

# Fundamentos de Matemáticas Aplicadas

Juliho Castillo Colmenares Ph.D.

[math.vader@yahoo.com](mailto:math.vader@yahoo.com)

[twitter.com/anarkomathician](https://twitter.com/anarkomathician)

[linkedin.com/in/juliho/](https://linkedin.com/in/juliho/)



# Índice general

|                                                                                     |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Parte 1. Precálculo</b>                                                          | 7  |
| Capítulo 1. Sistemas numéricicos                                                    | 9  |
| 1. Los números enteros                                                              | 9  |
| 2. Los números racionales                                                           | 11 |
| 3. Razones y proporciones                                                           | 14 |
| 4. Teorema Fundamental de la Aritmética                                             | 16 |
| 5. Números Reales                                                                   | 17 |
| 6. Funciones                                                                        | 19 |
| 7. Introducción                                                                     | 23 |
| 8. El campo de números complejos                                                    | 24 |
| 9. Forma polar de los números complejos                                             | 26 |
| Capítulo 2. Álgebra                                                                 | 29 |
| 1. Reducción de términos semejantes                                                 | 29 |
| 2. Supresión de signos de agrupación                                                | 30 |
| 3. Multiplicación de polinomios                                                     | 30 |
| 4. Productos notables                                                               | 31 |
| 5. Sumas y diferencias de potencias                                                 | 33 |
| Capítulo 3. Factorización                                                           | 35 |
| 1. Método de Horner y División Sintética                                            | 35 |
| 2. Teorema de los ceros racionales                                                  | 36 |
| 3. Algoritmo de factorización                                                       | 37 |
| 4. Criterios para evaluar raíces                                                    | 39 |
| 5. Ecuaciones de segundo grado                                                      | 40 |
| Capítulo 4. Trigonometría                                                           | 45 |
| 1. La geometría de los triángulos: congruencia, similitud y el teorema de Pitágoras | 45 |
| 2. Los ángulos y sus medidas                                                        | 47 |
| 3. Funciones trigonométricas: El enfoque del círculo unitario                       | 52 |
| 4. Funciones trigonométricas inversas                                               | 55 |
| Capítulo 5. Trigonometría Analítica                                                 | 59 |
| 1. Propiedades de funciones trigonométricas                                         | 59 |
| 2. Suma y diferencias de ángulos                                                    | 62 |
| <b>Parte 2. Álgebra Lineal</b>                                                      | 65 |
| Capítulo 6. Sistemas lineales                                                       | 67 |

|                                                 |                                             |            |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------------|------------|
| 1.                                              | Sistemas de Ecuaciones Lineales Simultáneas | 67         |
| 2.                                              | Determinantes                               | 68         |
| 3.                                              | Fracciones parciales                        | 70         |
| 4.                                              | Factores lineales sin repetición            | 72         |
| 5.                                              | Factores lineales con repetición            | 72         |
| <b>Capítulo 7. Espacios Vectoriales</b>         |                                             | <b>73</b>  |
| 1.                                              | Definición y ejemplos                       | 73         |
| 2.                                              | Subespacios vectoriales                     | 75         |
| 3.                                              | Transformaciones lineales                   | 77         |
| 4.                                              | Núcleo e imagen                             | 80         |
| 5.                                              | Bases y dimensión                           | 82         |
| 6.                                              | Coordenadas y cambios de base.              | 85         |
| <b>Capítulo 8. Teoría espectral</b>             |                                             | <b>91</b>  |
| 1.                                              | Valores propios                             | 91         |
| 2.                                              | Valores propios                             | 91         |
| 3.                                              | Vectores propios                            | 94         |
| 4.                                              | Diagonalización                             | 96         |
| <b>Parte 3. Cálculo</b>                         |                                             | <b>101</b> |
| <b>Capítulo 9. Cálculo Diferencial</b>          |                                             | <b>103</b> |
| 1.                                              | Límites y continuidad                       | 103        |
| 2.                                              | Derivadas                                   | 104        |
| 3.                                              | Derivación implícita                        | 107        |
| 4.                                              | Derivación logarítmica                      | 108        |
| 5.                                              | Linealización                               | 110        |
| 6.                                              | Optimización univariada                     | 111        |
| 7.                                              | Análisis de Gráficas                        | 113        |
| <b>Capítulo 10. Cálculo Integral</b>            |                                             | <b>119</b> |
| 1.                                              | Antiderivadas                               | 119        |
| 2.                                              | La integral definida                        | 122        |
| 3.                                              | El Teorema Fundamental del Cálculo          | 125        |
| 4.                                              | Integración por partes                      | 128        |
| 5.                                              | Fracciones parciales                        | 130        |
| 6.                                              | Técnicas de integración trigonométrica      | 132        |
| 7.                                              | Área y longitud de arco                     | 134        |
| 8.                                              | Volumen                                     | 138        |
| 9.                                              | Integrales impropias                        | 144        |
| 10.                                             | Área de Superficies de Revolución           | 145        |
| <b>Capítulo 11. Cálculo en varias variables</b> |                                             | <b>147</b> |
| 1.                                              | Representación paramétrica de curvas        | 147        |
| 2.                                              | Derivadas Parciales                         | 148        |
| <b>Parte 4. Ecuaciones Diferenciales</b>        |                                             | <b>155</b> |
| <b>Capítulo 12. Ecuaciones de primer orden</b>  |                                             | <b>157</b> |

|                                                                                                 |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Índice general                                                                                  | 5   |
| 1. Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales                                                      | 157 |
| 2. Ecuaciones Especiales de Primer Orden                                                        | 165 |
| 3. Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden                                     | 170 |
| Capítulo 13. Ecuaciones de Orden Superior                                                       | 175 |
| 1. Ecuaciones Diferenciales Lineales                                                            | 175 |
| 2. Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes    | 177 |
| 3. Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de $n$ -ésimo Orden con Coeficientes Constantes | 179 |
| 4. Método de Coeficientes Indeterminados                                                        | 180 |
| 5. Aplicaciones                                                                                 | 181 |
| 6. Variación de parametros                                                                      | 183 |
| Capítulo 14. Transformada de Laplace                                                            | 185 |
| 1. La Transformada de Laplace                                                                   | 185 |
| 2. Transformada Inversa de Laplace                                                              | 187 |
| 3. E.D. Lineales con Coeficientes Constantes                                                    | 187 |
| 4. Transformada de funciones discontinuas                                                       | 188 |
| Capítulo 15. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales                                               | 193 |
| 1. Proyecto final: Ecuaciones diferenciales                                                     | 193 |
| 2. Solución de Sistemas Lineales                                                                | 199 |
| Bibliografía                                                                                    | 201 |



# **Parte 1**

## **Precálculo**



## Capítulo 1

# Sistemas numéricos

## 1. Los números enteros

En esta sección analizaremos algunos conjuntos numéricos. Los números naturales son el conjunto de números

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

mientras que los números enteros son el conjunto de números

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

### 1.1. Máximo Común Divisor.

DEFINICIÓN 1.1. Diremos que un entero  $n$  divide a otro entero  $c \in \mathbb{Z}$  si existe un tercer entero  $p \in \mathbb{Z}$  tal que

$$c = n \cdot p.$$

DEFINICIÓN 1.2. Diremos que el entero  $d$  es el *máximo común divisor* de dos enteros  $a, b$  o  $\text{mcd}(a, b)$  si

- $d$  divide tanto a  $a$  como  $b$  y;
- $d$  es el número entero más grande con esta propiedad.

