JULIHO CASTILLO COLMENARES PH.D.
MATH.VADER@YAHOO.COM
TWITTER.COM/ANARKOMATHICIAN

LINKEDIN.COM/IN/JULIHO/

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS APLICADAS

Índice general

Parte I

Precálculo

Sistemas numéricos

Los números enteros

En esta sección analizaremos algunos conjuntos numéricos. Los números naturales son el conjunto de números

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\},$$

mientras que los números enteros son el conjunto de números

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$$

Máximo Común Divisor

Definición 1. Diremos que un entero n divide a otro entero $c \in \mathbb{Z}$ si existe un tercer entero $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$c = n \cdot p.$$

Definición 2. Diremos que el entero d es el *máximo común divisor* de dos enteros a, b o $\mathtt{mcd}(a, b)$ si

- d divide tanto a a como b y;
- d es el número entero más grande con esta propiedad.

Problema 1. Encontrar $\mathtt{mcd}(6, 15)$.

Solución. Los divisores de 6 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, mientras que los de 15 son $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$.

Entonces, los divisores en común de 6 y 15 son $\pm 1, \pm 3$. El más grande de todos estos es $d = 3$ y por tanto es

$$\mathtt{mcd}(6, 15) = 3.$$

□

Aunque este método para encontrar el `mcd` es útil cuando hay pocos divisores, puede resultar abrumador si ambos números tienes una gran cantidad de divisores.

Propiedad 1 (Teorema del Residuo)**.** *Dados dos números enteros positivos a, b, existen otro par de enteros $q, r \geq 0$ tales que*

$$a = b \cdot q + r \tag{1}$$
$$r < b. \tag{2}$$

A q se le llama cociente, mientras que a r se le llama residuo.

Demostración. V. [1], sección 7.2, teorema 1. □

[1] Cárdenas, H. (1973). *Álgebra superior*

Problema 2. Si $a = 7, b = 2$, entonces el cociente es $q = 3$ y el residuo es $r = 1$, porque

$$\begin{cases} 7 = 2 \cdot 3 + 1 \\ r = 1 < b = 2. \end{cases}$$

Observe que tambien podríamos tomar $q = 1, r = 5$ y escribir

$$7 = 2 \cdot 1 + 5,$$

pero como $5 > 2$, entonces $r = 5$ no satisface la condición del residuo (2), porque $r = 5 \geq b = 2$.

Algoritmo 1 (Algoritmo Euclidiano)**.** *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ dos números enteros positivos. Consideremos la siguiente sucesión de operaciones, en la que iteramos el teorema del residuo:*

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q_0 + r_0 \\ b &= r_0 \cdot q_1 + r_1 \\ r_0 &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\ &\dots \\ r_{N-3} &= r_{n-2} \cdot q_{N-1} + r_{N-1} \\ r_{N-2} &= r_{N-1} \cdot q_N + 0. \end{aligned}$$

Entonces el último cociente r_{N-1} es el `mcd` *de a y b.*

Demostración. V. [2],sección 7.4, prop. 1. □

[2] Cárdenas, H. (1973). *Álgebra superior*

Como en el ejemplo 1, tenemos que

$$\begin{aligned} 15 &= 6 \cdot 2 + 3 \\ 6 &= 3 \cdot 2 + 0, \end{aligned}$$

Entonces $r = 3$ es igual a $\texttt{mcd}(15, 6)$.

Mínimo Común Múltiplo

Definición 3. Diremos que el entero positivo $m \in \mathbb{Z}$ es el *mínimo común multiplo* o `mcm` de dos enteros positivos a, b si

- m es múltiplo tanto de de $a \in \mathbb{Z}$ como $b \in \mathbb{Z}$ y;
- d es el número entero positivo más pequeño con esta propiedad.

Propiedad 2. *Si a, b son dos enteros positivos, entonces*

$$\mathtt{mcm}(a,b)\mathtt{mcd}(a,b) = a \cdot b$$

Demostración. V. [3], sección 7.5, ejercicios del 10 al 12. □

[3] Cárdenas, H. (1973). *Álgebra superior*

Problema 3. Encontrar el `mcm` de $a = 6$ y $b = 15$.

Solución. Como vimos anteriormente, $mcd(6, 15) = 3$. Entonces,

$$mcm(6,15) = \frac{6 \cdot 15}{3} = 30$$

□

Los números racionales

Los números racionales son el conjunto de números

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

identificando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ siempre que la *razón cruzada* sea igual

$$ad = bc$$

¿Para que nos sirve $\mathbb{Q}$?

Este conjunto de números nos sirve para *contar, sumar, restar, multiplicar y dividir.*

Definición 4. Dos números racionales $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ son equivalentes si

$$ad - bc = 0.$$

Problema 4. $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{2}{4}$ porque

$$(1)\,(4) - (2)\,(2) = 0.$$

Simplificación

Definición 5. 1. Diremos que dos enteros $p, q \in \mathbb{Z}$ son primos relativos si $\mathtt{mcd}(p, q) = 1$.

2. Diremos que $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ es la forma *irreducible* de $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ si

- $\frac{p}{q}$ es equivalente a $\frac{a}{b}$ y
- p, q son primos relativos.

Por la definición 4, tenemos que para un número racional $\frac{a}{b}$:

$$\frac{n \cdot a}{n \cdot b} = \frac{a}{b},$$

siempre que $n \neq 0$.

Problema 5. $\frac{2}{4} = \frac{2 * 1}{2 * 2} = \frac{1}{2}$.

Observación 1. Sean a, b dos enteros positivos. Si $d = \texttt{mcd}(a, b)$ y

$$a = d \cdot p,\ b = d \cdot q,$$

entonces podemos simplificar de la siguiente manera

$$\frac{a}{b} = \frac{d \cdot p}{d \cdot q} = \frac{p}{q}.$$

Observación 2. Si d es el máximo común divisor de los enteros $a, b \neq 0$, entonces tenemos que p, q son los cocientes en las operaciones

$$\begin{cases} a = d \cdot p \\ b = d \cdot q \end{cases}$$

Problema 6. Encuentre la forma irreducible de $\frac{15}{10}$.

Solución. 1. Primero, muestre que $\texttt{mcd}(15, 10) = 5$;

2. Como
$$\frac{15}{10} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{3}{2},$$
entonces $\frac{3}{2}$ es equivalente a $\frac{15}{10}$
3. Finalmente muestre que 3 y 2 son primos relativos. Concluimos que $\frac{3}{2}$ es la forma irreducible de $\frac{15}{10}$.

□

Problema 7. Encuentre la forma irreducible de la fracción

$$\frac{182}{910}$$

Conversión y comparación

Supongamos que una pizza se parte en 12 rebanadas iguales, mientras que otra similar se parte en 8. ¿Qué cantidad de pizza es mayor, 7 rebanadas de la primera o 5 de la segunda?

Para comparar dos fracciones, debemos convertirlas de manera que tenga un común denominador.

Algoritmo 2 (Conversión a común denominador)**.** *Para convertir dos fracciones* $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ *a común denominador:*

1. *Encuentre* $m = \mathtt{mcm}(b, d)$

2. *Encuentre un entero* p *tal que* $m = b \cdot p$ *y convierta la primera fracción*
$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot p}{b \cdot p} = \frac{ap}{m}$$

3. *Encuentre un entero* q *tal que* $m = d \cdot q$ *y convierta la segunda fracción*
$$\frac{c}{d} = \frac{c \cdot q}{d \cdot q} = \frac{cq}{m}$$

Observación 3. Si el común demoninador m de dos fracciones
$$\frac{x}{m}, \frac{y}{m}$$
es positivo, entonces
$$\frac{x}{m} < \frac{y}{m} \iff x < y.$$

Problema 8. Compare cada uno de los siguientes pares de fracciones:

1. $\dfrac{15}{11}, \dfrac{28}{37}$

2. $-\dfrac{35}{36}, \dfrac{1}{6}$

3. $\dfrac{3}{10}, -\dfrac{23}{33}$

4. $-\dfrac{17}{31}, -\dfrac{12}{7}$

Operaciones

Algoritmo 3 (Suma de fracciones)**.** *Para sumar dos fracciones* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$:

1. *Convierta a común denominador, de manera que*
$$\frac{a}{b} = \frac{x}{m}, \ \frac{c}{d} = \frac{y}{m};$$

2. *sume ambos numeradores*
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{x}{m} + \frac{y}{m} = \frac{x+y}{m};$$

3. *simplifique.*

Problema 9.
$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} =$$

Observación 4. Cualquier suma se puede reescribir como una resta:

$$x + y = x - (-y),$$

y viceversa

$$x - y = x + (-y).$$

Por esta razón, en álgebra, no es muy útil distinguir entre estas dos operaciones. Utilizaremos el mismo algoritmo, para encontrar la resta de dos fracciones.

Problema 10.

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} =$$

Problema 11. Realice las siguientes y escriba el resultado en su forma irreducible:

1. $\frac{5}{3} + \frac{5}{9}$
2. $\frac{7}{3} + \frac{4}{7}$
3. $\frac{5}{4} + \frac{3}{2}$
4. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$
5. $\frac{3}{5} - \frac{4}{9}$

La multiplicación entre dos números racionales se define como

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}. \tag{3}$$

Problema 12. $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$.

Observación 5. En ocasiones, la división de fracciones se conoce como regla del "sandwich":

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

La división entre dos números racionales se define como

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}. \tag{4}$$

siempre y cuando $c \neq 0$.

Problema 13. $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12}$.

Razones y proporciones

Proporciones entre números enteros La razón de dos números (enteros o racionales) a, b se escribe $a : b$ y se representa por la fracción $\dfrac{a}{b}$.

Problema 14. La razón de 4 a 6 se escribe $4 : 6$ y se representa por la fracción $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

Proporciones entre fracciones

Problema 15. La razón de $\frac{2}{3}$ a $\frac{4}{5}$ se escribe

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$$

y se representa por la fracción

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{5}{6}.$$

Diremos que dos razones $a : b$ y $c : d$ son equivalente si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

En ese caso, escribimos $a : b \sim c : d$.

Problema 16. ¿Cuál es el precio unitario de cada artículo?

- Una bote con 3 litros de aceite cuesta \$54.
- Una caja de cereales con 700 gramos cuesta \$63.

Problema 17. Exprese las siguientes razones por medio de una fracción simplificada

1. $96 : 128$
2. $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$

Problema 18. Un segmento de 30 pulgadas se divide en dos partes cuyas longitudes están en razón de $2 : 3$. Encuentre las longitudes de ambos segmentos.

Problema 19. Las edades actuales de dos hermanos son 5 y 8 años respectivamente. ¿Al cabo de cuantos años, sus edades estarán en razón $3 : 4$?

Problema 20. Divida 253 en cuatro partes propocionales $2 : 5 : 7 : 9$.

Razones inversas

Cuando tratamos de conservar una proporción $a : b$, hablamos de una *razón directa,* y podemos representarla por una equivalencia de fracciones:

$$a : b \sim c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Por ejemplo, en una recete de hotcakes, tenemos una razón $1 : \frac{3}{4}$ entre tazas de harina y tazas de leche.

Para mantener la receta, podemos multiplicar las cantidades, pero manteniendo la proporción.

Por ejemplo, podemos ocupar 4 tazas de harina para 3 tazas de leche, porque $1 : \frac{3}{4} \sim 4 : 3$.

En cambio, en ocasiones lo que buscamos es mantener una cantidad total, y no proporción. Generalmente, es una cantidad de trabajo.

Por ejemplo, considere el trabajo de pintar una pared de dimensiones fijas. Supongamos que una persona puede pintarla en 8 horas; pero suponiendo que contratamos un pintor más con una experiencia similar,

1. ¿cuantas horas se requerirán para terminar el trabajo?
2. ¿Y si contratáramos 4 pintores?
3. ¿Y si fueran 8?

En el ejemplo anterior, la pared requiere *8 horas-trabajador;* esta es la cantidad que debemos conservar, aunque no es permitido variar los trabajadores o las horas de trabajo por trabajador.

En este caso, hablamos de una *razón inversa.*

Problema 21. Sabiendo que 8 personas tardan 12 días en poner a punto 16 maquinas, encuentre el número de días que emplearán 16 personas en poner a punto 8 máquinas.

Problema 22. Sabiendo que 8 personas tardan 12 días en poner a punto 16 maquinas, encuentre el número de días que emplearán 15 personas en poner a punto 50 máquinas.

Ejemplos

Problema 23. ¿Cuál es la mejor compra entre 7 latas de sopas que cuestan \$22.50 y 3 latas del mismo producto, que cuestan \$9.50.

Problema 24. ¿Cuál es la mejor compra entre un paquete de 3 onzas de queso crema que cuesta \$4.30 y otro paquete de 8 onzas del mismo producto que cuesta \$8.70?

Problema 25. Si dos hombres pueden transportar 6 acres de tierra en 4 horas, ¿cuántos hombres se necesitan para transportar 18 acres en 8 horas?

Problema 26. Resuelva la proporción

$$\frac{x}{63} = \frac{5}{9}$$

Problema 27. Resuelva la siguiente ecuación usando productos cruzados

$$\frac{x-2}{5} = \frac{x+1}{3}$$

Problema 28. Enfermeras usan proporcoines para determinar la cantidad de medicina a administrar, cuando la dosis es medida en miligramos `(mg)`, pero la medicina es empacada en una forma diluida en milímetros `(mL)`.

Por ejemplo, para encontrar los mililitros de fluido necesario para administrar `300mg` de un medicamento de una medicina que viene empacada como `120mg` en `2mL` de un fluído, se plantean la proporción

$$\frac{\texttt{120mg}}{\texttt{2mL}} = \frac{\texttt{300mg}}{x\ \texttt{mL}}$$

donde x representa la cantidad a administrar en mililitros.

Resuelva la proporción anterior.

Teorema Fundamental de la Aritmética

Un número primo p es aquel que tiene exactamente cuatro divisores

$$\pm 1, \pm p.$$

Problema 29. Encuentre los números primos (positivos) entre 2 y 100.

Los números enteros siempre se pueden escribir como una multiplicación de números primos:

- $36 = 2^2 3^2$
- $1400 = 2^3 5^2 7$
- $187 = 11 \times 7$

Teorema Fundamental de la Aritmética

Teorema 1. *Todo número entero a mayor que 1 se puede expresar en la forma*

$$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_L^{n_L} \tag{FP}$$

donde $p_i, i = 1, ..., L$ son números primos distintos y $n_i, i = 1, ..., L$ son exponentes enteros positivos.

Observación 6. La expresión FP se conoce como *factorización prima* del entero a y es única excepto por el orden.

Encuentre la factorización prima de

- $14700 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
- $1575 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

Propiedad 3. *Si* $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_L^{n_L}$ *y* $b = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_L^{m_L}$ *son respectivas factorizaciones primas de los enteros* a, b*, entonces*

$$mcd(a,b) = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_L^{r_L}$$
$$mcm(a,b) = p_1^{R_1} p_2^{R_2} \cdots p_L^{R_L}$$

donde $r_i = \min(n_i, m_i)$ *y* $R_i = \max(n_i, m_i)$.

Encuentre

- $mcd(14700, 1575) = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 525$
- $mcm(14700, 1575) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 44100$

Propiedad 4. *Si* $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_L^{n_L}$ *es la factorización prima de* a*, entonces* a *tiene*

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_L + 1)$$

divisores positivos.

Algoritmo 4 (Como encontrar todos los divisores de un número entero)**.** *1. Factorice el número entero* $n = p_1^{R_1} \cdots p_m^{R_m}$

2. Enliste cada posible $m-$*tupla* $(r_1, ..., r^m)$ *con* $0 \leq r_1 \leq R_1, ..., 0 \leq r_m \leq R_m$

3. Enliste cada posible número entero de la forma

$$\pm p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m},$$

para cada elemento $(r_1, ..., r_m)$ *de la lista anterior.*

Cálculo de divisores

Problema 30. Encuentre todos los divisores positivos de 24.

Los divisores son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, y 24.

Problema 31. Encuentre todos los divisores positivos de 72.

Los divisores son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, y 72

Problema 32. Encuentre todos los divisores positivos de 600.

Los divisores son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 25, 30, 40, 50, 60, 75, 100, 120, 150, 200, 300, y 600.

Números Reales

Conjuntos numéricos

Números naturales

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

Números enteros

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$$

Números racionales

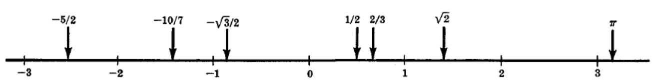
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p, q \in Z, q \neq 0 \right\} \Big/ \sim$$

Equivalencia de fracciones

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff ad - bc = 0$$

Números irracionales Existen números en la recta numérica que no se pueden representar como fracciones.

Por ejemplo $\sqrt{2}, e, \pi ....$



Números reales La unión de número racionales e irracionales se le conoce como *números reales* $\mathbb{R}$.

Orden

Los números reales se clasifican en

- Positivos $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$
- Cero $\{0 \in \mathbb{R}\}$
- Negativos $\{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$

Diremos que $b \in \mathbb{R}$ es mayor que $a \in \mathbb{R}$ si $b - a > 0$.
En ese caso escribimos $b > a$.
Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es menor que $b \in \mathbb{R}$ si $a - b < 0$.
En ese caso escribimos $a < b$.

Propiedad 5.

$$b > a \iff a < b$$

Desigualdades

Propiedad 6. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces se cumple una y solo una de las siguientes condiciones:*

- $a > b$
- $a = b$
- $a < b$

Reglas de álgebra

Para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$, se tienen las siguientes propiedades:

Axioma 1 (Conmutatividad de la suma)**.**

$$a + b = b + a \tag{5}$$

Axioma 2 (Asociatividad de la suma)**.**

$$(a + b) + c = a + (b + c) \tag{6}$$

Axioma 3 (Conmutatividad del producto)**.**

$$ab = ba \tag{7}$$

Axioma 4 (Asociatividad del producto)**.**

$$(ab)c = a(bc) \tag{8}$$

Axioma 5 (Ley de la distribución)**.**

$$a(b + c) = ab + ac \tag{9}$$

Leyes de los exponentes

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-m}, a \neq 0$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$
- $a^n = \dfrac{1}{a^n}$
- $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

Ejemplos

Problema 33. Demuestra que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Solución Procedamos por contradicción:

(a) Supongamos que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ positivos y primos relativos.

(b) Entonces $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$, de manera que $p^2 = 2q^2$.

(c) De manera que p es par, es decir, existe un entero m tal que $p = 2m$.

(d) Sustituyendo obtenemos que $q^2 = 2m^2$, de manera que q también es par.

(e) Pero por hipótesis, p y q son primos relativos, de manera que no pueden ser ambos pares. $\square$

Problema 34. ¿Qué número es más grande: $\sqrt{2}$ o $\sqrt[3]{3}$?

Solución Procedamos por contradicción:

(a) Supongamos que $\sqrt{2} \geq \sqrt[3]{3}$.

(b) Elevamos ambos lados a la sexta potencia.

(c) De donde obtenemos que

$$2^3 \geq 3^2 \quad \square$$

Problema 35. Con base en los axiomas (1)-(5), demostrar que

$$(b + c)a = ba + ca$$

Solución

$$\begin{aligned}(b + c)a &= a(b + c)\\ &= ab + ac\\ &= ba + ca\end{aligned}$$

Funciones

Definición

Una *función* f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A un único elemento y de otro conjunto B.

En ese caso escribiremos $f : A \to B$

(I) Para indicar dicha correspondencia escribimos $y = f(x)$ y decimos que y es el *valor* de f en x.

(II) Al conjunto A se le conoce como dominio.

(III) Mientras que al conjunto B, se le conoce como contradominio.

Problema 36. Evaluar $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en $x = 2$

Solución.

$$f(2) = (2)^2 - 3(2) + 2 \tag{10}$$
$$= 0 \tag{11}$$

□

Definición 6. La *gráfica* de una función $f : A \to B$ es el conjunto

$$\Gamma_f = \{(a, b) \in A \times B |\, b = f(a)\} \tag{12}$$

(I) En el caso $A = B = \mathbb{R}^n$, diremos que la gráfica de $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una *curva*.

(II) Diremos que $x \in A$ es la variable *independiente*, mientras que $y \in B$ es la variable *dependiente*.

Polinomios

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 \tag{13}$$

Si $a_n \neq 0$, diremos que n es el grado del polinomio y a_n, su coeficiente líder.

Denotaremos el grado del polinomio f por $\operatorname{grd}(f)$.

Si $\operatorname{grd}(f) = n$, la ecuación polinomial $f(x)$ tiene exactamente n raíces (posiblemente repetidas).

Problema 37. Como $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$, se puede reescribir como $(x - 1)^3$, entonces la ecuación tiene una raíz $x = 1$ repetida 3 veces.

Teorema del Binomio

$$(a + x)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} x + \binom{n}{2} a^{n-2} x^2 + ... + x^n \tag{14}$$

donde $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Exponenciales y logaritmos

Funciones exponenciales

$$\exp_a(x) = a^x, a > 0 \tag{15}$$

Leyes de los exponentes

$$\begin{align}
\exp_a(m+n) &= \exp_a(m) \cdot \exp_a(n) \tag{16}\\
\exp_a(m-n) &= \frac{\exp_a(m)}{\exp_a(n)} \tag{17}\\
\exp_a(nm) &= (\exp_a(m))^n \tag{18}\\
\exp_a(0) &= 1 \tag{19}\\
\exp_a(1) &= a \tag{20}
\end{align}$$

Logaritmos La función logarítmica $f(x) = \log_a(x)$ es la función inversa de $g(x) = \exp_a(x)$, es decir

$$\forall x \in \mathbb{R} : \log_a\left(\exp_a(x)\right) = x \tag{21}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : \exp_a\left(\log_a(x)\right) = x \tag{22}$$

Leyes de los logaritmos

$$\begin{align}
\log_a(mn) &= \log_a(m) \cdot \log_a(n) \tag{23}\\
\log_a\left(\frac{m}{n}\right) &= \log_a(m) - \log_a(n) \tag{24}\\
\log_a(m^p) &= p\log_a(m) \tag{25}\\
\log_a(1) &= 0 \tag{26}\\
\log_a(a) &= 1 \tag{27}
\end{align}$$

Logaritmo natural En el caso de que la base sea la constante de Euler, es decir $a = e \approx 2.718$, entonces reescribimos

$$\begin{align}
\exp_e(x) &= \exp(x) \tag{28}\\
\log_e(x) &= \ln(x) \tag{29}
\end{align}$$

Esta última función se conoce como *logaritmo natural*.

Funciones trigonométricas

Relaciones fundamentales

$$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{30}$$

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tag{31}$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{32}$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)} \tag{33}$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \tag{34}$$

$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)} \tag{35}$$

Identidades pitagóricas

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \tag{36}$$

$$\sec^2(x) - \tan^2(x) = 1 \tag{37}$$

$$\csc^2(x) - \cot^2(x) = 1 \tag{38}$$

Paridad

$$\sin(-x) = -\sin(x) \tag{39}$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \tag{40}$$

$$\tan(-x) = -\tan(x) \tag{41}$$

Sumas de ángulos

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \tag{42}$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \tag{43}$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 + \mp \tan(x)\tan(y)} \tag{44}$$

Ondas sinusoidales

$$\begin{cases} A\cos(x) + B\sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(x + \alpha) \\ \tan(\alpha) = \dfrac{A}{B} \end{cases} \tag{45}$$

Periodicidad Las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ tiene periodo $T = 2\pi$. Mientras que la función $\tan(x)$ tiene periodo $T = \pi$.

Inversas trigonométricas Las funciones inversas de funciones trigonométricas estás sólo definidas *localmente*: Por ejemplo,

$$y = \sin(x) \iff x = \sin^{-1}(y) \tag{46}$$

siempre y cuando

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y \in [-1, 1] \tag{47}$$

Funciones hiperbólicas

Relaciones fundamentales

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{48}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{49}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \tag{50}$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{51}$$

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \tag{52}$$

$$= \frac{1}{\tanh(x)} \tag{53}$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \tag{54}$$

$$sech(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \tag{55}$$

$$= \frac{2}{e^x + e^{-x}} \tag{56}$$

$$csch(x) = \frac{1}{\sinh(x)} \tag{57}$$

$$= \frac{2}{e^x - e^{-x}} \tag{58}$$

Identidades pitagóricas

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \tag{59}$$

$$sech^2(x) + \tanh^2(x) = 1 \tag{60}$$

$$\coth^2(x) - csch^2(x) = 1 \tag{61}$$

Sumas de ángulos

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y) \tag{62}$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y) \tag{63}$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x)\tanh(y)} \tag{64}$$

Ejemplos

Problema 38. Si $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$, encontrar

(I) $f(h) - f(0)$

(II) $f(h-1) - f(-1)$

(III) $f(x+h)$

(IV) $f(x+h) - f(x)$

(V) $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Problema 39. Usando las leyes de los exponentes, demostrar las leyes de los logaritmos.

Problema 40. Demostrar que

(I) $\sin^2(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

(II) $\cos^2(x) = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

Problema 41. Demostrar que

$$A\cos(x) + B\sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(x + \alpha)$$

donde $\tan(\alpha) = \dfrac{A}{B}$.

Problema 42. Demostrar que

(I) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

(II) $sech^2(x) + \tanh^2(x) = 1$

Problema 43. Demostrar que $\cosh^{-1}(x) = \pm\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

Introducción

Motivación

En estas notas, denotaremos por $\mathbb{R}$ el conjunto de números reales. En esta sección, procederemos de manera informal, para motivar la definición de un número complejo y formalizar sus propiedades, en secciones posteriores.

Supongamos que $a, b, c \in \mathbb{R}$, y queremos resolver la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

De manera algebraíca encontramos que las soluciones estan dadas por la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},\ D = b^2 - 4ac.$$

Si $D \geq 0$, entonces D es un número real. Sin embargo, ¿qué sucede si $D < 0$?. Por la *ley de los signos* si $x, y \geq 0$, entonces $xy \geq 0$. De la misma manera, si $x, y < 0$, entonces $xy > 0$. En particular, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, tenemos que $x^2 = x \cdot x \geq 0$. Por lo tanto, $\sqrt{D} \notin \mathbb{R}$ si $D < 0$.

Una solución a este problema es definir el número $i = \sqrt{-1}$. En este caso, si $D < 0$, entonces usando leyes de los exponentes tenemos que

$$\sqrt{D} = \sqrt{(-1)(-D)} = \sqrt{-1}\sqrt{-D} = \sqrt{-D}i.$$

En este caso, como $D < 0$, entonces $-D > 0$ y $\sqrt{-D} \in \mathbb{R}$.

Problema 44. Las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ son $x = 0 + i1$ y $x = 0 + i(-1)$, o simplemente, $x = \pm i$.

Problema 45. Encuentre las soluciones de la siguientes ecuaciones:

1. $x^4 + 16 = 0$,
2. $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Entonces, diremos que un número complejo es una cantidad de la forma

$$z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}.$$

Observe que si $x \in \mathbb{R}$, podemos identificarlo con $x + i0$.

Definimos la suma de números complejos $z = x + iy, z' = x + iy'$ de la siguiente manera:

$$z + z' = (x + x') + i(y + y').$$

Problema 46. Demuestre que

1. $(x + iy) + (x' + iy') = (x' + iy') + (x + iy)$.
2. $[(x + iy) + (x' + iy')] + (x'' + iy'') = (x + iy) + [(x' + iy') + (x'' + iy'')]$
3. $0 + (x + iy) = x + iy$
4. $(x + iy) + ((-x) + i(-y)) = 0$

Diremos que $0 = 0 + i0$ es el *neutro aditivo* en los número complejos y que $-z := -x - iy$ es el *inverso aditivo* de $z = x + iy$.

Ahora queremos definir la multiplicación $(x + iy)(x' + iy')$. Sigamos las reglas algebraicas usuales para números reales, salvo por la identidad $i^2 = -1$.

$$\begin{aligned}
(x + iy)(x' + iy') &= x(x' + iy') + iy(x' + iy') \\
&= xx' + x(iy') + (iy)x' + (iy)(iy') \\
&= xx' + ixy + iyx' + i^2yy' \\
&= (xx' - yy') + i(xy' + yx').
\end{aligned}$$

En resumen,

$$zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx') \in \mathbb{C}.$$

Problema 47. Demostrar las siguientes propiedades de la multiplicación de número complejos

1. $(x+iy)(x'+iy') = (x'+iy')(x+iy)$.
2. $\left[(x+iy)(x'+iy')\right](x''+iy'') = (x+iy)\left[(x'+iy')(x''+iy'')\right]$
3. $(1+i0)(x+iy) = x+iy$
4. $(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$.
5. $(x+iy)\left(\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}\right) = 1$.

Diremos que $1 = 1 + i0$ es el *neutro multiplicativo* en los número complejos y que

$$z^{-1} := \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

es el *inverso multiplicativo* de $z = x+iy$.

Si definimos $\bar{z} = x - iy$, para $z = x+iy$, podemos reescribir

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}.$$

Diremos que $\bar{z}$ es el *conjugado* de z.

Observación 7. Los número reales se pueden identificar con una línea recta. Como i no se puede identificar con un número en la línea recta, se decía que este número era *imaginario*. Sin embargo, podemos visualizar los números complejos (es decir, ¡dibujarlos!), para lo cuál necesitaremos "más espacio". Como requerimos dos números reales para describir un complejo, tendremos que dibujarlos en el plano.

Problema 48. Encuentre el resultado de las siguientes operaciones:

1. $\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1+i\sqrt{3}\right)$
2. $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}+i1}$
3. $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right)^3$

El campo de números complejos

Definición 7. El *plano* es el conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R}\},$$

de parejas ordenadas de números reales.

En este espacio, podemos definir varias operaciones. Cuando al conjunto lo dotamos de ciertas operaciones, decimos que es un *estructura (matemática)* en el plano. Una de las más importantes es la estructura de *espacio vectorial,* que a continuación presentamos.

Definición 8. El *plano euclideano* es $\mathbb{R}^2$ dotado de las siguiente operaciones:

1. $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$,

2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$,

Observación 8. En este caso, a los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ les llamaremos *vectores (en el plano)*, mientras que a los números reales los llamaremos *escalares.* Entonces, nos referiremos a la primera operación como *suma de vectores,* mientras que a la segunda como *multiplicación por escalares.* Estas son las operaciones *usuales* en el plano euclideano.

Problema 49. Encuentre y grafique los vectores resultantes.

1. $2(1, 0) + 3(0, 1)$,

2. $\frac{1}{5}(5, 0) - 1(0, 2)$.

Con el plano euclideano en mente, podemos definir de manera formal el conjunto de número complejos. Observe que podríamos identificar $x + iy$ con el vector (x, y). Observe que con esta identificación, el resultado de la suma de números complejos coincide con la de vectores. De igual manera, podemos identificar la multiplicación entre número complejo. Esto nos lleva a la definición formal de *números complejos.*

Definición 9. El *campo* de número complejos $\mathbb{C}$ es el conjunto $\mathbb{R}^2$ dotado de las siguientes operaciones:

1. $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$,

2. $(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$.

Si identificamos $\alpha \in \mathbb{R}$, con $(a, 0) \in \mathbb{C}$, resulta que la multiplicación por escalares coindice con la multiplicación de números complejos para escalares reales, es decir, si $a \in \mathbb{R}$,

$$a(x, y) = (a, 0)(x, y).$$

Problema 50. Verifique la afirmación anterior.

Problema 51. Verifque las siguiente propiedades. Si $u, v, w \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, entonces

1. $u + v \in \mathbb{C}$

2. $(u+v)+w=u+(v+w)$
3. $u+v=v+u$
4. Existe $0\in\mathbb{C}$, tal que $u+0=0$
5. Para cada $u\in\mathbb{C}$, existe $-u\in\mathbb{C}$, tal que $u+(-u)=0$
6. $uv\in\mathbb{C}$
7. $(uv)w=u(vw)$
8. $uv=vu$
9. Existe $1\in\mathbb{C}$, tal que $1u=u$
10. Para cada $u\in C, u\neq 0$, existe $u^{-1}\in\mathbb{C}$, tal que $uu^{-1}=1$
11. $u(v+w)=uv+uw$.

Observación 9. Cualquier conjunto S, con operaciones suma y multiplicación, que cumplan las propiedades anteriores, se conoce como un *campo*. Otros ejemplos de campos son las fracciones y los mismos números reales. En teoría número, ejemplos de campos son los enteros *módulo p* $\mathbb{Z}_p$, con p un número primo.

Forma polar de los números complejos

En la presente sección, suponemos que el lector tiene conocimientos elementales de trigonometría y geometría analítica.

Como los números complejos son vectores, podemos calculas su longitud o *norma*.

Definición 10. Si $z=x+iy\in\mathbb{C}$, entonces la norma de z se define como
$$\|z\|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Como hicimos antes, definimos de manera formal el *conjugado* de un número complejo.

Definición 11. Si $z=(x,y)\in\mathbb{C}$, su *conjugado* esta dado por
$$\bar{z}=(x,-y)\in\mathbb{C}.$$

De manera que $\|z\|^2=z\bar{z}$.

De la misma manera, siendo un vector podemos medir el ángulo que abre respecto al vector $(1,0)$, en el sentido de las manecillas del reloj, al cual llamaremos *argumento* y definimos analíticamente de la siguiente forma.

Definición 12. El argumento $\theta(z)$ de $z=x+iy\in\mathbb{C}$ se define como

1. $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ si $x > 0$
2. $\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ si $x < 0$
3. $\frac{\pi}{2}$ si $x = 0, y > 0$
4. $-\frac{\pi}{2}$ si $x = 0, y < 0$

Definición 13. Si $z \in \mathbb{C}$ tiene norma $r > 0$ y argumento θ, decimos que

$$z = r\varphi(\theta),$$

es la *forma polar* de z, donde $\varphi(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

Problema 52. Demostrar que

1. $\varphi(0) = 1$
2. $\varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta)$
3. $\overline{\varphi(\theta)} = \varphi(-\theta)$
4. $\varphi(\theta + \tau) = \varphi(\theta)\varphi(\tau)$
5. $\varphi(n\theta) = (\varphi(\theta))^n$

Problema 53. 1. Si $z = r\varphi(\theta) \in \mathbb{C}$, entonces

  a) $z^{-1} = r^{-1}\overline{\varphi(\theta)}$

  b) Si n es un número entero, $z^n = r^n\varphi(n\theta)$.

2. Si $z = r\varphi(\theta), w = s\varphi(\tau) \in \mathbb{C}$, entonces

  a) $zw = rs\varphi(\theta + \tau)$.

  b) $\frac{z}{w} = \frac{r}{s}\varphi(\theta - \tau)$

  Esta última identidad se conoce como *identidad de De Moivre.*

Problema 54. Convierta a su forma polar, cada uno de los números en el ejercicio 48 y realice las operaciones correspondientes, usando los resultados anteriores.

Álgebra

Reducción de términos semejantes

En el álgebra, representamos cantidades desconocidas por símbolos; generalmente son letras como x, y, z, pero *no debe olvidarse que respresentan números.*

Para representar una multiplicación iterada, usamos el símbolo de potencia

$$x^n = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n\texttt{-veces}};$$

al número x le llamamos base y al número n le llamamos potencia.

Problema 55. 1. $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

2. $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

3. $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Problema 56. 1. $x^2 = x \cdot x$

2. $x^3 = x \cdot x \cdot x$

3. $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$

4. $\cdots$

Observación 10. Observe que $x^1 = x$; mientras que, por convención, $x^0 = 1$.

Cuando multiplicamos x^n por un número diferente de x :

$$ax^n = a \cdot \underbrace{x \cdot \dots * x},$$

diremos que a es el coeficiente de x^n.

A un número escrito en la forma ax^n se le llama *monomio;* y diremos que dos monomios son semejantes si tienen *exactamente* la misma base a la misma potencia.

Problema 57. Determine cual de los siguientes monomios es semejante a $2x^3$:

1. $3x^3$;
2. $2x^2$;
3. $2y^3$;

Dos términos semejantes pueden reducirse

$$\begin{cases} ax^n + bx^n = (a+b)\,x^n \\ ax^n - bx^n = (a-b)\,x^n \end{cases}$$

Problema 58. Reduzca los siguientes términos semejantes, escribiendo el coeficiente en forma irreducible.

1. $\left(4n^2+5n+3\right)+\left(-3n^2-2n\right)$
2. $\left(-7a^3-a^2-5a-2\right)+\left(a^3+a^2-4a+7\right)$
3. $$\left(5u^5-3u^4+2u^3-5u^2+7u-7\right)+ \left(\frac{2u^5}{3}+\frac{3u^4}{2}-\frac{2u^2}{3}+\frac{5u}{6}+\frac{5}{4}\right).$$

Problema 59. Reduzca los siguientes términos semejantes, escribiendo el coeficiente en forma irreducible.

1. $\left(4n^2+5n+3\right)-\left(-3n^2-2n\right)$
2. $\left(-7a^3-a^2-5a-2\right)-\left(a^3+a^2-4a+7\right)$
3. $$\left(5u^5-3u^4+2u^3-5u^2+7u-7\right)- \left(\frac{2u^5}{3}+\frac{3u^4}{2}-\frac{2u^2}{3}+\frac{5u}{6}+\frac{5}{4}\right).$$

Observación 11. A la suma de dos o más monomios se le conoce como *polinomio*.

Por ejemplo x^2-2x+1 o $x^2-2xy+y^2$.

Supresión de signos de agrupación

Cuando queremos quitar parentesis u otro signo de agrupación, en una suma o resta de polinomios, basta usar la regla de los signos.

Sin embargo, cuando un polinomio se multiplica por un coeficiente, se utiliza la siguiente regla

Propiedad 7 (Ley de la distribución)**.**

$$a\,(b+c) = ab+ac \tag{65}$$

$$(a+b)\,(c+d) = ac+ad+bc+bd. \tag{66}$$

Problema 60. Simplifique

1. $(6-7a)(2-4a)$
2. $-4(-4w-5)(4w-2)$
3. $6(-5v-7)(4-5v)(-2v-1)v$

Mutiplicación de polinomios

Dos monomios se pueden multiplicar de la siguiente manera

$$(ax^n)(bx^m) = (ab)x^{n+m}.$$

Problema 61. 1. $\left(2x^3\right)\left(3x^2\right) = (2*3)\,x^{2+3} = 6x^5$.

Problema 62. Exprese su respuesta en la forma más simple posible:

1. $(6x^4)(4-3x-3x^2)$
2. $5w^3\left(-7w^3-7w^2+7w+3\right)$
3. $\dfrac{a^3}{3}\left(-7a^5-2a^4+3a^3+a^2-a-3\right)$

Problema 63. Exprese su respuesta en la forma más simple posible:

1. $$\left(n^2+5n\right)\left(-n^2+6n+1\right)$$
2. $$\left(-6a^2-3a-7\right)\left(a^3+a^2+6a-7\right)$$
3. $$\left(\frac{9w^4}{8}+\frac{8w^3}{9}-\frac{7w^2}{9}-\frac{w}{3}+\frac{5}{9}\right)\left(-2w^3-5w+7\right)$$

Problema 64. Exprese su respuesta en la forma más simple posible:

1. $(7u^4)\left(6-4u-7u^2\right)$
2. $(3s^4)\left(-7+s-s^2-5s^3\right)$
3. $(7x^4)\left(2+4x-7x^2\right)$

Problema 65. Simplifique

1. $(5w^4)\left(-1+5w+4w^2+6w^3\right)$
2. $(3m^4)\left(-1-6m-3m^2-7m^3-4m^4\right)$
3. $5a^5\left(a^3-3a^2+3a-5\right)$

Problema 66. Escriba su respuesta de la forma más simple posible

1. $\left(\frac{8n^4}{9}\right)\left(n^4-3n^3-4n^2+3n-1\right)$
2. $\left(\frac{2y^5}{5}\right)\left(-3y^4+5y^3-7y^2-2y-5\right)$
3. $\left(\frac{3s^3}{7}\right)\left(-2s^4-s^3-5s^2+2s+1\right)$

Problema 67. Exprese su respuesta en la forma más simple posible

1. $(-4x-5)\left(-3x^3+3x^2-4x-4\right)$
2. $\left(6y-7y^2\right)(y+3)$
3. $\left(\frac{7w^2}{9}+\frac{4w}{9}+\frac{9}{2}\right)\left(5w^2+6w-7\right)$

Problema 68. Simplifique

1. $\left(3x^2+2x+3\right)\left(6x^2-4x-3\right)$
2. $\left(4m^2+3m\right)\left(6m^3+6m^2-7m+6\right)$
3. $\left(-4x^2+5x+5\right)(3-4x)$

Problema 69. Simplifique

1. $\left(-2s^4-5s^3+3s^2+3s+2\right)\left(7s^3-3s^2-2s-7\right)$
2. $\left(5v-v^2\right)\left(2v^2+6v+5\right)$
3. $\left(7x^3+2x^2+5x-6\right)\left(6x^3+3x^2-4x-4\right)$

Problema 70. Simplifique

$$\left(\frac{2a^3}{5}-\frac{5a^2}{6}-\frac{9a}{8}+\frac{2}{3}\right)\left(3a^2-2a-4\right)$$

Productos notables

A continuación, aparecen algunos de los productos que se presentan con frecuencia en matemáticas.

