Pregunta 1.

$w_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad \frac{2\pi}{w_0} = T_0$

$$d^2(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

$$\bar{P}_x = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt \rightarrow \text{señal periodica}$$

$$x_1(t) = Ae^{-jnw_0t}, \quad x_2(t) = Be^{jmw_0t}$$

- $A, B \in \mathbb{R}^+$ (números reales positivos)
- $n, m \in \mathbb{Z}$ (enteros)
- $w_0 = 2\pi / T_0$
- T_0 es el periodo Fundamental

} Datos de mi enunciado

Propiedad: $|x| = x \cdot x^*$

Entonces $x_1(t) - x_2(t) = Ae^{-jnw_0t} - Be^{jmw_0t}$

$$|x_1(t) - x_2(t)|^2 = |Ae^{-jnw_0t} - Be^{jmw_0t}|^2$$

$$z = Ae^{-jnw_0t} - Be^{jmw_0t}$$
$$z^* = Ae^{jnw_0t} - Be^{-jmw_0t}$$

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta \qquad \theta = (n+m)w_0t$$

$$|x_1 - x_2|^2 = (Ae^{-jnw_0t} - Be^{jmw_0t})(Ae^{jnw_0t} - Be^{-jmw_0t})$$
$$= A^2 - ABe^{-jnw_0t}e^{-jmw_0t} - ABe^{jnw_0t}e^{jmw_0t} + B^2$$
$$= A^2 + B^2 - AB(e^{-j(n+m)w_0t} + e^{j(n+m)w_0t}).$$

$$|x_1(t) - x_2(t)|^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)w_0t)$$

$$d^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)w_0t))dt$$

$$d^2 = A^2 + B^2 - \frac{2AB}{T} \int_0^T \cos((n+m)w_0t)dt \qquad n+m = k$$

$$P_{x_1 - x_2} = \frac{1}{T_0}\left[\int_0^{T_0} (A^2 + B^2)dt - 2AB \int_0^{T_0} \cos((k)w_0t)dt\right]$$

$$\int_0^{T_0} \cos$$

Si $k = 0$ $(n+m=0)$

$$\cos(0) = 1 \rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T 1 dt = \frac{T}{T} = 1$$

Si $k \neq 0$ $\int_0^T \cos\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)kt\right)dt = \frac{T}{2\pi k}\left[\operatorname{sen}(2\pi k) - \operatorname{sen}(0)\right] = \frac{T}{2\pi k} \cdot 0 = 0.$

Si $n+m=0$ $d^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cdot 1 = (A-B)^2 \rightarrow \sqrt{d^2} = \sqrt{(A-B)^2}$

Si $n+m \neq 0$ $d^2 = A^2 + B^2 - \cancel{2AB \cdot 0} = A^2 + B^2 \qquad \sqrt{A^2 + B^2}$

Ejercicio 2 $w_1 = 1000$ $3\cos(1000\pi t) + 5\,sen(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t$
$w_2 = 3000$
$w_3 = 11000$

$f_1 = \frac{w}{2\pi} = \frac{1000\pi}{2\pi} = 500\ Hz$

$f_2 = \frac{w_2}{2\pi} = \frac{3000\pi}{2\pi} = 1500\ Hz$

$f_3 = \frac{w_3}{2\pi} = \frac{11000\pi}{2\pi} = 5500\ Hz$

La Frecuencia de muestreo: $fs = 5kHz = 5000\ Hz$
Según Nyquist, para evitar aliasing necesitamos
$fs > 2f_{max}$
f_{max}: es la Frecuencia más alta en la señal

$2f_{max} = 11000\ Hz > fs = 5000\ Hz$
Hay aliasing!