PROBLEMA 1.1. Encontrar  $\text{mcd}(6, 15)$ .

SOLUCIÓN. Los divisores de 6 son  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ , mientras que los de 15 son  $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$ .

Entonces, los divisores en común de 6 y 15 son  $\pm 1, \pm 3$ . El más grande de todos estos es  $d = 3$  y por tanto es

$$\text{mcd}(6, 15) = 3.$$

□

Aunque este método para encontrar el  $\text{mcd}$  es útil cuando hay pocos divisores, puede resultar abrumador si ambos números tienen una gran cantidad de divisores.

PROPIEDAD 1.1 (Teorema del Residuo). *Dados dos números enteros positivos  $a, b$ , existen otro par de enteros  $q, r \geq 0$  tales que*

$$(1) \quad a = b \cdot q + r$$

$$(2) \quad r < b.$$

A  $q$  se le llama *cociente*, mientras que a  $r$  se le llama *residuo*.

DEMOSTRACIÓN. V. (Cárdenas, 1973, sección 7.2, teorema1)

□

PROBLEMA 1.2. Si  $a = 7, b = 2$ , entonces el cociente es  $q = 3$  y el residuo es  $r = 1$ , porque

$$\begin{cases} 7 = 2 \cdot 3 + 1 \\ r = 1 < b = 2. \end{cases}$$

Observe que tambien podríamos tomar  $q = 1, r = 5$  y escribir

$$7 = 2 \cdot 1 + 5,$$

pero como  $5 > 2$ , entonces  $r = 5$  no satisface la condición del residuo (2), porque  $r = 5 \geq b = 2$ .

ALGORITMO 1.1 (Algoritmo Euclidian). *Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  dos números enteros positivos. Consideremos la siguiente sucesión de operaciones, en la que iteramos el teorema del residuo:*

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q_0 + r_0 \\ b &= r_0 \cdot q_1 + r_1 \\ r_0 &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\ &\dots \\ r_{N-3} &= r_{N-2} \cdot q_{N-1} + r_{N-1} \\ r_{N-2} &= r_{N-1} \cdot q_N + 0. \end{aligned}$$

Entonces el último cociente  $r_{N-1}$  es el **mcd** de  $a$  y  $b$ .

DEMOSTRACIÓN. V. (Cárdenas, 1973, sección 7.4, prop. 1) □

Como en el ejemplo 1.1, tenemos que

$$\begin{aligned} 15 &= 6 \cdot 2 + 3 \\ 6 &= 3 \cdot 2 + 0, \end{aligned}$$

Entonces  $r = 3$  es igual a  $\text{mcd}(15, 6)$ .

## 1.2. Mínimo Común Múltiplo.

DEFINICIÓN 1.3. Diremos que el entero positivo  $m \in \mathbb{Z}$  es el *mínimo común múltiplo* o **mcm** de dos enteros positivos  $a, b$  si

- $m$  es múltiplo tanto de  $a \in \mathbb{Z}$  como  $b \in \mathbb{Z}$  y;
- $d$  es el número entero positivo más pequeño con esta propiedad.

PROPIEDAD 1.2. *Si  $a, b$  son dos enteros positivos, entonces*

$$\text{mcm}(a, b)\text{mcd}(a, b) = a \cdot b$$

DEMOSTRACIÓN. V. (Cárdenas, 1973, sección 7.5), ejercicios del 10 al 12. □

PROBLEMA 1.3. Encontrar el **mcm** de  $a = 6$  y  $b = 15$ .

SOLUCIÓN. Como vimos anteriormente,  $\text{mcd}(6, 15) = 3$ . Entonces,

$$\text{mcm}(6, 15) = \frac{6 \cdot 15}{3} = 30$$

□

## 2. Los números racionales

Los números racionales son el conjunto de números

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

identificando  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  siempre que la *razón cruzada* sea igual

$$ad = bc$$

¿Para qué nos sirve  $\mathbb{Q}$ ?

Este conjunto de números nos sirve para *contar, sumar, restar, multiplicar y dividir.*

**DEFINICIÓN 1.4.** Dos números racionales  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  son equivalentes si

$$ad - bc = 0.$$

**PROBLEMA 1.4.**  $\frac{1}{2}$  es equivalente a  $\frac{2}{4}$  porque

$$(1)(4) - (2)(2) = 0.$$

### 2.1. Simplificación.

**DEFINICIÓN 1.5.** 1. Diremos que dos enteros  $p, q \in \mathbb{Z}$  son primos relativos si  $\text{mcd}(p, q) = 1$ .

2. Diremos que  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  es la forma *irreducible* de  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$  si
- $\frac{p}{q}$  es equivalente a  $\frac{a}{b}$  y
  - $p, q$  son primos relativos.

Por la definición 1.4, tenemos que para un número racional  $\frac{a}{b}$ :

$$\frac{n \cdot a}{n \cdot b} = \frac{a}{b},$$

siempre que  $n \neq 0$ .

**PROBLEMA 1.5.**  $\frac{2}{4} = \frac{2 * 1}{2 * 2} = \frac{1}{2}$ .

**OBSERVACIÓN 1.1.** Sean  $a, b$  dos enteros positivos. Si  $d = \text{mcd}(a, b)$  y

$$a = d \cdot p, b = d \cdot q,$$

entonces podemos simplificar de la siguiente manera

$$\frac{a}{b} = \frac{d \cdot p}{d \cdot q} = \frac{p}{q}.$$

**OBSERVACIÓN 1.2.** Si  $d$  es el máximo común divisor de los enteros  $a, b \neq 0$ , entonces tenemos que  $p, q$  son los cocientes en las operaciones

$$\begin{cases} a = d \cdot p \\ b = d \cdot q \end{cases}$$

**PROBLEMA 1.6.** Encuentre la forma irreducible de  $\frac{15}{10}$ .

**SOLUCIÓN.** 1. Primero, muestre que  $\text{mcd}(15, 10) = 5$ ;

2. Como

$$\frac{15}{10} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{3}{2},$$

entonces  $\frac{3}{2}$  es equivalente a  $\frac{15}{10}$

3. Finalmente muestre que 3 y 2 son primos relativos. Concluimos que  $\frac{3}{2}$  es la forma irreducible de  $\frac{15}{10}$ .

□

PROBLEMA 1.7. Encuentre la forma irreducible de la fracción

$$\frac{182}{910}$$

**2.2. Conversión y comparación.** Supongamos que una pizza se parte en 12 rebanadas iguales, mientras que otra similar se parte en 8. ¿Qué cantidad de pizza es mayor, 7 rebanadas de la primera o 5 de la segunda?

Para comparar dos fracciones, debemos convertirlas de manera que tenga un común denominador.