Producto monomio-binomio

$$a(c+d)=ac+ad \tag{67}$$

Problema 71. 1. $2xy\left(3x^2y-4y^3\right)$

2. $3x^2y^3(2xy-x-2y)$
3. $\left(2st^3-4rs^2+3s^3t\right)\left(5rst^2\right)$

Diferencia de cuadrados

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \tag{68}$$

Problema 72. 1. $(3a+5b)(3a-5b)$

2. $(5xy+4)(5xy-4)$

3. $\left(2-5y^2\right)\left(2+5y^2\right)$

4. $\left(3a+5a^2b\right)\left(3a-5a^2b\right)$

Cuadrado de un binomio

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \tag{69}$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \tag{70}$$

Problema 73. 1. $(x+6)^2$

2. $(y+3x)^2$

3. $(z-4)^2$

4. $\left(3-2x^2\right)^2$

5. $\left(x^2y-2z\right)^2$

Producto de dos binomios

$$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab \tag{71}$$
$$(ax+b)(cx+d) = acx^2+(ad+bc)x+bd \tag{72}$$

Problema 74. 1. $(x+2)(x+4)$

2. $(x-4)(x+7)$

3. $(y+3)(y-5)$

4. $(xy+6)(xy-4)$

5. $(2x-3)(4x+1)$

6. $(4+3r)(2-r)$

Cubo de un binomio

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Problema 75. 1. $(2x+1)^3$

2. $(3x+2y)^3$

3. $(r-2s)^3$

4. $\left(x^2-1\right)^3$

5. $\left(ab^2-2b\right)^3$

Cuadrado de un trinomio

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc. \tag{73}$$

Problema 76.

$$(x-2y+z)^2 .$$

Sumas y diferencias de potencias

Problema 77.

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) \tag{74}$$

$$(a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right) \tag{75}$$

$$(a-b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right) \tag{76}$$

Problema 78.

$$(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right) \tag{77}$$

$$(a+b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right) \tag{78}$$

$$(a+b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right) \tag{79}$$

Problema 79. 1. $(t-2)\left(t^2+2t+4\right)$

2. $(z-x)\left(x^2+xz+z^2\right)$

3. $(x+3y)\left(x^2-3xy+9y^3\right)$

Problema 80. 1. $(s-1)\left(s^3+s^2+s+1\right)$

2. $\left(1+t^2\right)\left(1-t^2+t^4-t^6\right)$

3. $(3x+2y)^2\,(3x-2y)^2$

4. $\left(x^2+2x+1\right)^2\left(x^2-2x+1\right)^2$

5. $(y-1)^3\,(y+1)^3$

6. $(u+2)(u-2)(u^2+4)(u^4+16)$

Factorización

Método de Horner y División Sintética

Problema 81. Consideremos evaluar el siguiente polinomio

$$p(x) = 6x^2 + 3x - 2$$

en $x = 9$.

$$\begin{aligned} p(9) &= 6(9)^2 + 3(9) - 2 \\ &= 6(81) + 3(9) - 2 \\ &= 486 + 27 - 2 \\ &= 513 - 2 = 511 \end{aligned}$$

Consideraremos una forma alternativa de evaluar, conocida como *método de Horner.*

Primero, reescribimos el polinomio de la siguiente manera

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(6x^2 + 3x\right) -2 \\ &= \left(6x + 3\right) x-2 \\ &= \left((6)x + 3\right) x-2 \end{aligned}$$

Al evaluar, realizamos las siguientes operaciones

$$\begin{aligned} p(9) &= \left((6)9+3\right) 9-2 \\ &= \left(54+3\right) 9-2 \\ &= \left(57\right) 9-2 \\ &= 513-2 \\ &= 511 \end{aligned}$$

Observación 12. Aunque con el método anterior, hemos realizado algunos pasos más, hemos evitado el uso de *exponentes.* Ahora, todo se reduce a *multiplicaciones y sumas.*

El método anterior se puede sintetizar de la siguiente manera

9	6	+3	-2
	$\downarrow$	54	513
	6	57	511

De manera general,

x	6	+3	-2
	$\downarrow$	$6x$	$(6x+3)x$
	6	$6x+3$	$(6x+3)\,x-2$

Observación 13. La última expresión $(6x+3)\,x-2$ es igual a nuestro polinomio

$$6x^2+3x-2.$$

Al procedimiento anterior se le conoce como *división sintética.*

[t]

Problema 82. Evalue $p(x)=2x^3-7x^2+5$ en $x=3$ utilizando

1. evaluación directa
2. el método de Horner
3. división sintética

[t]

Problema 83. Evalue $p(x)=3x^5+5x^4-4x^3+7x+3$ en $x=-2$ utilizando

1. evaluación directa
2. el método de Horner
3. división sintética

[t]

Problema 84. Evalue $p(x)=x^3-7x+6$ en $x=1$ utilizando

1. evaluación directa
2. el método de Horner
3. división sintética

Definición 14. Si al evaluar un polinomio $p(x)$ en $x=c$, obtenemos

$$p(c)=0,$$

diremso que c es un *raíz* o *"cero"* del polinomio $p(x)$.

Problema 85. Evalue $p(x)=x^4-3x^3-13x^2+15x$ en $x=-3,0,1,5$ utilizando

1. evaluación directa
2. el método de Horner
3. división sintética

   y compruebe que son *ceros* del polinomio.

Teorema de los ceros racionales

Decimos que c es un *cero racional* del polinomio $p(x)$ si $p(c) = 0$ y c es un número racional, es decir, una fracción.

Observación 14. No todo cero de un polinomio es racional. Por ejemplo, los ceros del polinomio $p(x) = x^2 - 2$ son $c = \pm\sqrt{2}$, y desde los tiempos de Pitágoras es sabido que las raíces de números primos no son números racionales.

Teorema 2 (Teorema de los ceros racionales, caso particular)**.** *Si el polinomio* $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ *tiene coeficientes enteros, entonces* todo cero racional es divisor de término constante a_0.

Problema 86. Hallar los ceros racionales de

$$p(x) = x^3 - 3x + 2.$$

Teorema 3 (Teorema de los ceros racionales, caso particular)**.** *Si el polinomio*

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0,\ a_n \neq 0$$

tiene coeficientes enteros, entonces todo cero racional de la forma $\frac{p}{q}$ dónde p es divisor de coeficiente constante a_0 y q es divisor de coeficiente líder a_n.

Problema 87. Encuentre los ceros racionales del polinomio

$$p(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6.$$

Algoritmo de factorización

Diferencias de potencias

Propiedad 8.

$$x^n - c^n = (x - c)\left(x^{n-1} + x_{n-2}c + ... + xc^{n-2} + c^{n-1}\right) \tag{dP}$$

Problema 88.

$$\begin{aligned} x^2 - 121 &= \\ x^3 - 27 &= \\ x^4 - 256 &= \end{aligned}$$

Problema 89.

$$\begin{aligned}
x^2 - c^2 &= (x-c)\left(x^1 + c^1\right) \\
&= (x-c)(x+c) \\
x^3 - c^3 &= (x-c)\left(x^2 + x^1c^1 + c^2\right) \\
&= (x-c)\left(x^2 + cx + c^2\right) \\
x^4 - c^4 &= (x-c)\left(x^3 + x^2c^1 + x^1c^1 + c^3\right) \\
&= (x-c)\left(x^3 + cx^2 + c^2x + c^3\right)
\end{aligned}$$

El segundo factor en el lado derecho de (dP) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& x^{n-1} + x^{n-2}c + ... + xc^{n-2} + c^{n-1} \\
= {} & x^{n-1}c^0 + x^{n-2}c^1 + ... + x^1c^{n-2} + x^0c^{n-1} \\
& = \sum_{i+j=n-1} x^ic^j =: S^{n-1}_{x,c}
\end{aligned} \tag{pS}$$

donde $\sum_{i+j=M}$ denota la suma la suma sobre todas las parejas i, j de números naturales, cuya suma sea igual a M.

Diremos que $S^M_{x,c}$ es el polinomio simétrico de grado M (para x, c).

Problema 90. Calcule los siguientes polinomios simétricos

$$\begin{aligned}
S^1_{x,11} &= x + 11 \\
S^2_{x,3} &= x^2 + 3x + 9 \\
S^3_{x,4} &= x^3 + 4x^2 + 16x + 64
\end{aligned}$$

Divisores de un polinomio

Definición 15. Decimos que un polinomio $D(x)$ divide a otro polinomio $P(x)$ si existe un tercer polinomio $Q(x)$ tal que $D(x)Q(x) = P(x)$.

En tal caso decimos que $D(x)$ divide a $P(x)$ y escribimos $D(x) \mid P(x)$. Al polinomio $Q(x)$ se le llama *polinomio cociente.*

Teorema 4. *Un número $x = c$ es un cero de $P(x)$ si y solo si $(x-c)$ divide a $P(x)$.*

Diremos que $D_c(x) = (x-c)$ es el divisor asociado *a $x = c$.*

Algoritmo 5 (Factorización de un divisor asociado)**.** *Supongamos que $x = c$ es un cero del polinomio $P(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0$.*

1. *Rescribimos explicitamente $P(x) = P(x) - P(c)$*

2. *Factorizamos cada coeficiente*

$$P(x) = a_n\left(x^n - c^n\right) + ... + a_1(x-c)$$

3. *Aplicamos diferencias de cuadrados en cada término*

$$P(x) = a_n(x-c)S_{x,c}^{n-1} + ... + a_1(x-c)$$

4. *Factorizamos $D_c(x) = x - c$*

$$P(x) = (x-c)\left(a_n S_{x,c}^{n-1} + ... + a_1\right)$$

Problema 91. Para cada uno de los siguientes polinomios, factorice los divisores asociados a cada uno de sus ceros racionales tantas veces como sea posible, utilizando diferencias de potencias:

1. $x^3 + 3x^2 - 4 = (x+2)^2(x-1)$
2. $x^4 - 5x^2 + 4 = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$

Algoritmo 6 (Encontrar los ceros racionales de un polinomio)**.** *1.* Enlistar los posibles ceros. *Enliste los posibles ceros racionales usando el teorema de los ceros racionales.*

2. Dividir. *Use la división sintética para evaluar el polinimio en cada uno de los candidatos para ceros racionales que encontró en el paso anterior. Cuando el residuo es* 0, *observe el cociente que obtuvo.*

3. Repetir. *Repita los pasos anteriores para el cociente. Pare cuando llegue al cociente que no tenga ceros racionales.*

Problema 92. Para cada uno de los siguientes polinomios, factorice los divisores asociados a cada uno de sus ceros racionales tantas veces como sea posible:

1. $x^3 + 3x^2 - 4 = (x+2)^2(x-1)$
2. $x^4 - 5x^2 + 4 = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$

Raíces irracionales

Un polinomio cuadrático

$$p(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

tiene raíces r_1 y r_2 si y solo si

$$p(x) = a\left(x - r_1\right)\left(x - r_2\right)$$

Fórmula general

Propiedad 9. *Las soluciones de la ecuación*

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

están dadas por la fórmula

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \\ r = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \end{cases}$$

Discriminante El número $D = b^2 - 4ac$ se llama *discriminante* del polinomio cuadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Corolario 1. *(a) Si $D > 0$, entonces $p(x) = 0$ tiene exactamente dos raíces reales y diferentes.*

(b) Si $D = 0$, entonces $p(x) = 0$ tiene una única raíz real de multiplicidad 2.

(c) Si $D < 0$, entonces $p(x) = 0$ tiene un par de raíces complejas conjugadas.

Problema 93. Factorice completamente el polinomio

$$P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$$

Criterios para evaluar raíces

Regla de los signos de Descartes

Variaciones de signo Si un polinomio $P(x)$ tiene coeficientes reales, escritos sus *exponentes en forma descendiente* y *omitiendo exponentes con coeficiente cero*, entonces una *variación de signo* ocurre siempre que dos signos opuestos.

Problema 94.
- $x^2 + 4x + 1$ tiene 0 variaciones de signo.
- $2x^3 + x - 6$ tiene 1 variación de signo.
- $x^4 - 3x^2 - x + 4$ tiene 2 variaciones de signo.
- $5x^7 - 3x^5 - x^4 + 2x^2 + x - 3$ tiene 3 variaciones de signo.

Regla de los signos de Descartes

Propiedad 10. *Sea P un polinomio con coeficientes reales*

(a) El número de ceros reales positivos *es o bien igual al número de variaciones de signo en $P(x)$ o bien menor este número por un número par.*

(b) El número de ceros reales negativos *es o bien igual al número de variaciones de signo en $P(-x)$ o bien menor este número por un número par.*

Problema 95. Use la regla de los signos de Descartes para estimar el número posible de ceros reales negativos y positivos del polinomio

$$P(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$$

Respuesta 1. $P(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$ *tiene una única raíz real positiva y o bien tres o bien una raíces real negativas.*

Teorema de las Cotas

Diremos que $m \in \mathbb{R}$ es una *cota inferior* y $M \in \mathbb{R}$ es una cota superior para el conjunto de *ceros reales* de un polinomio si para cada raíz c tenemos que

$$m \leq c \leq M.$$

Teorema 5. *Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales.*

(a) Si se divide $P(x)$ entre $x - b$ con $b > 0$ usando división sintética, y si la fila de coeficientes del cociente y residuo tiene entradas no negativas*, entonces b es una cota superior para los ceros reales de $P(x)$.*

(b) Si se divide $P(x)$ entre $x - a$ con $a < 0$ usando división sintética, y si la fila de coeficientes del cociente y residuo tiene entradas alternantemente no positivas y no negativas*, entonces a es una cota inferior para los ceros reales de $P(x)$.*

Problema 96. Muestre que todos los ceros reales del polinomio

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5$$

están entre -3 y 2.

Problema 97. Factorice completamente el polinomio $P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$

Respuesta 2. $P(x) = (x-1)(2x-3)(x+1)^2(x+3)$

Ecuaciones de segundo grado

Una función cuadrática es de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c;$$

su gráfica se llama *parábola.*

Complemento de cuadrados

Cualquier función cuadrática se puede reescribir en la forma

$$f(x) = a(x-h)^2 + k,$$

por el método de *complementos de cuadrado.*

El punto (h, k) se llama *vértice,* y corresponde al *extremo* de la parábola

$$y = a(x-h)^2 + k.$$

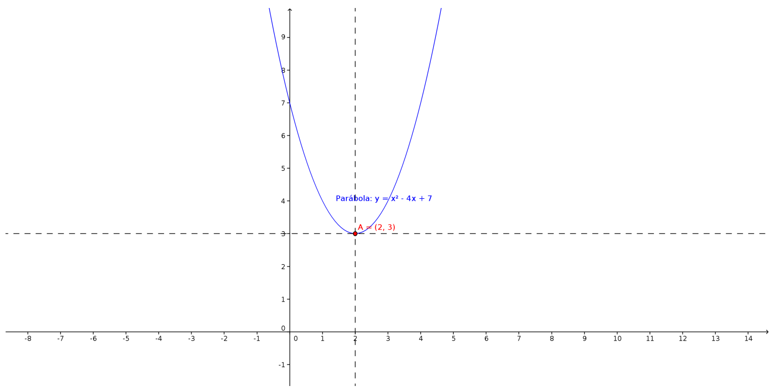


Figura 1: $y = x^2 - 4x + 7$

La fórmula para encontrar el vértice de la parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ es

$$\begin{cases} h = -\dfrac{b}{2a} \\ k = f(h). \end{cases}$$

Para completar el cuadrado, podemos usar el *método de división sintética:*

$$\begin{array}{c|ccc} h & a & b & c \\ & \downarrow & +ah & \dots \\ \hline & a & \dots & k \end{array}$$

Problema 98. Complete el cuadrado de

$$y = x^2 - 4x + 7.$$

Problema 99. Complete el cuadrádo de

$$y = 3x^2 + 30x + 63.$$

Intersecciones con los ejes

Las raíces de un polinomio $p(x)$ son aquellos números reales r tales que $p(r) = 0$.

Para encontrar las raíces de una *polinomio cuadrático*, necesitamos resolver la *ecuación de segundo grado*

$$a(x-h)^2 + k = 0.$$

Si r es una raíz de $p(x) = a(x-h)^2 + k$, entonces la parábola $y = a(x-h)^2 + k$ cruza al eje x en el punto $(r, 0)$.

Observación 15. Si bien $a, k > 0$ o bien $a, k < 0$, entonces $a(x-h)^2 + k > 0$ y por tanto no existen raíces. Por lo tanto, la parábola $y = a(x-h)^2 + k$ *nunca* cruza el eje x.

Problema 100. Determine si existen raíces de

$$y = x^2 - 4x + 7,$$

Diferencia de cuadrados

Una identidad que es muy útil al momento de resolver ecuaciones es la *diferencia de cuadrados*

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

Una ecuación de la forma

$$z^2-c^2=0$$

se puede reescribir como

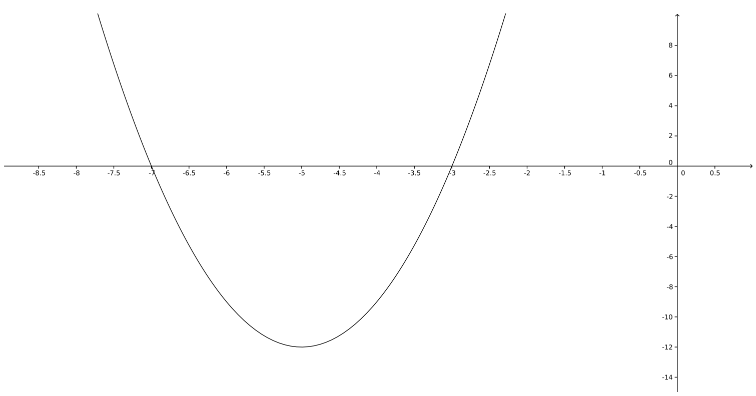
$$(z-c)(z+c)=0...$$

...en cuyo caso tenemos que $z-c=0$ o $z+c=0$, y por tanto las soluciones son

$$z=\pm c.$$

Problema 101. Encuentre las raíces de

$$y=3x^2+30x+63.$$



Ejemplos

Problema 102. Resuelva las siguientes ecuaciones

1. $x^2-40=9$
2. $2x^2-400=0$
3. $x^2+36=9-2x^2$

Problema 103. Resuelva las siguientes ecuaciones

1. $\dfrac{x}{16}=\dfrac{4}{x}$
2. $\dfrac{y^2}{3}=\dfrac{y^2}{6}+2$

Problema 104. Resuelva la siguiente ecuación

$$\frac{1-2x}{3-x}=\frac{x-2}{3x-1}.$$

Problema 105. Resuelva la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{4}.$$

Problema 106. Resuelva la siguiente ecuación

$$x-\frac{2x}{x+1}=\frac{5}{x+1}-1.$$

Problema 107. Encuentre las raíces de los siguientes polinomios

1. $7x^2-5x$
2. x^2-5x+6
3. $3x^2+2x-5$
4. x^2-4x+4

Problema 108. Encuentre las raíces de los siguientes polinomios

1. x^2-6x-2
2. $3x^2-5x+1$
3. $4x^2-6x+3$

Factorización

Si un polinomio $p(x)=ax^2+bx+c$ tiene raíces r_1, r_2 diferentes, entonces podemos factorizar de la siguiente manera

$$p(x)=a(x-r_1)(x-r_2).$$

Si un polinomio $p(x)=ax^2+bx+c$ tiene una única raź r_1, entonces podemos factorizar de la siguiente manera

$$p(x)=a(x-r_1)^2.$$

Problema 109. Factorice los siguientes polinomios

1. $7x^2-5x$
2. x^2-5x+6
3. $3x^2+2x-5$
4. x^2-4x+4

Problema 110. Factorice los siguientes polinomios

1. x^2-6x-2
2. $3x^2-5x+1$
3. $4x^2-6x+3$

Aplicaciones

Problema 111. Encuentre dos números positivos sabiendo que uno de ellos es igual al triple del otro más 5 y que el producto de ambos es igual a 68.

Problema 112. Encuentre un número sabiendo que la suma del triple del mismo con el doble de su recíproco es igual a 5.

Problema 113. Encuentre las dimensiones de un rectángulo cuto perímetro es de 50 pies y área es de 150 pies cuadrados.

Problema 114. La hipotenusa de un triángulo es igual a 34 pulgadas. Encuentre las longitudes de los catetos sabiendo que uno de ellos es 14 pulgadas mayor que el otro.

Problema 115. Las dimensiones exteriores de un marco de fotografía son 12 por 15 pulgadas. Sabiendo que el ancho permanece constante, encuentre su valor a) cuando la superficie de la fotografía es de 88 pulgadas y b) cuando dicha superficie vale 100 pulgadas cuadradas.

Problema 116. Un piloto realiza un vuelo de 600 millas. Sabiendo que si aumenta la velocidad en 40 millas/hora podría recorrer dicha distancia empleando 30 minutos menos, encuentre la velocidad promedio.

Problema 117. Un comerciante compra determinado número de camisas por $180 y las vende todas menos 6 con una ganancia de $2 en cada camisa. Sabiendo que con el dinero recaudado en la venta podría haber comprado 30 camisas más que antes, calcule el precio de cada camisa.

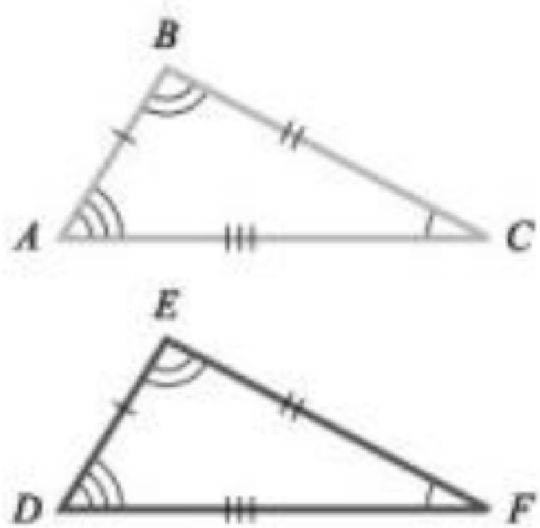
Problema 118. Dos operarios A y B juntos, realizan una tarea en 10 días. Trabajando por separado, A tardaría 5 días más que B. Encuentre el número de días que tardarían en hacer la tarea trabajando cada no por sí sólo.

Trigonometría

La geometría de los triángulos: congruencia, similitud y el teorema de Pitágoras

Triángulos congruentes

Los triángulos que tienen el mismo tamaño y la misma forma se llaman *triángulos congruentes*.



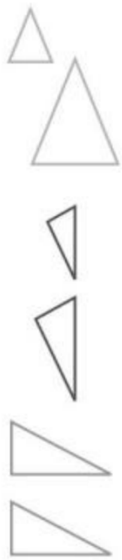
Si dos triángulos $\triangle ABC, \triangle DEF$ son congruentes, escribiremos

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

Propiedad 11 (Criterios de congruencia)**.**
- LAL*: Dos lados y su ángulo incluido iguales.*
- ALA*: Dos ángulos y su lado incluido iguales.*
- LLL*: Tres lados iguales.*

Triángulos semejantes

[t]



Diremos que dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son *similares* si existe un correspondencia $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$ tal que $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|} =: \alpha$.

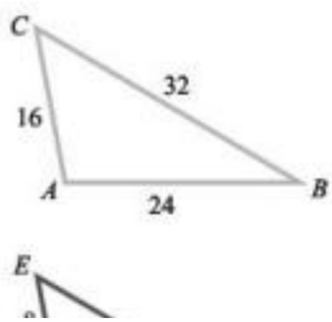
A tal *constante de proporcionalidad* α se conoce como *escala*.

Propiedad 12 (Criterio AA)**.** *Si las medidas de dos ángulos de un triángulo son iguales a las de dos ángulos correspondientes de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.*

[t]

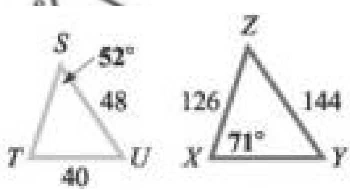
Problema 119. Suponga que en la figura, ambos triángulos son semejantes. Encuentre las longitudes desconocidas de los lados de $\triangle EDF$.

[t]

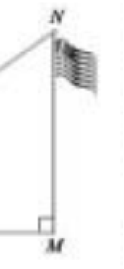


Problema 120. Encuentre las medidas de las partes desconocidas de los triángulos semejantes $\triangle STU$ y $\triangle ZXY$.

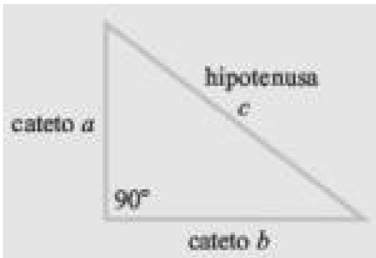
[t]



Problema 121. La jefa de oficina de correos de una ciudad quiere medir la altura del asta de la bandera de la oficina. Observa que en el instante en el que la sombra de la estación mide $18 fts$, la sombra del asta mide $99 fts$. El edificio tiene $10 fts$ de altura. ¿Cuál es la altura del asta?



El teorema de Pitágoras



Teorema 6 (Pitágoras)**.**

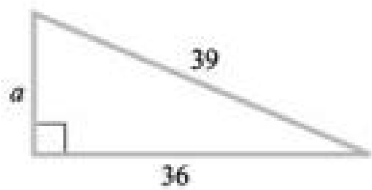
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Los números naturales $\{3, 4, 5\}$ forman una *terna pitagórica*, ya que satisfacen las ecuaciones del teorema de Pitágoras.

[t]

Problema 122. Determine la longitud a del triángulo rectángulo que se muestra.

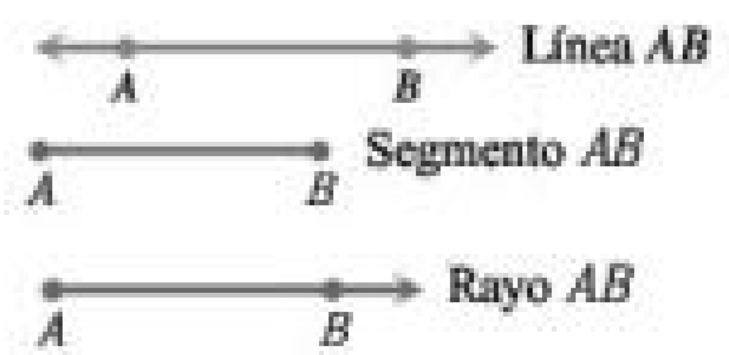
[t]



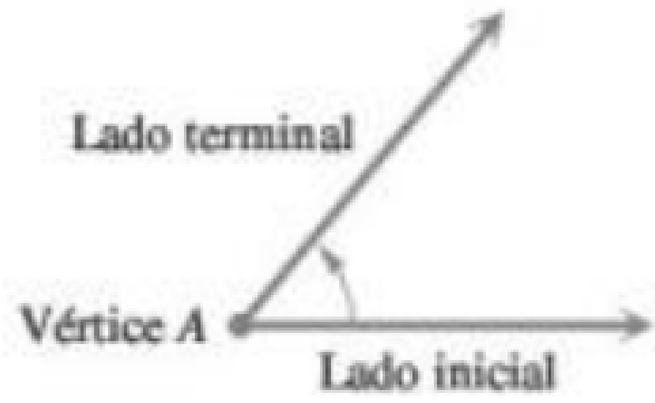
Problema 123. Una escalera de 10 metros de longitud tiene su base a 6 metros de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera?

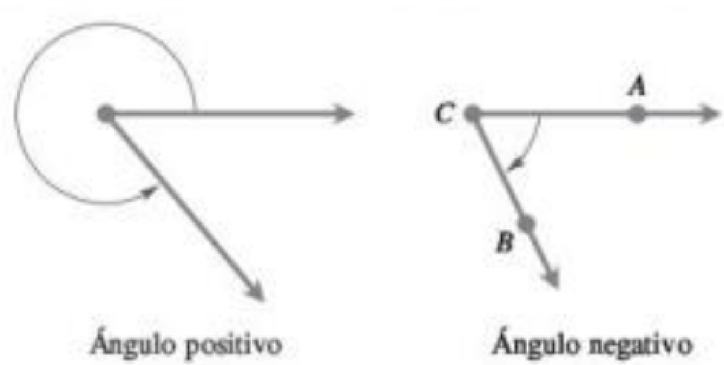
Los ángulos y sus medidas

Terminología básica



Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90^o, los ángulos se





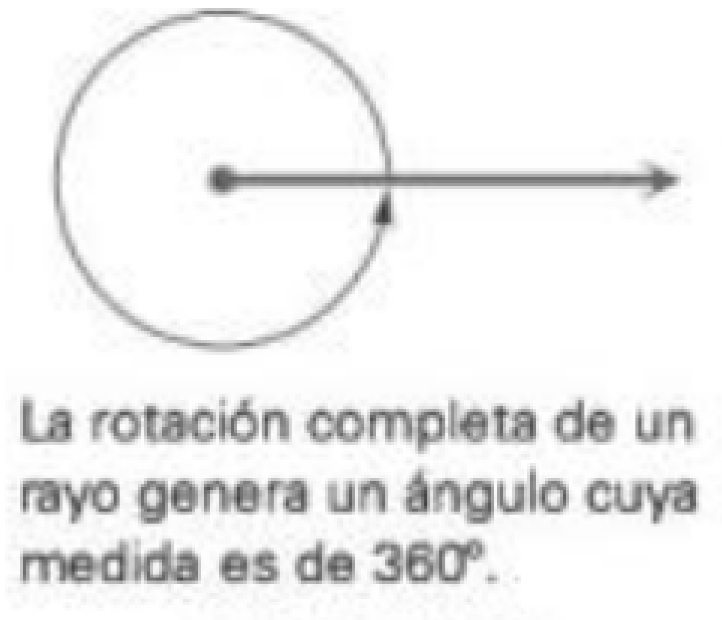
llaman *complementarios*. En tanto que dos ángulos cuyas medidas sumen 180^o son *suplementarios*.

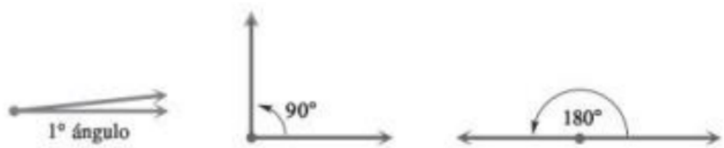
Problema 124. Diga cuál es el complemento y el suplemento de 50^o.

Radianes

Un *ángulo central* es un ángulo positivo cuyo vértice esta en el centro de un círculo.

Teorema 7 (Longitud de arco)**.** *Para un círculo de radio r, un ángulo central de θ radianes subtiende*





un arco cuya longitud es

$$s = r\theta \tag{80}$$

Problema 125. Encuentre la longitud de arco de un círculo de radio 2 subtendido por un ángulo central de 0.25 radianes.

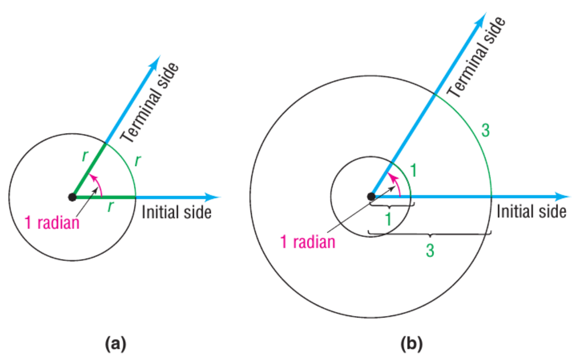
Problema 126. Encuentre la longitud de arco de un círculo de radio 10 subtendido por un ángulo central de $\frac{1}{2}$ radianes.

Conversión entre grados y radianes

Como una revolución equivale a 360^o, entonces $1\texttt{rad} = 360^0$. De manera simplificada:

$$180^o = \pi\texttt{rad}$$

Nombre	Medida del ángulo	Ejemplo(s)
Ángulo agudo	Entre 0° y 90°	60° 82°
Ángulo recto	Exactamente 90°	90°
Ángulo obtuso	Entre 90° y 180°	97° 138°
Ángulo rectilíneo	Exactamente 180°	180°



Problema 127. Convierta cada uno de los ángulos a radianes:

- $60^o =$
- $150^o =$
- $-45^o =$
- $90^o =$
- 107^o

Problema 128.
- Convierta 35^o a radianes, expresándolo como un múltiplo de π.
- Convierta -40^o a radianes, expresándolo en decimales.

Problema 129. La latitud de una locación L es la medida del ángulo

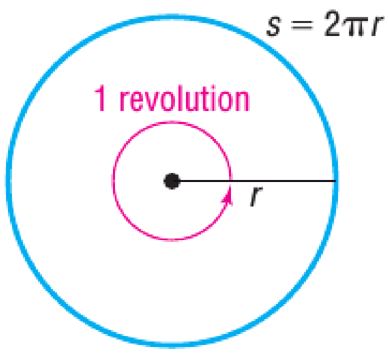
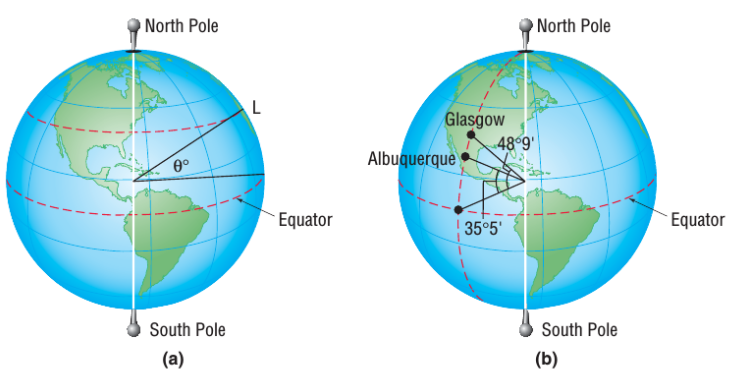


Figura 2: 1 revolución = 2π radianes

Degrees	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Degrees		210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radians		$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

formado por un rayo dibujado desde el centro de la tierra al ecuador y un rayo dibujado del centro de la tierra a L.

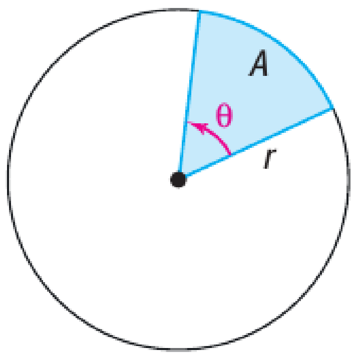
Glasgow, Montana está al norte de Albuquerque, Nuevo México. Encuentre la distancia entre Glasgow, $48^o, 9'$, latitud Norte y Albuquerque, $35^o, 5'$. Suponga que el radio de la tierra es 3960 millas.

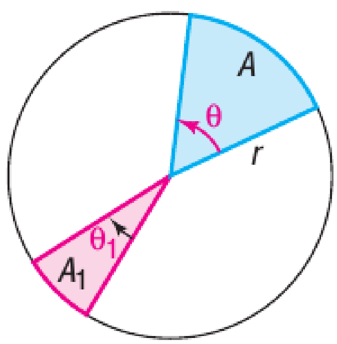


Problema 130. Memphis, Tennessee, está al norte de Nueva Orleans, Lousiana. Encuentre la distancia

entre Memphis, $35^o, 9'$ latitud norte, y Nueva Orleans, $29^o, 57'$ latitud norte. Suponga que el radio de la tierra es 3960 millas.

Área de un sector de un círculo





Teorema 8 (Área de un sector)**.** *El área A de un sector de un círculo de radio r formado por un ángulo central de θ radianes es*

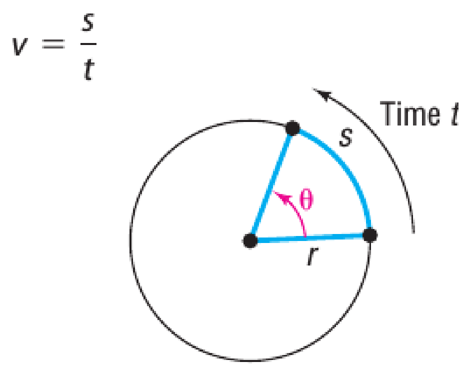
$$A = \frac{1}{2}r^2\theta. \tag{81}$$

Problema 131. Encuentre el área del sector de un círculo de radio $2fts$ formado por un ángulo de 30^o. Redondee la respuesta dos decimales.

Problema 132. Encuentre el área del sector de un círculo de radio

$10m$ formado por un ángulo de $\frac{1}{2}rad$. Redondee la respuesta dos decimales.

Movimiento circular



Supongamos que un objeto se mueve alrededor de un círculo de radio r a una rapidez constante. Si s es la distancia recorrida en un tiempo t alrededor del círculo, entonces la *rapidez lineal* v de este objeto se define como

$$v = \frac{s}{t} \tag{82}$$

La *rapidez angular* ω de este objeto es el ángulo θ (medido en radianes) barrido, dividido por el lapso t, es decir,

$$\omega = \frac{\theta}{t}. \tag{83}$$

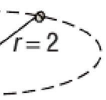
De manera que

$$v = r\omega. \tag{84}$$

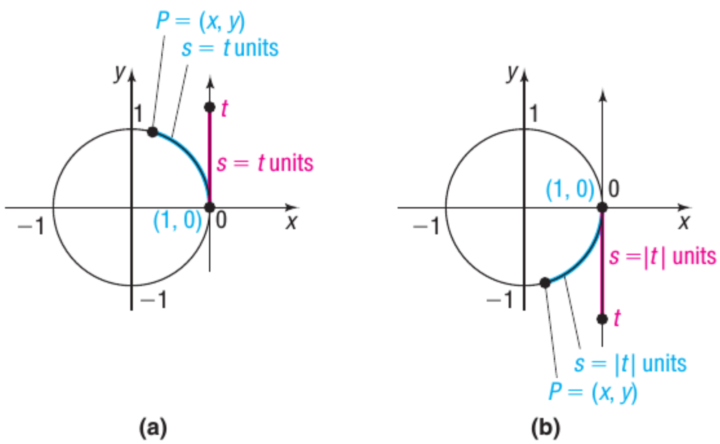
Problema 133. Una persona está haciendo una roca atada al extremo de un cuerda de $2fts$ a un ritmo de $180rpm$. Encuentre la rapidez lineal de la roca en el instante en que es liberada.

Problema 134. Un objeto está viajando alrededor de un círculo de radio $5cm$. Si en $20s$ un ángulo central de $\frac{1}{3}rad$ es barrido, ¿cuál es su rapidez angular? ¿Cuál es su rapidez lineal?

Funciones trigonométricas: El enfoque del círculo unitario



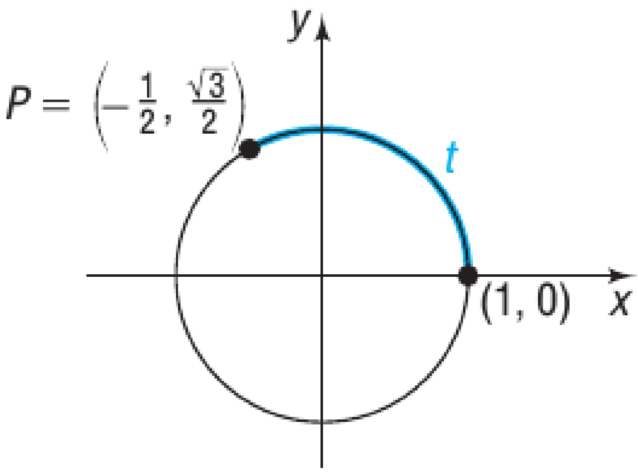
El círculo unitario



Definición 16 (Funciones trigonométricas)**.** Sea t un número real y $P = (x, y)$ el punto en el círculo unitario que corresponde a t.

