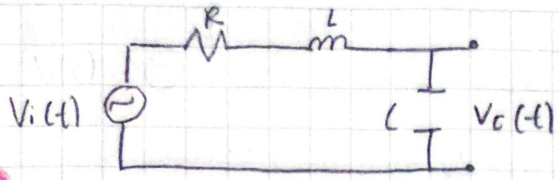

EDO → Ecuación Diferencial Ordinaria

1

Es una ecuación que relaciona una señal ($V_c(t)$ con sus derivadas en el tiempo

$R \rightarrow V_R(t) = R\,i(t)$

$L \rightarrow V_L(t) = L \dfrac{di(t)}{dt}$

$C \rightarrow i(t) = C \dfrac{dV_c(t)}{dt} \rightarrow$ salida $\qquad V_c(t) = V_c(t)$

4. Ley de voltajes de Kirchhoff

$$V_i(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_c(t)$$
$$V_i(t) = R\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + V_c(t)$$

Si decimos que $i(t) = C \dfrac{d\,V_c(t)}{dt} \rightarrow$ reemplazamos $R\,i(t) = R\,C \dfrac{d\,V_c(t)}{dt}$

Ahora reemplazamos en el inductor (L).
Necesitamos la derivada de $i(t) \rightarrow \dfrac{\partial\, i(t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\overset{\text{cons.}}{C}\,\dfrac{d}{dt} V_c(t)\right)$

$$= C\,\frac{\partial^2 V_c(t)}{\partial t^2}$$

$$L = V_L(t) = L\,\frac{\partial\, i(t)}{\partial t} = LC\,\frac{\partial^2 V_c(t)}{\partial t^2}$$

Ecuación Original.
$$V_i(t) = RC\,\frac{\partial V_c(t)}{\partial t} + LC\,\frac{\partial^2 V_c(t)}{\partial t} + V_c(t)$$

Ahora se divide todo por LC para dejar la ecuación de manera estandar, donde el cociente de la segunda derivada se 1

$$\frac{V_i(t)}{LC} = \frac{RC\,\frac{d\,V_c(t)}{dt}}{LC} + \frac{\cancel{LC}\,\frac{d^2 V_c(t)}{dt}}{LC} + \frac{V_c(t)}{LC}$$

$$\frac{1}{LC} V_i(t) = V_c''(t) + \frac{R}{L} V_c'(t) + \frac{1}{LC} V_c(t)$$

(II) Función de transferencia. $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$

Esto generalmente se escribe así: $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ $\begin{matrix}\longrightarrow \text{salida } (V_c) \\ \longrightarrow \text{Entrada } (V_i)\end{matrix}$ o $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ $j\omega \rightarrow$ Variable en frecuencia

La función de transferencia es una relación entre lo que entra y lo que sale del sistema, vista en el dominio de Laplace o de la frecuencia

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\frac{1}{LC}}{V_i''(t) + \frac{R}{L} V_c'(t) + \frac{1}{LC} V_c(t)} \checkmark$$

→ Un diagrama de Bode:
Son gráficas de la función de transferencia en frecuencia.
1. Magnitud vs frecuencia
2. Fase vs Frecuencia.

→ Magnitud en decibeles
$H(j\omega) \rightarrow$ Primero se halla el valor de la función de transferencia para cada frecuencia
magnitud: $|H(j\omega)|$

$$\text{Magnitud en dB} = 20\log_{10} |H(j\omega)| \checkmark$$

→ Fase $\Longrightarrow$ $H(j\omega) \longrightarrow \underline{\angle H(j\omega)}$

(III) Función de transferencia con Laplace y diagrama de polos y ceros.

Suponemos condiciones iniciales = 0

$\mathcal{L}\{V_c(t)\} = V_c(s)$

$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial V_c(t)}{\partial t}\right\} = s V_c(s)$

$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 V_c(t)}{\partial t^2}\right\} = s^2 V_c(s)$

$\mathcal{L}\{V_i(t)\} = V_i(s)$

$$LC \frac{\partial^2 V_c(t)}{\partial t^2} + RC \frac{d\, V_c(t)}{dt} + V_c(t) = V_i(t)$$

$$LC\, s^2 V_c(s) + RC\, s V_c(s) + V_c(s) = V_i(s)$$

$$V_c(s)[LCs^2 + RCs + 1) = V_i(s)$$

$$H(s) = \frac{V_c(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$R = 1000\,\Omega$
$L = 0.18\,H$
$C = 120 \cdot 10^{-6} F$

→ Reemplazamos $H(s) = \frac{1}{(0.18)(120\cdot10^{-6})s^2 + (1000)(120\cdot 10^{-6})s + 1} = \frac{1}{2.16\cdot10^{-5}s^2 + 0.12s + 1}$