ALGORITMO 1.2 (Conversión a común denominador). *Para convertir dos fracciones  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$  a común denominador:*

1. Encuentre  $m = mcm(b, d)$

2. Encuentre un entero  $p$  tal que  $m = b \cdot p$  y convierta la primera fracción

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot p}{b \cdot p} = \frac{ap}{m}$$

3. Encuentre un entero  $q$  tal que  $m = d \cdot q$  y convierta la segunda fracción

$$\frac{c}{d} = \frac{c \cdot q}{d \cdot q} = \frac{cq}{m}$$

OBSERVACIÓN 1.3. Si el común denominador  $m$  de dos fracciones

$$\frac{x}{m}, \frac{y}{m}$$

es positivo, entonces

$$\frac{x}{m} < \frac{y}{m} \iff x < y.$$

PROBLEMA 1.8. Compare cada uno de los siguientes pares de fracciones:

1.  $\frac{15}{11}, \frac{28}{37}$
2.  $-\frac{35}{36}, \frac{1}{6}$
3.  $\frac{3}{10}, -\frac{23}{33}$
4.  $-\frac{17}{31}, -\frac{12}{7}$

### 2.3. Operaciones.

ALGORITMO 1.3 (Suma de fracciones). *Para sumar dos fracciones  $\frac{a}{b}$ ,  $\frac{c}{d}$ :*

1. *Convierta a común denominador, de manera que*

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{m}, \frac{c}{d} = \frac{y}{m};$$

2. sume ambos numeradores

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{x}{m} + \frac{y}{m} = \frac{x+y}{m};$$

3. simplifique.

PROBLEMA 1.9.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} =$$

OBSERVACIÓN 1.4. Cualquier suma se puede reescribir como una resta:

$$x + y = x - (-y),$$

y viceversa

$$x - y = x + (-y).$$

Por esta razón, en álgebra, no es muy útil distinguir entre estas dos operaciones. Utilizaremos el mismo algoritmo, para encontrar la resta de dos fracciones.

PROBLEMA 1.10.

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} =$$

PROBLEMA 1.11. Realice las siguientes y escriba el resultado en su forma irreducible:

1.  $\frac{5}{3} + \frac{5}{9}$
2.  $\frac{7}{3} + \frac{4}{7}$
3.  $\frac{5}{4} + \frac{3}{2}$
4.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$
5.  $\frac{2}{5} - \frac{4}{9}$

La multiplicación entre dos números racionales se define como

$$(3) \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$\text{PROBLEMA 1.12. } \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}.$$

OBSERVACIÓN 1.5. En ocasiones, la división de fracciones se conoce como regla del “sandwich”:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

La división entre dos números racionales se define como

$$(4) \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

siempre y cuando  $c \neq 0$ .

$$\text{PROBLEMA 1.13. } \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} = \frac{10}{12}.$$

### 3. Razones y proporciones

Proporciones entre números enteros La razón de dos números (enteros o racionales)  $a, b$  se escribe  $a : b$  y se representa por la fracción  $\frac{a}{b}$ .

PROBLEMA 1.14. La razón de 4 a 6 se escribe  $4 : 6$  y se representa por la fracción  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ .

Proporciones entre fracciones

PROBLEMA 1.15. La razón de  $\frac{2}{3}$  a  $\frac{4}{5}$  se escribe

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$$

y se representa por la fracción

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{5}{6}.$$

Diremos que dos razones  $a : b$  y  $c : d$  son equivalentes si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

En ese caso, escribimos  $a : b \sim c : d$ .

PROBLEMA 1.16. ¿Cuál es el precio unitario de cada artículo?

- Una botella con 3 litros de aceite cuesta \$54.
- Una caja de cereales con 700 gramos cuesta \$63.

PROBLEMA 1.17. Exprese las siguientes razones por medio de una fracción simplificada

1.  $96 : 128$
2.  $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$

PROBLEMA 1.18. Un segmento de 30 pulgadas se divide en dos partes cuyas longitudes están en razón de 2 : 3. Encuentre las longitudes de ambos segmentos.

PROBLEMA 1.19. Las edades actuales de dos hermanos son 5 y 8 años respectivamente. ¿Al cabo de cuantos años, sus edades estarán en razón 3 : 4?

PROBLEMA 1.20. Divida 253 en cuatro partes proporcionales 2 : 5 : 7 : 9.

**3.1. Razones inversas.** Cuando tratamos de conservar una proporción  $a : b$ , hablamos de una *razón directa*, y podemos representarla por una equivalencia de fracciones:

$$a : b \sim c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Por ejemplo, en una receta de hotcakes, tenemos una razón  $1 : \frac{3}{4}$  entre tazas de harina y tazas de leche.

Para mantener la receta, podemos multiplicar las cantidades, pero manteniendo la proporción.

Por ejemplo, podemos ocupar 4 tazas de harina para 3 tazas de leche, porque  $1 : \frac{3}{4} \sim 4 : 3$ .

En cambio, en ocasiones lo que buscamos es mantener una cantidad total, y no proporción. Generalmente, es una cantidad de trabajo.

Por ejemplo, considere el trabajo de pintar una pared de dimensiones fijas. Supongamos que una persona puede pintarla en 8 horas; pero suponiendo que contratamos un pintor más con una experiencia similar,

1. ¿cuantas horas se requerirán para terminar el trabajo?
2. ¿Y si contratáramos 4 pintores?
3. ¿Y si fueran 8?

En el ejemplo anterior, la pared requiere *8 horas-trabajador*; esta es la cantidad que debemos conservar, aunque no es permitido variar los trabajadores o las horas de trabajo por trabajador.

En este caso, hablamos de una *razón inversa*.

**PROBLEMA 1.21.** Sabiendo que 8 personas tardan 12 días en poner a punto 16 maquinas, encuentre el número de días que emplearán 16 personas en poner a punto 8 máquinas.

**PROBLEMA 1.22.** Sabiendo que 8 personas tardan 12 días en poner a punto 16 maquinas, encuentre el número de días que emplearán 15 personas en poner a punto 50 máquinas.

### 3.2. Ejemplos.

**PROBLEMA 1.23.** ¿Cuál es la mejor compra entre 7 latas de sopas que cuestan \$22.50 y 3 latas del mismo producto, que cuestan \$9.50.

**PROBLEMA 1.24.** ¿Cuál es la mejor compra entre un paquete de 3 onzas de queso crema que cuesta \$4.30 y otro paquete de 8 onzas del mismo producto que cuesta \$8.70?

**PROBLEMA 1.25.** Si dos hombres pueden transportar 6 acres de tierra en 4 horas, ¿cuántos hombres se necesitan para transportar 18 acres en 8 horas?

**PROBLEMA 1.26.** Resuelva la proporción

$$\frac{x}{63} = \frac{5}{9}$$

**PROBLEMA 1.27.** Resuelva la siguiente ecuación usando productos cruzados

$$\frac{x - 2}{5} = \frac{x + 1}{3}$$

**PROBLEMA 1.28.** Enfermeras usan proporciones para determinar la cantidad de medicina a administrar, cuando la dosis es medida en miligramos (mg), pero la medicina es empacada en una forma diluida en milímetros (mL).