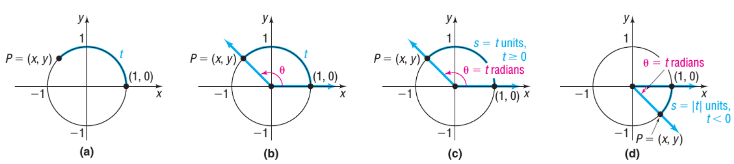
- $\sin(t) = y$
- $\cos(t) = x$
- $\tan(t) = \frac{y}{x}$
- $\csc(t) = \frac{1}{y}$
- $\sec(t) = \frac{1}{x}$
- $\cot(t) = \frac{x}{y}$

Problema 135. Sea t un número real y $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ un punto en el círculo unitario que corresponde a t. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas.



Problema 136. Sea t un número real y $P = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ un punto en el círculo unitario que corresponde a t. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas de ángulos



Entonces, podemos definir una función trigonométrica en ángulos siempre y cuando este medido en radianes:

$$f(\theta) = f(t \texttt{ radianes})$$

si $\theta = t$ `radianes`.

Problema 137. Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas en:

- $\theta = 0 = 0^o$

- $\theta = \frac{\pi}{2} = 90^o$
- $\theta = \pi = 180^o$
- $\theta = \frac{3\pi}{2} = 270^o$

Quadrantal Angles							
θ (Radians)	θ (Degrees)	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\csc\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
0	0°	0	1	0	Not defined	1	Not defined
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	Not defined	1	Not defined	0
π	180°	0	-1	0	Not defined	-1	Not defined
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	Not defined	-1	Not defined	0

Problema 138. Encuentre el valor exacto de:

- $\sin(3\pi)$
- $\cos(-270^o)$

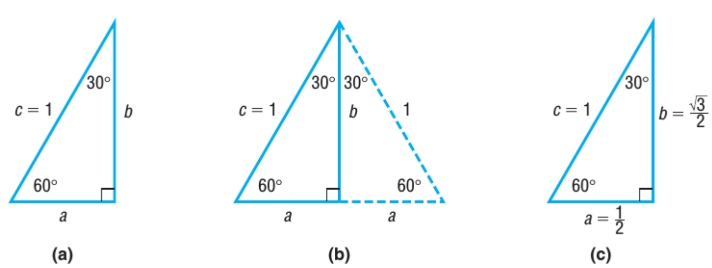
Problema 139. Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas en $\frac{\pi}{4} = 45^o$.

Valor exacto en $\frac{\pi}{4}$

Problema 140. Encuentre el valor exacto de cada expresión:

- $\sin(45^o)\cos(180^o)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
- $\left(\sec\frac{\pi}{4}\right)^2 + \csc\frac{\pi}{2}$

Valor exacto en $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$

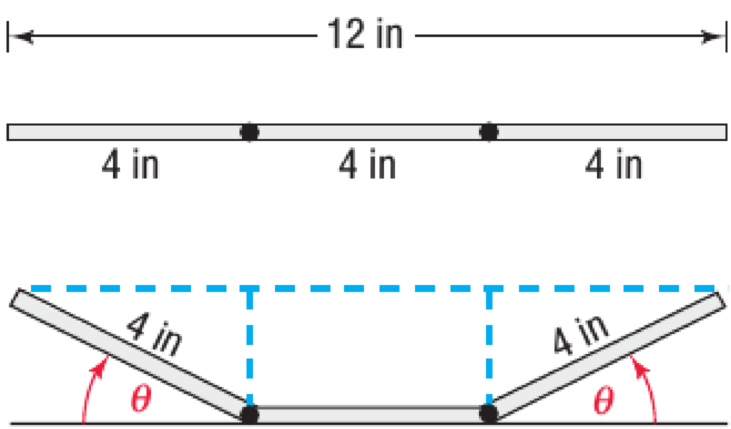


Problema 141. Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{3} = 60^o$.

Problema 142. Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas de $\frac{\pi}{6} = 30^o$.

θ (Radians)	θ (Degrees)	sin θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Problema 143. Un recolector de lluvia se construye a partir de planchas de aluminio de 12 pulgadas de ancho. Después de marcar 4 pulgadas a partir de cada extremo, está longitud se dobla a un ángulo θ. Encuentre el área transversal máxima del recolector.



Funciones trigonométricas inversas

Funciones inversas

Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que f es *invertible* si para cada $y \in B$ *siempre* corresponde un *único* $x \in A$, tal que

$$f(x) = y.$$

Si una función f es invertible, entonces existe una función $g : B \to A$ tal que $y = f(x)$ si y solo si $g(y) = x$. En otras palabras, podemos despejar x. Es usual denotar a tal función g por f^{-1} y llamarle *inversa de* f.

Propiedades del inversa

- $f^{-1}(f(p))$ para todo $p \in A$.
- $f\left(f^{-1}(p)\right)$ para todo $p \in B$.
- $\texttt{Dominio}(f) = \texttt{Rango}(f^{-1})$ y viceversa.
- La gráfica de f^{-1} es la reflexión a 45^o de la gráfica de f.

Tangente inversa

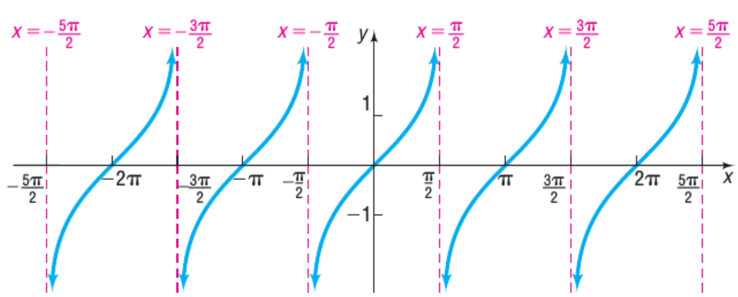


Figura 3: $y = \tan(x)$

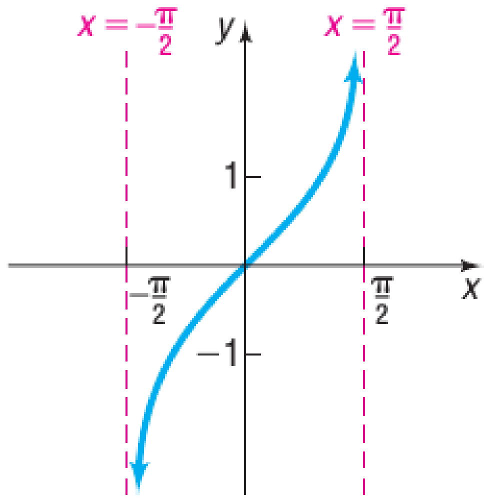
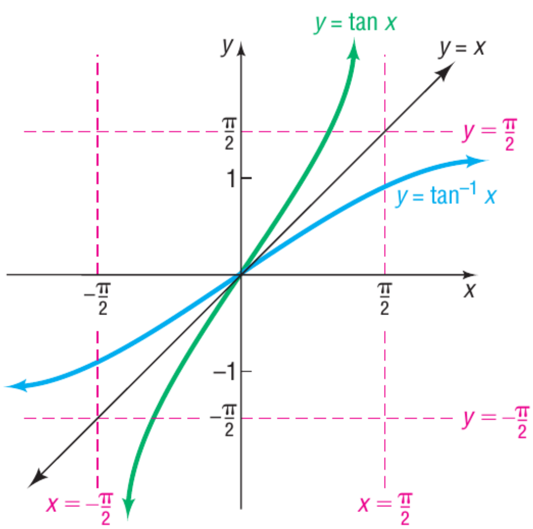


Figura 4: $y = \tan(x)$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\infty < x < \infty$



Tangente inversa

$$y = \tan^{-1}(x) \iff \begin{cases} x = \tan(y) \\ -\infty < x < \infty \\ -\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Problema 144. Encuentre el valor exacto de

- $\tan^{-1} 1$
- $\tan(-\sqrt{3})$
- $\tan^{-1} 0$
- $\tan^{-1}\left(\tan \frac{4\pi}{5}\right)$

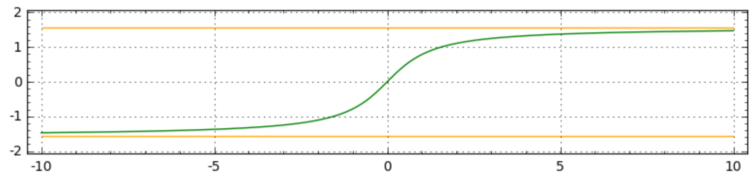


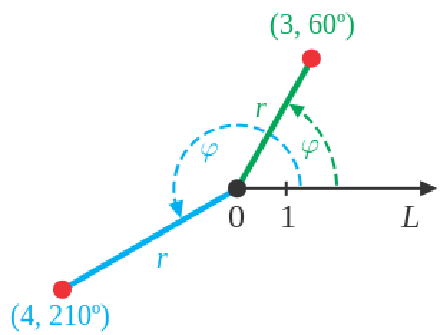
Figura 5: $y = \tan^{-1}(x)$

Vectores

Diremos que un vector $\langle x, y\rangle$ esta en su *forma polar (estándar)* $r\exp(\theta i)$ si

$$
\begin{aligned}
x =& r\cos(\theta)\\
y =& r\sin(\theta)
\end{aligned}
$$

con $-\pi < \theta \leq \pi$.



Problema 145. Escriba los siguientes vectores en su forma polar (estándar):

- $\langle 1, \sqrt{3}\rangle$
- $\langle 1, -\sqrt{3}\rangle$
- $\langle -1, \sqrt{3}\rangle$
- $\langle -1, -\sqrt{3}\rangle$

Optimización

Problema 146. Suponga que en una sala de cine, una pantalla tiene 28 pies de alto. Cuando un espectador se sienta, la parte inferior de la pantalla tiene una altura de 6 pies por encima de su nivel de visión. El ángulo formado al dibujar una linea desde la parte inferior de la pantalla a la parte superior se conoce como ángulo de visión. Encuentre el ángulo máximo de visión respecto a la distancia al muro que sostiene la pantalla.

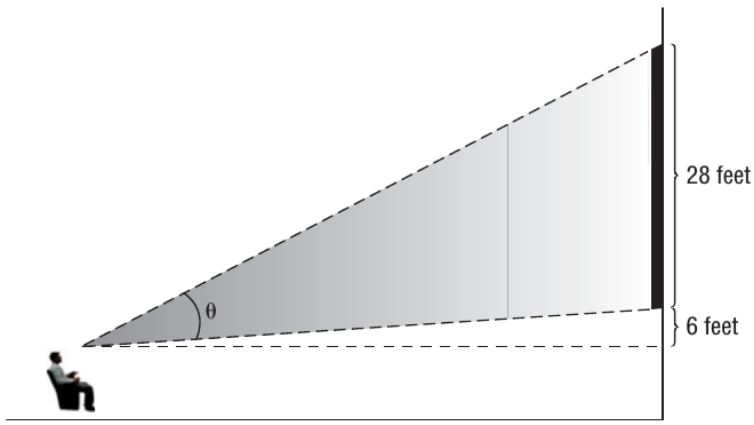


Figura 6: Ángulo de visión

Sugerencia

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\left(\frac{A}{x}\right)\right) = -\frac{A}{A^2+x^2}$$

Trigonometría Analítica

Propiedades de funciones trigonométricas

Problema 147. ▪ Grafique cada una de las seis funciones trigonométricas en `Sagemath`.

- Determine el dominio y el rango de cada una.

Definición 17. Una función se llama periódica si existe un número positivo p tal que siempre que θ esté en el dominio de f, entonces $\theta + p$ lo está y

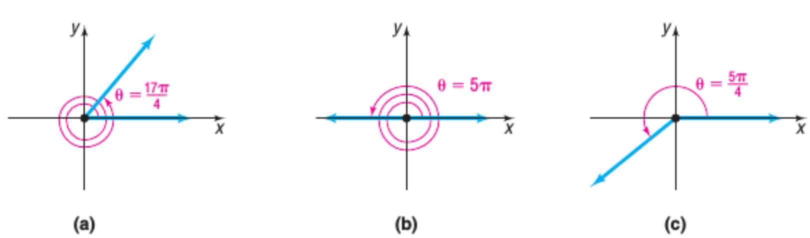
$$f(\theta + p) = f(\theta).$$

Si existe un número minimal p con tal propiedad, diremos que este es el *periodo fundamental* de f.

Problema 148. Determine el periodo respectivo de cada una de las seis funciones trigonométricas.

Problema 149. Encuentre el valor exacto de

- $\sin\left(\dfrac{17\pi}{4}\right)$
- $\cos(5\pi)$
- $\tan\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$



Problema 150. Determine el valor exacto de

- $\sin(405^o)$
- $\cot(390^o)$
- $\sec\left(\dfrac{17\pi}{4}\right)$

Identidades reciprocas

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$
$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$$
$$\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

Problema 151. Dado

$$\sin(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

encuentre el valor de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

Problema 152. Dado

$$\sin(\theta) = -\frac{3}{5}$$
$$\cos(\theta) = \frac{4}{5}$$

encuentre el valor de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

Identidades pitagóricas

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

La función coseno es par:

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

mientras que la función seno es impar:

$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

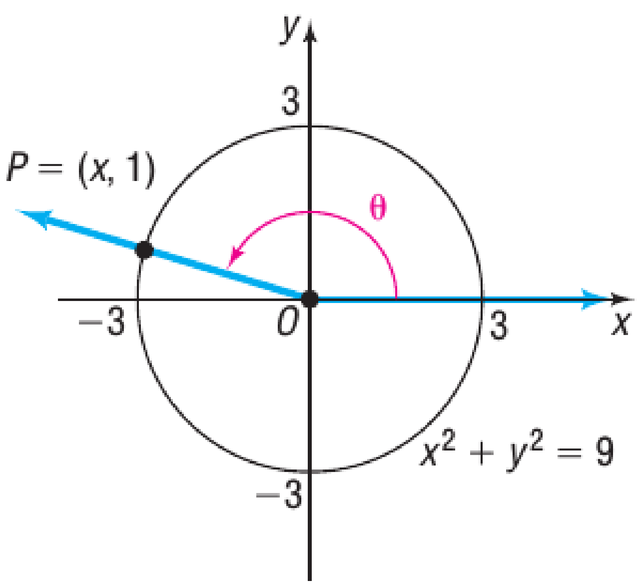
Problema 153. Encuentre el valor exacto de cada expresión *sin usar calculadora*:

- $\tan(20^o) - \dfrac{\sin(20^o)}{\cos(20^o)}$
- $\sin^2 \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{1}{\sec^2 \dfrac{\pi}{12}}$

Problema 154. Encuentre el valor exacto de cada expresión *sin usar la calculadora*:

- $\sin(80^o)\csc(80^o)$
- $\cos(400^o)\sec(40^o)$
- $\dfrac{\sin(-20^o)}{\cos(380^o)} + \tan(200^o)$

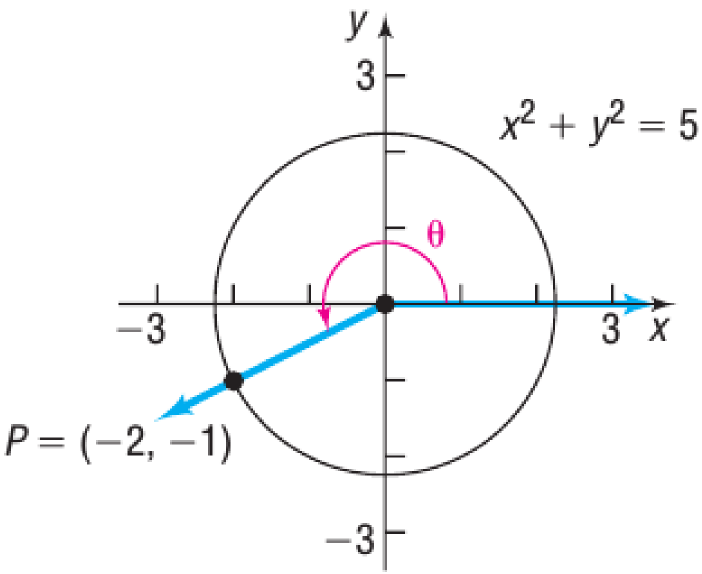
Problema 155. Dado que $\sin\theta = \frac{1}{3}$ y $\cos\theta$, encuentre el valor exacto de cada una de las restantes cinco funciones trigonométricas.



Problema 156. Dado que $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ y $\sin\theta < 0$, encuentre el valor exacto de cada una de las restantes cinco funciones trigonométricas en θ.

Problema 157. Encuentre el valor de cada una de las restantes funciones trigonométricas en θ conociendo que $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$ y θ se encuentra en el segundo cuadrante.

Paridad e imparidad Por un lado, una función $f(\theta)$ es par si $f(-\theta) = f(\theta)$. Por otro lado, función $f(\theta)$ si $f(-\theta) = -f(\theta)$.



Propiedad 13. *La función* cos *es par, pero la función* sin *es par.*

Problema 158. Determine si las funciones trigonométricas restantes son pares o impares.

Problema 159. Encuentre el valor exacto de

- $\sin(-45^o)$
- $\cos(-\pi)$
- $\cot\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$
- $\tan\left(-\frac{37\pi}{4}\right)$

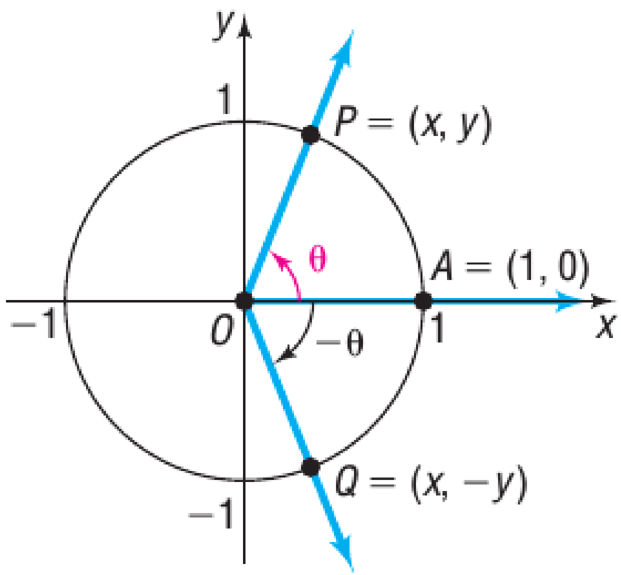
Problema 160. ▪ $\sin(-60^o)$

- $\csc(-30^o)$
- $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
- $\sec(-\pi)$

Suma y diferencias de ángulos

Suma y diferencias para el coseno

$$\cos(s+t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t)$$
$$\cos(s-t) = \cos(s)\cos(t) + \sin(s)\sin(t)$$



Problema 161. Demuestre las siguientes identidades

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$$

Suma y diferencias para el coseno

$$\sin(s + t) = \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t)$$
$$\sin(s - t) = \sin(s)\cos(t) - \cos(s)\sin(t)$$

Problema 162. Establezca la siguiente identidad

$$\frac{\cos(s - t)}{\sin(s)\sin(t)} = \cot(s)\cot(t) + 1$$

Problema 163. Demuestre las siguientes identidades

1.
$$\tan(s + t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$$

2.
$$\tan(s - t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$

3.
$$\tan(s + \pi) = \tan(s)$$

4.
$$\tan\left(s + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(s)$$

Problema 164. Demuestre las siguientes identidades

1.
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=\cos t$$

2.
$$\frac{\sin\left(s+t\right)}{\sin(s)\cos(t)}=1+\cot(s)\tan(t)$$

Parte II

Álgebra Lineal

Sistemas lineales

Sistemas de Ecuaciones Lineales Simultáneas

Sistemas de Dos Ecuaciones Lineales

Supongamos que $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2$ son número dados:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

En el sistema anterior, nuetro objetivos es encontrar dos números x, y tales que cumplan ambas ecuaciones simultaneamente.

Problema 165. La solución del sistema

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

es $x = 5, y = 2$.

A continuación, ejemplificaremos algunos de los métodos más comunes para resolver sistemas de ecuaciones.

$$2x - y = 4 \tag{85}$$

$$x + 2y = -3 \tag{86}$$

Método de sustitución Despejando de (85), obtenemos

$$y = 2x - 4.$$

Sutituyendo en (**??**), obtenemos

$$x + 2(2x - 4) = -3.$$

Método de igualación Despejando de (85), obtenemos

$$y = 2x - 4.$$

Despejando de (**??**), obtenemos

$$y = -\frac{3+x}{2}.$$

Igualando ambos lados derechos, obtenemos

$$2x - 4 = -\frac{3+x}{2}.$$

Método gráfico

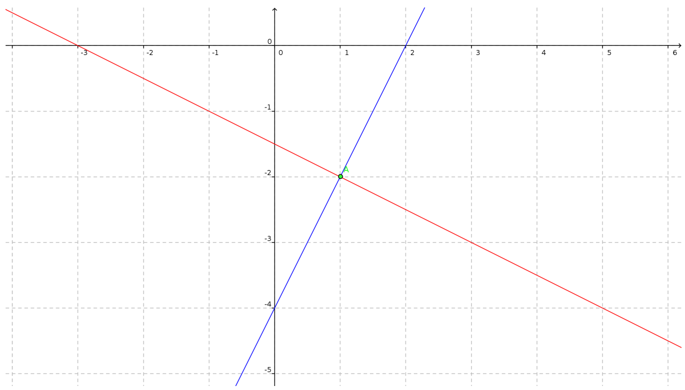
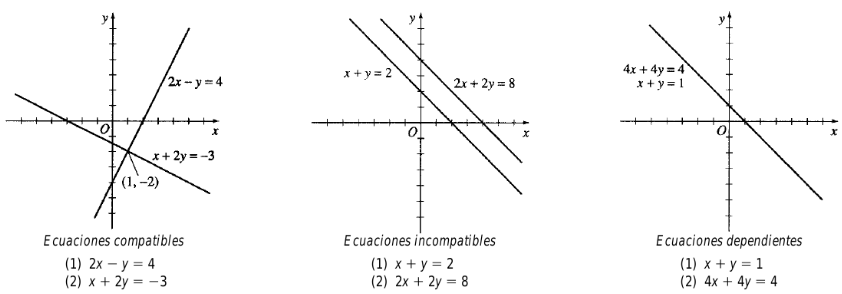


Figura 7:

$2x - y = 4\,, x + 2y = -3$

Tipos de sistemas



Determinantes

Determinantes de Segundo Orden

Definición

Definición 18.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Problema 166.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

Si consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad ... \tag{87}$$

...y definimos

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} ...$$

...entonces

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} \end{aligned} \tag{88}$$

Problema 167. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

Ejemplos

El método de solución de sistemas de ecuaciones linales, por medio de determinantes, se conoce como Regla de Cramer.

Problema 168. Resuelva el siguiente sistema por la Regla de Cramer

$$\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$$

Problema 169. Resuelva el siguiente sistema por la Regla de Cramer

$$\begin{cases} 3u + 2v = 18 \\ -5u - v = 12 \end{cases}$$

Sistemas Indeterminados

Un sistema de n ecuaciones con n incognitas tiene una única solución si y solo si su determinante principal $\Delta \neq 0$.

En este caso, decimos que el sistema es consistente.

Si $\Delta = 0$, entonces o bien existen multiples soluciones, o bien no existe alguna en absoluto.

En cualquier caso, decimos que el sistema es inconsistente.

Determine si

$$\begin{cases} 5x - 2y = 10 \\ 10x - 4y = 20 \end{cases}$$

es consistente; y de no ser el caso, explique que sucede con las soluciones.

Determine si

$$\begin{cases} 5x + 3y = 15 \\ 10x + 6y = 60 \end{cases}$$

es consistente; y de no ser el caso, explique que sucede con las soluciones.

Ejemplos

Problema 170.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$$

Problema 171.

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 3 \\ 2x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

Problema 172.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 3 \\ 6y - 6x &= 1 \end{aligned}$$

Problema 173.

$$\begin{aligned} 5y &= 3 - 2x \\ 3x &= 2y + 1 \end{aligned}$$

Problema 174.

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{3} + \frac{y+1}{6} &= 2 \\ \frac{x+3}{4} - \frac{2y-1}{2} &= 1 \end{aligned}$$

Fracciones parciales

La técnica de fracciones parciales se utiliza para integrar funciones racionales, es decir, aquellas de la forma

$$\frac{N(x)}{D(x)},$$

donde N, D son polinomios.

Por simplicidad, supondremos que

1. El coeficiente líder de $D(x)$ es igual a 1.
2. El grado de $D(x)$ es mayor que el de $N(x)$.

Sin embargo, ninguna de estas dos condiciones son esenciales.

Problema 175.

$$\int \frac{2x^3}{5x^8+3x-4}dx = \frac{1}{5}\int \frac{2x^3}{x^8+\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}}$$

Problema 176.

$$\frac{2x^5+7}{x^2+3} = 2x^3-6x+\frac{18x+7}{x^2+3}$$

Definición 19. Un polinomio es irreducible si no se puede expresar como el producto de dos polinomios de grado menor.

1. Todo polinomio lineal es irreducible
2. Un polinomio cuadrático

   $$g(x) = ax^2+bx+c,\; a \neq 0$$

   es irreducible si y solo $b^4-4ac<0$.

Problema 177. Verifique que

1. x^2+4 es irreducible;
2. x^2+x-4 es reducible.

Teorema 9. *Todo polinomio cuyo coeficiente líder sea igual a 1 se puede expresar como producto de factores lineales, o factores cuadráticos irreducibles.*

Problema 178. 1. $x^3-4x =$

2. $x^3+4x =$
3. $x^4-9 =$
4. $x^3-3x^2-x+3 =$

Método de Fracciones Parciales

Caso I. $D(x)$ es producto de factores lineales distintos

Problema 179. Resuelva

$$\int \frac{dx}{x^2-4}$$

Problema 180. Resuelva

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x}$$

Regla General para Caso 1

El integrando se representa como una suma de términos de la form $\dfrac{A}{x-a}$, para cada factor $x-a$, y A una constante por determinar.

Caso 2. $D(x)$ es producto de factores lineales repetidos.

Problema 181. Encuentre

$$\int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}$$

Problema 182.

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3(x-2)^2}$$

Regla General para el Caso 2.

Para cada factor $x-c$ de multiplicidad k, se utiliza la expresión

$$\frac{A_1}{x-r}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+...+\frac{A_k}{(x-r)^k}.$$

Caso 3. Factores cuadráticos irreducibles distintos, y lineales repetidos

A cada factor irreducible x^2+bx+c de $D(x)$ le corresponde el integrando

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}.$$

Problema 183. Encuentre

$$\int \frac{(x-1)dx}{x(x^2+1)(x^2+2)}$$

Caso IV. Factores cuadráticos irreducibles repetidos

A cada factor cuadráticos irreducible x^2+bx+c de mutiplicidad k le corresponde el integrando

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{A_i x+B_i}{(x^2+bx+c)^i}$$

Problema 184. Encuentre

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx.$$

Factores lineales sin repetición

Problema 185. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$\frac{-29\,x+143}{2\,x^2-22\,x+56} \tag{89}$$

$$\frac{-29\,x+143}{2\,x^2-22\,x+56}=-\frac{9}{2\,(x-4)}-\frac{10}{x-7}$$

Problema 186. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$\frac{-10\,x-30}{7\,x^2+4\,x-3} \tag{90}$$

$$\frac{-10\,x-30}{7\,x^2+4\,x-3}=-\frac{24}{7\,x-3}+\frac{2}{x+1}$$

Problema 187. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$\frac{171\,x+175}{15\,x^2+38\,x+7} \tag{91}$$

$$\frac{171\,x+175}{15\,x^2+38\,x+7}=\frac{22}{5\,x+1}+\frac{21}{3\,x+7}$$

Factores lineales con repetición

Problema 188. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$\frac{-10\,x+109}{x^2-20\,x+100} \tag{92}$$

$$\frac{-10\,x+109}{x^2-20\,x+100}=-\frac{10}{x-10}+\frac{9}{(x-10)^2}$$

Problema 189. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$\frac{80\,x+31}{256\,x^2+96\,x+9} \tag{93}$$

$$\frac{80\,x+31}{256\,x^2+96\,x+9}=\frac{5}{16\,x+3}+\frac{16}{(16\,x+3)^2}$$

Problema 190. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$\frac{30\,x-14}{25\,x^2-20\,x+4} \tag{94}$$

$$\frac{30\,x-14}{25\,x^2-20\,x+4}=\frac{6}{5\,x-2}-\frac{2}{(5\,x-2)^2}$$

Espacios Vectoriales

Definición y ejemplos

Hasta ahora hemos considerado a los vectores como elementos de un espacio

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n | x_k \in \mathbb{R})\},$$

por ejemplo vectores en el plano $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ o en el espacio $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$. En cada caso, teníamos una suma entre vectores y una multiplicación por *escalares,* es decir, número reales.

Problema 191. Si $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ son vectores en $\mathbb{R}^2$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

mientras que

$$\alpha(u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2).$$

En este caso, la suma tiene las siguientes propiedades:

1. (Cerradura) $u + v = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, es un vector en $\mathbb{R}^2$,

2. (Asociatividad) Si $w = (w_1, w_2)$ es otro vector en $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{aligned}(u + v) + w &= ((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) + (w_1, w_2) \\ &= (u_1, u_2) + ((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) \\ &= u + (v + w),\end{aligned}$$

3. (Conmutatividad) $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2) = v + u$

4. (Existencia de un elemento neutro) $u + \vec{0} = (u_1, u_2) + (0, 0) = (u_1, u_2) = u$, y de la misma forma $\vec{0} + u = u$.

5. (Inversos aditivos) Para $u = (u_1, u_2)$, definimos

$$-u = (-u_1, -u_2),$$

   y este elemento satisface que

$$u + (-u) = (-u) + u = 0.$$

La multiplicación por escalares satisface las siguientes propiedades

1. αu es de nuevo un vector en $\mathbb{R}^2$,
2. $1u = 1(u_1, u_2) = (1 \cdot u_1, 1 \cdot u_2) = u$,
3. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u_1, \beta u_2) = \alpha(\beta u)$.

Finalmente, la suma de vectores y la multiplicación por escalares estan relacionadas por las siguiente leyes distributivas.

1. $(\alpha + \beta)u = ((\alpha + \beta)u_1, (\alpha + \beta)u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2) + (\beta u_1, \beta u_2) = \alpha u + \beta u$,
2. $\alpha(u + v) = \alpha(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (\alpha(u_1 + v_1), \alpha(u_2 + v_2)) = \alpha(u_1, u_2) + \alpha(v_1, v_2) = \alpha u + \alpha v$.

Problema 192 (†)**.** Verificar que las mismas propiedades se cumplen para $\mathbb{R}^3$, usando la suma de vectores y multiplicación por escalares conocida.

Estas propiedades se cumplen para muchos y muy diferentes conjuntos, donde tenemos una operación suma entre sus elementos y podemos definir una multiplicación por números reales. De hecho, estos conjuntos son los objetos de estudio en el álgebra lineal.

Definición 20. Sea V un conjunto, con una operación $+ : V \times V \to V$ y una operación $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$. Decimos que V es un *espacio vectorial (sobre* $\mathbb{R}$*)* si para todo $u, v, w \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades.

1. (Cerradura)$u + v \in V$,
2. (Asociatividad)$(u + v) + w = u + (v + w)$,
3. (Conmutatividad)$u + v = v + u$,
4. (Elemento neutro) Existe $0 \in V$, tal que para todo $u \in V : u + 0 = 0 + u = u$,
5. (Elementos inversos) Para todo $u \in V$, existe $-u \in V$, tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$.
6. $\alpha u \in V$,
7. $1u = u$,
8. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$,
9. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$,
10. $\alpha(u, v) = \alpha u + \alpha v$.

A los elementos del espacio vectorial V les llamamos *vectores.*

Observación 16. Cuando V es un espacio vectorial, con operación suma $+ : V \times V \to V$ y multiplicación por escalares $\cdot : \mathbb{R} \to V \to V$, por brevedad, decimos que $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

Ejemplos

Problema 193 (†)**.** Demuestre usando las propiedades anteriores, que en cualquier espacio vectorial se cumplen las siguientes propiedades.

1. $0u = \alpha 0 = 0$. (Note que el cero escrito a la izquierda denota el cero como número, mientras que escrito a la izquierda o solo, denota el elemento neutro del espacio vectorial.)
2. $-u = (-1)u$. *Sugerencia: Verifique que* $u + (-1)u = 0$.
3. Si $\alpha u = 0$, entonces o bien $\alpha = 0$ o $u = 0$.
4. El elemento neutro 0 es único.
5. Para cada vector u, su inverso aditivo $-u$ es único.

Problema 194. Compruebe que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales (reales), con las operaciones suma y multiplicación por escalar usuales.

1. $\{0\}$.
2. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = mx\right\}$ para $m \in \mathbb{R}$ fijo.
3. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz = 0\right\}$ para $a, b, c \in \mathbb{R}$.
4. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0\right\}$ para $a, b, c \in \mathbb{R}$.
5. $\{f | f : S \to \mathbb{R}\}$, donde S puede ser cualquier conjunto fijos.
6. $\mathbb{R}^{m \times n}$, es decir, el conjunto de matrices $m \times n$ con entradas reales.
7. El espacio de polinómios con coeficientes reales.
8. El espacio de polinómios con coeficientes reales de grado $\leq n$, para $n \in \mathbb{N}$ fijo.
9. $C[a, b]$, el espacio de funciones continuas en el intervalo $[a, b]$.
10. El conjunto de número reales *positivos* con las operaciones $u \oplus v := u, v$ y $\alpha \cdot u := u^\alpha$.

Problema 195. Considere la ecuación diferencial de segundo orden homogénea

$$y''(x) + a(x)y' + b(x)y(x) = 0$$

donde a, b son funciones continuas. Demuestre que el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial es un espacio vectorial bajo las reglas usuales para la suma de funciones y multiplicación por escalares.

Subespacios vectoriales

Problema 196. $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial con las operaciones

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

y

$$\alpha(u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2).$$

En la sección anterior consideramos el subjunto

$$L_c = \{(u_1, u_2) | u_2 = cu_1\} \subset \mathbb{R}^2$$

para c una pendiente fija, y verificamos que en efecto, con las mismas operaciones es un espacio vectorial.

Decimos entonces que L_c es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Definición 21. Si $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial y $W \subset V$ es también espacio vectorial, con las mismas operaciones $+, \cdot$ decirmos que W es un subespacio vectorial de V, y podemos escribir $W < V$.

En principio, si $W < V$, tendríamos que verificar todos loa axiomas de espacio vectorial para $(W, +, \cdot)$. Sin embargo, si en el espacio V, la suma es asociativa y conmutativa, también lo será en W. De igual manera, el elemento neutro $1 \in V$ de la multiplicación por escalares es el mismo en W, y se sigue cumpliendo la asociatividad de la multiplicación por escalares y las leyes de distribución.

Entonces, basta demostrar que se cumplen los restantes axiomas, a saber:

1. Si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$.
2. Si $\alpha \in \mathbb{R}, v \in W$, entonces $\alpha v \in W$.
3. $0 \in W$.
4. Si $u \in W$, entonces $-u \in W$.

Sin embargo, los dos últimos incisos se siguen del segundo. En efecto, si escogemos $\alpha = 0$ y cualquier $u \in W$, entonces

$$0 = 0 \cdot u \in W.$$

De igual manera, para cualquier $u \in W$, si escogemos $\alpha = -1$, entonces $-u = (-1)u \in W$.

Por último, verificar los dos axiomas restantes es equivalente a verificar que para todo $\alpha \in \mathbb{R}, u, v \in W$,

$$\alpha u + v \in W.$$

Propiedad 14. *Si* $W \subset V$, *entonces*

$$W < V \iff \forall \alpha \in \mathbb{R}, u, v \in W, \alpha u + v \in W.$$

Corolario 2. *Todo* $W < V$ *contiene a* $0 \in V$.

Definición 22. Si $W < V$, pero $W \neq \{0\}$ y $W \neq V$, entonces decimos que W es un subespacio (vectorial) propio.

Definición 23. Sean $u, v_1, ..., v_k$ vectores en un espacio vectorial V. Decimos que u es combinación lineal de $v_1, ..., v_k$ si existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ tales que:

$$u = \alpha_1 v_1 + ...\alpha_k v_k.$$

Definición 24. Sea V un espacio vectorial. El subespacio generado por un subconjunto $S = \{v_1, ..., v_k\} \subset V$ se define como

$$\text{gen}\,(S) = \{\alpha_1 v_k, ..., \alpha_k v_k | \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}\},$$

es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1, ..., v_k$.

Observación 17. $\text{gen}\,(S) < V$.

Problema 197. $u = (2, 0, 2)$ es combinación lineal de $v_1 = (1, 0, 1)$ y $v_2 = (0, 1, 1)$ porque $u = 2v_1 - v_2$.

De hecho,

$$\text{gen}\,(v_1, v_2) = \{(a, b, a + b) | a, b \in \mathbb{R}\} < \mathbb{R}^3$$

es el plano que contiene a estos dos vectores.

$(-1, -1, 1) \notin \text{gen}\,(v_1, v_2)$, porque no vive en este plano.

Ejemplos

Problema 198. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de vectores

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

en $\mathbb{R}^3$ son subespacios de $\mathbb{R}^3$?

1. $\{u | u_1 \geq 0\}$
2. $\{u | u_1 + 3u_2 = u_3\}$
3. $\{u | u_2 = u_1^2\}$
4. $\{u | u_1 u_2 = 0\}$
5. $\{u | a_2 \text{ es racional}\}$

Problema 199. Sea V el espacio vectorial (real) de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ¿Cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de V?

1. todas las funciones f tales que $f(x^2) = f^2(x)$
2. todas las funciones f tales que $f(0) = f(1)$
3. todas las funciones f tales que $f(3) = 1 + f(-5)$
4. todas las funciones f tales que $f(-1) = 0$

Problema 200. Sea W el conjunto de todos los vectores $(x_1, ..., x_5)$ que satisfacen

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 &= 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Mostrar que W es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$.

Problema 201 (†)**.** 1. Verificar que si $U, W < V$, entonces $U \cap W < V$.

2. Demostrar que si $U = \{u_1, ..., u_m\}$ y $W = \{w_1, ..., w_m\}$, entonces

$$U \cap W = \text{gen}\left(u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_m\right).$$

Problema 202 (†)**.** ▪ Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$. Mostrar que

$$W = \{\alpha u + \beta v | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} < \mathbb{R}^2.$$

- Mostrar que si u, v no son paralelos, entonces para cualquier $w \in \mathbb{R}^2$, podemos encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de manera que $w = \alpha u + \beta v$.

Problema 203 (†)**.** Sea A una matriz $m \times n$ con entradas reales. Demostrar que el conjunto de todas los vectores columna u de longitud n, tales que $Au = 0$ es un subespacio vectorial de todos los vectores columna $\mathbb{R}^n$.

Transformaciones lineales

Definición y ejemplos

Definición 25. Sean V, W espacios vectoriales. Decimos que $T : V \to W$ es una *transformación lineal* si para todos $\alpha \in \mathbb{R}, u, v \in V$ se cumple

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$ (T abre sumas)
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ (T saca escalares)

o de manera equivalente

$$T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v),$$

es decir, T *respeta la estructura de espacio vectorial.*

En el caso $V = W$, decimos que $T : V \to V$ es un operador y al conjunto de operadores en V lo denotamos por $L(V)$. En el caso $W = \mathbb{R}$, decimos que $T : V \to \mathbb{R}$ es un funcional en V.

Problema 204. Sea $a = [a_1, ..., a_n] \in \mathbb{R}^n$ fijo y definamos $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $T(u) = a \cdot u$. Entonces, T es una transformación lineal.

Problema 205. Sea $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ una matriz de dimensión $n \times m$, donde n indica el número de columnas y m el de renglones.