$500\ Hz \to 500\ Hz$
$1500\ Hz \to 1500\ Hz$
$5500\ Hz \to 500\ Hz$

Despues del muestreo
$f_a = |f - k\,fs|,$

$f_a = |5500 - 5000| = 500\ Hz$

$x[n] = 3\cos\left(2\pi \frac{500}{5000} n\right) + 5\,sen\left(2\pi \frac{1500}{5000} n\right) + 10\cos\left(2\pi \frac{500}{5000} n\right)$

$x[n] = 3\cos(0.2\pi n) + 5\,sen(0.6\pi n) + 10\cos(0.2\pi n).$

$x[n] = 13\cos(0.2\pi n) + 5\,sen(0.6\pi n)$

Amplitud $\approx 3 + 5 + 10 = 18$
Para 4 bits: $2^4 = 16$ niveles

4. $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$
↳ $x''(t)$

para la Señal $x(t)$

Parte real
Parte imaginaria
magnitud
Fase
error relativo

• Encontrando la segunda derivada

La segunda derivada será la de la onda cuadrada. En cada salto, aparecerá un impulso de dirac cuya magnitud es igual al tamaño del salto.

• Calculando las pendientes de $x(t)$ en un periodo de $[-T/2, T/2]$

$(-d_2, d_1) = \frac{A}{(d_2-d_1)}$

$(-d_1, 0) = \frac{-A}{d_1}$

$(0, d_1) = \frac{A}{d_1}$

$(d_1, d_2) = \frac{-A}{(d_2-d_1)}$

• $x''(t)$ se compone de impulsos donde la pendiente cambia, Calculando su magnitud

$t = -d_2$

Salto de 0 a $\frac{A}{(d_2-d_1)}$

Su magnitud:

$\left(\frac{A}{(d_2-d_1)}\right) \delta(t+d_2)$

$t = -d_1$

Salto de $\frac{A}{(d_2-d_1)}$ a $\frac{-A}{d_1}$

Su magnitud:

$\frac{-A}{d_1} - \frac{A}{(d_2-d_1)} = \frac{-A\, d_2}{(d_1(d_2-d_1))}$

$= \left(\frac{-A\, d_2}{d_1(d_2-d_1)}\right) \delta(t+d_1)$

• Sustituyendo d_n

$$C_n = \frac{-T^2}{4\pi^2 n^2} \cdot \frac{2A}{T}\left[\frac{\cos(n\omega_0 d_2)}{d_2-d_1} - \frac{d_2 \cos(n\omega_0 d_1)}{d_1(d_2-d_1)} + \frac{1}{d_1}\right]$$

$$C_n = -\frac{AT}{2\pi^2 n^2}\left[\frac{\cos(n\omega_0 d_2)}{d_2-d_1} - \frac{d_2\cos(n\omega_0 d_1)}{d_1(d_2-d_1)} + \frac{1}{d_1}\right] \quad \text{Para } n \neq 0$$

• Para $n=0$

$$\underbrace{C_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = \frac{\text{Área bajo la curva}}{T}}$$

Esto es el valor promedio de la señal en un periodo

$$\underbrace{C_0 = \frac{A d_2}{T}}$$

Sabiendo que el área está formada por dos figuras idénticas a cada lado del eje Y

• La parte real de la señal original $x(t)$ es una función par $x(t) = x(-t)$

• La parte imaginaria es 0, ya que el espectro es puramente real

• La magnitud del real es su valor absoluto $|c_n| = |c_n|$

• La fase es 0 si es positivo y π si es negativo

• Ahora tomamos los valores para la simulación

$A = 5.0$
$T = 10$
$d_1 = 1$
$d_2 = 4$
$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \approx \frac{\pi}{5}$

• Calculando los coeficientes d_n de $x''(t)$

$$\underbrace{d_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt}$$

Esta es la fórmula para los coeficientes de la serie exponencial

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\underbrace{\int f(t)\,\delta(t-a)\,dt = f(a)}$$

Impulso de dirac

$$d_n = \frac{1}{T}\left[\frac{A}{d_2-d_1} e^{-jn\omega_0(-d_2)} - \frac{Ad_2}{d_1(d_2-d_1)} e^{-jn\omega_0(-d_1)} + \frac{2A}{d_1} e^{0} - \frac{Ad_2}{d_1(d_2-d_1)} e^{-jn\omega_0(d_1)} + \frac{A}{d_2-d_1} e^{-jn\omega_0(d_2)}\right]$$