Por ejemplo, para encontrar los mililitros de fluido necesario para administrar 300mg de un medicamento de una medicina que viene empacada como 120mg en 2mL de un fluido, se plantean la proporción

$$\frac{120\text{mg}}{2\text{mL}} = \frac{300\text{mg}}{x \text{ mL}}$$

donde  $x$  representa la cantidad a administrar en mililitros.

Resuelva la proporción anterior.

#### 4. Teorema Fundamental de la Aritmética

Un número primo  $p$  es aquel que tiene exactamente cuatro divisores

$$\pm 1, \pm p.$$

PROBLEMA 1.29. Encuentre los números primos (positivos) entre 2 y 100.

Los números enteros siempre se pueden escribir como una multiplicación de números primos:

- $36 = 2^2 3^2$
- $1400 = 2^3 5^2 7$
- $187 = 11 \times 7$

Teorema Fundamental de la Aritmética

TEOREMA 1.1. *Todo número entero  $a$  mayor que 1 se puede expresar en la forma*

$$(FP) \quad a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_L^{n_L}$$

donde  $p_i, i = 1, \dots, L$  son números primos distintos y  $n_i, i = 1, \dots, L$  son exponentes enteros positivos.

OBSERVACIÓN 1.6. La expresión FP se conoce como *factorización prima* del entero  $a$  y es única excepto por el orden.

Encuentre la factorización prima de

- $14700 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$
- $1575 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$

PROPIEDAD 1.3. Si  $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_L^{n_L}$  y  $b = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_L^{m_L}$  son respectivas factorizaciones primas de los enteros  $a, b$ , entonces

$$mcd(a, b) = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_L^{r_L}$$

$$mcm(a, b) = p_1^{R_1} p_2^{R_2} \cdots p_L^{R_L}$$

donde  $r_i = \min(n_i, m_i)$  y  $R_i = \max(n_i, m_i)$ .

Encuentre

- $mcd(14700, 1575) = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 525$
- $mcm(14700, 1575) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 44100$

PROPIEDAD 1.4. Si  $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_L^{n_L}$  es la factorización prima de  $a$ , entonces  $a$  tiene

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_L + 1)$$

divisores positivos.

ALGORITMO 1.4 (Como encontrar todos los divisores de un número entero).

1.

Factorice el número entero  $n = p_1^{R_1} \cdots p_m^{R_m}$

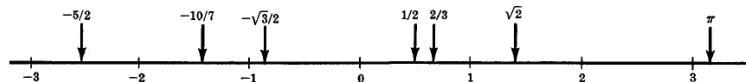
2. Enliste cada posible  $m$ -tupla  $(r_1, \dots, r_m)$  con  $0 \leq r_1 \leq R_1, \dots, 0 \leq r_m \leq R_m$

3. Enliste cada posible número entero de la forma

$$\pm p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m},$$

para cada elemento  $(r_1, \dots, r_m)$  de la lista anterior.

Cálculo de divisores



**PROBLEMA 1.30.** Encuentre todos los divisores positivos de 24.

Los divisores son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, y 24.

**PROBLEMA 1.31.** Encuentre todos los divisores positivos de 72.

Los divisores son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, y 72

**PROBLEMA 1.32.** Encuentre todos los divisores positivos de 600.

Los divisores son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 25, 30, 40, 50, 60, 75, 100, 120, 150, 200, 300, y 600.

## 5. Números Reales

### 5.1. Conjuntos numéricos. Números naturales

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Números enteros

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

Números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} / \sim$$

Equivalencia de fracciones

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff ad - bc = 0$$

Números irracionales Existen números en la recta numérica que no se pueden representar como fracciones.

Por ejemplo  $\sqrt{2}, e, \pi, \dots$

Números reales La unión de número racionales e irracionales se le conoce como *números reales*  $\mathbb{R}$ .

### 5.2. Orden. Los números reales se clasifican en

- Positivos  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- Cero  $\{0 \in \mathbb{R}\}$
- Negativos  $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Diremos que  $b \in \mathbb{R}$  es mayor que  $a \in \mathbb{R}$  si  $b - a > 0$ .

En ese caso escribimos  $b > a$ .

Diremos que  $a \in \mathbb{R}$  es menor que  $b \in \mathbb{R}$  si  $a - b < 0$ .

En ese caso escribimos  $a < b$ .

**PROPIEDAD 1.5.**

$$b > a \iff a < b$$

Desigualdades

**PROPIEDAD 1.6.** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Entonces se cumple una y solo una de las siguientes condiciones:

- $a > b$
- $a = b$
- $a < b$

**5.3. Reglas de álgebra.** Para cualesquiera  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , se tienen las siguientes propiedades:

AXIOMA 1.1 (Commutatividad de la suma).

$$(5) \quad a + b = b + a$$

AXIOMA 1.2 (Asociatividad de la suma).

$$(6) \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

AXIOMA 1.3 (Commutatividad del producto).

$$(7) \quad ab = ba$$

AXIOMA 1.4 (Asociatividad del producto).

$$(8) \quad (ab)c = a(bc)$$

AXIOMA 1.5 (Ley de la distribución).

$$(9) \quad a(b + c) = ab + ac$$

Leyes de los exponentes

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$
- $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$
- $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

#### 5.4. Ejemplos.

PROBLEMA 1.33. Demuestra que  $\sqrt{2}$  es un número irracional.

Solución Procedamos por contradicción:

- Supongamos que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  con  $p, q \in \mathbb{Z}$  positivos y primos relativos.
- Entonces  $2 = \frac{p^2}{q^2}$ , de manera que  $p^2 = 2q^2$ .
- De manera que  $p$  es par, es decir, existe un entero  $m$  tal que  $p = 2m$ .
- Sustituyendo obtenemos que  $q^2 = 2m^2$ , de manera que  $q$  también es par.
- Pero por hipótesis,  $p$  y  $q$  son primos relativos, de manera que no pueden ser ambos pares.  $\square$

PROBLEMA 1.34. ¿Qué número es más grande:  $\sqrt{2}$  o  $\sqrt[3]{3}$ ?

Solución Procedamos por contradicción:

- Supongamos que  $\sqrt{2} \geq \sqrt[3]{3}$ .
- Elevamos ambos lados a la sexta potencia.

(c) De donde obtenemos que

$$2^3 \geq 3^2 \quad \square$$

PROBLEMA 1.35. Con base en los axiomas (1.1)-(1.5), demostrar que

$$(b+c)a = ba + ca$$

Solución

$$\begin{aligned} (b+c)a &= a(b+c) \\ &= ab + ac \\ &= ba + ca \end{aligned}$$

## 6. Funciones

**6.1. Definición.** Una función  $f$  es una regla que asigna a cada elemento  $x$  de un conjunto  $A$  un único elemento  $y$  de otro conjunto  $B$ .

En ese caso escribiremos  $f : A \rightarrow B$

- (I) Para indicar dicha correspondencia escribimos  $y = f(x)$  y decimos que  $y$  es el valor de  $f$  en  $x$ .
- (II) Al conjunto  $A$  se le conoce como dominio.
- (III) Mientras que al conjunto  $B$ , se le conoce como contradominio.

