distancia mínima a la superficie de la Luna, velocidad necesaria versus obtenida para entrar en órbita a la Luna, etc.