Si definimos $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T(u) = Au$, entonces T es una tranformación lineal. En otras palabras, cada matriz define una transformación lineal. Lo inverso también es cierto.

Sea

$$e_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

el vector columna con un 1 en la $k-$ésima posición y ceros en el resto, y sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces, $T(e_k) \in \mathbb{R}^m$ y digamos que es de la forma

$$T(e_k) = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}.$$

Si definimos $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ entonces $T(e_k) = Ae_k$, $k = 1, ..., n$. Por linealidad tanto de T como de A, obtenemos que $T(x) = Ax$, para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$.

Problema 206. Las siguientes transformaciones son lineales:

- $T : C^1[0,1] \to C^0[0,1]$,
$$T(f)(x) = f'(x).$$
- $T : C^0[0,1] \to \mathbb{R}$,
$$T(f) = \int_0^1 f(t)dt.$$
- $T : C^0[0,1] \to C^1[0,1]$,
$$T(f)(x) = C + \int_0^x f(t)dt,$$

donde $x \in [0,1]$ y $C \in \mathbb{R}$ es alguna constante.

Problema 207. Indique si la siguiente transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es lineal y de ser así, encuentre su representación matricial.

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix} \tag{95}$$

Solución. La prueba de que la transformación es lineal se deja al lector. Ahora bien,

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la representación matricial de T esta dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

□

Operadores en $\mathbb{R}^n$

Sean $T, S \in L(\mathbb{R}^n)$. La composición TS, es decir, $TS(x) = T(S(x))$ es de nuevo un operador y de hecho, si $B = [b_{ij}]$ es la matriz asociada a T como en el ejemplo 205 y $A = [A_{ij}]$ la asociada a S, entonces la matriz asociada a TS es $C = [c_{ij}]$ conjunto

$$c_{ij} = \sum_{k}^{n} b_{ik} a_{kj}.$$

Decimos que $C = BA$ es el producto de de B con A (es este orden), y esta composicion es asociativa.

El operador de T con S suma esta definido como $(T + S)(u) = T(u) + S(u)$, y de hecho tiene asociada la matriz

$$\begin{bmatrix} b_{ij} + a_{ij} \end{bmatrix}.$$

Dos operadores especiales en R^n son la *transformación cero* $0(x) = 0$ y la *identidad* $\mathrm{Id}(x) = x$.

Problema 208 (†)**.** Encuentre la matriz asociada a los operadores cero e identidad.

Podemos definir la multiplicación de operadores por escalares de la siguiente forma. $(\alpha T)(u) = \alpha T(u)$. De esta manera, con la operación suma entre operadores y esta multiplicación por escalares, resulta que $L(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial.

Finalmente, si para $P \in L(\mathbb{R}^n)$ existe $Q \in L(\mathbb{R}^n)$, de manera que $PQ = \mathrm{Id}$, decimos que P es *invertible* y que Q es el operador inverso de P. También podemos escribir Q como P^{-1}. De hecho, si A es la matriz asociada a P, entonces A^{-1} es la asociada a P^{-1}.

Ejemplos

Problema 209. Verificar que las siguientes transformaciones son lineales, y encontrar la representación matricial de cada una.

1. (Proyección sobre el plano)
$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. $$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ y+z \\ 2x-y-z \\ -x+y+2z \end{bmatrix}$$

3. $$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y+3z \\ 4x-2y+6z \\ -6x+3y-9z \end{bmatrix}$$

4. $$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y \\ 2y-4x \end{bmatrix}$$

5. $$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3x-y \end{bmatrix}$$

6. $$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y+3z \\ 6x-3y+9z \end{bmatrix}$$

7. $$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 2y-x \\ x+8y \end{bmatrix}$$

8. $$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x-3z \\ -y+5z \end{bmatrix}$$

9. $$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ -4x+2y \\ 8x+4y \end{bmatrix}$$

10.

$$T = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - z \\ -y + 2z \\ 15x - 2y - z \end{bmatrix}$$

Problema 210. Encuentre una expresión matemática para la transformación que rota un vector en el plano, con un ángulo ϕ en el sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj). Indique si esta transformación es lineal y de serlo, encuentre su representación matricial.
Sugerencia: Exprese el vector en coordenadas polares.

Núcleo e imagen

Definición 26. El *núcleo* de una transformación lineal $T : V \to W$, donde V y W son espacios vectoriales, es el conjunto

$$\ker(T) = \{v \in V | T(v) = 0\}.$$

La imágen de $T : V \to W$ es el conjunto

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W | \exists v \in V, T(v) = w\}.$$

Propiedad 15. $\ker(T) < V, \mathrm{Im}(T) < W$.

Demostración. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \ker(T)$, entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha u + v) &= \alpha T(u) + T(v) && \text{(Por linealidad de } T) \\ &= \alpha 0 + 0 && \text{(Porque } T(u) = T(v) = 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $\ker(T) < V$.

Ahora, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $w, w' \in \mathrm{Im}(T)$, entonces Existen $v, v' \in V$ tales que $T(v) = w, T(w') = v'$. Por lo cual,

$$\begin{aligned} \alpha w + w' &= \alpha T(v) + T(v') \\ &= T(\alpha v + v'). \end{aligned}$$

Como $\alpha v + v' \in V$, entonces $\alpha w + w' \in W$. □

Problema 211. Encontrar un conjunto de vectores que generen $\ker(T)$, para la tranformación lineal T dada por (95).

Solución. Supongamos que

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto equivale a resolver el sistema de ecuacuones

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ z - y &= 0 \\ 2x + 7y - 3x &= 0, \end{aligned}$$

que podemos reescribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

y utilizando Gauss-Jordan, se reduce a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es decir, tenemos dos ecuaciones con tres incognitas

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$

por lo que sustituyendo $y = z = t$, tenemos que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, es decir, todos los vectores en $\ker(T)$ son multiplos de

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De manera equivalente,

$$\ker(T) = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

□

Problema 212. Encontrar un conjunto de vectores que generen $\text{Im}(T)$, para la tranformación lineal T dada por (95).

Solución. Un vector en $\text{Im}(T)$ es de la forma,

$$\begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

por lo que $\mathrm{Im}(T)$ estaría generado por los vectores

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, por el ejercicio anterior, $w = 2u - v$, y por tanto

$$\begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix} = xu + yv + wz = (x + 2z)u + (y - z)v.$$

De hecho, para cualesquiera λ, μ, si escogemos una solución de las ecuaciones las ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda &= x + 2z \\ \mu &= y - z, \end{aligned}$$

podemos escribir

$$\begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix} = xu + yv + zw = \lambda u + \mu v.$$

Es decir,

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{gen}\,(u, v) = \mathrm{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \right).$$

□

Ejemplos

Problema 213. Encuentre un conjunto de vectores, con el mínimo número de elementos posible, que generen $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ para cada una de las transformaciones lineales del ejercicio 209.

Bases y dimensión

Definición 27. Sea V un espacio vectorial y $B = \{u_1, ..., u_k\} \subset V$. Decimos que B es unconjunto *linealmente independiente* si para cualesquiera $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$,

$$c_1 u_1 + ... + c_k u_k = 0 \Rightarrow c_1 = ... = c_k = 0,$$

es decir, la única relación lineal entre los elementos de B es la trivial. En otro caso, decimos que B es *linealmente dependiente.*

Definición 28. Decimos que $B \subset V$ es una base de V si:

1. $V = \operatorname{gen}(B)$ y
2. B es linealmente independiente.

Observación 18. Es decir, B es un base si cualquier $v \in V$ es una combinación lineal de sus elementos, no falta información, y ninguno de los elementos de la base es combinación lineal de los restantes, es decir, no sobra información. Una vez que tenemos una base, toda lo que necesitamos saber sobre el espacio vectorial se puede obtener a partir de los elementos de la base.

Propiedad 16. *Toda base de un espacio vectorial tiene el mismo número de elementos.*

Definición 29. 1. Si $B = \{u_1, ..., u_n\}$ es una base de V, decimos que n es la *dimensión* de V y escribimos $\dim V = n$.

2. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal decimos que $\dim(\ker T)$ es la *nulidad* de T y la denotamos por $\operatorname{nul}(T)$.
3. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal decimos que $\dim(\operatorname{Im} T)$ es el rango de T y la denotamos por $\operatorname{ran}(T)$.

Determinar si un conjunto forma una base de $\mathbb{R}^n$ puede ser bastante laborioso. Sin embargo, las siguientes dos proposiciones, que se presentan sin prostración, sirven como criterios avanzados para determinar si un conjuntos es base.

Propiedad 17. *Si $n = \dim V$, cualquier conjunto $B \subset V$ linealmente independiente con n elementos es una base de V.*

Propiedad 18. $B = \left\{ \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,n} \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{bmatrix} \right\}$ *es un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ si y solo si*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Problema 214. Determine si

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es base de $\mathbb{R}^2$.

Solución. Sabemos que

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathbb{R}^2$. Entonces $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Pero como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

entonces

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es un conjunto de 2 vectores *linealmente independientes*. Por tanto, B' también es una base de $\mathbb{R}^2$. $\square$

Problema 215. Encuentre una base para $\ker T$ y otra para $\operatorname{Im} T$, para la transformación definida en el ejercicio de muestra 95. Indique cuál es la dimensión de cada espacio.

Solución. Como ya vimos en el ejercicio de muestra 211,

$$\ker(T) = \operatorname{gen}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Consideremos la ecuación

$$c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

es decir

$$\begin{bmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La única solución es $c = 0$ y por tanto

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es un conjunto linealmente independiente.

Por tanto, B es una base de $\ker T$ y $\operatorname{nul}(T) = 1$.

De manera similar, en el ejercicio de muestra 212,

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_2 \\ 2c_1 + 7c_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow c_1 = c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$

es un conjunto linealmente independiente, y por tanto una base de $\mathrm{Im}(T)$. Entonces $\operatorname{ran}(T) = 2$.

□

Finalmente, enunciaremos una de las proposicones importantes en nuestro curso. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, tenemos ls siguiente relación entre las dimensiones de $V, \ker T$ e $\operatorname{Im} T$.

Propiedad 19 (Teorema de la dimensión)**.**

$$\dim V = \operatorname{nul}(T) + \operatorname{ran}(T).$$

Ejemplos

Problema 216. Determine si el conjunto E es base del espacio vectorial V.

1. $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^2,$
2. $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^2,$
3. $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^3.$

Problema 217. Para cada una de las transformaciones lineales $T : V \to W$, del ejercicio 209, encuentre

1. Una base de $\ker T$,
2. Una base de $\operatorname{Im} T$,
3. $\operatorname{nul}(T)$,
4. $\operatorname{ran}(T)$,

y verifique la afirmación del teorema 19.

Coordenadas y cambios de base.

Coordenadas

Si $E = \{e_1, ..., e_n\}$ es base de un espacio vectorial V, entonces todo vector $v \in V$ se puede escribir de la forma

$$v = v_1 e_1 + ... + v_n e_n. \tag{96}$$

Esto es cierto para cualquier otro conjunto que genere V. Lo importante de una base es que, debido a la independencia lineal de E, esta manera de escribir el vector es *única.*

Supongamos que podemos escribir $v = c_1 e_1 + ... + c_n e_n$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= v - v \\ &= (v_1 e_1 + ... + v_n e_n) - (c_1 e_1 + ... + c_n e_n) \\ &= (v_1 - c_1) e_1 + ... + (v_n - c_n) e_n. \end{aligned}$$

Como E es linealmente independiente, entonces $v_1 - c_1 = ... = v_n - c_n = 0$. Es decir,

$$v_1 = c_1, ..., v_n = c_n.$$

En otras palabras, los escalares $v_1, ..., v_n$ en la expresión (96) es *única.*

Para simplificar la expresión (96) necesitamos el concepto de orden de una base.

Definición 30. Una base ordenada $(e_1, ..., e_n)$ es una sucesión de vectores en V tal que $\{e_1, ..., e_n\}$ es una base.

Dos bases ordendas $(e_1, ..., e_n), (f_1, ..., f_n)$ son iguales si y solo si

$$e_1 = f_1, ..., e_n = f_n.$$

Observación 19. Si intercambiamos un par de elementos de una base ordenada obtendremos una base ordenada distinta, aunque como conjuntos sean diferentes.

Problema 218.

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

y

$$\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

son dos bases ordenadas distintas de $\mathbb{R}^2$.

Si consideramos E como la base ordenada $(e_1, ..., e_n)$ entonces, la expresión (96) se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ ... \\ v_n \end{bmatrix}_E .$$

Decimos que $v_1, ..., v_n$ son las cordenadas de v en la base E.

Problema 219. Si consideramos la base ordenada

$$E = (\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},)$$

de $\mathbb{R}^2$, entonces

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_E .$$

En cambio, si consideramos

$$F = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

entonces

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}_F .$$

Definición 31. La base

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

de $\mathbb{R}^n$ se conoce como *base canónica.*

Cambios de base

Supongamos que tenemos dos bases $B = (e_1, ..., e_n)$ y $F = (f_1, .., f_n)$ de $\mathbb{R}^n$. ¿Como podemos comparar las cordenadas de un vector $v \in \mathbb{R}^n$ en ambas bases? Digamos que sus coordenadas son

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_F .$$

Para realizar la comparación, digamos que las coordenadas de cada elemento de la base F en la base B son

$$f_k = \begin{bmatrix} f_{k,1} \\ \vdots \\ f_{k,n} \end{bmatrix}_B .$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_F &= w_1 f_1 + ... + w_n f_n \\
&= w_1 \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ \vdots \\ f_{1,n} \end{bmatrix}_B + ... + w_n \begin{bmatrix} f_{n,1} \\ \vdots \\ f_{n,n} \end{bmatrix}_B \\
&= \begin{bmatrix} w_1 f_{1,1} + ... + w_n f_{n,1} \\ \vdots \\ w_1 f_{1,n} + ... + w_n f_{n,n} \end{bmatrix}_B ,
\end{aligned}$$

y como las coordenadas en una base son únicas, tenemos que

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} w_1 f_{1,1} + ... + w_n f_{n,1} \\ \vdots \\ w_1 f_{1,n} + ... + w_n f_{n,n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f_{1,1} & ... & f_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n,1} & ... & f_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Definición 32.

$$P_{F,B} := \begin{bmatrix} f_{1,1} & ... & f_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n,1} & ... & f_{n,n} \end{bmatrix}$$

se conoce como *matriz de paso* de F a B. También decimos que es la matriz cambio de base de F a B.

Así como podemos cambiar las coordenadas de la base F a la base B, podemos aplicar el mismo procedimiento para encontrar la matriz de paso de B a F. Sin embargo, al ser el procedimiento inverso, basta encontrar la matriz inversa. En otras palabras.

Propiedad 20. $P_{B,F} = P_{F,B}^{-1}$.

Observación 20. El hecho de que $P_{F,B}$ sea invertible se debe a que esta formada por los vectores columna que son las coordenadas de cada elemento de la base F en términos de B. Estos vectores generen todo $\mathbb{R}^n$, que es equivalente a que la matriz $P_{F,B}$ sea invertible.

Problema 220. 1. Verifique que

$$F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

es una base de $\mathbb{R}^3$.

2. Si denotamos por E la base estandar de $\mathbb{R}^3$, encuentre las matrices de paso $P_{F,E}$ y $P_{E,F}$.

Solución. Por la proposición 17, basta verificar que F es un conjunto linealmente independiente. Ahora bien, por la proposición 18, basta verificar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aunque esto lo podemos hacer *a mano*, usaremos `WxMaxima` para hacer dichas cuentas. Primero introducimos la matriz, a partir de la cual calcularemos el determinante y la denotaremos por P.

```
(%i1)  P: matrix(
        [1,0,1],
        [0,-2,0],
        [0,0,1]
       );
```

$$(\%o1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posteriormente, calculamos su determinante.

```
(%i2)  determinant(%);
```

$$(\%o2) \quad -2$$

y concluimos que F es una base.

Note que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

estan ya dados en terminos de la base canónica E y por tanto

$$P_{F,E} = P.$$

Por la proposición 20, sabemos que $P_{E,F} = P^{-1}$ y usando nuevamente `WxMaxima`, calculamos esta matriz inversa.

```
(%i3)  invert(P);
```

$$(\%o3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Ejemplos

Problema 221. Encuentre las matrices de paso $P_{F,E}$ y $P_{E,F}$ para los siguientes casos.

1. E la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$,
2. E la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$
3. E la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Problema 222. Encuentre las coordenadas de los siguientes vectores v, en las bases ordendas F indicadas. Utilice el resultado en el ejercicio 221.

1. $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$,
2. $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$
3. $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Problema 223. Encuentre las coordendas de los elementos de la base canonica de V en terminos de las bases ordenadas F indicadas. Utilice el resultado en el ejercicio 221.

1. $V = \mathbb{R}^2$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$,
2. $V = \mathbb{R}^2$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$
3. $V = \mathbb{R}^3$, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Teoría espectral

Valores propios

Como hemos visto, hacer cálculos que involucren matrices, por ejemplo multiplicar una matriz por un vector, puede ser complicados por la cantidad de operaciones involucradas. En cambio, multiplicar por escalares es muy sencillo. ¿Podríamos encontrar alguna manera de convertir las operanciones con matrices en operaciones con escalares? En este capítulo trataremos de responder esta pregunta.

Definición 33. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y A su representación matricial en la base estandar. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$ tales que

$$Av = \lambda v,$$

decimos que λ es un valor propio y v un λ-vector propio.

Supongamos que $F = (v_1, ..., v_n)$ es una base ordenada de vectores propios de $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$Av_k = \lambda_k v_k,\ k = 1, ...n.$$

Entonces, la representación matricial de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en la base F es

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

es decir, una matriz con los valores propios en la diagonal y ceros en otras partes.

Si expresamos un vector $v \in \mathbb{R}^n$ en esta base, tendría la forma

$$v = c_1 v_1 + ... + c_n v_n,$$

y aplicando la transformación, o de manera equivalente, multiplicando por B, obtendriamos

$$T(v) = c_1 \lambda_1 v_1 + ... + c_n \lambda_n v_n,$$

es decir, simplemente haríamos operaciones con escalares. Por esta razón, es importante estudiar los valores y vectores propios asociados a operadores en $\mathbb{R}^n$, es decir, transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Esta teoría se conoce como *espectral.*

Valores propios

El primer paso para desarrollar la teoría espectral de un operador es determinar sus valores propios. Antes, recordemos el siguiente criterio para determinar si un operador es invertible.

Propiedad 21. *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, y A una representación lineal en alguna base de $\mathbb{R}^n$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *A es invertible,*
2. *$Av = 0$ si y solo si $v = 0$,*
3. $\det(A) \neq 0$.

La misma proposición se puede reescribir de la siguiente manera.

Propiedad 22. *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, y M una representación lineal en alguna base de $\mathbb{R}^n$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *M no es invertible,*
2. *Existe un vector $v \neq 0$, tal que $Mv = 0$,*
3. $\det(A) = 0$.

Supongamos que λ es un valor propio de A y v un λ-vector propio. Como $v = Iv$, entonces

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda Iv \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0.$$

Es decir, $v \in \ker(T)$ aunque $v \neq 0$. Esto quiere decir que $A - \lambda I$ no es invertible y por tanto,

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Este es el criterio que buscabamos para localizar los valores propios.

Definición 34. Si $A \in M_{n\times n}$, entonces

$$p(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A)$$

se conoce como *polinomio característico* de A.

Observación 21. λ es valor propio de A si y solo si es raíz de $p(\lambda)$.

Problema 224. Encuentre los valores propios, de la transformación lineal con representación matricial

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{97}$$

Solución. Primero determinamos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)^2. \end{aligned}$$

Los valores propios de A son las raices de $p(\lambda) = (x-1)(x-2)^2$, es decir,

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

Podemos verificar nuestra respuesta en `WxMaxima`, de la siguiente manera:

Primero, introducimos la matriz.

```
(%i1)  matrix(
        [3,1,-1],
        [2,2,-1],
        [2,2,0]
       );
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Posteriormente, calculamos el polinomio característico. En este caso, `WxMaxima` usará la definición

$$p(x) = \det\left(A - xI\right).$$

```
(%i2)  charpoly(%, x), expand;
```

(%o2) $-x^3 + 5\,x^2 - 8\,x + 4$

Finalmente, factorizamos el polinomio.

```
(%i8)  factor(%o2);
```

(%o8) $-(x-2)^2\,(x-1)$

Otra manera, más directa, es encontrar directamenta las raices del polinomio

```
(%i13) realroots(%o2);
```

(%o13) $[x = 2, x = 1]$

Otra manera de obtener los valores propios es la siguiente:

```
(%i21) eigenvalues(A);
```

(%o21) $[[1,2],[1,2]]$ En este caso, el primer arreglo nos dice los valores propios, mientras que el segundo, nos dice sus *multiplicidades algebráicas*, que es el exponente que tienen asociado en el polinomio característico. □

Ejemplos

Problema 225. Encuentre los valores propios de las siguientes matrices. Verifique sus resultados usando `WxMaxima`.

1. $$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

3. $$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

4. $$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

5. $$A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

6. $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

7. $$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

8. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

9.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

10.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vectores propios

Definición 35. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal y A su representación matricial, en la base estandar, y λ un valor propio de A, entonces cualquier vector $v \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga la ecuación

$$Av = \lambda v$$

se conoce como λ-vector propio.

Al conjunto de λ-vectores propios se le conoce como λ-espacio propio y se denota por E_λ.

Observación 22. En el caso anterior, tenemos que

$$E_\lambda = \ker (A - \lambda I) .$$

Problema 226. Encuentre el espacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 2$ de la matriz A definida en (97).

Solución. Si

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_{\lambda_1},$$

entonces $(A - 2I) v = 0$, es decir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que se reduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x = z \\ z = 2y \end{cases} .$$

Escogiendo $z = 2t$, donde $t \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

Es decir $\ker(A-2I)$ esta generado por el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ y al consistir de un solo vector, este es linealmente independiente, y por tanto es una base. En resumen,

$$\ker(A-2I) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

□

Problema 227. Encuentre el espacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 1$ de la matriz A definida en (97).

Solución.

$$\ker(A-I) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

□

Para comprobar nuestros resultados, podemos usar `WxMaxima`. Primero, introducimos nuestra matriz.

```
(%i1)  matrix(
        [3,1,-1],
        [2,2,-1],
        [2,2,0]
       );
```

$$(\%o1)\quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Posteriormente, calculamos los vectores propios de la siguiente manera.

```
(%i2)  eigenvectors(%);
```

$(\%o2)\quad [[[1,2],[1,2]],[[[1,0,2]],[[1,1,2]]]]$

El primer arreglo $[1,2]$ nos dice los dos valores propios, mientras que el segundo $[1,2]$ nos dice su multiplicidad algebráica. El tercer arreglo $[1,0,2]$ es un vector propio de $\lambda = 1$, mientras que el último $[1,1,2]$ es uno asociado a $\lambda = 2$. Como explicamos anteriormente, cada uno de estos constituye una base de sus respectivos espacios propios.

Ejemplos

Problema 228. Encuentre los espacios propios de los diferentes valores propios de las matrices dadas en el ejercicio 225.

Diagonalización

Definición 36. $A \in M_n$ se dice que es *diagonalizable* si existe una base de $\mathbb{R}^n$ que consista de vectores propios de A.

Problema 229. Determine si la matriz A definida en (97) es diagonalizable.

Solución. Como vimos en las secciones anteriores, los valores propios de A son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$, con respectivos espacio propios

$$\ker(A - 2I) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

y

$$\ker(A - I) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Como cualquier otro vector propio es o bien multiplo de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ o bien de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, tendríamos a los más una conjuto de dos vectores propios linealmente independientes. Sin embargo, cualquier base de $\mathbb{R}^3$ debe tener exactamente 3 vectores propios linealmente independientes. Por tanto A no es diagonalizable.

Podemos comprobar este resultado usando `WxMaxima` de la siguiente manera.

Primero, introducimos la matriz de manera habitual.

```
(%i1)  A: matrix(
        [3,1,-1],
        [2,2,-1],
        [2,2,0]
       );
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Y posteriormente usamos el comando `nondiagonalizable`, siempre calculando primero los vectores propios de la matriz.

```
(%i4)  eigenvectors(A);
```

(%o4) $[[[1, 2], [1, 2]], [[[1, 0, 2]], [[1, 1, 2]]]]$

```
(%i5) nondiagonalizable;
```

(%o5) *true*

Si la respuesta es `true`, esto quiere decir que en efecto, tal matriz no es diagonalizable. En otro caso, obtenendremo `false`. □

¿Porqué decimos que una matriz es diagonalizable? Consideremos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, y una base

$$F = (v_1, v_2)$$

de valores propios. Como $T(v_1) = \lambda_1 v_1$, $T(v_a) = \lambda_2 v_2$ y en terminos de esta base

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_F, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_F,$$

entonces

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_F\right) = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_F = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix}_F$$

y de manera similar

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_F\right) = \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_F = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}_F.$$

Entonces, la representación matricial D de la transformación T en la base F estará formada por los dos vectores columna, que resultan de aplicar la transformación a cada elemento de la base, es decir,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Este mismo razonamiento, lo podemos aplicar a cualquier tranformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, si podemos obtener una base de vectores propios para su representación matricial A (en la base estandar o de hecho, en cualquier otra base), es decir, si A es diagonalizable.

En este caso, ¿cómo podemos relacionar las representaciones matriciales de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, en la base estandar y en una base de vectores propios? Denotemos por A a la primera y por D a la segunda, mientras que por $V = (\mathbb{R}^n, E)$ al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ en la base E estandar, mientra que $V' = (\mathbb{R}^n, F)$ en la de valores propios. Considere el diagrama **??**, donde P denota la matriz cambio de base $P_{F,E}$. Es claro que

$$AP = PD,$$

y por tanto, multiplicando por $P^{-1} = P_{E,F}$ por la izquierda en ambos lados de la ecuación,

$$D = P^{-1}AP.$$

En este caso, decimos que D es una matriz diagonal *semejante* a A. Para un repaso de cambios de base, consulte la sección II.

Problema 230. Determine si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

es diagonalizable y encuentre una matriz diagonal semejante.

Solución. Para encontrar los vectores propios, podemos proceder como en la sección II. Para hacer más eficientes los cálculos, usaremos `WxMaxima`. Primero, introducimos la matriz:

```
(%i1)  A: matrix(
        [3,2,4],
        [2,0,2],
        [4,2,3]
       );
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Después, encontramos los valores propios:

```
(%i2)  eigenvectors(A);
```

(%o2) $[[[8,-1],[1,2]],[[[1,\frac{1}{2},1]],[[1,0,-1],[0,1,-\frac{1}{2}]]]]$

La salida de la última instrucción quiere decir que $\lambda = 8$ es un vector propio, de multiplicidad 1 con vector propio

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

mientras que $\lambda_1 = -1$ es un vector propio, de multiplicidad 2 y por tanto, los siguientes dos vectores

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

son vectores propios, linealmente independientes asociados a $\lambda_2 = -1$.

Por lo tanto,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Introducimos esta matriz en `WxMaxima` y calculamos su inversa, a la que denotamos por Q.

```
(%i5) P: matrix(
        [1,1,0],
        [1/2,0,1],
        [1,-1,-1/2]
      );
```

$$(\%o5)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
(%i6) Q:invert(P);
```

$$(\%o6)\quad \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Finalmente, realizamos el calculo $P^{-1}AP$

```
(%i7) Q.A.P;
```

$$(\%o7)\quad \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

para verificar que, en efecto, la matriz resultante es diagonal, y en su diagonal estan ordenados los valores propios de A. □

Ejemplos

Problema 231. Determine si cada matriz A en el ejercicio 225 son diagonalizables, y en caso de serlo, encuentre

1. Una base F de vectores propios de A;
2. la matriz $P = P_{F,E}$ cambio de base, donde E es la base estandar del respectivo espacio vectorial;
3. la matriz diagonal D semejante a A, usando la matriz cambio de base P.

Parte III

Cálculo

Cálculo Diferencial

Límites y continuidad

Límites

Definición Diremos que la función tiene un *límite* L *cuando* x *aproxima* a si para cada $\epsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - l| < \epsilon \tag{98}$$

siempre que

$$0 < |x - a| < \delta. \tag{99}$$

En ese caso, escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{100}$$

Problema 232. Calcula los siguientes límites, trazando las gráficas correspondientes:

(I) $\lim_{x \to 1} \left(x^2 - 4x + 8\right)$

(II) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

(III) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$

Propiedades de límites Si $\lim_{x \to a} f_1(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} f_2(x) = L_2$, entonces

(I) $\lim_{x \to a} \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) = L_1 \pm L_2$

(II) $\lim_{x \to a} \left(f_1(x) f_2(x)\right) = L_1 L_2$.

(III) $\lim_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ *siempre y cuando* $L_2 \neq 0$.

Continuidad

Diremos que una función es *continua en el punto* $x = a$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{101}$$

Problema 233. $f(x) = x^2 - 4x + 8$ es continua en $x = 1$.

Problema 234. Sin embargo,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 6 & x = 2 \end{cases} \tag{102}$$

es *discontinua* en $x = 2$ y decimos que $x = 2$ es una *discontinuidad.*

Si $f(x)$ es continua en cada punto del intervalo $x_1 < x < x_2$, entonces diremos que es continua en dicho intervalo.

Propiedad 23. *Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en un mismo intervalo, entonces también lo son*

(I) $f(x) \pm g(x)$

(II) $f(x)g(x)$

(III) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *siempre que $g(x) \neq 0$ en dicho intervalo.*

Ejemplos

Problema 235. Demostrar por definición que $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ si

(I) $f(x) = x^2$

(II) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$

Problema 236. Demostrar que si $\lim_{x \to a} f_1(x) = l_1$ y $\lim_{x \to a} f_2(x) = l_2$, entonces

$$\lim_{x \to a} (f_1(x) + f_2(x)) = l_1 + l_2 \tag{103}$$

Problema 237. Mostrar que $f(x) = x^2$ es continua en $x = 2$, pero $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$ no lo es.

Derivadas

Definición La *derivada* de $y = f(x)$ en el punto x está definida como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{104}$$

donde $h = \Delta x$, $\Delta y = f(x+h) - f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ siempre que tal límite exista. Diferencial Si $\Delta x \approx 0$ y $f'(x)$ existe, entonces

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x. \tag{105}$$

El diferencial de x es un cambio *infinitesimal en tal variable.*

Definición 37. Si $y = f(x)$ y $f'(x)$ existe, el diferencial de y está dado por

$$dy = f'(x)dx \tag{106}$$

El proceso de encontrar las derivadas de una función se conoce como *diferenciación.*

Derivadas de alto orden

Definición 38.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \begin{cases} f(x) & n = 0 \\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x)\right) & n > 0 \end{cases} \tag{107}$$

Usualmente rescribimos

$$y' = \frac{dy}{dx} \tag{108}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} \tag{109}$$

En el caso $n > 2$, es más común escribir $y^{(n)}$ para denotar a la $n-$ésima derivada.

Interpretación geométrica Geométricamente, la derivada $f'(a)$ de una función $f(x)$, en un punto dado $x = a$, representa *pendiente de la recta tangente* a $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

Relación con continuidad Si una función tiene derivada en un punto, entonces es continua en dicho punto.

Sin embargo, el recíproco no es necesariamente cierto.

Fórmulas de derivación

En lo subsecuente, u, v representarán funciones de x, mientras que a, c, p representarán constantes.

Supondremos que las derivadas de u y v existe, es decir, que son diferenciables.

En particular, cuando $u = x$, las fórmulas se simplifican porque $\dfrac{du}{dx} = 1$.

$$
\begin{array}{llll}
1. & \frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} & 4. & \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2} \\
2. & \frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx} & 5. & \frac{d}{dx}u^p = pu^{p-1}\frac{du}{dx} \\
3. & \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} & 6. & \frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a
\end{array}
$$

Figura 8: Fórmulas usuales de derivadas

$$
\begin{array}{llll}
7. & \frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx} & 14. & \frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx} \\
8. & \frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} & 15. & \frac{d}{dx}\sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \\
9. & \frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx} & 16. & \frac{d}{dx}\cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \\
10. & \frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx} & 17. & \frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \\
11. & \frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx} & 18. & \frac{d}{dx}\cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \\
12. & \frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx} & 19. & \frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u \frac{du}{dx} \\
13. & \frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx} & 20. & \frac{d}{dx}\cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}
\end{array}
$$

Figura 9: Fórmulas usuales de derivadas

Ejemplos

Problema 238. Demostrar que si u y v son funciones diferenciables

(I)
$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

(II)
$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{du} + v\frac{du}{dx}$$

Problema 239. Demostrar que si $f(x)$ tiene una derivada en $x = a$, entonces $f(x)$ es continua en $x = a$.

Problema 240. Demostrar que si p es cualquier entero positivo, y u es una función diferenciable respecto a x, entonces

$$\frac{d}{dx}u^p = pu^{p-1}\frac{du}{dx} \tag{110}$$

Problema 241. Dando por hecho que

$$\lim_{b \to 0} \frac{\sin(b)}{b} = 1$$

demostrar que

(I)
$$\frac{d}{dx}\sin(u) = \cos(u)\frac{du}{dx}$$

(II)
$$\frac{d}{dx}\cos(u) = -\sin(u)\frac{du}{dx}$$

(III)
$$\frac{d}{dx}\tan(u) = \sec^2(u)\frac{du}{dx}$$

Problema 242. Demostrar que

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx} \tag{111}$$

Problema 243. Dando por hecho que

$$\lim_{b\to 0}(1+b)^{1/b} = e$$

demostrar que

(I)
$$\frac{d}{dx}\ln(u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

(II)
$$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

Problema 244. Encontrar

(I)
$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^4+2x}$$

(II)
$$\frac{d}{dx}\sin(\ln(x))$$

(III)
$$\frac{d}{dx}\ln\left(e^{3x}+\cos(2x)\right)$$

Problema 245. Si
$$x^2y - e^{2x} = \sin(y)$$
, encontrar y'.

Problema 246. Mostrar que si

$$y = 3x^2 + \sin(2x)$$

entonces
$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 12x^2 + 6$$

Problema 247. Encontrar los diferenciales de

(I)
$$y = x^2 - \ln x$$

(II)
$$y = e^{-2x} + \cos(3x)$$

Derivación implícita

Denotaremos por y' la derivada $\frac{dy}{dx}$.

Problema 248. Si

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

donde r es una constante, encontrar y'.

Solución. Por regla de la cadena, $(y^2)' = 2yy'$. Esto porque

$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Si derivamos el lado izquierdo de la ecuación, respecto de x, usando linealidad, obtenemos $2x + 2yy'$, mientras que si derivamos el derecho, ya que r^2 es contante, obtenemos cero e igualando, tenemos que

$$2x + 2yy' = 0.$$

Después de despejar obtenemos que

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

□

Observación 23. Observe que

$$x^2 + y^2 = r^2$$

es la ecuación de un círculo con centro en el origen con radio $r > 0$. Use `Sagemath` para graficar esta ecuación para un radio dado, por ejemplo, $r = 5$.

1. Compare las pendientes de las rectas tangente en (x, y) y $(-x, -y)$. ¿Que relación sobre estás dos rectas podemos deducir?

2. Compare las pendiente de la recta tangente en (x, y) y la recta que pasa por el origen y este punto. ¿Que relación sobre estás dos rectas podemos deducir?

Problema 249. Si

$$x^3 + y^3 = 6xy,$$

encontrar y'.

Solución. Por regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\left(y^3\right) = \frac{dy^3}{dy}\frac{dy}{dx},$$

es decir, $(y^3)' = \left(3y^2\right)\left(y'\right)$.

Además, por la regla de Leibniz,

$$(xy)' = x'y + xy' = y + xy'.$$

Entonces, derivando ambos lados de la ecuación, y usando linealidad, tenemos que

$$3x^2 + 3y^2y' = 6\left(y + xy'\right).$$

Despejando y', obtenemos

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

$\square$

Problema 250. Encuentre y' en términos de x, si $y = \arcsin(x)$, con imagen $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Solución En este caso $x = \sin(y)$. Por regla de la cadena obtenemos que

$$\frac{d}{dx}\sin(y) = \frac{d}{dy}\sin(y)\frac{dy}{dx} = \cos(y)y'.$$

Sin embargo,también sabemos que

$$\frac{d}{dx}\sin(y) = \frac{dx}{dx} = 1.$$

Por lo cual $1 = \cos(y)y'$, y entonces $y' = 1/\cos(y)$. Pero también sabemos que, por la manera en que escogemos el rango de y, $\cos(y) > 0$, y por tanto

$$\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Es decir

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Problema 251. Encuentre y'.

1. $\sin(x + y) = y^2\cos(x)$,
2. $x^4 + y^2 = 16$,
3. $y = \arccos(x)$,
4. $y = \arctan(x)$.

Derivación logarítmica

Recordemos que $y = e^x$ si y solo si $x = \ln(y)$, por lo cual $\ln(y)$ solamente está definido para $y > 0$. Dos propiedades fundamentales del logaritmo son las siguientes:

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$,
2. $\ln(a^b) = b\ln(a)$.

De esto se deduce, usando leyes de los exponentes, que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Por regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{d}{dy}\ln(y)\frac{dy}{dx},$$

es decir,

$$(\ln(y))' = \frac{y'}{y}.$$

De esto se deduce que

$$y' = y\left(\frac{d}{dx}\ln(y)\right). \tag{112}$$

Esta forma de derivar, conocida como *derivación logarítmica*, es especialmente útil si necesitamos derivar funciones que involucren multiplicación, división, exponenciación y radicales.

Problema 252. Si $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$, encontrar y'.

Solución Primero, escribimos $y = (x+1)(x-2)^{-1/2}$. Entonces

$$\ln(y) = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x-2),$$

de donde

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right).$$

Simplificando la última expresión obtenemos

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{x-3}{2(x+1)(x-2)},$$

de donde obtenemos

$$y' = \left(\frac{x+1}{(x-2)^{1/2}}\right)\left(\frac{x-3}{2(x+1)(x-2)}\right),$$

y simplificando obtenemos,

$$y' = \frac{x-3}{2(x-2)^{3/2}}.$$

De hecho, podemos obtener la fórmula para la derivada del cociente usando la fórmula (112). En efecto,

$$\ln\left(\frac{f}{g}\right) = \ln(fg^{-1}) = \ln(f) - \ln(g).$$

Derivando obtenemos

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}\right) = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Otro ejemplo del uso de la derivada es el siguiente. Supongamos que $y = x^\alpha$, con $x \neq 0$. Entonces $\ln(y) = \alpha\ln(x)$, y por tanto

$$\frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{\alpha}{x}.$$

Entonces $y' = (x^\alpha)\left(\alpha x^{-1}\right) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Por último, derivaremos $y = \ln|x|$. Observe que solamente necesitamos deducir el caso cuando $x < 0$, es decir $|x| = -x$. En esta situación $y = \ln(-x)$y por regla de la cadena, sustituyendo $u = -x$, $y = \ln(u)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}u' = \frac{u'}{u}.$$

Pero $u' = -1$, y por tanto $\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$. Entonces, siempre que $x \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x.}$$

Problema 253. Encuentre y' *usando derivación logarítmica.*

1. $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$,
2. $y = x^{\sqrt{(x)}}$,
3. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$,
4. $y = \dfrac{x}{1-\ln(x-1)}$
5. $y = x^x$,
6. $y = x^{\sin(x)}$,
7. $x^y = y^x$.

Problema 254. Use la definición de derivada para demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

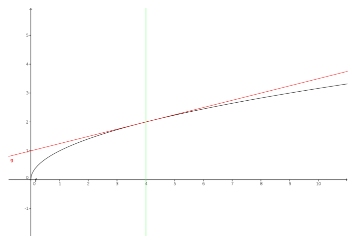


Figura 10: Linealización de $\sqrt{x}$ alrededor $a = 4$.

Linealización

Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $a \in \mathbb{R}$, es decir, existe la derivada $f'(a)$. Como ya hemos visto, esta derivada es la *pendiente* de la *recta tangente,* que es la mejor *aproximación lineal* de f en a.

La ecuación de la recta tangente se puede obtener a partir de la siguiente ecuación:

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

que es la ecuación de una recta que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente $f'(a)$.