PROBLEMA 1.36. Evaluar  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  en  $x = 2$

SOLUCIÓN.

$$(10) \quad f(2) = (2)^2 - 3(2) + 2$$

$$(11) \quad = 0$$

□

DEFINICIÓN 1.6. La gráfica de una función  $f : A \rightarrow B$  es el conjunto

$$(12) \quad \Gamma_f = \{(a, b) \in A \times B \mid b = f(a)\}$$

- (I) En el caso  $A = B = \mathbb{R}^n$ , diremos que la gráfica de  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una curva.
- (II) Diremos que  $x \in A$  es la variable independiente, mientras que  $y \in B$  es la variable dependiente.

## 6.2. Polinomios.

$$(13) \quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

Si  $a_n \neq 0$ , diremos que  $n$  es el grado del polinomio y  $a_n$ , su coeficiente líder.

Denotaremos el grado del polinomio  $f$  por  $\text{grd}(f)$ .

Si  $\text{grd}(f) = n$ , la ecuación polinomial  $f(x)$  tiene exactamente  $n$  raíces (posiblemente repetidas).

PROBLEMA 1.37. Como  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ , se puede reescribir como  $(x-1)^3$ , entonces la ecuación tiene una raíz  $x = 1$  repetida 3 veces.

Teorema del Binomio

$$(14) \quad (a+x)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} x + \binom{n}{2} a^{n-2} x^2 + \dots + x^n$$

$$\text{donde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

### 6.3. Exponenciales y logaritmos.

Funciones exponenciales

$$(15) \quad \exp_a(x) = a^x, a > 0$$

Leyes de los exponentes

$$(16) \quad \exp_a(m+n) = \exp_a(m) \cdot \exp_a(n)$$

$$(17) \quad \exp_a(m-n) = \frac{\exp_a(m)}{\exp_a(n)}$$

$$(18) \quad \exp_a(nm) = (\exp_a(m))^n$$

$$(19) \quad \exp_a(0) = 1$$

$$(20) \quad \exp_a(1) = a$$

Logaritmos La función logarítmica  $f(x) = \log_a(x)$  es la función inversa de  $g(x) = \exp_a(x)$ , es decir

$$(21) \quad \forall x \in \mathbb{R} : \log_a(\exp_a(x)) = x$$

$$(22) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ : \exp_a(\log_a(x)) = x$$

Leyes de los logaritmos

$$(23) \quad \log_a(mn) = \log_a(m) \cdot \log_a(n)$$

$$(24) \quad \log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a(m) - \log_a(n)$$

$$(25) \quad \log_a(m^p) = p \log_a(m)$$

$$(26) \quad \log_a(1) = 0$$

$$(27) \quad \log_a(a) = 1$$

Logaritmo natural En el caso de que la base sea la constante de Euler, es decir  $a = e \approx 2.718$ , entonces reescribimos

$$(28) \quad \exp_e(x) = \exp(x)$$

$$(29) \quad \log_e(x) = \ln(x)$$

Esta última función se conoce como *logaritmo natural*.

### 6.4. Funciones trigonométricas.

Relaciones fundamentales

$$(30) \quad \sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$(31) \quad \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$(32) \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$(33) \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$(34) \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$(35) \quad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

### 6.5. Identidades pitagóricas.

$$(36) \quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$(37) \quad \sec^2(x) - \tan^2(x) = 1$$

$$(38) \quad \csc^2(x) - \cot^2(x) = 1$$

Paridad

$$(39) \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$(40) \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$(41) \quad \tan(-x) = -\tan(x)$$

Sumas de ángulos

$$(42) \quad \sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$(43) \quad \cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$(44) \quad \tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

Ondas sinusoidales

$$(45) \quad \begin{cases} A \cos(x) + B \sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + \alpha) \\ \tan(\alpha) = \frac{A}{B} \end{cases}$$

Periodicidad Las funciones  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$  tiene periodo  $T = 2\pi$ . Mientras que la función  $\tan(x)$  tiene periodo  $T = \pi$ .

Inversas trigonométricas Las funciones inversas de funciones trigonométricas estás sólo definidas *localmente*: Por ejemplo,

$$(46) \quad y = \sin(x) \iff x = \sin^{-1}(y)$$

siempre y cuando

$$(47) \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y \in [-1, 1]$$

### 6.6. Funciones hiperbólicas. Relaciones fundamentales

$$(48) \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(49) \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$(50) \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$(51) \quad = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$(52) \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

$$(53) \quad = \frac{1}{\tanh(x)}$$

$$(54) \quad = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$(55) \quad \operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

$$(56) \quad = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$(57) \quad \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$$

$$(58) \quad = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Identidades pitagóricas

$$(59) \quad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$(60) \quad \operatorname{sech}^2(x) + \tanh^2(x) = 1$$

$$(61) \quad \coth^2(x) - \operatorname{csch}^2(x) = 1$$

Sumas de ángulos

$$(62) \quad \sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$$

$$(63) \quad \cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$

$$(64) \quad \tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x)\tanh(y)}$$

### 6.7. Ejemplos.

PROBLEMA 1.38. Si  $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ , encontrar

$$(I) \quad f(h) - f(0)$$

$$(II) \quad f(h-1) - f(-1)$$

$$(III) \quad f(x+h)$$

$$(IV) \quad f(x+h) - f(x)$$

$$(V) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

PROBLEMA 1.39. Usando las leyes de los exponentes, demostrar las leyes de los logaritmos.

PROBLEMA 1.40. Demostrar que

$$(I) \quad \sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$(II) \quad \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

PROBLEMA 1.41. Demostrar que

$$A \cos(x) + B \sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + \alpha)$$

donde  $\tan(\alpha) = \frac{A}{B}$ .

PROBLEMA 1.42. Demostrar que

- (I)  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- (II)  $\operatorname{sech}^2(x) + \tanh^2(x) = 1$

PROBLEMA 1.43. Demostrar que  $\cosh^{-1}(x) = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

## 7. Introducción

**Motivación.** En estas notas, denotaremos por  $\mathbb{R}$  el conjunto de números reales. En esta sección, procederemos de manera informal, para motivar la definición de un número complejo y formalizar sus propiedades, en secciones posteriores.

Supongamos que  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , y queremos resolver la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

De manera algebraica encontramos que las soluciones estan dadas por la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac.$$

Si  $D \geq 0$ , entonces  $D$  es un número real. Sin embargo, ¿qué sucede si  $D < 0$ ? Por la *ley de los signos* si  $x, y \geq 0$ , entonces  $xy \geq 0$ . De la misma manera, si  $x, y < 0$ , entonces  $xy > 0$ . En particular, para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ , tenemos que  $x^2 = x \cdot x \geq 0$ . Por lo tanto,  $\sqrt{D} \notin \mathbb{R}$  si  $D < 0$ .

Una solución a este problema es definir el número  $i = \sqrt{-1}$ . En este caso, si  $D < 0$ , entonces usando leyes de los exponentes tenemos que

$$\sqrt{D} = \sqrt{(-1)(-D)} = \sqrt{-1}\sqrt{-D} = \sqrt{-D}i.$$

En este caso, como  $D < 0$ , entonces  $-D > 0$  y  $\sqrt{-D} \in \mathbb{R}$ .