• Agrupamos y usamos la identidad de euler

$$d_n = \frac{A}{T}\left[\frac{1}{d_2-d_1}\left(e^{jn\omega_0 d_2} + e^{-jn\omega_0 d_2}\right) - \frac{d_2}{d_1(d_2-d_1)}\left(e^{jn\omega_0 d_1} + e^{-jn\omega_0 d_1}\right) + \frac{2}{d_1}\right]$$

$$d_n = \frac{2A}{T}\left[\frac{\cos(n\omega_0 d_2)}{d_2-d_1} - \frac{d_2\cos(n\omega_0 d_1)}{d_1(d_2-d_1)} + \frac{1}{d_1}\right]$$

• Calculando los coeficientes C_n de $x(t)$

$n \neq 0$

$$C_n = \frac{d_n}{-n^2\omega_0^2} = \frac{d_n}{-n^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} = \frac{T^2}{4\pi^2 n^2} d_n$$

$t=0$

Salto de $-\frac{A}{d_1}$ a $\frac{A}{d_1}$

Su magnitud:

$$\frac{A}{d_1} - \left(\frac{-A}{d_1}\right) = \frac{2A}{d_1}\,\delta(t)$$

$t=d_1$

Salto de $\frac{A}{d_1}$ a $\frac{-A}{(d_2-d_1)}$

Su magnitud:

$$\frac{-A}{(d_2-d_1)} \quad -\frac{A}{d_1} = \left(\frac{-A\,d_2}{d_1(d_2-d_1)}\right)\delta(t-d_1)$$

$t=d_2$

Salto de $\frac{-A}{(d_2-d_1)}$ a 0

Su magnitud:

$$0-\left(\frac{-A}{(d_2-d_1)}\right) = \frac{A}{(d_2-d_1)}\,\delta(t-d_2)$$

• la expresión de la segunda derivada $x''(t)$ es:

$$x''(t) = \frac{A}{d_2-d_1}\delta(t+d_2) - \frac{Ad_2}{d_1(d_2-d_1)}\delta(t+d_1) + \frac{2A}{d_1}\delta(t) - \frac{Ad_2}{d_1(d_2-d_1)}\delta(t-d_1) +$$

$$\frac{A}{d_2-d_1}\,\delta(t-d_2)$$

• Vemos que

$n=0$

$$C_0 = \frac{A d_2}{T} = \frac{(5)(4)}{10} = \frac{20}{10} = \underline{2}$$

$n=1$

$$D_n = \frac{2A}{T}\left[\frac{\cos(n\omega_0 d_2)}{d_2-d_1} - \frac{d_2 \cos(n\omega_0 d_1)}{d_1(d_2-d_1)} + \frac{1}{d_1}\right]$$

$$= \frac{2(5)}{10}\left[\frac{\cos((1)\pi/5 \cdot 4)}{4-1} - \frac{4(\cos(1\cdot\pi/5\cdot 1))}{1\cdot(4-1)} + 1\right]$$

$$= -0.3483$$

• Reemplazando en C_n

$$C_n = -\frac{1}{(n\omega_0)^2} D_n = -\frac{1}{(1\cdot\pi/5)^2}\cdot(-0.3483) = 0.8822$$

El valor esta muy cerca de la simulación

• Ahora calculando la energía total

$$E_x = \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\, dt \quad \rightarrow \text{Es simétrica}$$

$$E_x = \int_0^{T/2} x^2(t)\, dt$$

$(0,d_1) \rightarrow m_{in} = \frac{A}{d_1} \Rightarrow x(t) = \frac{A}{d_1}t$

$(d_1,d_2) \rightarrow m_{out} = \frac{-A}{(d_2-d_1)} \Rightarrow x(t) = A - \frac{A}{d_2-d_1}(t-d_1)$

$$E_x = 2\left[\int_0^{d_1}\left(\frac{A}{d_1}t\right)^2 dt + \int_{d_1}^{d_2}\left(A - \frac{A}{d_2-d_1}(t-d_1)\right)^2 dt\right]$$