Definición 39. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos la *linealización* de f alrededor de (o con pivote en) $a \in \mathbb{R}$ como

$$L_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

La linealización $L_{f,a}(x)$ se puede usar para hacer calcular de manera bastante precisa de valor de $f(x)$ para $x \approx a$.

Aproximación de la raíz cuadrada

Existen varios algoritmos para calcular la raíz de un número real. Sin embargo, podemos calcular raíces de números reales de manera muy precisa, usando la linealización.

Por ejemplo, calculemos $\sqrt{4.1}$. Primero determinamos la función a linealizar, en este caso, $f(x) = \sqrt{x}$. La derivada de f es

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Después, escogemos como pivote el punto $a = 4$. En este caso $f(4) = 2$ y $f'(4) = \frac{1}{4}$. De donde obtenemos

$$L(x) = f(4) + f'(4)(x - 4) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4).$$

Entonces

$$\sqrt{4.1} \approx L(4.1) = 2 + .25(4.1 - 4) = 2.025.$$

Si usáramos una calculador, obtendríamos $\sqrt{4.1} = 2.02484567313$.

El error absoluto entre este valor y el que obtuvimos de la aproximación es

$$|2.025 - 2.02484567313| \approx 1.54 \times 10^{-4}.$$

Problema 255. Use una aproximación lineal para calcular los siguientes valores. Posteriormente, use una calculadora para encontrar su valor y determine el error absoluto.

1. $(2.001)^5$
2. $e^{-0.015}$
3. $(8.06)^{2/3}$
4. $\frac{1}{1002}$
5. $\tan(44^o)$
6. $\sqrt{99.8}$

Optimización univariada

Definición 40. Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que:

1. f alcanza su *valor máximo* o *máximo global* en $c \in D$ si $f(c) \geq f(x)$, para toda $x \in D$;
2. f alcanza su *valor mínimo* o *mínimo global* en $c \in D$ si $f(c) \leq f(x)$, para toda $x \in D$.

Teorema 10 (Teorema del Valor Extremo)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f alcanza su máximo y su mínimo.*

Aunque el criterio anterior nos es útil al optimizar en intervalos compactos, es decir, de la forma $[a,b]$, en un caso general no siempre esto es cierto. Sin embargo, tenemos la siguiente noción de máximo (mínimo) en intervalos abiertos.

Definición 41. Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que:

1. f tiene un *máximo local* en $c \in D$ si existe un radio $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, de manera que $f(c) \geq f(x)$, para toda $x \in (c-\epsilon, c+\epsilon) \subset D$;
2. f tiene un *mínimo local* en $c \in D$ si existe un radio $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, de manera que $f(c) \leq f(x)$, para toda $x \in (c-\epsilon, c+\epsilon) \subset D$.

Observación 24. La condición de que exista si existe un radio $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, y que $x \in (c-\epsilon, c+\epsilon) \subset D$ se puede entender como que $x \in D$ este suficientemente cerca de $c \in D$. De manera informal, podemos decir que f alcanza un máximo local en c si $f(c) \geq f(x)$ para x suficientemente cercanos a c. Lo mismo se puede decir para un mínimo local. Note que todo máximo (mínimo) global es, en particular, un máximo (mínimo resp.) local.

Teorema 11 (Teorema de Fermat)**.** *Si $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alcanza un máximo o mínimo local en $c \in D$ y $f'(c)$ existe, entonces* necesariamente $f'(c) = 0$.

Observación 25. Debemos tener cuidado al usar el teorema de Fermat. Por ejemplo $f = |x|$ alcanza su mínimo en cero, pero en este punto la derivada no existe. En cambio, $f(x) = x^3$ tiene derivada igual a cero en $x = 0$, pero este punto no es máximo ni mínimo de la función.

Como podemos apreciar, los puntos más interesantes para nuestro estudio son aquellos donde la derivada no existe o si existe, es igual a cero.

Definición 42. Sea $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $c \in D$. Decimos que c es un punto crítico si $f'(c)$ no existe o si existe, $f'(c) = 0$.

Con los resultados anteriores, podemos describir un criterio para optimizar funciones continuas en compactos.

Propiedad 24. *Supongamos que*

1. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua,*

2. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *es diferenciable.*

Si f alcanza su máximo (o mínimo) global en c, entonces

1. $c = a$ *o* $c = b$, *o*

2. $f'(c) = 0$ *un punto crítico.*

En decir, para encontrar donde f alcanza sus valores extremos, basta probar en los extremos del intervalo o en los puntos críticos, que se encuentran en su interior.

Problema 256. Encuentre el máximo y el mínimo global de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ si $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$.

Solución

Como f es continua en $[-\frac{1}{2}, 4]$ y diferenciable en su interior $(-\frac{1}{2}, 4)$ (¿porqué?), podemos aplicar el criterio de la proposición 24.

Primero evaluamos en los extremos.

$$\begin{cases} f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} \\ f(4) = 17 \end{cases}$$

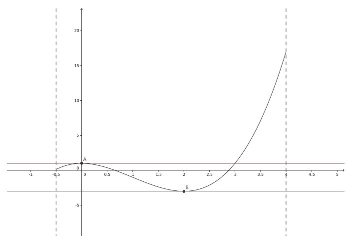


Figura 11: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Derivamos f y obtenemos los puntos críticos, resolviendo la ecuación

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0.$$

Los puntos críticos son $x = 0$ y $x = 2$. Sus respectivos valores son $f(0) = 1$ y $f(2) = -3$.

Finalmente, basta comparar los diferente valores obtenidos para concluir que el máximo global es 17 y se alcanza en $x = 4$, mientras que el mínimo global es -3 y se alcanza en $x = 2$.

Problema 257. Encuentre los máximos y mínimos absolutos en el intervalo indicado. Grafique.

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, $[-2, 3]$
2. $f(x) = \frac{x}{x^2-x+1}$, $[0, 3]$
3. $f(x) = t\sqrt{4-t^2}$, $[-1, 2]$
4. $\phi(t) = 2\cos(t) + \sin(2t)$, $[0, \frac{\pi}{2}]$
5. $f(x) = xe^{-x^2/8}$, $[-1, 4]$
6. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $[-1, 1]$
7. $f(x) = x - 2\arctan(x)$, $[0, 4]$

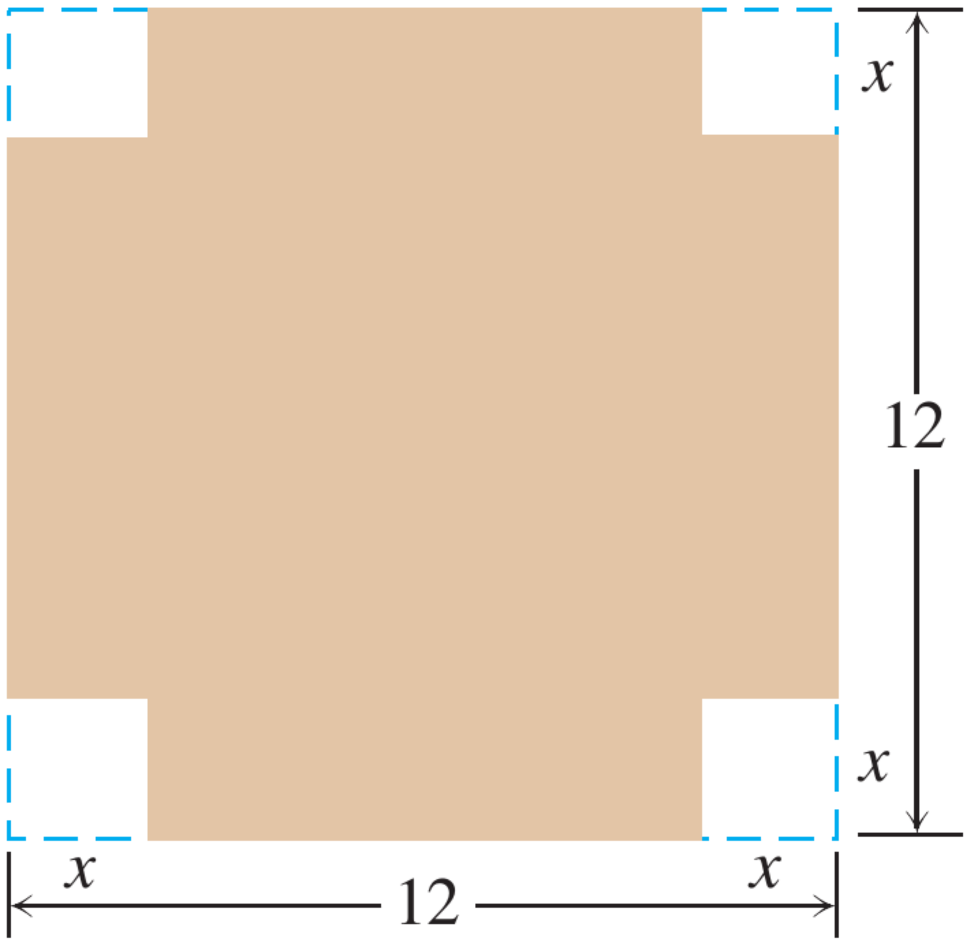
Optimización aplicada

Problema 258. Una caja abierta está hecha al cortar pequeños cuadrados congruentes, de las esquinas, de una hoja de lata de `12 in` por `12 in`, y doblando los lados hacía arriba.

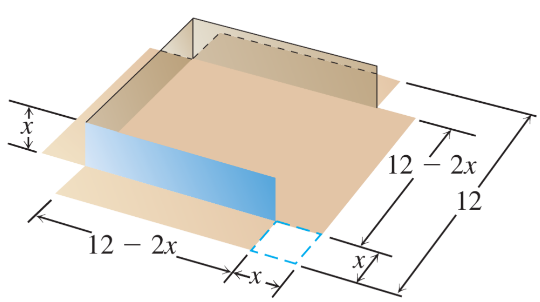
¿Qué tan largas deben ser las esquinas cortadas de las esquinas para hacer la caja tan grande como sea posible?

Se te ha pedido diseñar una lata de un litro, con la forma de un cilindro circular recto. ¿Qué dimensiones utilizarán el menor material posible?

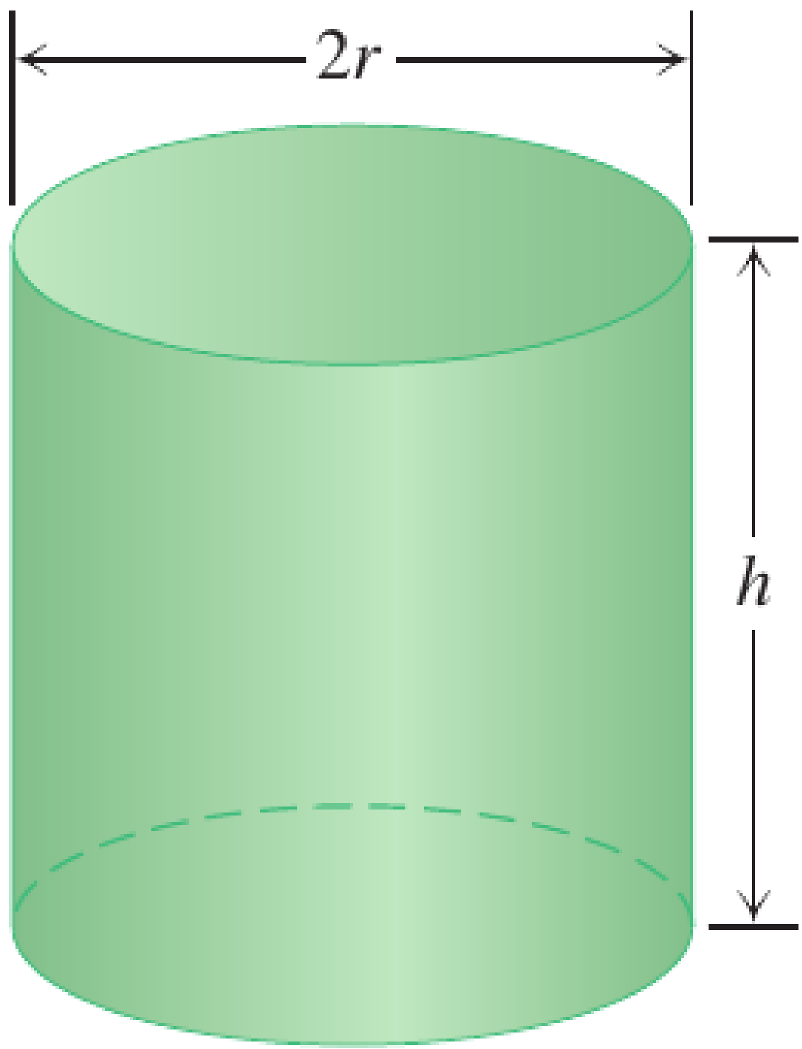
Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 2. ¿Cuál es el área más grande que se puede obtener, y cuáles son las dimensiones?

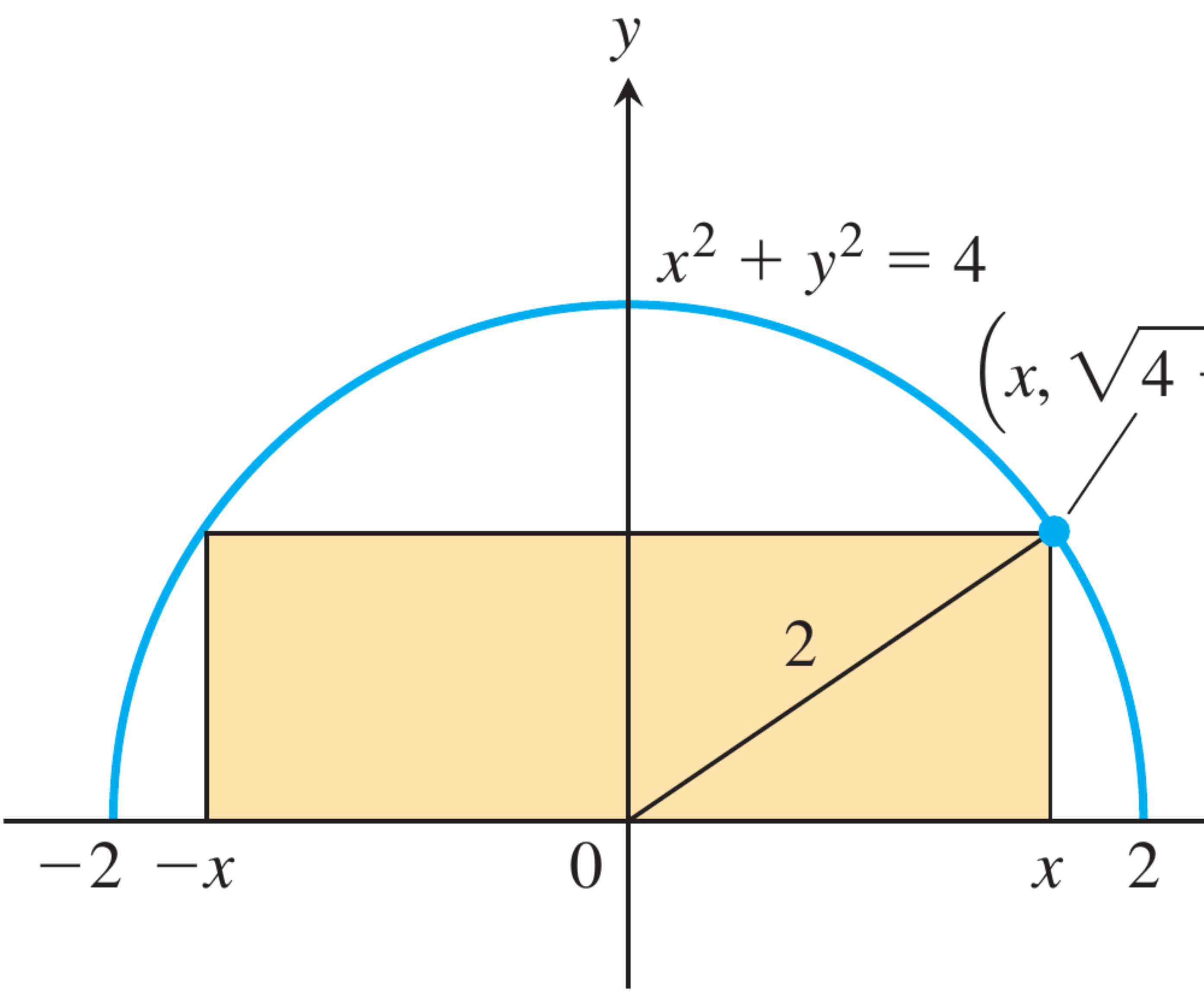


(a)



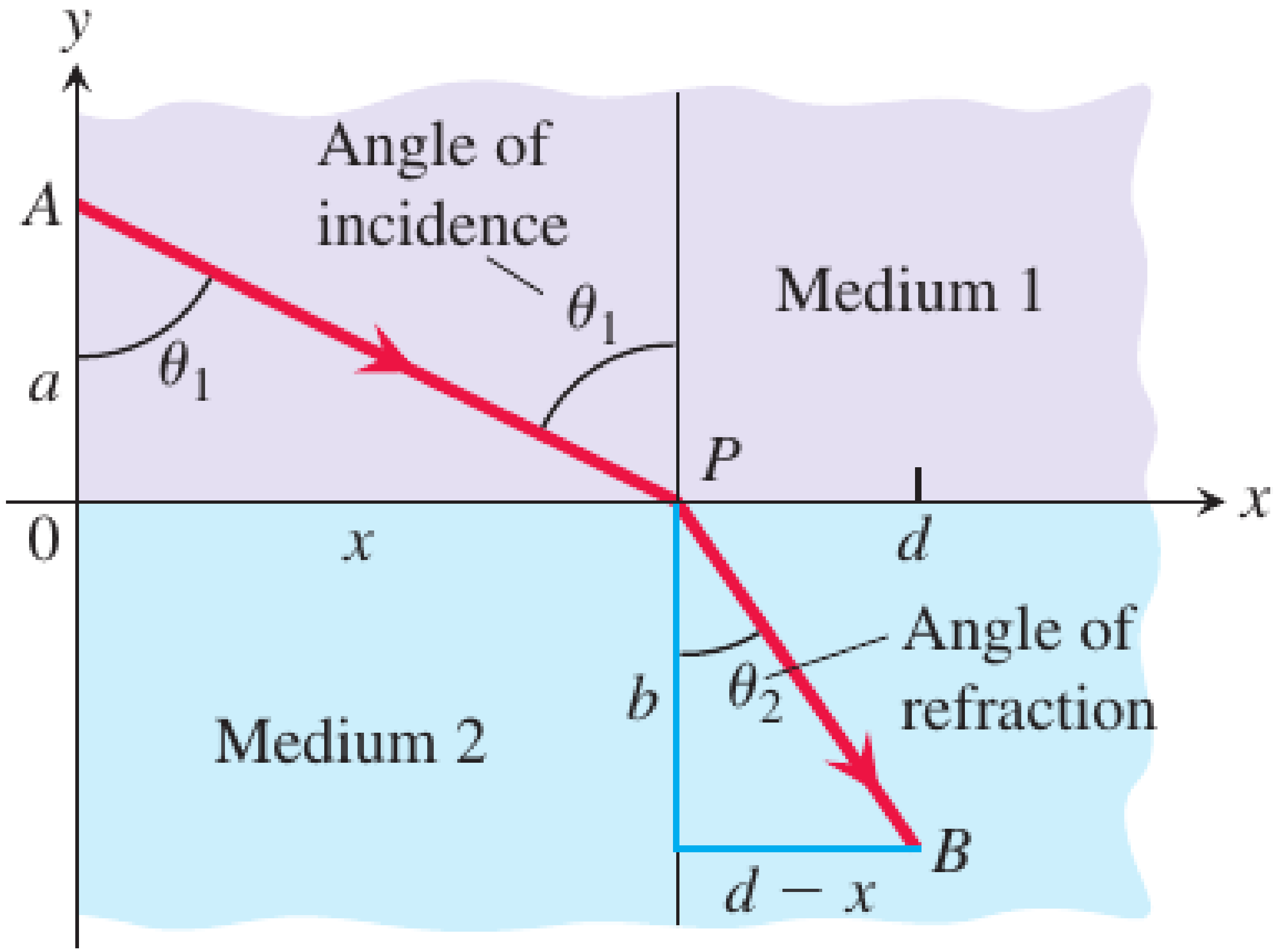
(b)


2r
h


y
$x^2 + y^2 = 4$
$(x, \sqrt{4}$
2
-2
$-x$
0
x
2

[Ley de Snell (refracción)] La velocidad de la luz depende del medio a través del cuál viaje, y es generalmente más lenta en medios más densos.

El *principio de Fermat* (de óptica) establece que la luz viaja fe un punto a otro a lo largo de un camino para el cual el tiempo es mínimo.



Describe el camino para el cuál un rayo de luz seguirá yendo de un punto A en un medio en el que la velocidad es c_1, a un punto B en un medio en el que la velocidad es c_2.

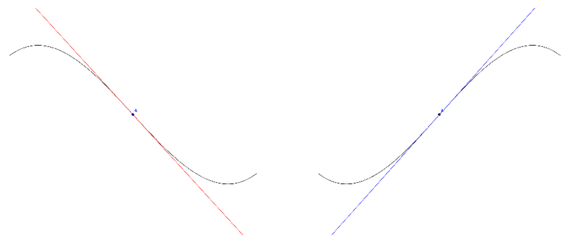


Figura 12: Puntos de inflexión

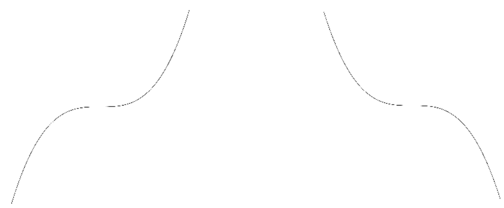


Figura 13: Puntos de silla

Análisis de Gráficas

Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función con segunda derivada. Podemos proceder de la siguiente manera para encontrar su gráfica.

1. Encontrar las raíces, es decir, los puntos c tales que $f(c) = 0$;

2. Encontrar los puntos críticos, es decir, los puntos c tales que $f'(c) = 0$;

   a) Si $f''(c) > 0$, entonces c es mínimo local,

   b) Si $f''(c) < 0$, entonces c es máximo local,

3. Encontrar los puntos de inflexión, es decir, los puntos c tales que $f'(c) = 0$.

Los puntos de inflexión pueden ser como en la figura 12. Si f'' cambia de negativa a positiva, la gráfica localmente como la de la izquierda, mientras que en el otro caso, luce como en la de la derecha.

Falta por caracterizar los puntos críticos c donde $f''(c) = 0$, es decir, que también son puntos de inflexión. Estos puntos se les conoce como *puntos de silla* y alrededor de estos, la gráfica se ve como alguna de las de la figura 13.

Problema 259. Grafique la función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x$.

Solución

Primero, resolvemos la ecuación

$$x^3 - x = 0,$$

y tenemos que las raíces de f son $x = -1, 0, 1$.

Después derivamos f:

$$f'(x) = 3x^2 - 1,$$

y resolvemos la ecuación $f'(c) = 0$.

Entonces, los puntos críticos de la función son $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Utilizamos el criterio **??** para decidir si son máximo o mínimos locales, o incluso, puntos de silla.

La segunda derivada de f es

$$f''(x) = 6x.$$

Como $f''(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 6\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0$, entonces

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

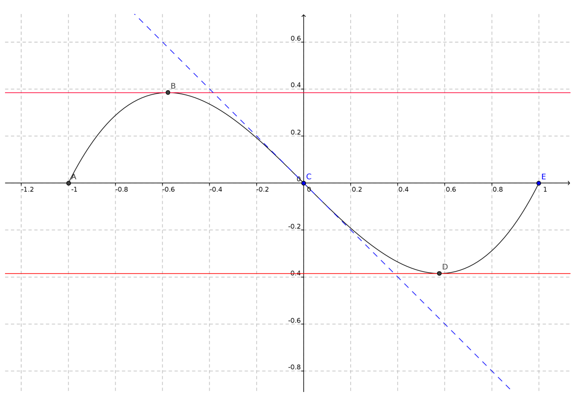
es un mínimo local.

De manera similar, concluimos que

$$c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

es un máximo local.

Finalmente, resolvemos $f''(c) = 0$, pero la única solución es $c = 0$ y por tanto, este es el único punto de inflexión. Como antes de $c = 0$, $f'' < 0$, mientras que después $f'' >$, concluimos que en este punto, la gráfica se ve localmente como la gráfica de la derecha en la figura 12.



Podemos utilizar `Sagemath` para graficar y comparar con nuestros resultados. La gráfica esta dada en la figura III.

Cálculo Integral

Antiderivadas

Si $F'(x) = f(x)$, diremos que F es una antiderivada de f.

Problema 260. x^3 es una antiderivada de $3x^2$, porque...

$$D_x\left(x^3\right) = 3x^2$$

Pero $x^3 + 5$ es también una antiderivada de $3x^2$, porque...

$$D_x\left(x^3 + 5\right) = 3x^2$$

En general, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ es también una antiderivada.

Más aun, si $F(x)$ y $G(x)$ son antiderivadas de $f(x)$, entonces existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = G(x) + C.$$

Diremos que C es una *constante de integración.*

$\int f(x)dx$ denotara cualquier antiderivada de $f(x)$ más una constante de integración.

Diremos que $f(x)$ es el integrando, mientras que $\int f(x)dx$ es llamada *integral indefinidad.*

Problema 261. 1.

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

2.

$$\int -\sin(x)dx = \cos(x) + C$$

Propiedad 25 (Reglas para antiderivadas)**.** *1.* $\int 0dx = C$

2. $\int 1dx = x + C$

3. $\int adx = ax + C$

4. $\int x^r dx = \dfrac{x^{r+1}}{r+1} + C$, $r \neq -1$

5. $\int af(x)dx = aF(x) + C$

6. $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

7. $\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Problema 262. 1. $\int \sqrt[3]{x}dx =$

2. $\int \frac{1}{x^2}dx =$

3. $\int 7x^3dx =$

4. $\int \left(x^2+4\right)dx =$

5. $\int \left(3x^6-4x\right)dx =$

Con las reglas (3)-(7), podemos calcular la antiderivada de cualquier polinomio.

Problema 263.

$$\int \left(6x^8 - \frac{2}{3}x^5 + 7x^4 + \sqrt{3}\right)dx =$$

Integración por sustitución

Propiedad 26 (Integración por sustitución)**.**

$$\int (g(x))^r g'(x)dx = \frac{1}{r+1}(g(x))^{r+1} + C$$

para $r \neq -1$.

Problema 264.

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3+7\right)^5 x^2dx =$$

Problema 265.

$$\int \left(x^2+1\right)^{2/3} xdx =$$

Propiedad 27 (Regla 9, método de sustitución)**.**

$$\int f(g(x))\,g'(x)dx = \int f(u)du$$

donde $u = g(x), du = g'(x)dx$.

Véase el ejericicio resuelto 272

Problema 266. Encuentre

$$\int x\sin(x^2)dx =$$

Problema 267. Encuentre

$$\int \sin(x/2)dx =$$

Figura 14: Antiderivadas comunes

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$$

$$\int \tan x \sec x\, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$$

$$\int \cot x \csc x\, dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sin^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx = \sec^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \text{for } a > 0$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \text{for } a > 0$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\, dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \text{for } a > 0$$

Ejemplos Resueltos

Problema 268 (Fórmula de integración por sustitución (26))**.** 1. $\int \left(s^3+2\right)^2 (3s^2)ds =$

2. $\int \left(x^3+2\right)^{1/2} x^2dx =$

3. $\int \dfrac{8x^2}{\left(x^3+2\right)^3}dx =$

4. $\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt[4]{x^3+2}}dx =$

5. $\int 3x\sqrt{1-2x^2}dx =$

6. $\int \sqrt[3]{1-x^2}xdx =$

7. $\int \sin^2(x)\cos(x)dx =$

Problema 269. 1. $\int \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx =$

2. $\int x\sec^2(4x^2-5)dx =$

3. $\int x^2\sqrt{x+1}dx =$

Problema 270. Una piedra se lanza hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de $64ft/s$.

1. ¿Cuándo alcanzará su altura máxima?
2. ¿Cuál será su altura máxima?
3. ¿Cuándo tocará el suelo?
4. ¿Cuál será su velocidad al tocar el suelo?

Problema 271. Encuentre la ecuación de una curva en el plano xy que pasa por el punto $(0,1)$ y cuya pendiente es igual a la altura en cada punto (x,y).

Problema 272. Justifique el método de sustitución (27).

La integral definida

Notación "Sigma"

La letra griega Σ denota adición repetida:

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) = f(a)+f(a+1)+...+f(b),$$

siempre que $a \leq b$.

Problema 273. 1. $\sum_{j=1}^{5} j = 1+2+3+4+5 = 15$

2. $\sum_{i=0}^{3} (2i+1) = 1+3+5+7$

3. $\sum_{i=2}^{10} i^2 = 2^2 + 3^2 + ... + 10^2$

4. $\sum_{j=1}^{4} \cos(j\pi) = \cos\pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 4\pi.$

Linealidad

Propiedad 28.

$$\sum_{i=a}^{b} cf(i) = c\sum_{i=a}^{b} f(i) \tag{113}$$

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) + g(i) = \sum_{i=a}^{b} f(i) + \sum_{i=a}^{b} g(i) \tag{114}$$

Área bajo la curva

Sea f una función tal que $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$.

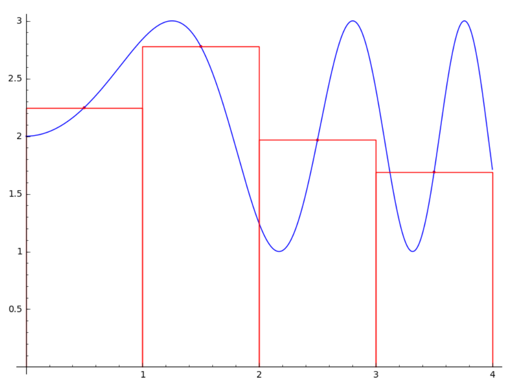


Figura 15: Aproximación de área bajo la curva

Algoritmo 7 (Sumas de Riemman)**.** *1. Dividimos el intervalo en N subintervalos*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b.$$

2. Definimos la longitud de cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ como

$$\delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

3. El área bajo la curva definida por f esta aproximada por

$$\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\delta x_i,$$

donde ξ_i es un punto en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

Una manera más concreta de construir una suma de Riemman es *fijando el tamaño del paso:*

1. Definimos $h = \dfrac{b-a}{N}$;
2. Escogemos
$$\xi_k = a + kh,\ k = 0, 1, 2, ..., N;$$
3. La suma de Riemann correspondiente será
$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot h = h\left(f(\xi_1) + ... + f(\xi_N)\right).$$

Al fijar el tamaño del paso, hemos ocupado el extremo derecho de cada intervalo: $x_k = a + k * h$, pero también podemos escoger por ejemplo:

- el extremo izquierdo:
$$\xi_k = a + (k-1) \cdot h;$$
- o el punto medio de cada intervalo:
$$\xi_k = a + \left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot h;$$

Si en un intervalo $[a, b]$, $f(x) < 0$, entonces la suma anterior aproxima el área *sobre la curva.*

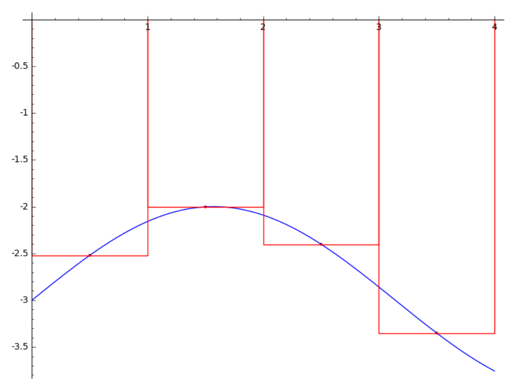


Figura 16: Aproximación de área bajo la curva

Por esta razón, cuando no distinguimos cuando $f(x)$ cambia de signo en un intervalo, hablamos del *área con signo.*

Definición 43. 1. La integral definida de f en el intervalo $[a, b]$ está dada por por
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\delta x_i\right),$$
siempre y cuando el límite exista.

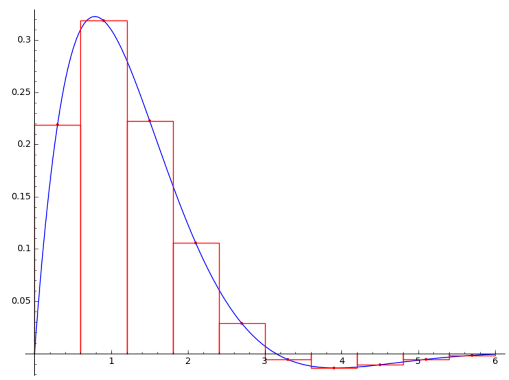


Figura 17: Aproximación de área bajo la curva

2. Si el límite existe, diremos que f es integrable (en $[a, b]$).

3. La suma está definida como en el algoritmo 7 y se conoce como *suma de Riemman.*

Problema 274. Calcule
$$\int_1^5 1dx.$$

Problema 275. Calcule
$$\int_0^5 xdx.$$

Problema 276. Calcule
$$\int_1^5 xdx.$$

Propiedad 29.

$$\int_a^b 1dx = b - a \tag{115}$$
$$\int_a^b xdx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \tag{116}$$

Problema 277. Aproxime la integral
$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$
utilizando el algoritmo 7 fijando el tamaño del paso, con $a = -1, b = 1, N = 5$ y usando el extremo derecho de cada intervalo.

Problema 278. Aproxime la integral del ejemplo 277 cuando:

1. $a = 0, b = 3, N = 4$;

2. $a = -2, b = 2, N = 8$;

3. $a = -3, b = 3, N = 16$.

Propiedades de la Integral Definida

Propiedades: Linealidad

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \tag{117}$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \tag{118}$$

Propiedades: Límites

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \tag{119}$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{120}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{121}$$

Ejemplos Resueltos

Problema 279. Supongamos que f y g son integrables en $[a,b]$. Demostrar que:

(a) Si $f(x)\geq 0$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

(b) Si $f(x)\leq g(x)$ en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

(c) Si $m\leq f(x)\leq M$ para todo $x\in[a,b]$, entonces

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\,(b-a)\,.$$

Problema 280. Demuestre la fórmula

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

El Teorema Fundamental del Cálculo

Valor promedio de una función

Valor promedio de una función

Si una función f se evalúa en n puntos $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$, el valor promedio de la función para estos puntos es

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + ... + f(\xi_N)}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k).$$

Sin embargo, si tratamos de promediar una función en un intervalo $[a, b]$, esta definición no es útil porque habrá una infinidad[4] de puntos.

Aun así, todavía podemos encontrar una definición, motivada por el promedio en una cantidad finita de puntos

Escogiendo el tamaño del paso fijo para un número N dado de subintervalos, tenemos que

$$h = \frac{b-a}{N}.$$

O de manera equivalente

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{b-a}h.$$

De manera que

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot h.$$

Cuando $N \to \infty$, el lado derecho se aproxima a

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\xi)d\xi.$$

Definición 44. El valor promedio de f en $[a, b]$ está dado por

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Sea f una función continua en $[a, b]$. Si $x \in [a, b]$, entonces

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)d\xi$$

es una función que depende de x tal que

$$D_x F(x) = D_x\left(\int_a^x f(\xi)d\xi\right) = f(x). \tag{122}$$

[4] De hecho, una cantidad no numerable de puntos, por lo que ni siquiera podemos tratar de aplicar algunas técnicas para series

Enunciado del T.F.C

Teorema 12 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea f una función continua en $[a,b]$ y $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$. Entonces*

$$\int_a^b f(\xi)d\xi = F(b) - F(a). \tag{TFC}$$

La ecuación (TFC) nos da una manera sencilla de calcular

$$\int_a^b f(\xi)d\xi...$$

siempre y cuando podamos encontrar una antiderivada de $f(x)$, en términos de funciones elementales.

La expresión $F(b) - F(a)$ generalmente se abrevia como

$$F(x)\mid_a^b .$$

Calcule las siguientes fórmulas utilizando el (TFC):

1. $$\int_a^b xdx =$$
2. $$\int_a^b x^2 dx =$$
3. $$\int_a^b x^r dx =$$

Propiedad 30 (TFC con Cambio de Variables)**.** *Supongamos que en el intervalo $[a,b]$, la función f es continua y la función g es diferenciable.*

Entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du,$$

donde $u = g(x)$.

Problema 281. Evalue

$$\int_1^9 \sqrt{5x+4}dx.$$

Ejemplos Resueltos

Problema 282. Evalúe

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(x)dx.$$

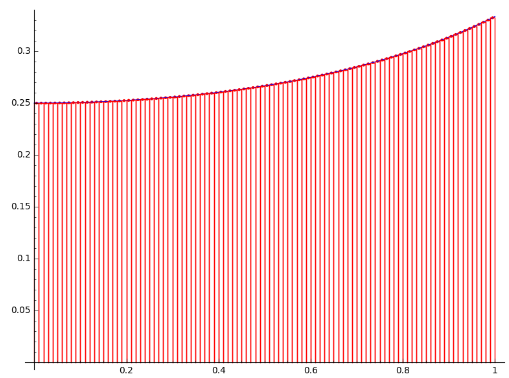


Figura 18: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

Problema 283. Encuentre el área de la región entre la curva dada por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, el eje x, $x = 0$ y $x = 1$.

Problema 284. Encuentre el valor promedio de $f(x) = 4 - x^2$ en $[0, 2]$.

Problema 285. Demuestre la fórmula (122). Sugerencia: Utilice el teorema del valor medio.

Teorema 13 (Teorema del Valor Medio para Integrales)**.** *Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(\xi)d\xi = (b-a)\, f(c) \tag{123}$$

Problema 286. Demuestre que

1. Si f es una función par, entonces para $a > 0$:
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx;$$

2. Si f es una función impar, entonces para $a > 0$:
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Problema 287 (Regla trapezoidal)**.** Sea $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$. Dividamos $[a, b]$ en N subintervalos de longitud fija $h = \frac{b-a}{N}$, por medio de puntos

$$x_k = a + k \cdot h,\ k = 1, ..., N.$$

Muestre que

$$\int_a^b f(\xi)d\xi \approx \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(\xi_k) + f(b)\right)$$

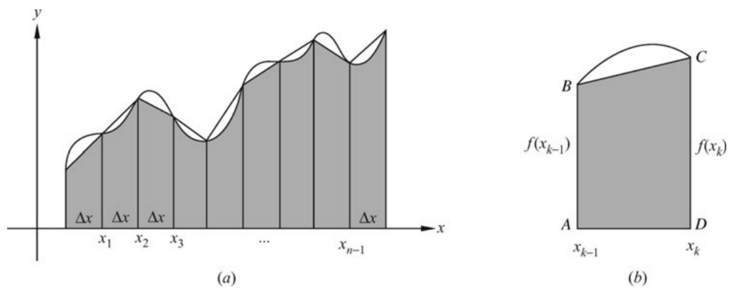


Figura 19: Regla trapezoidal

Problema 288. Use la regla trapezoidal para aproximar

$$\int_0^1 x^2 dx$$

con $N = 1$.

Utilice el (TFC) para calcular la integral de manera exacta y compare.

Integración por partes

A partir de la regla del producto

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$

se deduce la fórmula de integración por partes:

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{124}$$

Para elegir u, podemos seguir la regla empírica **LIATE**:

- **L**ogaritmos
- **I**nversas trigonométricas
- **A**lgebraicas
- **T**rigonométricas
- **E**xponenciales

Problema 289. Encuentre

$$\int x\ln(x)dx.$$

Problema 290. Encuentre

$$\int xe^x dx.$$

Problema 291. Encuentre

$$\int e^x \cos(x)dx.$$

Ejemplos Resueltos

Problema 292. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

Problema 293. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \ln\left(x^2+2\right) dx$$

Problema 294. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \ln(x) dx$$

Problema 295. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x \sin(x) dx$$

Problema 296. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x^2 \ln(x) dx$$

Problema 297. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \sin^{-1}(x) dx$$

Problema 298. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \tan^{-1}(x) dx$$

Problema 299. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \sec^3(x) dx$$

Problema 300. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x^2 \sin(x) dx$$

Problema 301. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x^3 e^{2x} dx$$

Problema 302. Deduzca la siguiente *fórmula de reducción*

$$\begin{aligned} \int \sin^m(x)dx = &-\frac{\sin^{m-1}(x)\cdot\cos(x)}{m} \\ &+\frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2}(x)dx. \end{aligned} \tag{FR}$$

Problema 303. Aplique la formula de reducción (FR) para hallar

$$\int \sin^2(x)dx.$$

Problema 304. Aplique la formula de reducción (FR) para hallar

$$\int \sin^3(x)dx.$$

Fracciones parciales

La técnica de fracciones parciales se utiliza para integrar funciones racionales, es decir, aquellas de la forma

$$\frac{N(x)}{D(x)},$$

donde N, D son polinomios.