PROBLEMA 1.44. Las soluciones de la ecuación  $x^2 + 1 = 0$  son  $x = 0 + i1$  y  $x = 0 + i(-1)$ , o simplemente,  $x = \pm i$ .

PROBLEMA 1.45. Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones:

1.  $x^4 + 16 = 0$ ,
2.  $x^2 - 2x + 2 = 0$ .

Entonces, diremos que un número complejo es una cantidad de la forma

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Observe que si  $x \in \mathbb{R}$ , podemos identificarlo con  $x + i0$ .

Definimos la suma de números complejos  $z = x + iy, z' = x + iy'$  de la siguiente manera:

$$z + z' = (x + x') + i(y + y').$$

PROBLEMA 1.46. Demuestre que

1.  $(x + iy) + (x' + iy') = (x' + iy') + (x + iy)$ .
2.  $[(x + iy) + (x' + iy')] + (x'' + iy'') = (x + iy) + [(x' + iy') + (x'' + iy'')]$
3.  $0 + (x + iy) = x + iy$
4.  $(x + iy) + ((-x) + i(-y)) = 0$

Diremos que  $0 = 0 + i0$  es el *neutro aditivo* en los número complejos y que  $-z := -x - iy$  es el *inverso aditivo* de  $z = x + iy$ .

Ahora queremos definir la multiplicación  $(x + iy)(x' + iy')$ . Sigamos las reglas algebraicas usuales para números reales, salvo por la identidad  $i^2 = -1$ .

$$\begin{aligned}(x + iy)(x' + iy') &= x(x' + iy') + iy(x' + iy') \\&= xx' + x(iy') + (iy)x' + (iy)(iy') \\&= xx' + ixy + iyx' + i^2yy' \\&= (xx' - yy') + i(xy' + yx').\end{aligned}$$

En resumen,

$$zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx') \in \mathbb{C}.$$

**PROBLEMA 1.47.** Demostrar las siguientes propiedades de la multiplicación de número complejos

1.  $(x + iy)(x' + iy') = (x' + iy')(x + iy)$ .
2.  $[(x + iy)(x' + iy')] (x'' + iy'') = (x + iy) [(x' + iy')(x'' + iy'')]$
3.  $(1 + i0)(x + iy) = x + iy$
4.  $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ .
5.  $(x + iy) \left( \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right) = 1$ .

Diremos que  $1 = 1 + i0$  es el *neutro multiplicativo* en los número complejos y que

$$z^{-1} := \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

es el *inverso multiplicativo* de  $z = x + iy$ .

Si definimos  $\bar{z} = x - iy$ , para  $z = x + iy$ , podemos reescribir

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}.$$

Diremos que  $\bar{z}$  es el *conjugado* de  $z$ .

**OBSERVACIÓN 1.7.** Los número reales se pueden identificar con una línea recta. Como  $i$  no se puede identificar con un número en la línea recta, se decía que este número era *imaginario*. Sin embargo, podemos visualizar los números complejos (es decir, ¡dibujarlos!), para lo cuál necesitaremos “más espacio”. Como requerimos dos números reales para describir un complejo, tendremos que dibujarlos en el plano.

**PROBLEMA 1.48.** Encuentre el resultado de las siguientes operaciones:

1.  $(1 + i\sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3})$
2.  $\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3} + i1}$
3.  $(\sqrt{2} + i\sqrt{6})^3$

## 8. El campo de números complejos

**DEFINICIÓN 1.7.** El *plano* es el conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\},$$

de parejas ordenadas de números reales.

En este espacio, podemos definir varias operaciones. Cuando al conjunto lo dotamos de ciertas operaciones, decimos que es un *estructura (matemática)* en el plano. Una de las más importantes es la estructura de *espacio vectorial*, que a continuación presentamos.

**DEFINICIÓN 1.8.** El *plano euclídeo* es  $\mathbb{R}^2$  dotado de las siguientes operaciones:

1.  $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ ,
2. Si  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \cdot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ ,

**OBSERVACIÓN 1.8.** En este caso, a los pares ordenados  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  les llamaremos *vectores (en el plano)*, mientras que a los números reales los llamaremos *escalares*. Entonces, nos referiremos a la primera operación como *suma de vectores*, mientras que a la segunda como *multiplicación por escalares*. Estas son las operaciones *usuales* en el plano euclídeo.

**PROBLEMA 1.49.** Encuentre y grafique los vectores resultantes.

1.  $2(1, 0) + 3(0, 1)$ ,
2.  $\frac{1}{5}(5, 0) - 1(0, 2)$ .

Con el plano euclídeo en mente, podemos definir de manera formal el conjunto de números complejos. Observe que podríamos identificar  $x + iy$  con el vector  $(x, y)$ . Observe que con esta identificación, el resultado de la suma de números complejos coincide con la de vectores. De igual manera, podemos identificar la multiplicación entre número complejo. Esto nos lleva a la definición formal de *números complejos*.

**DEFINICIÓN 1.9.** El *campo* de número complejos  $\mathbb{C}$  es el conjunto  $\mathbb{R}^2$  dotado de las siguientes operaciones:

1.  $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ ,
2.  $(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$ .

Si identificamos  $\alpha \in \mathbb{R}$ , con  $(\alpha, 0) \in \mathbb{C}$ , resulta que la multiplicación por escalares coincide con la multiplicación de números complejos para escalares reales, es decir, si  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$a(x, y) = (a, 0)(x, y).$$

**PROBLEMA 1.50.** Verifique la afirmación anterior.

**PROBLEMA 1.51.** Verifique las siguientes propiedades. Si  $u, v, w \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ , entonces

1.  $u + v \in \mathbb{C}$
2.  $(u + v) + w = u + (v + w)$
3.  $u + v = v + u$
4. Existe  $0 \in \mathbb{C}$ , tal que  $u + 0 = u$
5. Para cada  $u \in \mathbb{C}$ , existe  $-u \in \mathbb{C}$ , tal que  $u + (-u) = 0$
6.  $uv \in \mathbb{C}$
7.  $(uv)w = u(vw)$
8.  $uv = vu$
9. Existe  $1 \in \mathbb{C}$ , tal que  $1u = u$
10. Para cada  $u \in \mathbb{C}, u \neq 0$ , existe  $u^{-1} \in \mathbb{C}$ , tal que  $uu^{-1} = 1$
11.  $u(v + w) = uv + uw$ .

**OBSERVACIÓN 1.9.** Cualquier conjunto  $S$ , con operaciones suma y multiplicación, que cumplan las propiedades anteriores, se conoce como un *campo*. Otros

ejemplos de campos son las fracciones y los mismos números reales. En teoría número, ejemplos de campos son los enteros *módulo p*  $\mathbb{Z}_p$ , con  $p$  un número primo.

### 9. Forma polar de los números complejos

En la presente sección, suponemos que el lector tiene conocimientos elementales de trigonometría y geometría analítica.

Como los números complejos son vectores, podemos calcular su longitud o *norma*.

**DEFINICIÓN 1.10.** Si  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , entonces la norma de  $z$  se define como

$$\|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Como hicimos antes, definimos de manera formal el *conjugado* de un número complejo.

