Primer consulta

## Definición por límite de la derivada

En cálculo, la derivada de una función $f(x)$ en un punto $x=a$ se define como el límite del cociente incremental

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se toma un punto 'a' en la gráfica de la función, se elige otro punto cercano a+h, el cociente

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

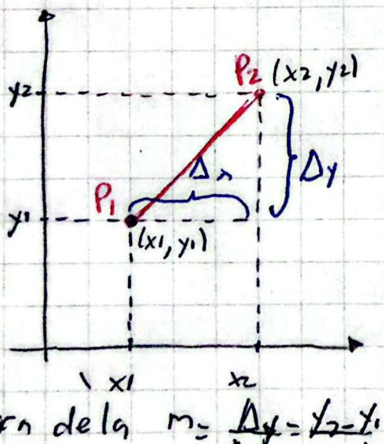
Representa la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$.

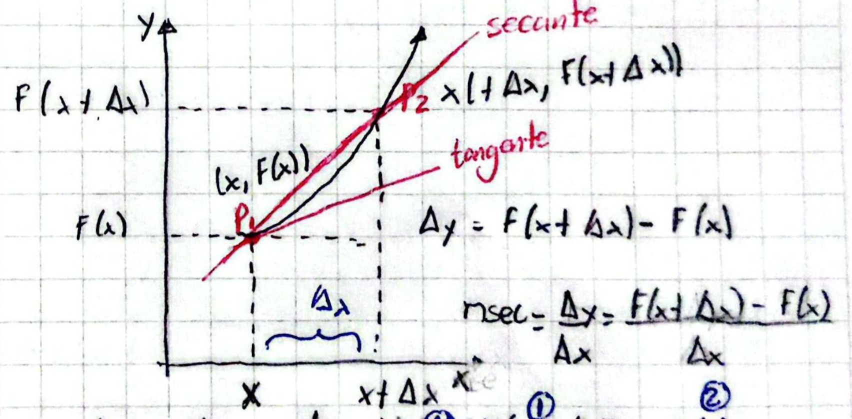
- Al hacer $h \to 0$, el punto $(a+h, f(a+h))$ se acerca infinitamente a $(a, f(a))$.
- El límite nos da la pendiente de la recta tangente en el punto a.

## Interpretación geométrica

Recta secante: Une dos puntos de la curva, da una pendiente promedio.
Recta tangente: Es el caso límite cuando esos dos puntos se acercan hasta incidir en a
La derivada, $f'(a)$: Es la pendiente de esa recta tangente, que indica qué tan rápido cambia la función en ese punto.

→ De otra forma:
Si $f'(a) > 0$, la función crece (pendiente positiva)
Si $f'(a) < 0$, la función decrece (pendiente negativa)
Si $f'(a) = 0$, hay un punto horizontal (máximo, mínimo o de inflexión)




Inclinación de la recta $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

① ② ③ ④

## 1 Definición por límite de la integral definida

La integral definida de una función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ se define como límite de una suma de Riemann

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

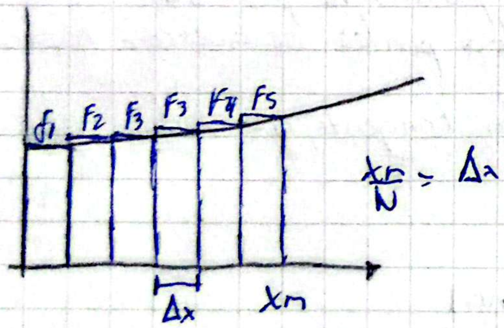
donde:

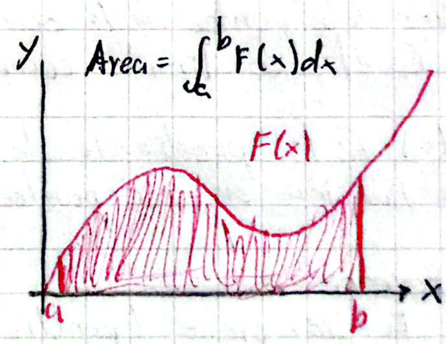
Se divide el intervalo $[a,b]$ en $n$ intervalos
Cada subintervalo tiene anchura $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
En cada subintervalo se elige un punto $x_i^*$
Se calcula el área de un rectángulo con base $\Delta x$ y altura $f(x_i^*)$
La suma de esos rectángulos aproxima el área bajo la curva.
Al tomar el límite cuando $n\to\infty$, obtenemos el área exacta bajo la curva entre $x=a$ y $x=b$.