Por simplicidad, supondremos que

1. El coeficiente líder de $D(x)$ es igual a 1.

2. El grado de $D(x)$ es mayor que el de $N(x)$.

Sin embargo, ninguna de estas dos condiciones son esenciales.

Problema 305.

$$\int \frac{2x^3}{5x^8+3x-4}dx = \frac{1}{5}\int \frac{2x^3}{x^8+\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}}$$

Problema 306.

$$\frac{2x^5+7}{x^2+3} = 2x^3-6x+\frac{18x+7}{x^2+3}$$

Definición 45. Un polinomio es irreducible si no se puede expresar como el producto de dos polinomios de grado menor.

1. Todo polinomio lineal es irreducible

2. Un polinomio cuadrático

$$g(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

es irreducible si y solo $b^4 - 4ac < 0$.

Problema 307. Verifique que

1. $x^2 + 4$ es irreducible;
2. $x^2 + x - 4$ es reducible.

Teorema 14. *Todo polinomio cuyo coeficiente líder sea igual a* 1 *se puede expresar como producto de factores lineales, o factores cuadráticos irreducibles.*

Problema 308. 1. $x^3 - 4x =$

2. $x^3 + 4x =$
3. $x^4 - 9 =$
4. $x^3 - 3x^2 - x + 3 =$

Método de Fracciones Parciales

Caso I. $D(x)$ es producto de factores lineales distintos

Problema 309. Resuelva

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4}$$

Problema 310. Resuelva

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3 + x^2 - 6x}$$

Regla General para Caso 1

El integrando se representa como una suma de términos de la form $\dfrac{A}{x-a}$, para cada factor $x - a$, y A una constante por determinar.

Caso 2. $D(x)$ es producto de factores lineales repetidos.

Problema 311. Encuentre

$$\int \frac{(3x+5)dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

Problema 312.

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3(x-2)^2}$$

Regla General para el Caso 2.

Para cada factor $x-c$ de multiplicidad k, se utiliza la expresión

$$\frac{A_1}{x-r}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+...+\frac{A_k}{(x-r)^k}.$$

Caso 3. Factores cuadráticos irreducibles distintos, y lineales repetidos

A cada factor irreducible x^2+bx+c de $D(x)$ le corresponde el integrando

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}.$$

Problema 313. Encuentre

$$\int\frac{(x-1)dx}{x(x^2+1)(x^2+2)}$$

Caso IV. Factores cuadráticos irreducibles repetidos

A cada factor cuadráticos irreducible x^2+bx+c de mutiplicidad k le corresponde el integrando

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{A_ix+B_i}{(x^2+bx+c)^i}$$

Problema 314. Encuentre

$$\int\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx.$$

Técnicas de integación trigonométrica

Integrados trigonométricos

Caso 1

Considérense las integrales de la forma

$$\int\sin^k(x)cos^n(x)dx,$$

con k,n enteros no negativos.

Tipo 1.1

Si Al menos uno de los números k,n es impar, entonces podemos escoger $u=\cos(x)$ o $u=\sin(x)$.

Problema 315.

$$\int\sin^3(x)\cos^2(x)dx.$$

Problema 316.

$$\int sin^4(x)cos^7(x)dx$$

Problema 317.

$$\int sin^5(x)dx$$

Tipo 1.2

Si ambas potencias k, n son pares. Entonces utilizaremos las identidades

$$\begin{cases} cos^2(x) = \dfrac{1+cos(2x)}{2} \\ sin^2(x) = \dfrac{1-cos(2x)}{2} \end{cases}$$

Problema 318.

$$\int cos^2(x)sin^4(x)dx$$

Caso 2

Consideraremos integrales de la forma

$$\int tan^k(x)sec^n(x)dx.$$

y utilizaremos la identidad

$$sec^2(x) = 1 + tan^2(x).$$

Tipo 2.1

Si n es par, entonces se sustituye $u = \tan(x)$.

Problema 319.

$$\int tan^2(x)sec^4(x)dx$$

Tipo 2.2

Si n, k son impares, se sustituye $u = sec(x)$.

Problema 320.

$$\int tan^3(x)sec(x)dx.$$

Tipo 2.3

Si n es impar y k par, reducimos a los casos anteriores y utilizaremos la fórmula

$$\int \sec(x)dx = \ln|\tan(x) + \sec(x)|$$

Problema 321.

$$\int \tan^2(x)\sec(x)dx =$$

Caso 3

Consideremos ahora integrales de la forma $\int f(Ax)g(Bx)dx$, donde f, g pueden ser o bien sin o bien cos.

Necesitaremos las identidades

$$sin(Ax)cos(Bx) = \frac{1}{2}\left(sin\left((A+B)x\right) + sin\left((A-B)x\right)\right) \tag{125}$$
$$sin(Ax)sin(Bx) = \frac{1}{2}\left(cos\left((A-B)x\right) - cos\left((A+B)x\right)\right) \tag{126}$$
$$cos(Ax)cos(Bx) = \frac{1}{2}\left(cos\left((A-B)x\right) + cos\left((A+B)x\right)\right) \tag{127}$$

Problema 322.

$$\int sin(7x)cos(3x)$$

Problema 323.

$$\int sin(7x)cos(3x)$$

Problema 324.

$$\int sin(7x)sin(3x)$$

Problema 325.

$$\int cos(7x)cos(3x)$$

Sustitución trigonométrica

Existen tres principales tipos de sustitución trigonométrica. Introduciremos cada uno por medio de ejemplos típicos.

Problema 326. Encuentre

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$

Estrategia I

Si $\sqrt{a^2+x^2}$ aparece en el integrando, intente $x = a\tan(\theta)$

Problema 327. Encuentre

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$$

Estrategia II

Si $\sqrt{a^2-x^2}$ aparece en un integrando, trate con la sustitución $x = a\sin(\theta)$.

Problema 328. Encuentre

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx.$$

Estrategia III

Si $\sqrt{x^2 - a^2}$ aparece en un integrando, trate con la sustitución $x = a\sec\theta$.

Área y longitud de arco

Área entre una curva y el eje vertical

Nostros ya sabemos como encontrar el áre de una región como la siguiente

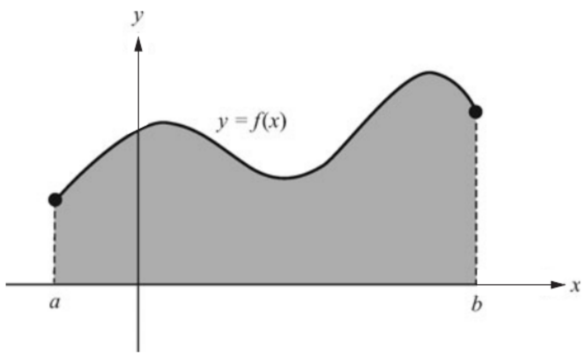


Figura 20: Área bajo la curva

El área de la región acotada por

$$x = a,\ x = b,\ y = 0,\ y = f(x)$$

está dada por

$$\int_a^b f(x)dx$$

Ahora consideremos una región como la siguiente

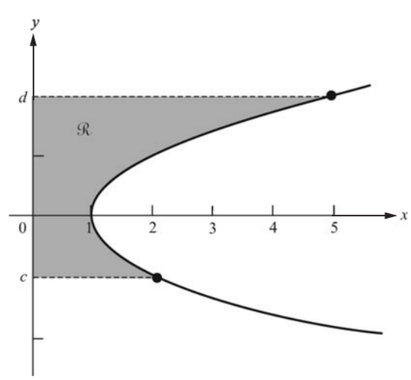


Figura 21: Área entre curva y eje vertical

De manera similar, el área de la región acotada por

$$x = 0,\ x = g(y),\ y = c,\ y = d$$

está dada por

$$\int_c^d g(y)dy$$

Problema 329. Calcule el área de la región dada en la figura 22, que está acotada por el eje y, arriba por $y = 2$, abajo por $y = -1$ y la curva

$$x + y^2 = 4.$$

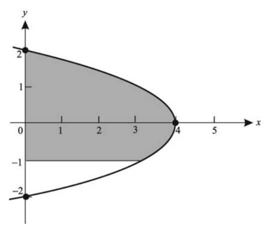


Figura 22: Área acotada por una parabola

Área entre curvas

Supongamos que f y g son funciones continuas para $a \leq x \leq b$.

El área A de la región contenida entre estas dos curvas y los ejes $x = a$ y $x = b$ está dada por la fórmula

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx. \tag{128}$$

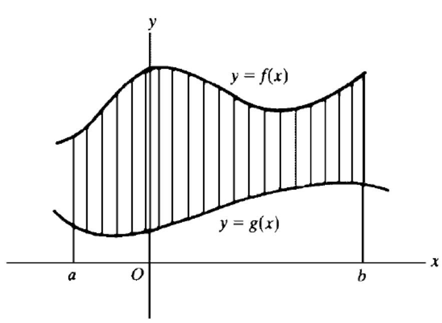


Fig. 29-4

Figura 23: Área entre curvas (funciones positivas)

Problema 330. Calcule el área de región de la figura 26, acotada por

$$x = 0,\ x = 1,\ y = \frac{1}{2}x + 2,\ y = x^2.$$

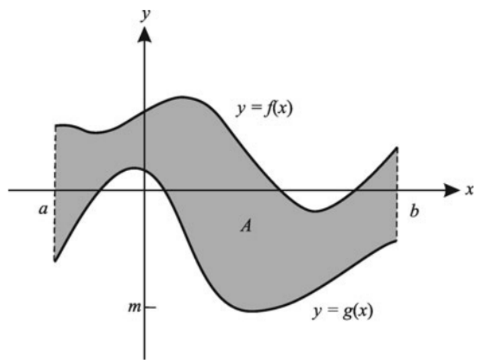


Figura 24: Área entre curvas

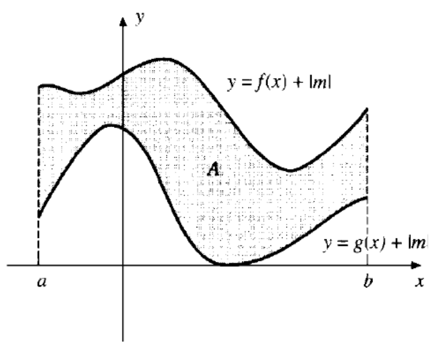


Figura 25: Deducción de la fórmula

Longitud de arco

Por la fórmula de distancia

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}\,.$$

Por el teorema del valor medio, existe $x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1})\, f'(x_k^*) = (\Delta x) f'(x_k^*).$$

Entonces

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{1 + \left(f'(x_k^*)\right)^2}(\Delta x)$$

De manera que

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(x_k^*)\right)^2}(\Delta x),$$

donde $(\Delta x)n = b - a$.

Tomando el límite $n \to \infty$ de ambos lados obtenemos que la longitud $L(f, a, b)$ de al arco dado por la curva $f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$ esta dado por

$$L(f, a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \tag{129}$$

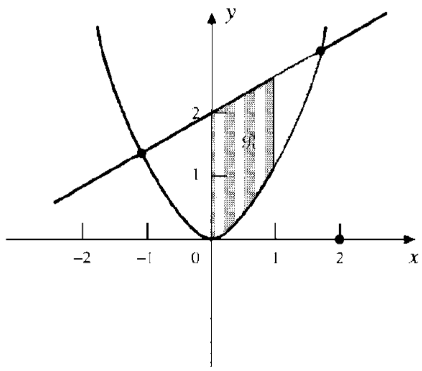


Figura 26: Área entre línea y parábola

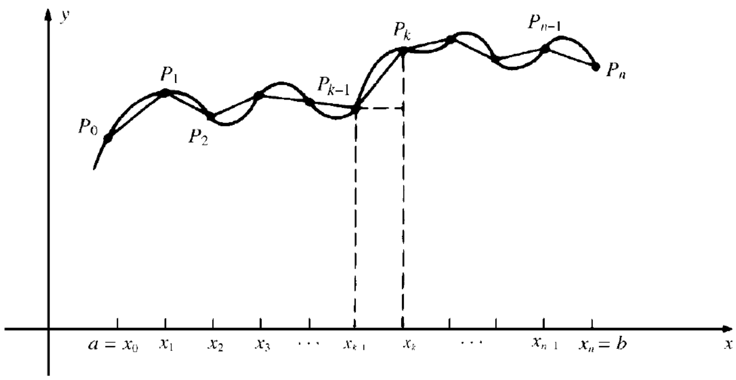


Figura 27: Aproximación de la longitud de un arco

Problema 331. Encuentre la longitud del arco descrito por la curva $y = x^{3/2}$ de $x = 0$ a $x = 5$.

Ejemplos

Problema 332. Encuentre el área acotada por la parábola

$$x = 8 + y - y^2,$$

el eje y y las líneas $y = -1$ y $y = 3$.

Problema 333. Encuentre el área de la región acotada por las parábolas

$$y = 6x - x^2$$

y

$$y = x^2 - 2x.$$

Problema 334. Encuentre la longitud de arco de la curva

$$x = 3y^{3/2} - 1$$

desde $y = 0$ hasta $y = 4$.

Problema 335. Encuentre la longitud de arco de la *catenaria*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$

desde $x = 0$ hasta $x = a$.

Volumen

Un *sólido de revolución* se obtiene al girar una región del plano alrededor de una línea que no intersecta la región.

La línea alrededor del cuál se realiza la rotación se llama *eje de revolución.*

Sea f una función continua tal que $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$. Considere la región $\mathcal{R}$ bajo la gráfica de f, arriba del eje x, entre $x = a$ y $x = b$:

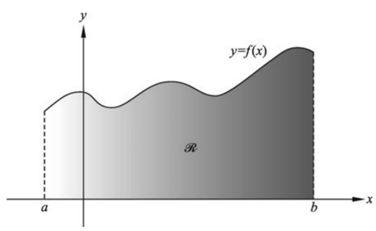


Figura 28: Región de revolución

Problema 336. Grafique la superficie de revolución generada por la región acotada por la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$.

Observación 26. A partir de ahora, usaremos el sistema algebráico de computo `SageMath,` para visualizar las gráficas.

[fragile]Código para graficar en 2D

```
x = var("x")
line = x
parabola = x^2
graf = plot(line, (-0.5,1.5))
graf = graf+plot(parabola, (-0.5,1.5))
graf.show()
```

[fragile]Código para generar un sólido de revolución

```
x = var("x")
line = x
parabola = x^2
P = axes(1, color="black")
sur1=revolution_plot3d(line,(x,0,1),
    opacity=0.5,rgbcolor=(1,0.5,0),
    show_curve=True,parallel_axis='x')
```

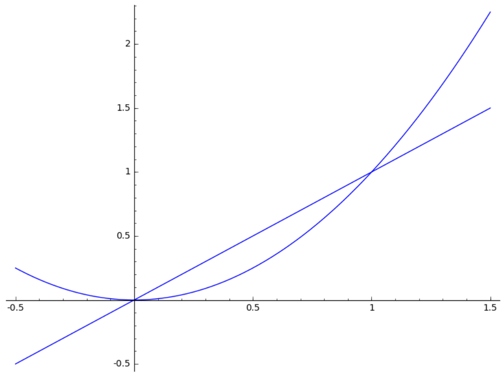


Figura 29: Región $\mathcal{R}$ acotada por $y = x$ y $y = x^2$

```
sur2=revolution_plot3d(parabola,(x,0,1),
    opacity=0.5,rgbcolor=(0,1,0),
    show_curve=True,parallel_axis='x')
(sur1+sur2+P).show()
```

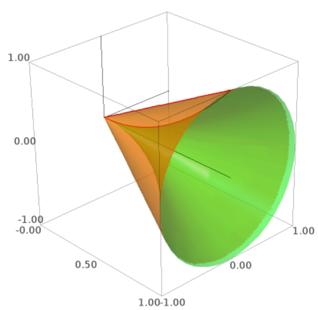


Figura 30: Sólido generado por $\mathcal{R}$

Fórmula del Disco

El volumen V de un sólido de revolución obtenido al rotar una región $\mathcal{R}$ alrededor del eje x está dado por

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx \qquad \text{(Fórmula del Disco)}$$

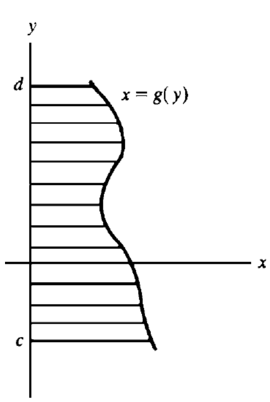
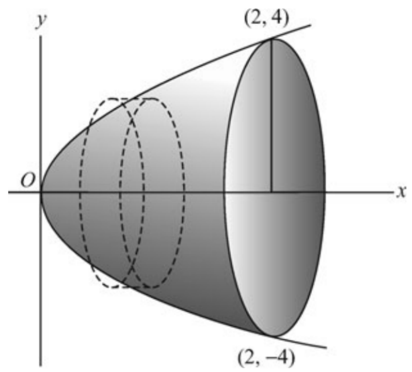


Figura 31: Región acotada por $x = g(y)$

De manera similar, la fórmula para una región como acotada por la gráfica $x = g(y)$ está dada por

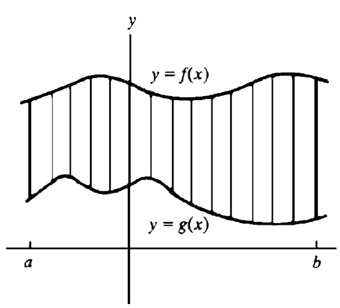
$$V = \pi \int_c^d (g(y))^2 \, dy \qquad \text{(Fórmula del Disco (II))}$$

Problema 337. Considere el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x la región en el primer cuadránte acotada por la parábola $y^2 = 8x$ y la línea $x = 2$. Encuentre su volumen.



Problema 338. Considere el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje y la región en el primer cuadránte acotada por la parábola $y = 4x^2$ y la línea $y = 16$. Encuentre su volumen.

Método de Washer



Supongamos que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ para $a \leq x \leq b$. Consideremos la región acotada por $x = a$, $x = b$, y las curvas $y = g(x)$ y $y = f(x)$.

Entonces el volumen V del sólido de revolución generado por esta región rotando alrededor del eje x está dado por

$$V = \pi \int_a^b \left((f(x))^2 - (g(x))^2\right) dx \tag{Washer}$$

Una fórmula similar

$$V = \pi \int_c^d \left((f(y))^2 - (g(y))^2\right) dy \tag{Washer (II)}$$

se satisface cuando la región esta acotada por las curvas $x = f(y)$, $x = g(y)$ y las rectas $y = c$, $y = d$, siempre y cuando $0 \leq g(y) \leq f(y)$ para $c \leq y \leq d$ y se rota tal región alrededor del eje y.

Problema 339. Considere el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje x la región acotada por las curvas

$$y = 4x^2,\ x = 0,\ y = 16.$$

Encuentre el volumen por (Washer).

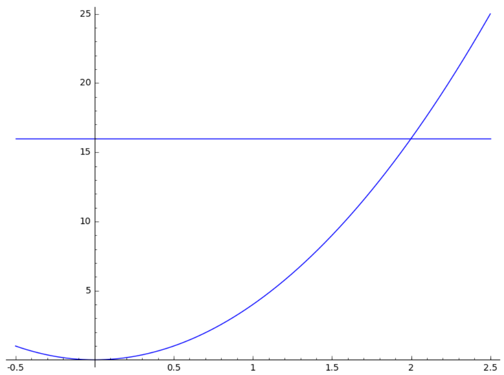


Figura 32: Región $\mathcal{R}$ acotada por $y = 4x^2,\ x = 0,\ y = 16$.

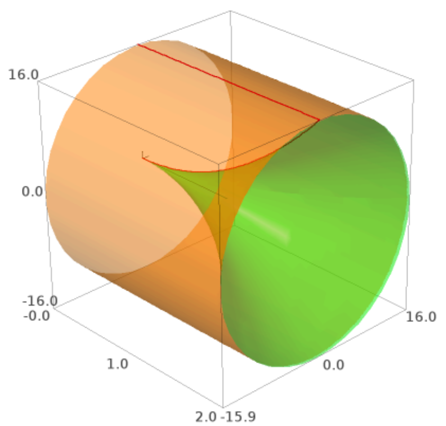
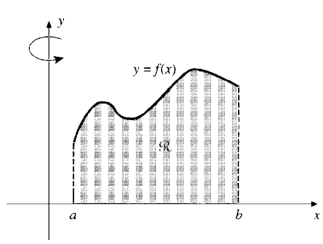


Figura 33: Sólido generado por región $\mathcal{R}$.

Método de las capas cilíndricas



Consideremos el sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje y la región $\mathcal{R}$ en el primer cuadrante entre el eje x y la curva $y = f(x)$, entre $x = a$ y $x = b$.

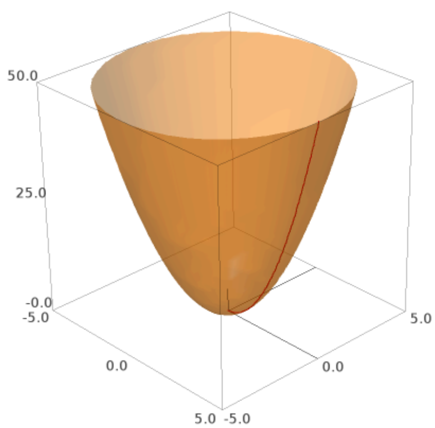
Entonces el volumen del sólido está dado por la fórmual de capas cilíndricas

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \tag{FCC}$$

Una fórmula similar se satisface cuando se intercambian x y y, es decir, la región $\mathcal{R}$ en el primer cuadránte entre el eje y y la curva $x = f(y)$, entre $y = c$ y $y = d$, se gira alrededor del eje x

$$V = 2\pi \int_c^d y f(y) dy \tag{FCC(II)}$$

Problema 340. Rote alrededor del eje y la región sobre el eje x y debajo de $y = 2x^2$, entre $x = 0$ y $x = 5$. Por medio de (FCC). Encuentre el volumen.



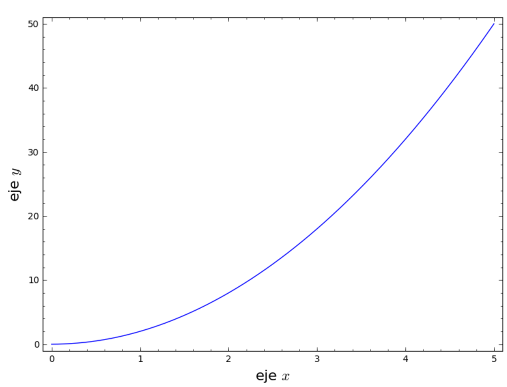
Diferencia de Capas

Supongamos que $0 \leq g(x) \leq f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, $a \geq 0$. Sea $\mathcal{R}$ la región en el primer cuadránte entre

$$y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b.$$

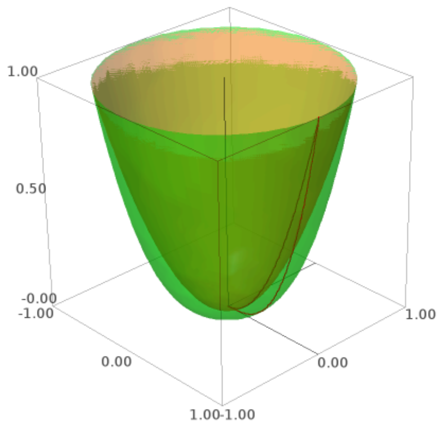
Entonces el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar $\mathcal{R}$ alrededor del eje y está dado por

$$V = 2\pi \int_a^b x\,(f(x) - g(x))\,dx \qquad \text{(FDC)}$$

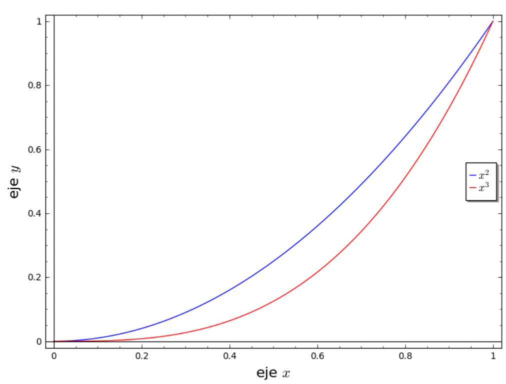


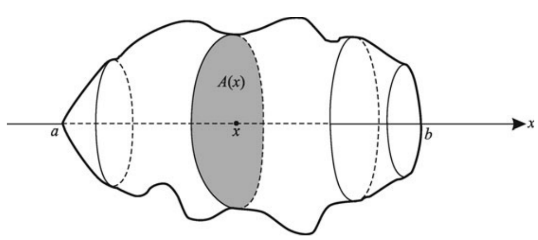
Problema 341. Consideremos la región en el primer cuadrante acotado arriba por $y = x^2$ y debajo por $y = x^3$.

Encuentre el volumen del sólidos generado al rotar $\mathcal{R}$ alrededor del eje y.



Secciones trasnversales (rebanadas)





Supongamos que un sólido vive enteramente entre el plano perpendicular al eje x en $x = a$ y el plano perpendicular al x en $x = b$.

Para cada $x \in [a, b]$, supongamos que el plano perpendicular al eje x en el punto x intersecta al sólido en una región de área $A(x)$.

Entonces, el volumen V del sólido está dado por

$$V = \int_a^b A(x)dx. \tag{FST}$$

Problema 342. Supongamos que un segmento de un misil de longitud h es tal que la sección transversal perpendicular al eje de simetría del misil a una distancia x de la punta es un círculo de radio $\sqrt{x}$. Encuentre el volumen del misil.

Integrales impropias

Límites al infinito

Para que

$$\int_a^b f(x)dx$$

esté bien definida, basta que f sea una función continua y a, b sean número reales. Ahora veremos que sucede cuando

(a) a o b tienden a $\pm\infty$;

(b) f es discontinuo.

Tales integrales se conocen como *impropias.*

Límites infinitos de integración

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)dx \tag{130}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)dx \tag{131}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_c^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^{c} f(x)dx \tag{132}$$

La última integral es válida siempre y cuando los dos límites del lado derecho existan.

Problema 343. Encuentre la intergral

$$\int_0^\infty e^{-x}\sin(x)dx$$

Problema 344. Encuentre la integral

$$\int_{-\infty}^0 e^{rx}dx$$

para $r > 0$.

Problema 345. Evalue

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

Discontinuidades del integrando

Caso I Si f es continuo en $(a, b]$, discontinuo en $x = a$, podemos definir

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \to a^+} \int_u^b f(x)dx,$$

siempre y cuando el límite exista.

Problema 346. Evalue

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} dx$$

Caso II Si f es continuo en $[a, b)$, discontinuo en $x = b$, podemos definir

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \to b^-} \int_a^u f(x)dx,$$

siempre y cuando el límite exista.

Problema 347. Evalue

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1 - \sin(x)}} dx$$

Caso III Si f es continuo en $[a, b]$ excepto en un punto $c \in (a, b)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \to c^-} \int_a^u f(x)dx + \lim_{u \to c^+} \int_u^b f(x)dx$$

siempre y cuando ambos límites del lado derecho existan.

Problema 348. Evalue

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x - 1}} dx$$

Área de Superficies de Revolución

Si un arco de una curva se gira alrededor de una línea que no se intersecta con el arco, entonces la superficie resultante is llamada *superficie de revolución.*

Por *área de superficie,* nos referiremos al área de la superficie exterior.

Sea f una función continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$ que es diferenciable en (a, b). Entonces el área de superficie S de la superficie de revolución generado al girar la gráfica de f en $[a, b]$ alrededor del eje x esta dado por la fórmula

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \tag{133}$$

De manera similar, sea g una función continua y $g(y) \geq 0$ en $[c, d]$ que es diferenciable en (c, d). Entonces el área de superficie S de la superficie de revolución generado al girar la gráfica de g en $[c, d]$ alrededor del eje y esta dado por la fórmula

$$S = 2\pi \int_c^d g(y)) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy. \tag{134}$$

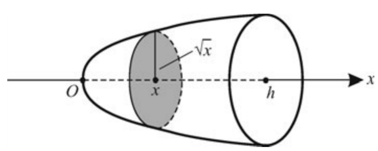
De manera más general, si una curva esta dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(u), \; y = g(u)$$

y el arco va de $u = u_1$ a $u = u_2$ se rota alrededor del eje x, entonces el área de superficie de la superficie de revolución resultante está dada por la fórmula

$$S = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du \tag{135}$$

En la fórmula anterior, hemos supuesto que f, g son continuas en $[u_1, u_2]$, diferenciable en (u_1, u_2) y que $y = g(u) \geq 0$ en $[u_1, u_2]$.



Cálculo en varias variables

Representación paramétrica de curvas

Ecuaciones paramétricas

Si las coordenadas (x, y) de un punto P en una curva están dadas por las funciones

$$x = f(t), y = g(t) \tag{Ec.Par.}$$

de una tercera variable o *parámetro* t, entonces (Ec.Par.) son llamadas *ecuaciones paramétricas* de la curva.

Problema 349. a

$$x = \cos(t), y = \sin^2(t)$$

son ecuaciones paramétricas de la parábola

$$4x^2 + y = 4.$$

b

$$x = \frac{1}{2}t, y = 4 - t^2$$

es otra parametrización de la misma curva.

Problema 350. 1. Las ecuaciones

$$x = r\cos(t), y = r\sin(t)$$

representan el círculo con radio en el origen.

2. Las ecuaciones

$$x = a + r\cos(t), y = b + r\sin(t)$$

representa el círculo de radio r y centro en (a, b).

Supongamos que la curvas está dada por (Ec.Par.). Entonces las primera y segunda derivadas están dadas por

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x} \tag{136}$$

$$D_{xx} y = \frac{D_{tx} y}{D_t x} \tag{137}$$

Longitud de arco

Si una curva está dada por (Ec.Par.), entonces la *longitud de curva* entre dos puntos correspondientes a los valores parámetricos t_1 y t_2 es

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(D_t x)^2 + (D_t y)^2} dt$$

Ejemplos

Problema 351. Encuentre $D_x y$, $D_{xx} y$ para

$$x = t - \sin(t), y = 1 - \cos(t)$$

Problema 352. Encuentre $D_x y$ y $D_{xx} y$ si $x = e^t \cos(t), y = e^t \sin(t)$.

Problema 353. Encuentre una ecuación a la línea tangente de la curva

$$x = \sqrt{t}, y = t - \frac{1}{\sqrt{t}}$$

en el punto $t = 4$.

Problema 354. La posición de una particula que se está moviendo a lo largo de una curva está dada al tiempo t por las ecuaciones paramétricas

$$x = 2 - 3\cos(t), y = 3 + 2\sin(t)$$

donde x y y están medidos en pies y t en segundos.

Note que

$$\frac{1}{9}(x-2)^2 + \frac{1}{4}(y-3)^2 = 1$$

de manera que la curva es una elipse.*¿Porqué?*

Continuación

1. Encuentre la tasa de cambio temporal de x cuando $t = \frac{\pi}{3}$
2. Encuentre la tasa de cambio temporal de y cuando $t = \frac{5\pi}{3}$
3. Encuentre la tasa de cambio temporal del ángulo de inclinación θ de la línea tangente cuando $t = \frac{2\pi}{3}$

Problema 355. Encuentre la longitud de arco de la curva

$$x = t^2, y = t^3$$

desde $t = 0$ a $t = 4$.

Problema 356. Encuentre la longitud de arco de la cicloide

$$x = \theta - \sin\theta, y = 1 - \cos\theta \tag{138}$$

entre $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$.

Derivadas Parciales

Objetivos del aprendizaje

1. Calcular e interpretar derivadas parciales.
2. Aplicar derivadas parciales para estudiar Ejemplos de análisis marginal en economía.
3. Calcular derivadas parciales de segundo orden.
4. Usar la regla de la cadena de derivadas parciales para encontrar tasas de cambio y hacer aproximaciones incrementales.

Derivadas parciales de primer orden

La derivada parcial de $f(x, y)$ respecto de x se denota por

$$\partial_x f(x, y) \text{ ó } f_x(x, y)$$

y es la función obtenida al derivar f respecto de x *tratando a y como una constante.*

Derivadas parciales de primer orden

De manera similar, la derivada parcial de $f(x, y)$ respecto de y se denota por

$$\partial_y f(x, y) \text{ ó } f_y(x, y)$$

y es la función obtenida al derivar f respecto de y *tratando a x como una constante.*

Algunas propiedades y fórmulas

Propiedad 31. *Sean $u(x, y), v(x, y)$ funciones de dos variables y $h(y)$ una función que no depende de x.*

1. $\partial_x h(y) = 0$;
2. $\partial_x (h(y)u) = h(y)\partial_x u$;
3. $\partial_x (u + v) = \partial_x u + \partial_x v$;
4. $\partial_x (uv) = u\partial_x v + v\partial_x u$;
5. $\partial_x u^n = nu^{n-1}\partial_x u$;
6. $\partial_x e^u = e^u \partial_x u$;
7. $\partial_x \ln(u) = \frac{\partial_x u}{u}$.

Observación 27. Las reglas siguen valiendo si: cambiamos ∂_x por ∂_y y h no depende de y.

Cálculo de derivadas parciales

Problema 357. Encuentre las derivadas parciales de $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2y}{3x}$

El desarrollo completo del ejercicio lo puede encontrar en mi Canal de YouTube. La comprobación de la solución la puede encontrar en SageMathCell.

Problema 358. Encuentre las derivadas parciales de

$$f(x,y) = (x^2 + x * y + y)^5.$$

El desarrollo completo del ejercicio lo puedes encontrar en mi Canal de YouTube. La comprobación se puede encontrar en http://sagecell.sagemath.org/?q=vrfhpv

Problema 359. Encuentre las derivadas parciales de

$$f(x,y) = xe^{-2xy}.$$

El desarrollo completo del ejercicio lo puedes encontrar en mi Canal de YouTube. La comprobación se puede encontrar en http://sagecell.sagemath.org/?q=onrgkx

Problema 360. Evalue las derivadas parciales $\partial_x f(x,y)$ y $\partial_y f(x,y)$ en el punto (x_0, y_0) dado:

1. $f(x,y) = x^3y - 2(x+y),\ x_0 = 1, y_0 = 0;$
2. $f(x,y) = x + \dfrac{x}{y-3x},\ x_0 = 1, y_0 = 1;$
3. $f(x,y) = (x-2y)^2 + (y-3x)^2 + 5,\ x_0 = 0, y_0 = -1;$
4. $f(x,y) = xy\ln\left(\dfrac{y}{x}\right) + \ln(2x-3y)^2,\ x_0 = 1, y_0 = 1;$

Puede verificar sus resultados con este este script.

Clasificación de Puntos Críticos

Definición 46 (Extremos relativos)**.** Diremos la función f(x,y) tiene un *máximo relativo* en (x_0, y_0) si

$$f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$$

para todo (x,y) suficientemente cercano a (x_0, y_0).

De manera similar, diremos la función f(x,y) tiene un *mínimo relativo* en (x_0, y_0) si

$$f(x_0, y_0) \leq f(x,y)$$

para todo (x,y) suficientemente cercano a (x_0, y_0).

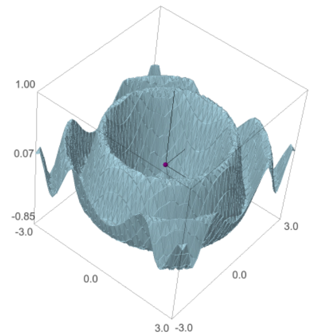
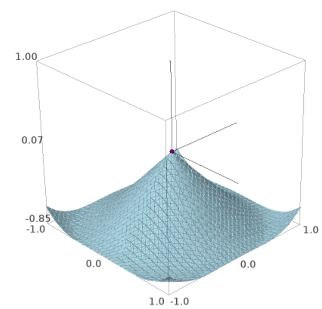


Figura 34: Máximo Relativo



Los *extremos relativos* no siempre son *extremos absolutos*...

Est imagen la puede genera con el siguiente código: http://sagecell.sagemath.org/?q=wdxppk

Sin embargo, para puntos suficientemente cercano, un *extremo relativo* sí lo es.

Esta imagen la puede generar con el siguiente código: http://sagecell.sagemath.org/?q=butszu

De hecho, el mapa topográfico de la región, nos indica que existen punto a una mayor altura que el *máximo relativo*.

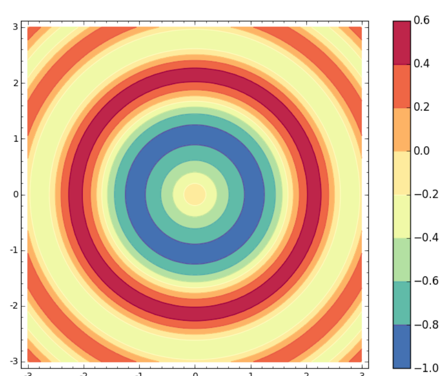


Figura 35: Mapa topográfico con alturas

Puede generar este mapa topográfico con el siguiente código http://sagecell.sagemath.org/?q=zyutmy

Definición 47 (Puntos críticos)**.** Un punto (x_0, y_0) es un *punto crítico* de $f(x, y)$ si

$$\partial_x f(x_0, y_0) = 0,\ \partial_y f(x_0, y_0) = 0.$$

Todos los extremos relativos son puntos críticos...

Pero no todos los puntos críticos son extremos relativos.

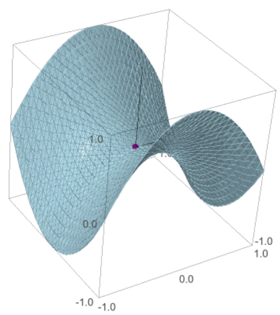


Figura 36: Punto de silla

http://sagecell.sagemath.org/?q=kmfhcx

Diremos que un punto crítico que no es extremo local es un punto de silla.

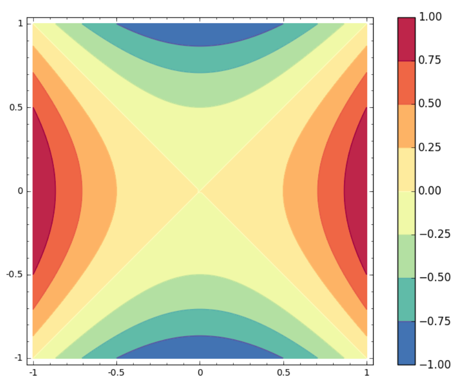


Figura 37: Mapa topografico de $f(x, y) = x^2 - y^2$

http://sagecell.sagemath.org/?q=mjknwh

Observación 28. $(0, 0)$ es punto de silla de $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Definición 48 (Segundas derivadas)**.** Las derivadas parciales de segundo orden de $f(x, y)$ son

- $\partial_{xx} f(x, y) = \partial_x (\partial_x f(x, y)) = f_{xx}(x, y)$
- $\partial_{xy} f(x, y) = \partial_x (\partial_y f(x, y)) = f_{yx}(x, y)$
- $\partial_{yx} f(x, y) = \partial_y (\partial_x f(x, y)) = f_{xy}(x, y)$
- $\partial_{yy} f(x, y) = \partial_y (\partial_y f(x, y)) = f_{yy}(x, y)$

Hessiano de una función

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{yx} f(x,y) \\ \partial_{xy} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} \tag{139}$$

El determinante Hessiano de $f(x,y)$ se define como

$$D(x,y) = \partial_{xx} f(x,y) \partial_{yy} f(x,y) - \partial_{xy} f(x,y) \partial_{yx} f(x,y).$$

Observación 29. Si las derivadas parciales mixtas $\partial_{xy} f(x,y),\ \partial_{yx} f(x,y)$ existen y son continuas, entonces

$$\partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y),$$

de manera que

$$D(x,y) = \partial_{xx} f(x,y) \partial_{yy} f(x,y) - \left(\partial_{xy} f(x,y)\right)^2.$$

Teorema 15 (Clasificación de puntos críticos)**.** *Supongamos que todas las derivas de primer y segundo orden de $f(x,y)$ existe y que (x_0,y_0) es un punto crítico de $f(x,y)$. Entonces*

- *Si $D(x_0,y_0) < 0$, entonces (x_0,y_0) es un* punto de silla*.*
- *Si $D(x_0,y_0) > 0$ y $\partial_{xx} f(x_0,y_0) > 0$, entonces (x_0,y_0) es un* mínimo relativo*.*
- *Si $D(x_0,y_0) > 0$ y $\partial_{xx} f(x_0,y_0) < 0$, entonces (x_0,y_0) es un* máximo relativo*.*

Observación 30. Si $D(x_0,y_0) = 0$, la información no es concluyente.