**DEFINICIÓN 1.11.** Si  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ , su *conjugado* está dado por

$$\bar{z} = (x, -y) \in \mathbb{C}.$$

De manera que  $\|z\|^2 = z\bar{z}$ .

De la misma manera, siendo un vector podemos medir el ángulo que abre respecto al vector  $(1, 0)$ , en el sentido de las manecillas del reloj, al cual llamaremos *argumento* y definimos analíticamente de la siguiente forma.

**DEFINICIÓN 1.12.** El argumento  $\theta(z)$  de  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  se define como

1.  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  si  $x > 0$
2.  $\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$  si  $x < 0$
3.  $\frac{\pi}{2}$  si  $x = 0, y > 0$
4.  $-\frac{\pi}{2}$  si  $x = 0, y < 0$

**DEFINICIÓN 1.13.** Si  $z \in \mathbb{C}$  tiene norma  $r > 0$  y argumento  $\theta$ , decimos que

$$z = r\varphi(\theta),$$

es la *forma polar* de  $z$ , donde  $\varphi(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\varphi(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

**PROBLEMA 1.52.** Demostrar que

1.  $\varphi(0) = 1$
2.  $\varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta)$
3.  $\varphi(-\theta) = \varphi(\theta)$
4.  $\varphi(\theta + \tau) = \varphi(\theta)\varphi(\tau)$
5.  $\varphi(n\theta) = (\varphi(\theta))^n$

**PROBLEMA 1.53.** 1. Si  $z = r\varphi(\theta) \in \mathbb{C}$ , entonces

- a)  $z^{-1} = r^{-1}\overline{\varphi(\theta)}$
- b) Si  $n$  es un número entero,  $z^n = r^n\varphi(n\theta)$ .

2. Si  $z = r\varphi(\theta), w = s\varphi(\tau) \in \mathbb{C}$ , entonces

- a)  $zw = rs\varphi(\theta + \tau)$ .
- b)  $\frac{z}{w} = \frac{r}{s}\varphi(\theta - \tau)$

Esta última identidad se conoce como *identidad de De Moivre*.

PROBLEMA 1.54. Convierta a su forma polar, cada uno de los números en el ejercicio 1.48 y realice las operaciones correspondientes, usando los resultados anteriores.



## Capítulo 2

# Álgebra

### 1. Reducción de términos semejantes

En el álgebra, representamos cantidades desconocidas por símbolos; generalmente son letras como  $x, y, z$ , pero *no debe olvidarse que respresentan números.*

Para representar una multiplicación iterada, usamos el símbolo de potencia

$$x^n = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-veces}}$$

al número  $x$  le llamamos base y al número  $n$  le llamamos potencia.

- PROBLEMA 2.1.
1.  $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
  2.  $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
  3.  $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

- PROBLEMA 2.2.
1.  $x^2 = x \cdot x$
  2.  $x^3 = x \cdot x \cdot x$
  3.  $x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$
  4. ...

OBSERVACIÓN 2.1. Observe que  $x^1 = x$ ; mientras que, por convención,  $x^0 = 1$ .

Cuando multiplicamos  $x^n$  por un número diferente de  $x$ :

$$ax^n = a \cdot \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-veces}},$$

diremos que  $a$  es el coeficiente de  $x^n$ .

A un número escrito en la forma  $ax^n$  se le llama *monomio*; y diremos que dos monomios son semejantes si tienen *exactamente* la misma base a la misma potencia.

PROBLEMA 2.3. Determine cual de los siguientes monomios es semejante a  $2x^3$ :

1.  $3x^3$ ;
2.  $2x^2$ ;
3.  $2y^3$ ;

Dos términos semejantes pueden reducirse

$$\begin{cases} ax^n + bx^n = (a + b)x^n \\ ax^n - bx^n = (a - b)x^n \end{cases}$$

PROBLEMA 2.4. Reduzca los siguientes términos semejantes, escribiendo el coeficiente en forma irreducible.

1.  $(4n^2 + 5n + 3) + (-3n^2 - 2n)$
2.  $(-7a^3 - a^2 - 5a - 2) + (a^3 + a^2 - 4a + 7)$

3.

$$(5u^5 - 3u^4 + 2u^3 - 5u^2 + 7u - 7) + \\ \left( \frac{2u^5}{3} + \frac{3u^4}{2} - \frac{2u^2}{3} + \frac{5u}{6} + \frac{5}{4} \right).$$

PROBLEMA 2.5. Reduzca los siguientes términos semejantes, escribiendo el coeficiente en forma irreducible.

1.  $(4n^2 + 5n + 3) - (-3n^2 - 2n)$
2.  $(-7a^3 - a^2 - 5a - 2) - (a^3 + a^2 - 4a + 7)$
- 3.

$$(5u^5 - 3u^4 + 2u^3 - 5u^2 + 7u - 7) - \\ \left( \frac{2u^5}{3} + \frac{3u^4}{2} - \frac{2u^2}{3} + \frac{5u}{6} + \frac{5}{4} \right).$$

OBSERVACIÓN 2.2. A la suma de dos o más monomios se le conoce como *polinomio*.

Por ejemplo  $x^2 - 2x + 1$  o  $x^2 - 2xy + y^2$ .

## 2. Supresión de signos de agrupación

Cuando queremos quitar parentesis u otro signo de agrupación, en una suma o resta de polinomios, basta usar la regla de los signos.

Sin embargo, cuando un polinomio se multiplica por un coeficiente, se utiliza la siguiente regla

PROPIEDAD 2.1 (Ley de la distribución).

$$(65) \quad a(b+c) = ab + ac$$

$$(66) \quad (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd.$$

PROBLEMA 2.6. Simplifique

1.  $(6 - 7a)(2 - 4a)$
2.  $-4(-4w - 5)(4w - 2)$
3.  $6(-5v - 7)(4 - 5v)(-2v - 1)v$

## 3. Multiplicación de polinomios

Dos monomios se pueden multiplicar de la siguiente manera

$$(ax^n)(bx^m) = (ab)x^{n+m}.$$

$$\text{PROBLEMA 2.7. } 1. (2x^3)(3x^2) = (2 * 3)x^{2+3} = 6x^5.$$

PROBLEMA 2.8. Exprese su respuesta en la forma más simple posible:

1.  $(6x^4)(4 - 3x - 3x^2)$
2.  $5w^3(-7w^3 - 7w^2 + 7w + 3)$
3.  $\frac{a^3}{3}(-7a^5 - 2a^4 + 3a^3 + a^2 - a - 3)$

PROBLEMA 2.9. Exprese su respuesta en la forma más simple posible:

- 1.

$$(n^2 + 5n)(-n^2 + 6n + 1)$$

2.

$$(-6a^2 - 3a - 7)(a^3 + a^2 + 6a - 7)$$

3.

$$\left(\frac{9w^4}{8} + \frac{8w^3}{9} - \frac{7w^2}{9} - \frac{w}{3} + \frac{5}{9}\right)(-2w^3 - 5w + 7)$$

PROBLEMA 2.10. Exprese su respuesta en la forma más simple posible:

1.  $(7u^4)(6 - 4u - 7u^2)$
2.  $(3s^4)(-7 + s - s^2 - 5s^3)$
3.  $(7x^4)(2 + 4x - 7x^2)$