Ceros: Raíces en el numerador (No hay)
Polos: Raíces en el denominador: $\underbrace{2.16\cdot10^{-5}}_{a} s^2 + \underbrace{0.12}_{b} s + \underbrace{1}_{c}$

$$s = \frac{-0.12 \pm \sqrt{0.12^2 - 4(2.16\cdot10^{-5})(1)}}{2(2.16\cdot10^{-5})}$$

$$s_1 \approx -8.35 \qquad s_2 \approx -5547.21$$

(II) $h(t) = ?$ desde (3)
↳ Respuesta Impulso

Planteamiento del profesor:

Si $x(t) = \delta(t) \rightarrow$ entrada
Pero $X(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ ✓
$H(s) = \frac{Y(s)}{1} \rightarrow h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ ✓

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ $Y(s) \rightarrow$ Entrada, $X(s) \rightarrow$ Salida

Pero ya tenemos entrada el cual es Respuesta impulso ($h(t)$)

$x(t) = \delta(t)$

$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = X(s) = 1 \longrightarrow$ Despejar la salida $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$

$Y(s) = H(s) \cdot 1 = H(s)$

$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$

$\longrightarrow H(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = \frac{1}{2.16 \times 10^{-5} s^2 + 0.12s + 1}$ ✓

$s_1 \approx -8.35$ rad/s ✓ $s_2 \approx -5547.21$ rad/s ✓

$$H(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \longrightarrow \frac{A}{(s - s_1)} + \frac{B}{s - s_2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}u(t)$$

$\frac{A}{s + 8.35} + \frac{B}{s + 5547.21}$ Multiplicamos todo por el denominador para despejar las variables A y B

$K = \frac{1}{2.16 \times 10^{-5}} \approx 46296.30$

$$\frac{K}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2}$$

Para A: $s = s_1$

$K = A(s - s_2) + \cancel{B(s - s_1)}$

$K = A(s - s_2)$

$A = \frac{K}{(s - s_2)} = \frac{46296.30}{-8.35 - (-5547.21)} \approx 8.35$

Para B: $s = s_2$

$K = \cancel{A(s - s_2)} + B(s - s_1)$

$K = B(s - s_1)$

$B = \frac{K}{(s - s_1)} = \frac{46296.30}{-5547.21 - (-8.35)} \approx -8.33$

$\frac{1}{s + a} \rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + a}\right\} = e^{-at}u(t)$

$H(s) = \frac{A}{s + 8.35} + \frac{B}{s + 5547.21} = Ae^{-8.35t}u(t) + Be^{-5547.21t}u(t)$

$A = 8.35$ $B = -8.35$

$h(t) = 8.35\left(e^{-8.35t} - e^{-5547.21t}\right)u(t)$ ✓

(V) $y(t) = ?\ ,\ x(t) = u(t)$

$x(t) = u(t) \rightarrow X(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = 1/s$

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \rightarrow Y(s) = H(s) \cdot X(s) \rightarrow \frac{1}{2.16 \times 10^{-5} s + 0.12 s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(2.16 \times 10^{-5} s^2 + 0.12 s + 1)}$

$k = \frac{1}{2.16 \cdot 10^{-5}} = 46296.3 \qquad Y(s) = \frac{K}{s(s^2 - s + 1)} = \frac{K}{s(s - s_1)(s - s_2)}$

$\frac{K}{s(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2}$

↳ Multiplicamos esto por el numerador para cancelar.

Para A $(s=0)$ $\quad K = A(0 - s_1)(0 - s_2) + \cancel{B \cdot (0)(0 - s_2)} + \cancel{C.(0).(0 - s_1)}$

$A = \frac{K}{(-s_1)(-s_2)} = \frac{46296.3}{(-8.35)(-5547.21)} = 1$ ✓

Para B $(s = s_1)$ $\quad K = \cancel{A(s - s_1)(s - s_2)} + B(s)(s - s_2) + \cancel{C(s)(s - s_1)}$

$B = \frac{K}{s(s - s_2)} = \frac{46296.3}{-8.35(-8.35 - (-5547.21))} \approx -1.0015$

Para C $(s = s_2)$ $\quad K = \cancel{A(s_2 - s_1)(s_2 - s_2)} + \cancel{B(s_2)(s_2 - s_2)} + C(s_2(s_2 - s_1)$

$C = \frac{K}{s_2(s_2 - s_1)} = \frac{46296.3}{-5547.21(-5547.21 - (-8.35))} \approx 0.00151$

$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2} = \frac{1}{s} - \frac{1.0015}{s - s_1} + \frac{0.00151}{s - s_2}$

Tabla

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = u(t)$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - a}\right\} = e^{at} u(t)$

$y(t) = A \cdot u(t) + B e^{s_1 t} u(t) + C e^{s_2 t} u(t)$

$y(t) \approx [1 - 1.0015 e^{s_1 t} + 0.00151 e^{s_2 t}]\, u(t)$

$y(t) = [1 - 1.0015 e^{-8.35 t} + 0.00151 e^{-5547.21 t}]\, u(t)$