• Se simplifica la integral

$$E_x = \frac{2}{3}A^2 d_2$$

$$E_x = \frac{2}{3}5^2\, 4 = \underbrace{66.66 J}$$

Valor de simulación

• Analizando la energía de la serie parcial

$$E_{fs} = T\sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2 \rightarrow$$ Es simétrica en todos los puntos de C_0

$$E_{fs} = T\left(|C_0|^2 + 2\sum_{n=1}^{5}|C_n|^2\right) \rightarrow$$ Hecho con la simulación

$$E_{fs} = \underline{66.613}$$

• El error relativo

$$E_R = \frac{|E_x - E_{fs}|}{E_x} = \frac{66.666 - 66.613}{66.666} = 0.007912$$

$$\boxed{\approx 0.79\%}$$

3. Sea $x''(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según:

$$c_n = \frac{1}{(ti - tf)n^2 w_o^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)e^{-jnw_o t}dt; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

¿Cómo se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n desde $x''(t)$ en la serie trigonométrica de Fourier?.

Con $X(t)$ para $t \in [t_i, t_f]$; Demostrar: $C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2 W_o^2}\int_T X''(t)e^{-jnW_o t}\partial t$ con $n \in \mathbb{Z}$

Tenemos: $X(t) = \sum_n C_n e^{jnW_o t}$

$$X'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\sum_n C_n e^{jnW_o t} = \sum_n C_n \frac{\partial e^{jnW_o t}}{\partial t}$$

$$X''(t) = \frac{\partial X'(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\sum_n C_n \frac{\partial e^{jnW_o t}}{\partial t} = \sum_n C_n \frac{\partial^2 e^{jnW_o t}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial e^{jnW_o t}}{\partial t} = jnW_o e^{jnW_o t}; \quad \frac{\partial^2 e^{jnW_o t}}{\partial t^2} = \frac{\partial(jnW_o e^{jnW_o t})}{\partial t} = jnW_o \cdot jnW_o e^{jnW_o t} = -n^2 W_o^2 e^{jnW_o t}$$

$$X''(t) = \sum_n C_n \frac{\partial^2 e^{jnW_o t}}{\partial t^2} = \sum_n \underbrace{-C_n n^2 W_o^2}_{C_{-n}} e^{jnW_o t} = \sum_n C_{-n} e^{jnW_o t} \text{ ; con } C_{-n} = -C_n n^2 W_o^2$$

Si $C_n = \frac{1}{T}\int_T X(t)e^{-jnW_o t}\partial t$ y $C_{-n} = \frac{1}{T}\int_T X''(t)e^{-jnW_o t}\partial t \longrightarrow$ Remplazamos el $C_{-n} \longrightarrow -C_n n^2 W_o^2 = \frac{1}{T}\int_T X''(t)e^{-jnW_o t}\partial t$

$$C_n = \frac{1}{-(t_f - t_i)n^2 W_o^2}\int_T X''(t)e^{-jnW_o t}\partial t$$

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2 W_o^2}\int_T X''(t)e^{-jnW_o t}\partial t$$

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2 W_o^2}\int_T X''(t)e^{-jnW_o t}\partial t = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2 W_o^2}\int_T X''(t)(\cos(nW_o t) - j\,\text{sen}(nW_o t))\partial t = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2 W_o^2}\int_T X''(t)\cos(nW_o t)\partial t - j\frac{1}{(t_i - t_f)n^2 W_o^2}\int_T X''(t)\,\text{sen}(nW_o t)\partial t$$

Sabiendo que: $a_n = \frac{2}{T}\int_T X(t)\cos(nW_o t)\partial t$; $b_n = \frac{2}{T}\int_T X(t)\,\text{sen}(nW_o t)\partial t$ y $a_n = 2\,\text{Re}\{c_n\}$; $b_n = -2\,\text{Im}\{c_n\}$

$$a_n = 2\,\text{Re}\{c_n\} = 2\frac{1}{(t_i - t_f)n^2 W_o^2}\int_T X''(t)\cos(nW_o t)\partial t$$

$$b_n = -2\,\text{Im}\{c_n\} = -2 \cdot -\frac{1}{(t_i - t_f)n^2 W_o^2}\int_T X''(t)\,\text{sen}(nW_o t)\partial t = 2\frac{1}{(t_i - t_f)n^2 W_o^2}\int_T X''(t)\,\text{sen}(nW_o t)\partial t$$