Problema 361. Clasifique los puntos críticos de $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Puede ver el desarrollo completo del ejercicio en https://youtu.be/9Vz-qouiRPw.
Para encontrar los puntos críticos, puede este script.
Para evaluarlos en $D(x,y)$ y $\partial_{xx} f(x,y)$ puede utilizar este script.

Problema 362. Clasifique los puntos críticos de $f(x,y) = 12x - x^3 - 4y^2$.

Puede ver el desarrollo completo del ejercicio en https://youtu.be/oY3DjTSqado.
Para encontrar los puntos críticos puede usar este script.
Para evaluarlos en $D(x,y)$ y $\partial_{xx} f(x,y)$ puede utilizar este script.

Problema 363. Clasifique los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 - y^3 + 6xy$.

Puede ver el desarrollo completo del ejercicio en https://youtu.be/oCk2O9SpJG4.
Para encontrar los puntos críticos puede usar este script.
Para evaluarlos en $D(x,y)$ y $\partial_{xx} f(x,y)$ puede usar este script.

Problema 364. Clasifique los puntos críticos de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$
2. $f(x, y) = \frac{16}{x} + \frac{6}{y} + x^2 - 3y^2$
3. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$
4. $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$

Puede verificar sus resultados, utilizando este este script.

Parte IV

Ecuaciones Diferenciales

Ecuaciones de primer orden

Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales

Conceptos básicos

Definición Una *ecuación diferencial* es una ecuación que involucra derivadas o diferenciales de una o varias variables.

Si la ecuación sólo involucra derivadas respecto a una única variable independiente, diremos que es *ordinaria*. En otro caso, que es *parcial*.

Orden Si la ecuación involucra derivadas de orden n, pero no de orden más alto, diremos que la propia ecuación es de *orden n*.

Problema 365.

$$\left(y''\right)^2 + 3x = 2\left(y'\right)^3 \tag{140}$$

Problema 366.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 \tag{141}$$

Problema 367.

$$\frac{d^2Q}{dt^2} - 3\frac{dQ}{dt} + 2Q = 4\sin(2t) \tag{142}$$

Problema 368.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \tag{143}$$

De manera equivalente

$$(x+y)dx + (y-x)dy = 0$$

Problema 369.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{144}$$

Constantes arbitrarias

Una constante arbitraria es un valor que es independiente de las variables involucradas en la ecuación.

Generalmente las denotaremos con las primeras letras del alfabeto:

$$A, B, C, c_1, c_2, ...$$

Problema 370. En la ecuación

$$y = x^2 + c_1 x + c_2$$

los símbolos c_1, c_2 representan constantes arbitrarias.

Problema 371. La relación $y = Ae^{-4x+B}$ se puede reescribir como $y = Ce^{-4x}$. Por lo que sólo involucra una constante arbitraria.

Siempre reduciremos las ecuaciones al número mínimo de constantes arbitrarias, a las que llamaremos *esenciales*.

Soluciones

Una *solución de una ecuación diferencial* es una relación entre las variables que está libre de derivadas, y que satisface la ecuación diferencial en al menos un intervalo.

Una *solución general* de una ecuación diferencial de orden n es aquella que involucra n constantes arbitrarias esenciales.

Problema 372. $y = x^2 + c_1 x + c_2$ es una solución general de $y'' = 2$.

Una *solución particular* es aquella que se obtiene de una general, sustituyendo valores específicos en las constantes arbitrarias.

Problema 373. $y = x^2 - 3x + 2$ es una solución particular de $y'' = 2$.

Una *solución singular* es una aquella que no se puede obtener de la solución general sólo especificando valores para las constantes arbitrarias.

Problema 374. La solución general de $y = xy' - y'^2$ es $y = cx - c^2$.

Sin embargo, $y = \frac{x^2}{4}$ es una solución que no se puede obtener sustituyendo c. Por tanto, es una solución particular.

Ecuación diferencial de una familia de curvas

Una solución general de orden n tiene n parámetros (constantes arbitrarias esenciales) y por tanto, geométricamente representa una *familia de curvas $n-$paramétrica.*

De manera reciproca, una relación con n constantes arbitrarias (también llamada *primitiva*) tiene asociada una ecuación diferencial de orden n (de la cual es solución general), llamada la *ecuación diferencial de la familia.*

Ejemplos

Clasificación de ecuaciones diferenciales

Problema 375. Clasifica cada una e las siguientes ecuaciones diferenciales enunciando su orden; sus variables dependientes e independientes; y si es ordinaria o parcial:

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0 \tag{145}$$

Solución. (I) Orden 2;

(II) variable dependiente: y;

(III) variable independiente: x;

(IV) ecuación ordinaria.

□

$$\frac{dx}{dy} = x^2 + y^2 \tag{146}$$

Solución. (I) Orden 1;

(II) variable dependiente: x;

(III) variable independiente: y;

(IV) ordinaria.

□

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + y^2} \tag{147}$$

Solución. (I) Orden 1;

(II) variable dependiente: y;

(III) variable independiente: x;

(IV) ordinaria.

□

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)^3 + u^4 = 1 \tag{148}$$

Solución. (I) Orden 2;

(II) variable dependiente: u;

(III) variable independiente: t;

(IV) ordinaria.

□

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{149}$$

Solución. (I) Orden 2;

(II) variable dependiente: Y;

(III) variables independientes: x, t;

(IV) parcial.

□

$$\left(x^2 + 2y^2\right) dx + \left(3x^3 - 4y^2\right) dy = 0 \tag{150}$$

Solución. (I) Orden 1;

(II) variable dependiente: y;

(III) variable independiente: x;

(IV) ordinaria.

□

Solución de ecuaciones diferenciales

Problema 376. Verifica para cada ecuación, si la relación indicada es solución; y en ese caso, determina si es general.

$$\begin{cases} y' - x + y = 0 \\ y = Ce^{-x} + x - 1 \end{cases} \tag{151}$$

Solución. (I) $y' = -Ce^{-x} + 1$

(II) $y' - x + y = (-Ce^{-x} + 1) - x + (Ce^{-x} + x - 1) = 0$

(III) C es su único parámetro.

(IV) Por tanto y es solución general.

□

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{3y^2 - x^2} \\ x^2y - y^3 = c \end{cases} \tag{152}$$

Solución. (I) Derivando de forma implícita obtenemos

$$x^2y' + 2xy - 3y^2y' = 0 \tag{153}$$

(II) Despejando y' obtenemos

$$y' = \frac{2xy}{3y^2 - x^2} \tag{154}$$

(III) Como C es el único parámetro, y es una solución general.

□

$$\begin{cases} \dfrac{d^2I}{dt^2} + 2\dfrac{dI}{dt} - 3I = 2\cos(t) - 4\sin(t) \\ I = c_1e^t + c_2e^{-3t} + \sin(t) \end{cases} \tag{155}$$

Solución. (I) $\dfrac{dI}{dt} = c_1e^t - 3c_2e^{-3t} + \cos(t)$

(II) $\dfrac{d^2I}{dt^2} = c_1e^t + 9c_2e^{-3t} - \sin(t)$

(III)

$$\left(c_1e^t + 9c_2e^{-3t} - \sin(t)\right) \tag{156}$$

$$+2\left(c_1e^t - 3c_2e^{-3t} + \cos(t)\right) \tag{157}$$

$$-3\left(c_1e^t + c_2e^{-3t} + \sin(t)\right) \tag{158}$$

$$= 2\cos(t) - 4\sin(t) \tag{159}$$

(IV) Como c_1, c_2 son parámetros, entonces I es una solución general.

□

$$\begin{cases} x^3\left(\dfrac{d^2v}{dx^2}\right)^2 = 2v\dfrac{dv}{dx} \\ v = cx^2 \end{cases} \tag{160}$$

Solución. (I) $\dfrac{dv}{dx} = 2cx$

(II) $\dfrac{d^2v}{dx^2} = 2c$

(III) Sustituimos en el lado izquierdo

$$x^3 (2c)^2 = 4c^2x^3 \tag{161}$$

(IV) Sustituimos en el lado derecho

$$2 \left(cx^2\right) (2cx) = 4c^2x^3 \tag{162}$$

(V) Entonces v es solución, pero como la ecuación es de grado 2 y c es el único parámetro, no es general.

□

Problema 377. Determine la solución particular de la ecuación diferencia del problema 155, tal que satisface las condiciones

$$I(0) = 2 \tag{163}$$

$$I'(0) = -5 \tag{164}$$

Solución. (I) $I(t) = c_1e^t + c_2e^{-3t} + \sin(t)$

(II) $I(0) = c_1 + c_2 = 2$

(III) $I'(t) = c_1e^t - 3c_2e^{-3t} + \cos(t)$

(IV) $I'(0) = c_1 - 3c_2 + 1 = -5$

(V) $c_1 - 3c_2 = -6$

(VI) $c_1 = 0, c_2 = 1$

(VII) $I = 2e^{-3t} + \sin(t)$

□

Problema 378. Mostrar que la solución de problema de valor inicial

$$\begin{cases} Q''(t) + 4Q'(t) + 20Q(t) = 16e^{-2t} & t \geq 0 \\ Q(0) = 2, Q'(0) = 0 \end{cases} \tag{165}$$

is

$$Q(t) = e^{-2t} \left(1 + \sin(4t) + \cos(4t)\right) \tag{166}$$

Solución

$$\begin{aligned} Q'(t) &= e^{-2t} \left(4\cos(4t) - 4\sin(4t)\right) - 2e^{-2t} \left(1 + \sin(4t) + \cos(4t)\right) \\ &= e^{-2t} \left(2\cos(4t) - 6\sin(4t) - 2\right) \end{aligned}$$

Solución

$$\begin{aligned} Q''(t) &= e^{-2t} \left(-8\sin(4t) - 24\cos(4t)\right) - 2e^{-2t} \left(2\cos(4t) - 6\sin(4t) - 2\right) \\ &= e^{-2t} \left(4\sin(4t) - 28\cos(4t) + 4\right) \end{aligned}$$

Solución

$$\begin{aligned} Q''(t) + 4Q'(t) + 20Q(t) \\ = e^{-2t}\left(4\sin(4t) - 28\cos(4t) + 4\right) \\ +4e^{-2t}\left(2\cos(4t) - 6\sin(4t) - 2\right) \\ +20e^{-2t}\left(1 + \sin(4t) + \cos(4t)\right) \\ = 16e^{-2t} \end{aligned}$$

Determine gráficamente una relación entre la solución general

$$y = cx - c^2 \tag{167}$$

y la solución singular $y = \dfrac{x^2}{4}$ de la ecuación diferencial

$$y = xy' - y^2 \tag{168}$$

La envolvente de una familia de curvas

$$G(x, y, c) = 0, \tag{169}$$

si es que existe, puede encontrarse resolviendo simultaneamente las ecuaciones

$$\begin{cases} \partial_c G(x, y, c) = 0 \\ G(x, y, c) = 0 \end{cases}$$

Solución

(I) Calculamos la parcial $\partial_c G(x, y, c) = -x + 2c$

(II) Plantemos las ecuaciones

$$-x + 2c = 0 \tag{170}$$
$$y - cx + c^2 = 0 \tag{171}$$

(III) Resolvemos las ecuaciones y obtenemos la solución paramética

$$x = 2c, y = c^2 \tag{172}$$

(IV) La solución se puede reescribir como

$$y = \frac{x^2}{4} \tag{173}$$

Problema 379. (a) Trace la gráfica de varios miembros de la familia uniparamétrica

$$\left\{ y = cx^2 \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$$

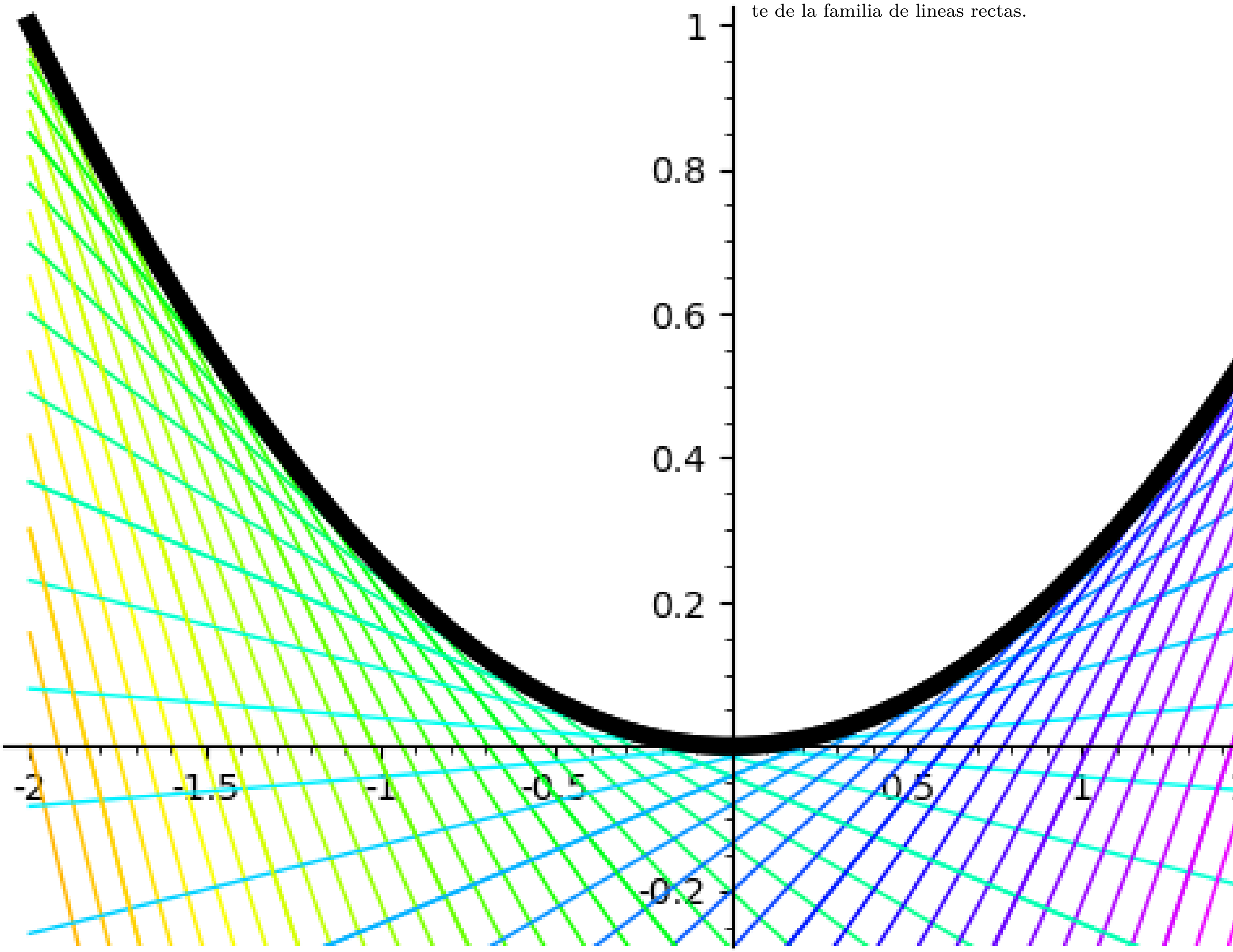


Figura 38: La parábola es la envolvente de la familia de lineas rectas.

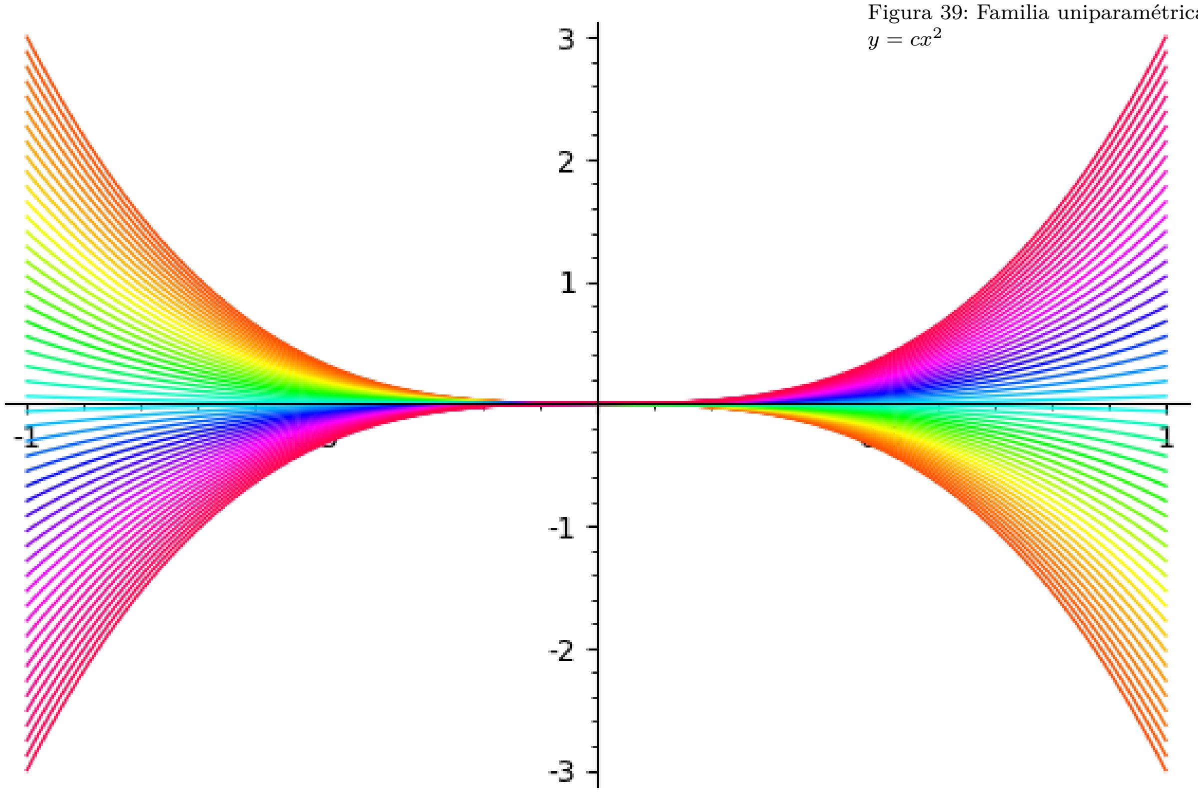


Figura 39: Familia uniparamétrica $y = cx^2$

(b) Obtenga la ecuación diferencial de esta familia

Solución: Inciso (a)
Solución: Inciso (b)

(I) $y = cx^3 \to y' = 3cx^2$

(II) $c = \dfrac{y}{x^3}$

(III) $y' = 3\left(\dfrac{y}{x^3}\right)x^2$

(IV) $y' = \dfrac{3y}{x}$

Problema 380. Encuentre una ecuación diferencial para la familia biparamétrica de cónicas

$$ax^2 + by^2 = 1 \tag{174}$$

Solución. Supongamos que $b \neq 0$.

(I) $2ax + 2byy' = 0$

(II) $a = \dfrac{-byy'}{x}$

(III) $\left(-\dfrac{byy'}{x}\right)x^2 + by^2 = 1$

(IV) $-bxyy' + by^2 = 1$

(V) $-b\left(xyy'' + xy'^2 + yy'\right) + 2byy' = 0$

(VI) $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$

□

(a) Encuentra una solución general para la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$

(b) Traza la gráfica de las soluciones obtenidas en el inciso (a)

(c) Determina la ecuación de la curva particular en el inciso (b), que pasa por el punto $(1, 3)$

Solución: Inciso (a)

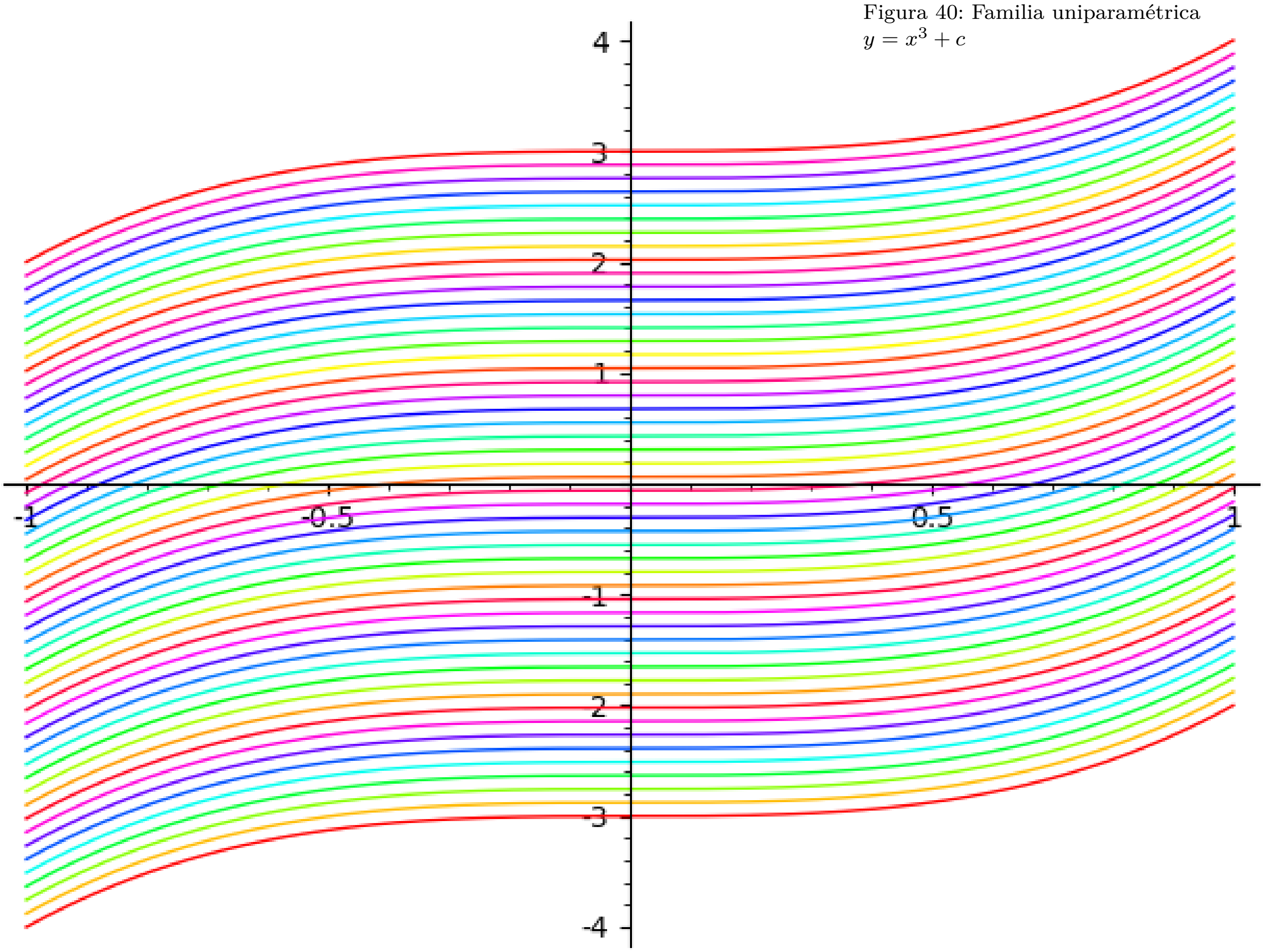
(I) $dy = 3x^2 dx$

(II) $\int dy = \int 3x^2 dx$

(III) $y = x^3 + c$

Solución: Inciso (b)
Inciso (c)

Figura 40: Familia uniparamétrica $y = x^3 + c$



(I) Como la curva pasa por $(1,3)$, entonces

$$x = 1 \to y = 3$$

(II)

$$3 = 1^3 + c \to c = 2$$

(III) $y = x^3 + 2$

Problema 381. Resuelva el problema de condición inicial

$$\begin{cases} y'' = 3x - 2 \\ y(0) = 2 \\ y'(1) = -3 \end{cases} \tag{175}$$

Solución. (I) $y' = \dfrac{3x^2}{2} - 2x + c_1$

(II) $y'(1) = -3 \to -3 = \dfrac{3}{2} - 2 + c_1 \to c_1 = -\dfrac{5}{2}$

(III) $y = \dfrac{x^3}{2} - x^2 - \dfrac{5x}{2} + c_2$

(IV) $y(0) = 2 \to c_2 = 2 \to y = \dfrac{x^3}{2} - x^2 - \dfrac{5x}{2} + 2$

□

Ecuaciones Especiales de Primer Orden

Cualquier ecuación diferencial de primer orden de la *forma normal*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{176}$$

puede ser reescrita en la *forma diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{177}$$

y viceversa.

Separación de variables Una ecuación es *separable* si se puede escribir en la forma.

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \tag{178}$$

En ese caso, su solución está dada por

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = c \tag{179}$$

siempre que $g_1(y)f_2(x) \neq 0$.

Problema 382. Resuelve la ecuación diferencial

$$xdy - ydx = 0$$

Ecuaciones exactas Una ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{180}$$

es *exacta* si existe una función diferenciable $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y) = 0 \tag{181}$$

En ese caso, la solución está dada por

$$U(x, y) = c \tag{182}$$

Un criterio para determinar si una ecuación es exacta es verificar que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{183}$$

Problema 383. Determina si la ecuación

$$xdy - ydx = 0 \tag{184}$$

es exacta.

De manera equivalente, podemos encontrar la solución de la siguiente manera

$$\int M\partial x + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y} \int M\partial x \right) dy = c \tag{185}$$

donde ∂x indica que la integración es realizada únicamente respecto a x, manteniendo y constante.

Problema 384. Demuestra que la ecuación

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0 \tag{186}$$

es exacta y resuélvela.

Factor Integrante Cuando una ecuación no es exacta, en ocasiones se puede encontrar de manera explícita una función $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ llamada *factor integrante* tal que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \tag{187}$$

y por tanto

$$\mu M dx + \mu N dy = 0 \tag{188}$$

es exacta.

$$(a) \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$(b) \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = -d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$(c) \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$$

$$(d) \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}\,d\left\{\ln\frac{x - y}{x + y}\right\}$$

$$(e) \quad \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \tfrac{1}{2}d\{\ln\,(x^2 + y^2)\}$$

Figura 41: Algunos ejemplos de factores integrantes.

Ecuaciones lineales

Diremos que una ecuación es lineal si se puede reescribir en la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{189}$$

En este caso, un factor integrantes está dado por

$$\mu = e^{\int p(x)dx} \tag{190}$$

y la ecuación se puede reescribir como

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu q(x) \tag{191}$$

Entonces,

$$\mu y = \int \mu q(x)dx + c \tag{192}$$

y la solución está dada por

$$y = e^{-\int pdx}\left(\int e^{\int pdx} q(x)dx + c\right) \tag{193}$$

$$= e^{-\int pdx}\int e^{\int pdx} q(x)dx + ce^{-\int pdx} \tag{194}$$

Problema 385. Reescribe la ecuación

$$xdy - ydx = 0 \tag{195}$$

en forma lineal; calcula el factor integrante y resuelve.

Ecuaciones homogéneas de orden cero

Diremos que una ecuación diferencial es *homogénea de orden cero* si se puede reescribir como

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{196}$$

Definimos la variable dependiente $\nu = \frac{y}{x}$, de manera que $y = \nu x$.

Entonces la ecuación diferencial se puede reescribir como

$$v + x\frac{d\nu}{dx} = F(\nu) \tag{197}$$

o de manera equivalente

$$xd\nu + (F(\nu) - v)\,dx = 0. \tag{198}$$

Entonces tiene su solución está dada por

$$\ln|x| = \int \frac{d\nu}{F(\nu) - \nu} + c \tag{199}$$

Problema 386. Reescriba la ecuación

$$xdy - ydx = 0 \tag{200}$$

como una ecuación homogénea de orden cero y resuelva.

Ecuaciones de Bernoulli

Diremos que una ecuación es de Bernoulli si se puede reescribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \tag{201}$$

siempre que $n \neq 0, 1$

En ese caso, hacemos la sustitución $\nu = y^{1-n}$ y la ecuación se reduce a una ecuación lineal, cuya solución está dada por

$$\nu e^{(1-n)\int p dx} = (1-n) \int q e^{(1-n)\int p dx} + c \tag{202}$$

Observación 31. (I) Si $n = 0$, la ecuación ya es lineal sin necesidad de hacer sustitución alguna.

(II) Si $n = 1$, la ecuación se puede reescribir como separable.

Problema 387. Resuelve la ecuación

$$x\frac{dy}{dx} + y = xy^3 \tag{203}$$

Ecuaciones solubles

Diremos que una ecuación diferencial es soluble para y si

$$y = g(x, p) \tag{204}$$

donde $p = y'$.

En ese caso,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{205}$$

o de manera equivalente

$$p = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{206}$$

Resolvemos la ecuación anterior para p

$$G(x, p, c) = 0 \tag{207}$$

y sustituimos en $y = g(x, p)$.

Problema 388. Resuelve la ecuación

$$xp^2 + 2px - y = 0 \tag{208}$$

donde $p = y'$.

Ecuación de Clairaut

Diremos que una ecuación es de Clairaut si se puede reescribir como

$$y = px + F(p) \tag{209}$$

donde $p = y'$

Este es un caso especial del tipo anterior con solución

$$y = cx + F(c) \tag{210}$$

Problema 389. Resuelve la ecuación

$$y = px \pm \sqrt{p^2 + 1} \tag{211}$$

donde $p = y'$.

Reducción de orden

Si una ecuación diferencial es de orden $m > 1$, pero hace falta de forma explícita la variable dependiente y, entonces se puede reducir de orden con la sustitución $y' = p$.

Problema 390. Resuelve la ecuación

$$y'' + 2y' = 4x \tag{212}$$

Problema 391. Resuelve la ecuación

$$1 + yy'' + y'^2 = 0 \tag{213}$$

con la reducción de orden $y' = p$.

Ejemplos

Problema 392. (I) Encuentra la solución general de

$$\left(4x + xy^2\right) dx + \left(y + x^2 y\right) dy = 0 \tag{214}$$

(II) Encuentra la solución particular para $y(1) = 2$.

Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 3y = 8 \\ y(0) = 2 \end{cases} \tag{215}$$

Problema 393. Resuelve la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \sec(y)\tan(x) \tag{216}$$

Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Crecimiento y decaimiento

Sea $N(t)$ la cantidad de algún recurso, sustancia o población que (de-)crece respecto del tiempo.

En este caso $N'(t)$ la tasa de cambio y supondremos que es proporcional a $N(t)$:

$$\frac{dN}{dt} = rN, \tag{217}$$

donde r es la constante de proporcionalidad.

Problema 394. Una persona deposita \$20,000 en una cuenta de ahorros que paga el 5 % de interés anual, compuesto continuamente. Encuentre

1. el monto en la cuenta después de tres años;
2. el tiempo requerido para que la cuenta al doble de su valor, sin contar retiros ni depósitos extras.

Ejemplos de enfriamiento

La ley de enfriamiento de Newton establece que *la tasa de cambio de la temperatura de un cuerpo (respecto del tiempo) es proporcional a la diferencia entre el cuerpo y el medio circundante:*

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_m\right) \tag{218}$$

donde k es una constante (positiva) de proporcionalidad; T es la temperatura del cuerpo; y T_m es la temperatura del medio.

Problema 395. Un cuerpo a una temperatura de 50^oF está colocado en el exterior donde la temperatura es de 100^oF. Si después de 5 minutos la temperatura del cuerpo es 60^oF, encontrar:

1. cuanto le tomará al cuerpo alcanzar una temperatura de 75^oF y
2. la temperatura del cuerpo después de 20 minutos.

Caída de cuerpos

Observación 32 (Segunda ley de Newton)*.* La fuerza neta que actúa en un cuerpo es igual a la razón cambio respecto del tiempo del momento del cuerpo; o para masa constante

$$F = m\frac{dv}{dt} \tag{219}$$

donde F es la fuerza neta en el cuerpo y v es la velocidad del mismo, en el tiempo t.

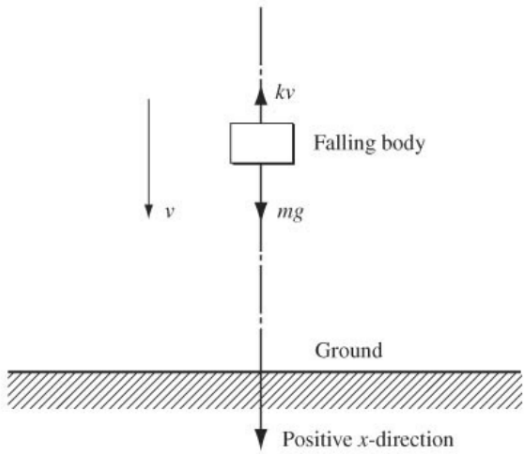


Fig. 7-1

En nuestro modelo, $F = mg - kv$, donde m es la masa, g es la aceleración debida a la gravedad y $k > 0$ es una constante de proporcionalidad debida a la resistencia del aire.

De manera que obtenemos la ecuación diferencial $mg - kv = m\frac{dv}{dt}$, o de manera equivalente

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g. \tag{220}$$

Problema 396. Un cuerpo que pesa `64lbs` es dejado caer desde una altura de `100fts` con velocidad inicial de `10ft/sec`.

Suponga que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del cuerpo. Se sabe que la velocidad límite del cuerpo es de `128ft/sec`. Encuentre:

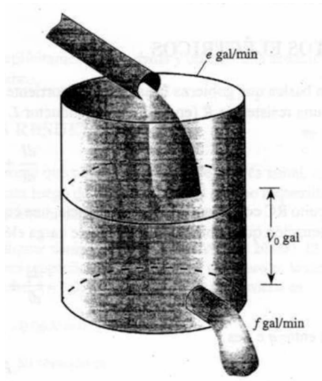
1. una expresión para la velocidad del cuerpo en cualquier tiempo t, y
2. una expresión para la posición del cuerpo en cualquier tiempo.
3. Determine el instante en que choca contra el suelo.

Ejemplos de Disolución

Consideremos un tanque que inicialmente contiene V_0 litros de salmuera, que contiene Q_0 kgs de sal.

Otra solución de salmuera, que contiene b kgs por litro se vierte en el tanque a una tasa o ritmo de e litros/minuto en tanto que simultáneamente, la solución bien agitada abandona el tanque a un ritmo de f litros/minuto.

El problema es encontrar la cantidad de sal en el tanque en respecto del tiempo t.



Por Q denotaremos la cantidad (en kilos) de sal que se encuentra en el tanque en en el tiempo t.

El volumen de salmuera al tiempo t es

$$V(t) = V_0 + e \times t - f \times t. \tag{221}$$

La concentración de sal en el tanque en un momento dado es

$$\frac{Q(t)}{V(t)},$$

de lo que se deduce que la sal sale del tanque a una tasa de

$$f \times \left(\frac{Q(t)}{V(t)}\right) \texttt{kgs/min.}$$

De este modo,

$$\frac{dQ}{dt} = be - f \times \left(\frac{Q}{V_0 + (e-f)t}\right),$$

o de manera equivalente

$$\frac{dQ}{dt} + f \times \left(\frac{Q}{V_0 + (e-f) \times t}\right) = be. \tag{222}$$

Problema 397. Un tanque contiene inicialmente 100 litros de una solución de salmuera con 1 kilo de sal. En $t = 0$ se vierte otra solución de salmuera que contiene 1 kilo de sal por litro a un ritmo de 3 litros/minuto, en tanto que la salmuera bien agitada abandona el tanque al mismo ritmo. Encuentre

1. la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo t, y
2. el tiempo en el cual la mezcla en el tanque contiene 2 kilos de sal.

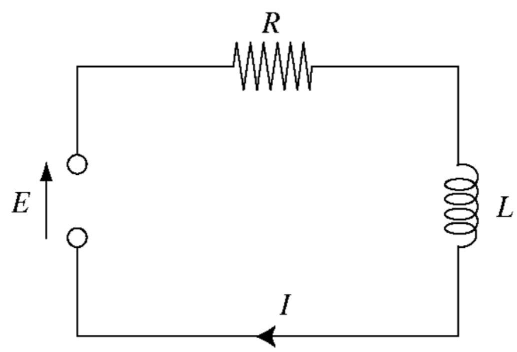
Problema 398. Un tanque de 50 lts contiene inicialmente 10 litros de agua fresca. Al tiempo $t = 0$ se vierte al tanque una solución de salmuera que contiene 1 kilo de sal por litro a un ritmo 4 lts/min, mientras que la mezcla bien agitada abandona el tanque a un ritmo de 2 lts/min. Encuentre

1. la cantidad de tiempo requerido para que ocurra un derrame y;
2. la cantidad de sal en el tanque al momento del derrame.

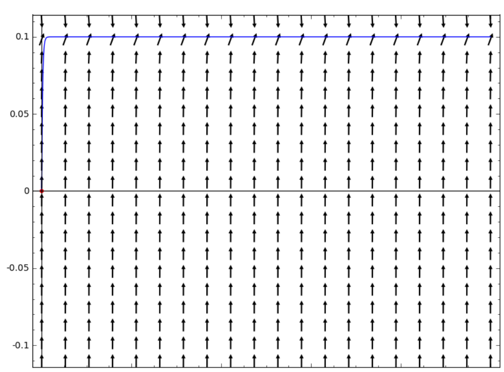
Circuitos Eléctricos

La ecuación básica que gobierna la cantidad de corriente I (en amperios) en un circuito RL simple (fig. IV) consiste en una resistencia R (en ohmios), un inductor L (en henrios) y una fuerza electromotriz (abreviado fem)E (en voltios) es

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L}. \tag{223}$$

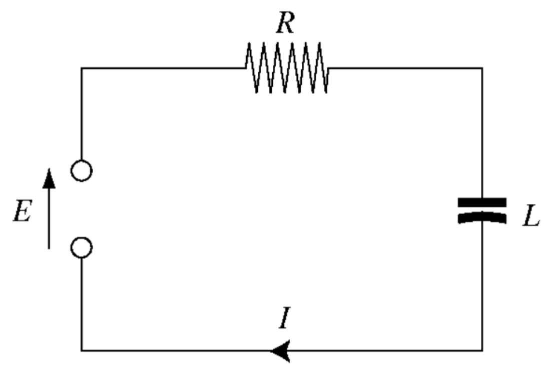


Problema 399. Un circuito RL tiene una fem de 5 voltios, una resistencia de 50 ohmios, una inductancia de 1 henrio y no tiene corriente inicial. Encuentre la corriente de estado estacionario, i.e., cuando $t \to \infty$.



Para un circuito RC consistente en una resistencia, una capacidad C (en faradios), una fem y sin inductancia (fig. IV), la ecuación que gobierna la cantidad de carga eléctrica q (en coulombios) sobre el capacitor es

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} q = \frac{E}{R}. \tag{224}$$



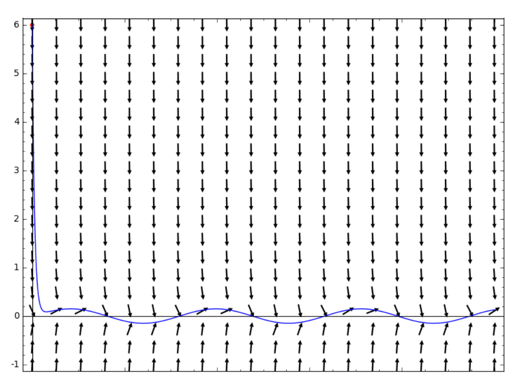
La relación entre q e I es

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{225}$$

Problema 400. Un circuito `RC` tiene una `fem` dada por $400\cos(2t)$, una resistencia de `100 ohms` y una capacitancia de `1/100 faradios`. No existe carga inicial en el capacitor. Encuentre la corriente del circuito en función del tiempo, y determine su comportamiento asintótico.