### Explicación geométrica

La integral representa área bajo la curva de $F(x)$ entre $a$ y $b$.
Se aproxima dividiendo esa región en rectángulos
Cuando el número de rectángulos aumenta $(n\to\infty)$ y su ancho tiende a cero, la suma de áreas de los rectángulos se convierte en el área exacta
Geométricamente, la integral es el acumulado de infinitas sumas infinitesimales.

Además →
Si $F(x) \geq 0$, la integral es el área bajo la curva
Si $F(x)$ toma valores negativos, la integral representa el área con signo (debajo del eje $x$ resta área).



① $\int_{-\infty}^{\infty} 3t^3 e^{-2t}\,\delta(6t+10)\,dt$

1) Reemplazar x: $6t\,10 = 6(t\ 10/6) = 6\,(t + 5/3)$

Raíz $6t\,10 = 0 \rightarrow t_0 = -10/6 = -5/3$

2) Escalamiento
Propiedad $\delta(au) = 1/_{|a|}\delta(u)$ : $\delta(6(t+5/3)) = 1/_{|6|}\,\delta(t+5/3) = 1/6\,\delta(t+5/3)$

3) Desplazamiento
Ahora el valor en $t = -5/3$ $\int_{-\infty}^{\infty} 3t^3 e^{-2t}(6t+10)dt = \int_{-\infty}^{\infty} 3t^3 e^{-2t}\,1/6\,\delta(t+5/3)dt$

$= 1/6 \cdot 3(-5/3)^3 e^{-2(-5/3)}$

Calculamos $(-5/3)^3 = -125/27$ $\quad e^{-2(5/3)} = e^{10/3}$

$\rightarrow 1/6 \cdot 3(-125/27)e^{10/3} = 3/6 \cdot (-125/27)e^{10/3} = 1/2(-125/27)e^{10/3} = -125/54\,e^{10/3}$

Verificación en formula general
$\delta(g(t)) = \sum_i \frac{\delta(t-t_i)}{|g'(t_i)|}$, $\quad \int f(t)\delta(g(t))dt = \sum \frac{f(t_i)}{|g'(t_i)|}$ $\quad g(t) = 6t+10$, $t_0 = -5/3$, $g' = 6$

$\int 3t^3 e^{-2t}\delta(6t+10)dt = \frac{3(-5/3)^3 e^{-2(-5/3)}}{|6|} = \frac{3(-125/27)e^{10/3}}{6} = -\frac{125}{54}\,e^{10/3}.$

② Demostrar $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}[\delta(t)]\,x(t)dt = \frac{\partial}{dt}x(t)\Big| = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t \pm t_0)\cdot x(t)dt = -x'(\mp t_0)$

1) Demostrar partes $I = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-t_0)\,x(t)dt$ $\quad \int u\,dv = uv - \int v\,du$
$u = x(t) \rightarrow du = x'(t)dt$
$dv = \delta'(t-t_0)dt \rightarrow v = \delta(t-t_0)$.

2) Aplicando formula
$I = [x(t)\,\delta(t-t_0)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,x'(t)dt$

3) Frontera $[x(t)\,\delta(t-t_0)]_{-\infty}^{\infty}$ se anula $\rightarrow$ $\delta(t-t_0)$ es nula fuera de $t_0$

4) $I = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,x'(t)dt$ $\rightarrow$ Propiedad sifting
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,x'(t)\,dt = x'(t_0)$.

5) Resultado $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-t_0)\,x(t)dt = -x'(t_0)$

Caso si $\delta'(t+t_0)$ se sustituye $t_0$ por $-t_0$, la raíz de $t+t_0$ es $t = -t_0$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t+t_0)x(t)dt = -x'(-t_0)$
$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t \pm t_0)\,x(t)dt = -x'(\mp t_0)$