Problema 401. Un circuito RL tiene una fem (en voltios) dada por $3sin(2t)$, una resistencia de 10 ohmios, una inductancia de 0.5 henrios y una corriente inicial de 6 amperios.

Encuentre la corriente de estado estacionario.



Ecuaciones de Orden Superior

Ecuaciones Diferenciales Lineales

Una ec. dif. lineal de $n-$ésimo orden tiene la forma

$$b_n(x)y^{(n)} + \cdots + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x) \tag{226}$$

donde $g(x)$ y los *coeficientes* $b_j(x)$ dependen *sólo* de x.

Si $g(x) \equiv 0$, diremos que (226) es *homogénea.*[5] también diremos que es de *coeficientes constantes* si cada $b_j(x)$ es precisamente una constante.

[5] Observe que es homogénea en un sentido diferente a la sección previa;

Teorema 16. *Consideremos el problema de valor inicial dado por* (226) *y n condiciones iniciales dadas*

$$y(x_0) = c_0,\, y'(x_0) = c_1,\, \cdots\, y^{(n-1)} = c_{n-1}. \tag{227}$$

Si $g(x)$ y $b_j(x), j = 0, 1, ..., n$ son continuas en algún intervalo $\mathcal{I}$ que contiene a x_0 y si $b_n(x) \neq 0$ en $\mathcal{I}$, entonces el problema de valor inicial dado por (226) *y* (227) *tiene una* única *solución definida a través de $\mathcal{I}$.*

Cuando las condiciones en $b_n(x)$ en el teorema 16 se satisfacen, podemos dividir (226) y obtenemos

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_0(x)y = \phi(x) \tag{228}$$

donde

$$a_j(x) = \frac{b_j(x)}{b_n(x)},\, j = 0, 1, \cdot, n-1$$

y $\phi(x) = \frac{g(x)}{b_n(x)}$.

Definimos el operador diferencial $L(y)$ por

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_0(x)y \tag{229}$$

donde $a_i(x)$, $i = 0, 1, ..., n-1$, son continuas en un intervalo de interés.

Entonces (228) puede reescribirse como

$$L(y) = \phi(x), \tag{230}$$

y en particular, una ec. dif. lineal homogénea se puede reescribir como

$$L(y) = 0 \tag{231}$$

Soluciones Linealmente Independientes

Un conjunto de funciones

$$\{y_1(x), ..., y_n(x)\}$$

es *linealmente independiente* en $a \leq x \leq b$ si existe un conjunto de constantes

$$\{c_1, ..., c_n\}$$

no todas iguales a cero (es decir, al menos una de estas debe ser diferente de cero) tales que

$$c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \equiv 0 \tag{232}$$

en $a \leq x \leq b$.

Problema 402. El conjunto

$$\{x, 5x, 1, \sin(x)\}$$

es linealmente dependiente en $\mathbb{R}$ ya que con las constantes

$$c_1 = -5,\ c_2 = 1,\ c_3 = 0,\ c_4 = 0,$$

se satisface (232):

$$-5 \cdot x + 1 \cdot 5x + 0 \cdot 1 + 0 \cdot \sin(x) = 0.$$

Observación 33. El conjunto

$$c_1 = \cdots = c_n = 0$$

siempre resuelve (232). De hecho, *si es la única solución* diremos que $\{y_i(x)\}_{i=1,...,n}$ es *linealmente independiente.*

La ec. dif. lineal homogénea de orden n $L(y) = 0$ siempre tiene n soluciones linealmente independientes. Si $y_1(x), ..., y_n(x)$ representan tales soluciones, entonces la solución general de $L(y) = 0$ es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x) \tag{233}$$

donde $c_1, ..., c_2$ son constantes arbitrarias.

El Wronskiano

El *wronskiano* de un conjunto de funciones

$$\{z_1(x), ..., z_n(x)\}$$

en el intervalo $a \leq x \leq b$, (que tengan al menos $n-1$ derivadas en dicho intervalo) es el determinante

$$W(z_1, ..., z_n) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1' & z_2' & \cdots & z_n' \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \cdots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Teorema 17. *1. Si el Wronskiano de un conjunto de n funciones definidas en un intervalo $a \leq x \leq b$ es diferente de cero, para al menos en un punto en este intervalo, entonces el conjunto de funciones es linealmente independiente.*

2. Si el Wronskiano es identicamente cero *en dicho intervalo y cada uno de las funciones es una* solución de la misma ecuación diferencial*, entonces el conjunto de funciones es linealmente dependiente.*

Observación 34. El teorema 17 no es concluyente cuando el wronskiano es identicamente cero, pero las funciones no son soluciones de una misma ecuación diferencial.

Ecuaciones No Homogeneas

Sea y_p cualquier solución particular de la ecuación (230) y y_h la solución *general* de la ecuación homogénea asociada $L(y) = 0$, (a y_h se le llama solución complementaria).

Teorema 18. *La solución general de la ecuación $L(y) = \phi(x)$ es $y = y_p + y_h$.*

Ejemplos

Problema 403.
- Encuentre el wronskiano de $\left\{e^x, e^{-x}\right\}$.
- Determine si el conjunto es linealmente independiente en $(-\infty, +\infty)$.
- Verifique directamente la definición.

Problema 404.
- Encuentre el wronskiano de $\{\sin(3x), \cos(3x)\}$.
- Determine si el conjunto es linealmente independiente en $(-\infty, +\infty)$.
- Verifique directamente la definición.

Problema 405.
- Encuentre el wronskiano de $\left\{x, x^2, x^3\right\}$.
- Determine si el conjunto es linealmente independiente en $(-\infty, +\infty)$.
- Verifique directamente la definición.

Problema 406.
- Encuentre el wronskiano de $\{1 - x, 1 + x, 1 - 3x\}$.
- Verifique directamente si el linealmente independiente a partir de la definición.
- Realice nuevamente el ejercicio, sabiendo que las funciones son solución de la ecuación $y'' = 0$.

Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes

La ecuación Característica

Para la ec. dif.

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{234}$$

con a_1, a_0 constantes, asociaremos la ec. algebráica

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \tag{235}$$

la cual se conoce como *ecuación característica* de (234).

Problema 407. La ecuación característica de

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

es

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0;$$

mientras que la ecuación característica de

$$y'' - 2y' + y = 0$$

es

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Toda ecuación característica se puede factorizar de la siguiente manera

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0. \tag{236}$$

La Solución General

La solución general de (234) se obtienen a partir de las raices de (236); consideraremos los siguientes 3 casos.

Caso 1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{237}$$

Si $\lambda_2 = -\lambda_1$, (237) se puede reescribir como

$$y = k_1 \cosh(\lambda_1 x) + k_2 \sinh(\lambda_2 x).$$

Problema 408. Resuelva

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Caso 2. $\lambda = a \pm ib \in \mathbb{C}, b \neq 0.$

En este caso, *necesariamente* $\lambda_2 = a - ib$; y la solución esta dada por

$$y = d_1 e^{(a+ib)x} + d_2 e^{(a-ib)x}; \tag{238}$$

que es algebraicamente equivalente a

$$y = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx). \tag{239}$$

Problema 409. Resuelva

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Caso 3. $\lambda_1 = \lambda_2$.

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}. \tag{240}$$

Problema 410. Resuelva

$$\begin{cases} 100\dfrac{d^2u}{dt^2} - 20\dfrac{du}{dt} + u = 0 \\ u(0) = 2,\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

Problema 411. Resuelva

$$y'' - 7y' = 0.$$

Problema 412. Resuelva

$$y'' - 5y = 0.$$

Problema 413. Vuelva a escribir el problema 412 en términos de funciones hiperbólicas.

Problema 414. Resuelva

$$\ddot{y} + 10\dot{y} + 21y = 0.$$

Problema 415. Resuelva

$$y'' + 4y = 0.$$

Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de $n-$ésimo Orden con Coeficientes Constantes

La ecuación característica de la ecuación diferencial

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{241}$$

con coeficientes constantes es

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{242}$$

La ecuación característica de

$$y^{(4)} - 3y''' + 2y'' - y = 0$$

es

$$\lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 - 1 = 0.$$

La solución general

Si las soluciones de la ecuación característica

$$\lambda_1, ..., \lambda_n$$

son todas distintas, la solución es

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + ... + c_n e^{\lambda_n x}. \tag{243}$$

Diremos que una raíz λ_k tiene multiplicidad p si $(\lambda - \lambda_k)^p$ es factor de la ecuación característica, pero $(\lambda - \lambda_k)^{p+1}$ no.

En este caso, podemos asociar p soluciones linealmente independiente con λ_k :

$$e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, ..., x^{p-1}e^{\lambda_k x}.$$

Ejemplos

Problema 416. Resuelva

$$\begin{cases} y''' + y' = 0 \\ y(0) = 3, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \end{cases}$$

Problema 417. Resuelva

$$\begin{cases} y^{(4)} - 2y^{(3)} + 6y^{(2)} - 10y^{(1)} + 5y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 0. \end{cases}$$

Ejemplos

Problema 418. Resuelva

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Problema 419. Resuelva

$$y^{(4)} - 9y'' + 20y = 0.$$

Problema 420. Resuelva

$$y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0.$$

Problema 421. Resuelva

$$y^{(4)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0.$$

Problema 422. Resuelva

$$\frac{d^5P}{dt^5} - \frac{d^4P}{dt^4} - 2\frac{d^3P}{dt^3} + 2\frac{d^2P}{dt^2} + \frac{dP}{dt} - P = 0.$$

Método de Coeficientes Indeterminados

Por el teorema 18, la solución de $L(y) = 0$ está dada por la solución particular y_p más la solución general y_h, la cuál es la solución de la ecuación lineal homogénea $L(y) = 0$.

En esta sección, aprenderemos a obtener y_p, una vez que y_h es conocida, a través del *coeficientes indeterminados.*

Forma simple del método

Observación 35. Para aplicar este método a la ecuación diferencial $L(y) = \phi(x)$, ϕ *y TODAS sus derivadas* deben estar generadas por un conjunto *finito* de funciones linealmente independientes

$$\{y_1(x), ..., y_n(x)\}.$$

En ese caso, comenzaremos suponiendo que $y_p(x)$ es una combinanción lineal de $y_1(x), ..., y_n(x)$:

$$y_p(x) = A_1 y_1(x) + ... + A_n y_n(x)$$

donde $A_1, A_2, ..., A_n$ son constantes.

A continuación, revisaremos algunos casos comunes, en los que podemos aplicar dicho método.

Caso $\phi(x) = p_{n(x)}$

Si suponemos que $\phi(x)$ es un polinomio de grado n, entonces

$$y_p(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_1 x + A_0. \tag{244}$$

Recordemos que la solución general de la ecuación $y'' - y' - 2y = 0$ está dada por...

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

Problema 423. Resuelva

$$y'' - y' - 2y = 4x^2$$

Caso $\phi(x) = ke^{\alpha x}$

Si suponemos que $\phi(x)$ es una función exponencial, entonces

$$y_p(x) = Ae^{\alpha x}. \tag{245}$$

Problema 424. Resuelva

$$y'' - y' - 2y = e^{3x}.$$

Caso $\phi(x) = ke^{\alpha x}$

Si suponemos que $\phi(x)$ es una función exponencial, entonces

$$y_p(x) = Ae^{\alpha x}. \tag{246}$$

Caso $\phi(x) = k_1 \sin(\beta x) + k_2 \cos(\beta x)$

Si suponemos que $\phi(x)$ es una función senoidal, entonces

$$y_p(x) = A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x) \tag{247}$$

Problema 425. Resuelva

$$y'' - y' - 2y = \sin(2x).$$

Generalizaciones

Si $\phi(x) = e^{\alpha x} p_n(x)$, entonces

$$y_p = e^{\alpha x}\left(A_n x^n + ... + A_1 x + A_0\right). \tag{248}$$

Problema 426. Resolver

$$y'' = e^{-x} x^2$$

Si $\phi(x) = ke^{\alpha x}\sin(\beta x)$ o $\phi(x) = ke^{\alpha x}\cos(\beta x)$, entonces

$$y_p(x) = A_0 e^{\alpha x}\sin(\beta x) + B_0 e^{\alpha x}\cos(\beta x). \tag{249}$$

Problema 427. Resuelva

$$y'' = e^{-x}\cos(3x)$$

Aun más, si $\phi(x) = ke^{\alpha x}\sin(\beta x)p_n(x)$ o $\phi(x) = ke^{\alpha x}\cos(\beta x)p_n(x)$, entonces

$$\begin{aligned} y_p(x) = A_0 e^{\alpha x}\sin(\beta x)\left(A_n x^n + ... + A_1 x + A_0\right) \\ + B_0 e^{\alpha x}\cos(\beta x)\left(B_n x^n + ... + B_1 x + B_0\right). \end{aligned} \tag{250}$$

Observación 36. Si cualquier término de y_p, salvo por los términos constantes, es también un término de y_h, entonces y_p *debe ser modificada* multiplicandola por x^m.

Aquí m es el entero positivo más pequeño tal que el producto $x^m y_p$ no tiene términos en común con y_h.

Problema 428. Resuelve la ecuación

$$y'' - y' - 2y = \frac{1}{2}e^{-x}$$

Observación 37. Si $\phi(x)$ no tiene alguna de las formas anteriores o la ecuación diferencial no tiene coeficientes constantes, este método no se puede aplicar.

Principio de superposición

Consideremos la ecuación diferencial

$$L[y] = \phi_1(x) + \phi_2(x) \tag{251}$$

donde L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes de la forma

$$L[y] = y^{(n)} + ... + a_1 y' + a_0 y$$

Digamos que $y_h(x)$ es la solución de la ecuación homogénea asociada, es decir,

$$L[y_h] = 0,$$

mientras que $y_{p1(x)}$ resuelve

$$L[y_{p1}] = \phi_1(x)$$

y $y_{p2}(x)$,

$$L[y_{p2}] = \phi_2(x).$$

Entonces $y(x) = y_h(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$ resuelve la ecuación

$$L[y] = \phi_1(x) + \phi_2(x).$$

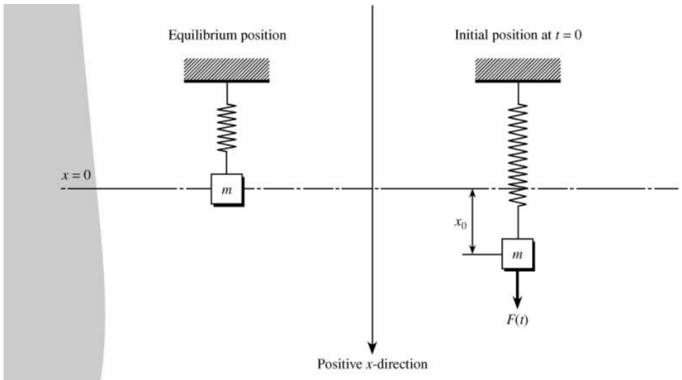
Problema 429. Resuelve la ecuación

$$y'' - y' - 2y = 2e^{3x} - 3t^2$$

Aplicaciones

Resortes

Resortes



img030601.png: 0x0 pixel, 300dpi, 0.00x0.00 cm, bb=

Ley de Hooke

La fuerza restauradora F de un resorte es igual y opuesta a las fuerzas aplicadas al mismo y proporcional a la extensión (contracción) l del resorte de la fuerza aplicada, es decir, $F = -kl$, donde k indica la constante de proporcionalidad, generalmente llamada constante del resorte.

A partir de la segunda ley de Newton, tenemos que

$$m\ddot{x} = -kx - a\dot{x} + F(t),$$

o de manera equivalente

$$\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}, \tag{252}$$

donde a, k son constantes positivas de proporcionalida; $F(t)$ es una fuerza externa; y sujeta a condiciones iniciales

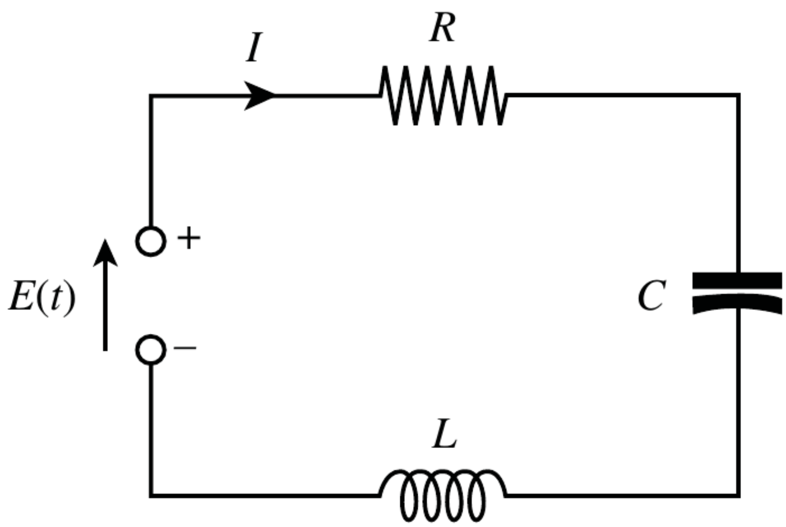
$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0. \tag{253}$$

Problema 430. Una masa de $2kg$ se suspende de un resorte con una constante conocida de $10N/m$, y se le permite llegar a una posición de reposo. Luego se le pone en movimiento dándole una velocidad inicial de $150cm/seg$. Encuentre una expresión para el movimiento de la masa, suponiendo que no hay resistencia del aire.

Problema 431. Encuentre la frecuencia circular; la frecuencia natural y el periodo el oscilador armónico simple del problema 430.

Círcuitos eléctricos

- Cantidad de corriente I (en amperios)
- Resistencia R (en ohmios)



- Inductor L (en henrios)
- Fuerza electromotriz (abreviado fem)E (en voltios)
- Capacidad C (en faradios)

La ley del bucle de Kirchhoff La suma algebraica de las caídas de voltaje en un circuito eléctrico cerrado simple es cero.

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}q - E(t) = 0$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$
$$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}E(t)$$

$$q(0) = q_0$$
$$I(0) = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} = I_0$$

Problema 432. Un circuito RCL conectado en serie tiene $R = 180$ ohmios, $C = 1/280$ faradio, $L = 20$ henries, y una aplicada voltaje $E(t) = 10\operatorname{sen} t$.

Suponiendo que no hay carga inicial en el capacitor, sino una corriente inicial de 1 amperio en $t = 0$ cuando se aplica la tensión por primera vez, encuentre la carga subsiguiente en el capacitor.

Variación de parametros

La técnica de variación de parametros es otra forma de encontrar una solución particular de la ecuación diferencial:

$$L(y) = \phi(x) \tag{254}$$

una vez que conocemos la solución de $L(y) = 0$.

Recordemos que la solución de $L(y) = 0$ está dada por

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x) \tag{255}$$

El Método

Una solución particular de $L(y) = \phi(x)$ tiene la forma

$$y_p(x) = \nu_1(x) \cdot y_1(x) + ... + \nu_n(x) \cdot y_n(x) \tag{256}$$

donde $y_i(x),\ i = 1, 2, ..., n$ están dadas por (434) y $\nu_i(x),\ i = 1, 2, ..., n$ son funciones por determinar.

Para esto, primero resolvemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \nu_1' y_1 + ... + \nu_n' y_n & = 0 \\ \nu_1' y_1' + ... + \nu_n' y_n' & = 0 \\ ... & \\ \nu_1' y_1^{(n-1)} + ... + \nu_n' y_n^{(n-1)} & = \phi(x) \end{cases} \tag{257}$$

Posteriormente, integramos cada $\nu_i'(x)$ para obtener $\nu(x)$.

Como $y_1(x), ..., y_n(x)$ son soluciones linealmente independientes de la misma ecuación $L(y) = 0$, su wronskiano nunca se anula (teorema 17), y esto significa que el sistema (257) tiene determinante siempre diferente de cero, y por tanto se puede resolver de manera única para $v_1'(x), ..., v_n'(x)$.

Observación 38. El método de variación de parametros puede ser aplicado a todas las ecuaciones diferenciales lineales, y por tanto tiene un mayor alcance que el método de coeficientes indeterminados.

Sin embargo, si ambos métodos son aplicables, es preferible el de coeficientes indeterminados por ser más eficiente.

Además, en algunos casos es imposible obtener una forma cerrada de la integral de $v_i'(x)$, y otros métodos deben ser aplicados.

Ejemplos

Problema 433. Resuelva $y''' + y' = \sec(x)$

Problema 434. Resuelva $y''' - 3y'' + 2y' = \dfrac{e^x}{1 + e^{-x}}$

Problema 435. Resuelva $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

Ejemplos de valor inicial

Problema 436. Resuelva

$$y'' - y' - 2y = 4x^2, \; y(0) = 1, y'(0) = 4.$$

Problema 437. Resuelva

$$\begin{cases} y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0, \\ y(\pi) = 0, y'(\pi) = 0, y''(\pi) = 1. \end{cases}$$

Transformada de Laplace

La Transformada de Laplace

Definición

Sea $f(x)$ una función definida en $0 \leq x < \infty$ y sea s una variable arbitraria. La *Transformada de Laplace* de $f(x)$, denotada ya sea por $\mathcal{L}\{f(x)\}$ o por $F(s)$ está dada por

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx, \tag{258}$$

siempre y cuando dicha integral converja.

La convergencia ocurre cuando el límite

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-sx} f(x)dx \tag{259}$$

existe.

Observación 39. 1. Si el límite anterior no existe, la integral impropia diverge y $f(x)$ no tiene transformada de Laplace.

2. Cuando evaluamos la integral en (259), la variable s deberá tratarse como una constante debido a que la integración es respecto de x.

En esta sección usaremos la convención de que una función se denota por minúsculas, mientras que su transformada se denotará por la correspondiente mayúscula:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s), \mathcal{L}\{g(x)\} = G(s).$$

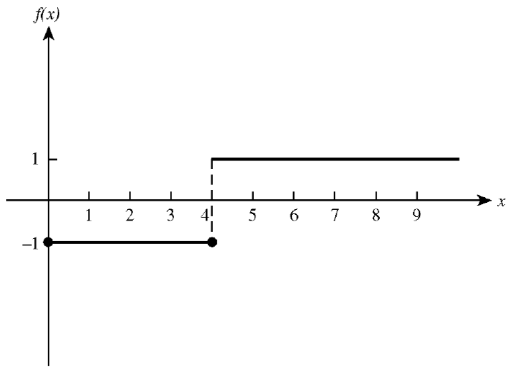
De manera similar, a, c_1, c_2 serán constantes arbitrarias.

Ejemplos

Problema 438. Encuentre la Transformada de Laplace de $f(x) = 1$.

Problema 439. Encuentre la Transformada de Laplace

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$



Algunas fórmulas básicas

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \texttt{ n natural} \tag{260}$$

$$\mathcal{L}\left\{\sin(kt)\right\} = \frac{k}{s^2+k^2} \tag{261}$$

$$\mathcal{L}\left\{\cos(kt)\right\} = \frac{s}{s^2+k^2} \tag{262}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a} \tag{263}$$

Linealidad

$$\mathcal{L}\left\{c_1 f(x) + c_2 g(x)\right\} = c_1 F(s) + c_2 G(s) \tag{PTL1}$$

Problema 440. Encuentre la Transformada de Laplace de $f(x) = 3 + 2x^2$.

Problema 441. Encuentre la Transformada de Laplace de

$$f(x) = 5\sin(3x) - 17e^{-2x}$$

Problema 442. Encuentre la Transformada de Laplace de

$$f(x) = 2\sin(x) + 3\cos(2x).$$

Problema 443. Encuentre la Transformada de Laplace de

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 4.$$

Propiedades

Propiedades de la Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{e^{ax} f(x)\right\} = F(s-a) \tag{PTL2}$$

$$\mathcal{L}\left\{x^n f(x)\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(F(s)\right) \tag{PTL3}$$

Problema 444. Encuentre la Transformada de Laplace de

$$g(x) = xe^{4x}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^n e^{at}\right\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \tag{264}$$

Problema 445. Encuentre la Transformada de Laplace de

$$g(x) = e^{-2x}\sin(5x)$$

Problema 446. Encuentre la Transformada de Laplace de

$$g(x) = x\cos(\sqrt{7}x).$$

Problema 447. Encuentre la Transformada de Laplace de

$$g(x) = e^{-x}x\cos(2x).$$

Transformada Inversa de Laplace

Definición

Una *transformada inversa de Laplace* de $F(s)$, denotada por $\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$, es una función $f(x)$ tal que

$$\mathcal{L}\left\{f(x)\right\} = F(s).$$

La manera más práctica de encontrar las inversas es identificar, en una tabla de transformadas, la función $F(s)$ como una transformada de Laplace de una función $f(x)$.

Generalmente, esto se hace manipulando algebraicamente $F(s)$.

Manipulación de denominadores

Para poder encontrar transformadas inversas de Laplace, necesitaremos manipular expresiones algebraicas.

Métodos algebraicos Especialmente, necesitaremos dos técnicas:

- Complemento de cuadrados.
- Fracciones parciales.

Complemento de cuadrados Si $p(x) = ax^2 + bx + c$, entonces

$$p(x) = a\left(x-h\right)^2 + k,$$

donde $h = -\dfrac{b}{2a}$ y $k = p(h)$.

Fracciones parciales Otro método útil que se recomienda repasar es la descomposición en fracciones parciales.

Linealidad

Propiedad 32. *Si* $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$ *y* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F(s) + c_2G(s)\} = c_1f(x) + c_2g(x).$$

Ejemplos

Problema 448. Encontrar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$

Problema 449. Encontrar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-8}\right\}$

Problema 450. Encontrar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6}\right\}$

Problema 451. Encontrar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s}{(s^2+1)^2}\right\}$

Problema 452. Encontrar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-9}\right\}$

E.D. Lineales con Coeficientes Constantes

Transformadas de Laplace de Derivadas

Denotaremos $\mathcal{L}\{y(x)\}$ por $Y(s)$. Bajo condiciones muy generales, la transformada de Laplace de la $n-$ésima derivada, $n = 1, 2, 3...$ de $y(x)$ está dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{d^ny}{dx^n}\right\} =& s^nY(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots \\ & - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0).\end{aligned} \tag{265}$$

Si las condiciones iniciales en $y(x)$ en $x = 0$ está dada por

$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1, \cdots,\ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}, \tag{266}$$

entonce (267) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{d^ny}{dx^n}\right\} =& s^nY(s) - s^{n-1}c_0 - s^{n-2}c_1 - \cdots \\ & - sc_{n-2} - c_{n-1}.\end{aligned} \tag{267}$$

Casos Especiales

$$\mathcal{L}\left\{y'(x)\right\} = sY(s) - c_0 \tag{268}$$

$$\mathcal{L}\left\{y''(x)\right\} = s^2Y(s) - c_0s - c_1. \tag{269}$$

Ejemplos

Problema 453. Resuelva
$$\begin{cases} y' - 5y = 0; \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Problema 454. Resuelva
$$\begin{cases} y' - 5y = e^{5x}; \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Problema 455. Resuelva
$$\begin{cases} y' + y = \sin(x); \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Problema 456. Resuelva
$$\begin{cases} y'' + 4y = 0; \\ y(0) = 2,\, y'(0) = 2. \end{cases}$$

Problema 457. Resuelva
$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 4x^2; \\ y(0) = 1,\, y'(0) = 4. \end{cases}$$

Problema 458. Resuelva
$$\begin{cases} y'' - 3y' + 4y = 0; \\ y(0) = 1,\, y'(0) = 5. \end{cases}$$

Transformada de funciones discontinuas

Convolución

Convolución

La convolución de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se define como
$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt. \tag{270}$$

Teorema 19.
$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x) \tag{271}$$
$$f(x) * (g(x) + h(x)) = f(x) * g(x) + f(x) * h(x). \tag{272}$$

Teorema 20 (Teorema de Convolución)**.** *Si* $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ *y* $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$, *entonces*
$$\mathcal{L}\{f(x) * g(x)\} = F(s)G(s).$$

De los teoremas anteriores, obtenemos
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(x) * g(x) = g(x) * f(x). \tag{273}$$

Función Escalón

La función escalón se define como

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Al hacer un cambio de coordenadas $x' = x - c$, obtenemos

$$u(x-c) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c. \end{cases}$$

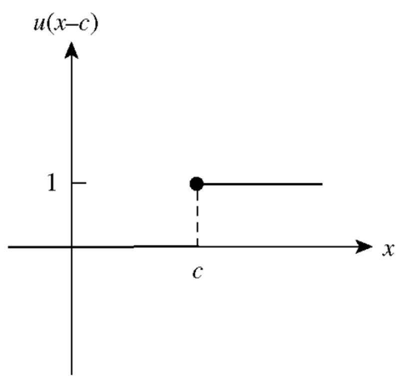


Figura 42: Función Escalón $u(x-c)$

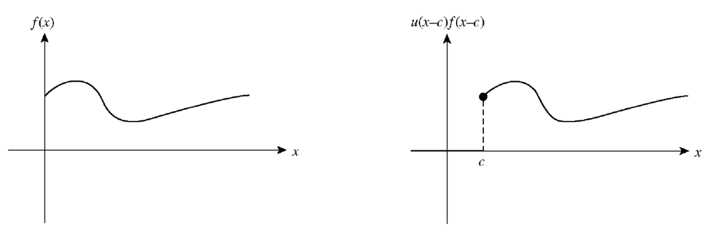
Teorema 21.

$$\mathcal{L}\left\{u(x-c)\right\} = \frac{1}{s}e^{-cs}.$$

Traslaciones

Para cualquier función $f(x)$, definida para $x \geq 0$, obtenemos

$$u(x-c)f(x-c) = \begin{cases} 0 & x < c \\ f(x-c) & x \geq c. \end{cases}$$



Teorema 22. *Si* $F(s) = \mathcal{L}\left\{f(x)\right\}$, *entonces*

$$\mathcal{L}\left\{u(x-c)f(x-c)\right\} = e^{-cs}F(s).$$

De manera inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-cs}F(s)\right\} = u(x-c)f(x-c).$$

Ejemplos

Problema 459. Sean $f(x) = e^{3x}$ y $g(x) = e^{2x}$.

1. Calcule $f(x) * g(x)$;
2. calcule $g(x) * f(x)$;
3. verifique el teorema 19.

Problema 460. Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 5s + 6}\right\}$$

por convoluciones.

Problema 461. Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2 - 1}\right\}$$

por convoluciones.

Problema 462. Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2 + 4\right)}\right\}$$

por convoluciones.

Problema 463. Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s - 1\right)^2}\right\}$$

por convoluciones.

Problema 464. Encuentre $\mathcal{L}\left\{g(x)\right\}$ si

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ \left(x - 4\right)^2 & x \geq 4. \end{cases}$$

Problema 465. Encuentre $\mathcal{L}\left\{g(x)\right\}$ si

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ x^2 & x \geq 4. \end{cases}$$

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Proyecto final: Ecuaciones diferenciales

Teoría

Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$x'(t) = cx(t).$$

Esta ecuación describe un modelos donde la razón de crecimiento instantaneo x' es propocional al estado del sistema, en un momento determinado. Aplicaciones de este modelo incluyen:

1. Crecimiento poblacional;

2. decaimiento radioactivo;

3. la Ley de Newton, para la temperatura de un cuerpos; y

4. interés compuesto.

De hecho, si conocemos la condición *inicial,* es decir, el valor del sistema en el tiempo $t = 0$, podemos encontrar una *única solución al problema.*

Teorema 23. *La única solución* continuamente diferenciable *a la ecuación diferencial*

$$x' = cx,$$

con condición incial $x(0) = x_0$ *es*

$$x(t) = e^{tc}x_0. \tag{274}$$

Es fácil comprobar que (274) es un solución derivando de manera usual; que esta sea la *única solución* con derivada continua es resultado del *teorema fundamental de las ecuaciones diferenciales ordinarias.*

Sin embargo, este modelo solo describe un sistema con una cantidad que evoluciona con el tiempo, ¿como modelar un sistema con más cantidades?

Podemos pensar que existen cantidades $x_1(t), ..., x_n(t)$ de manera que la razón de cambio de cada una sea *combinación lineal* de cada una de los estados del sistema, es decir, para $k = 1, ..., n$:

$$x_k'(t) = a_{k,1}x_1(t) + ... + a_{k,n}x_n(t).$$

Esto es una manera de generalizar el hecho de que para una sola cantidad, su razón de cambio instantanea sea *proporcional*.

De manera matricial, podemos escribir este sistema como

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & ... & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Si definimos

$$\begin{cases} x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \\ x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} \\ A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & ... & a_{n,n} \end{bmatrix} \end{cases}$$

el sistema anterior se puede reescribir como

$$x'(t) = Ax(t).$$

Note como se parece este sistema al de una sola variable. De hecho, así como podemos definir e^a para $a \in \mathbb{R}$, es posible definir e^A, donde A es una matriz $n \times n$. Para esto, necesitamos la siguiente definición de la función exponencial.

Definición 49.

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

Esta definición tiene sentido para matrices porque $A^k = A \cdots A$ un número k de veces.

Teorema 24. *La única solución de la ecuación diferencial* vectorial

$$x'(t) = Ax(t),$$

para $x(t) \in \mathbb{R}^n$ *para cada* $t \in \mathbb{R}$ *y* $A \in M_n$, *con condición inicial*

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{n,0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

es

$$x(t) = e^{tA} x_0.$$

Sin embargo, calcular la n-ésima potencia de una matriz puede ser demasiado complicado... excepto para matrices diagonales.

Propiedad 33. *Si*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal, entonces

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & & \\ 0 & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Demostración. La demostración se puede hacer por inducción. □

Supongamos que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una tranformación lineal, cuya representación matricial A (en la base estandar E) es diagonalizable y P es la matriz de paso de la base F de vectores propios a la base E. Entonces si D es la matriz que representa la misma transformación en la base F, sabemos que

$$A = PDP^{-1}.$$

Por inducción, no es difícil demostrar que

$$A^n = PD^nP^{-1},$$

y por tanto, multiplicando por un escalar $t \in \mathbb{R}$,

$$tA^n = P(tD^n)P^{-1}.$$

Antes de continuar, recordemos que por propiedades distributivas de las matrices

$$R(M+N)S = RMS + RNS,$$

o de manera más generalizar

$$\sum (RM_kS) = R\left(\sum M_k\right)S.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= \sum_{k\geq 0} \frac{(tA)^k}{k!} \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{\left(P(tD^n)P^{-1}\right)^k}{k!} \\
&= P\left(\sum_{k\geq 0} \frac{(tD^n)^k}{k!}\right) P^{-1} \\
&= Pe^{tD}P^{-1}.
\end{aligned}$$

Basta entonces encontrar e^{tD}. Pero como vimos, calcular las potencias de D no es dificil.

$$\begin{aligned}
e^{tD} &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(tD)^k \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} (t\lambda_1)^k & 0 & & \\ 0 & (t\lambda_2)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & (t\lambda_n)^k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(t\lambda_1)^k & 0 & & \\ 0 & \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(t\lambda_2)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(t\lambda_n)^k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & & \\ 0 & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

¡Listo!

Ejemplos

Problema 466. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

con condiciones inciales

$$x(0) = 0,\, y(0) = 3.$$

Solución. Rescribimos $x = x_1, y = x_2$ y podemos escribir el sistema de forma matricial, en la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Usando `WxMaxima`, podemos encontrar los valores y vectores propios.

```
(%i1)   A: matrix(
         [-1,0],
         [1,2]
        );
```

(%o1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

```
(%i2)   eigenvectors(%);
```

(%o2) $[[[-1,2],[1,1]],[[[1,-\dfrac{1}{3}]],[[0,1]]]]$

Esto quiere decir que $\lambda_1 = -1$ es un valor propio con vector propio

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

mientras que $\lambda_2 = 2$ también lo es, con vector propio

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observación 40. Como tenemos dos vectores propios en un espacio de dimensión dos, basta verificar que son linealmente independiente, para saber que forman una base. Para comprobar que son linealmente independientes, formamos una matriz que tenga como columnas a estos vectores y verificamos que esta matriz es invertible.

```
(%i4)   P: matrix(
         [1,0],
         [-1/3,1]
        );
```

(%o4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i5)   determinant(%);
```

(%o5) 1

Entonces, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ es una base de $\mathbb{R}^2$, de vectores propios de A. Por tanto A es diagonalizable. Como P es la matriz de cambio de la base F a la base estandar E, usamos la siguiente identidad

$$D = P^{-1}AP,$$

para encontrar la matriz diagonalizada D. Denotaremos a P^{-1} por Q.

(%i6) `Q:invert(P);`

(%o6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

(%i7) `D:Q.A.P;`

(%o7) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Entonces, sabemos que

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix},$$

y podemos hallar e^{tA} con la ecuación

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}.$$

Podemos hacer los cálculos en `WxMaxima` de la siguiente manera

```
(%i8) matrix(
       [%e^(-t),0],
       [0,%e^(2*t)]
      );
```

(%o8) $\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2\,t} \end{pmatrix}$

(%i9) `P.%o8.Q;`

(%o9) $\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{e^{2\,t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} & e^{2\,t} \end{pmatrix}$

Es decir,

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{e^{2\,t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} & e^{2\,t} \end{bmatrix}$$

Las condiciones inciales se pueden escribir en forma vectorial como

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

y por tanto, nuestra solución sera

$$\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{e^{2\,t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} & e^{2\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Realizamos los cálculos en `WxMaxima` de la siguiente manera. Primero introducimos el vector como si fuera una matriz de dos reglos y una columnas

```
(%i10) matrix(
        [0],
        [3]
       );
```

(%o10) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

y posteriormente hacemos la multiplicación, recordando que `WxMaxima` le asigno la etiqueta `%o9` a nuestra matriz e^{tA}, y la etiqueta `%o10` a nuestro vector de condiciones inciales.

```
(%i11) %o9.%o10;
```

(%o11) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3\, e^{2\, t} \end{pmatrix}$

Por tanto, la solucion a nuestro sistema de ecuaciones diferenciales es

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3e^{2t} \end{bmatrix}.$$

□

Proyecto final

Resuelva los siguientes sistema de ecuaciones diferenciales, como se hizo en el ejemplo anterior. Debe plantear de manera correcta todos los pasos, indicar los cálculos que hizo en `WxMaxima` y escribiendo de manera clara sus conclusiones. El proyecto puede ser elaborado por equipos de a lo más tres personas, y debe ser entregado en computadora el día del examen final.[6]

[6] Para copiar el cógido que introduzca en `WxMaxima`, seleccione con el botón izquierdo de su ratón, el lado izquierdo del código, de manera que cambie a color azul como en la figura **??** y posteriormente presione el botón derecho, y seleccione la opción copiar.

1. $$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$$

   con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

2. $$x' = Ax$$

   con

   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

   y condiciones iniciales

   $$x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.

$$x' = Ax$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

y condiciones iniciales

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ b \end{bmatrix}.$$

Solución de Sistemas Lineales

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas $u(x)$ y $v(x)$:

$$\begin{aligned} u' + u - v &= 0 \\ v' - u + v &= 2 \\ u(0) &= 1 \\ v(0) &= 2 \end{aligned}$$

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas $y(x)$ y $z(x)$:

$$\begin{aligned} y' + z &= x \\ z' + 4y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= -1 \end{aligned}$$

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas $w(x)$, $y(x)$ y $z(x)$:

$$\begin{aligned} w' + y &= \sin x \\ y' - z &= e^x \\ z' + w + y &= 1 \end{aligned}$$

$$w(0) = 0,\ y(0) = 1,\ z(0) = 1$$

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas $y(x)$ y $z(x)$:

$$\begin{aligned} y'' + z + y &= 0 \\ z' + y' &= 0 \end{aligned}$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ z(0) = 1$$

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas $y(x)$ y $z(x)$:

$$\begin{aligned} z'' + y' &= \cos x \\ y'' - z &= \sin x \end{aligned}$$

$$z(0) = -1,\ z'(0) = -1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Bibliografía

Cárdenas, H. (1973). *Álgebra superior*.