PROBLEMA 2.11. Simplifique

1.  $(5w^4)(-1 + 5w + 4w^2 + 6w^3)$
2.  $(3m^4)(-1 - 6m - 3m^2 - 7m^3 - 4m^4)$
3.  $5a^5(a^3 - 3a^2 + 3a - 5)$

PROBLEMA 2.12. Escriba su respuesta de la forma más simple posible

1.  $\left(\frac{8n^4}{9}\right)(n^4 - 3n^3 - 4n^2 + 3n - 1)$
2.  $\left(\frac{2y^5}{5}\right)(-3y^4 + 5y^3 - 7y^2 - 2y - 5)$
3.  $\left(\frac{3s^3}{7}\right)(-2s^4 - s^3 - 5s^2 + 2s + 1)$

PROBLEMA 2.13. Exprese su respuesta en la forma más simple posible

1.  $(-4x - 5)(-3x^3 + 3x^2 - 4x - 4)$
2.  $(6y - 7y^2)(y + 3)$
3.  $\left(\frac{7w^2}{9} + \frac{4w}{9} + \frac{9}{2}\right)(5w^2 + 6w - 7)$

PROBLEMA 2.14. Simplifique

1.  $(3x^2 + 2x + 3)(6x^2 - 4x - 3)$
2.  $(4m^2 + 3m)(6m^3 + 6m^2 - 7m + 6)$
3.  $(-4x^2 + 5x + 5)(3 - 4x)$

PROBLEMA 2.15. Simplifique

1.  $(-2s^4 - 5s^3 + 3s^2 + 3s + 2)(7s^3 - 3s^2 - 2s - 7)$
2.  $(5v - v^2)(2v^2 + 6v + 5)$
3.  $(7x^3 + 2x^2 + 5x - 6)(6x^3 + 3x^2 - 4x - 4)$

PROBLEMA 2.16. Simplifique

$$\left(\frac{2a^3}{5} - \frac{5a^2}{6} - \frac{9a}{8} + \frac{2}{3}\right)(3a^2 - 2a - 4)$$

#### 4. Productos notables

A continuación, aparecen algunos de los productos que se presentan con frecuencia en matemáticas.

Producto monomio-binomio

$$(67) \quad a(c + d) = ac + ad$$

- PROBLEMA 2.17.
1.  $2xy(3x^2y - 4y^3)$
  2.  $3x^2y^3(2xy - x - 2y)$
  3.  $(2st^3 - 4rs^2 + 3s^3t)(5rst^2)$

Diferencia de cuadrados

$$(68) \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

- PROBLEMA 2.18.
1.  $(3a+5b)(3a-5b)$
  2.  $(5xy+4)(5xy-4)$
  3.  $(2-5y^2)(2+5y^2)$
  4.  $(3a+5a^2b)(3a-5a^2b)$

Cuadrado de un binomio

$$(69) \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(70) \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- PROBLEMA 2.19.
1.  $(x+6)^2$
  2.  $(y+3x)^2$
  3.  $(z-4)^2$
  4.  $(3-2x^2)^2$
  5.  $(x^2y-2z)^2$

Producto de dos binomios

$$(71) \quad (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(72) \quad (ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$$

- PROBLEMA 2.20.
1.  $(x+2)(x+4)$
  2.  $(x-4)(x+7)$
  3.  $(y+3)(y-5)$
  4.  $(xy+6)(xy-4)$
  5.  $(2x-3)(4x+1)$
  6.  $(4+3r)(2-r)$

Cubo de un binomio

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

- PROBLEMA 2.21.
1.  $(2x+1)^3$
  2.  $(3x+2y)^3$
  3.  $(r-2s)^3$
  4.  $(x^2-1)^3$
  5.  $(ab^2-2b)^3$

Cuadrado de un trinomio

$$(73) \quad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

PROBLEMA 2.22.

$$(x-2y+z)^2.$$

### 5. Sumas y diferencias de potencias

PROBLEMA 2.23.

$$(74) \quad (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(75) \quad (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$(76) \quad (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

PROBLEMA 2.24.

$$(77) \quad (a + b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$(78) \quad (a + b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$(79) \quad (a + b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

PROBLEMA 2.25. 1.  $(t - 2)(t^2 + 2t + 4)$

2.  $(z - x)(x^2 + xz + z^2)$

3.  $(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^3)$

PROBLEMA 2.26. 1.  $(s - 1)(s^3 + s^2 + s + 1)$

2.  $(1 + t^2)(1 - t^2 + t^4 - t^6)$

3.  $(3x + 2y)^2(3x - 2y)^2$

4.  $(x^2 + 2x + 1)^2(x^2 - 2x + 1)^2$

5.  $(y - 1)^3(y + 1)^3$

6.  $(u + 2)(u - 2)(u^2 + 4)(u^4 + 16)$



## Capítulo 3

# Factorización

### 1. Método de Horner y División Sintética

PROBLEMA 3.1. Consideremos evaluar el siguiente polinomio

$$p(x) = 6x^2 + 3x - 2$$

en  $x = 9$ .

$$\begin{aligned} p(9) &= 6(9)^2 + 3(9) - 2 \\ &= 6(81) + 3(9) - 2 \\ &= 486 + 27 - 2 \\ &= 513 - 2 = 511 \end{aligned}$$

Consideraremos una forma alternativa de evaluar, conocida como *método de Horner*.

Primero, reescribimos el polinomio de la siguiente manera

$$\begin{aligned} p(x) &= (6x^2 + 3x) - 2 \\ &= (6x + 3)x - 2 \\ &= ((6)x + 3)x - 2 \end{aligned}$$

Al evaluar, realizamos las siguientes operaciones

$$\begin{aligned} p(9) &= ((6)9 + 3)9 - 2 \\ &= (54 + 3)9 - 2 \\ &= (57)9 - 2 \\ &= 513 - 2 \\ &= 511 \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 3.1. Aunque con el método anterior, hemos realizado algunos pasos más, hemos evitado el uso de *exponentes*. Ahora, todo se reduce a *multiplicaciones y sumas*.

El método anterior se puede sintetizar de la siguiente manera

$$\begin{array}{r|rrr} 9 & 6 & +3 & -2 \\ \downarrow & 54 & 513 & \\ \hline 6 & 57 & 511 & \end{array}$$

De manera general,

$$\begin{array}{r|rrr} x & 6 & +3 & -2 \\ \downarrow & 6x & (6x + 3)x & \\ \hline 6 & 6x + 3 & (6x + 3)x - 2 & \end{array}$$

OBSERVACIÓN 3.2. La última expresión  $(6x + 3)x - 2$  es igual a nuestro polinomio

$$6x^2 + 3x - 2.$$

Al procedimiento anterior se le conoce como *división sintética*.

[t]

PROBLEMA 3.2. Evalúe  $p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5$  en  $x = 3$  utilizando

1. evaluación directa
2. el método de Horner
3. división sintética

[t]

PROBLEMA 3.3. Evalúe  $p(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 7x + 3$  en  $x = -2$  utilizando

1. evaluación directa
2. el método de Horner
3. división sintética

[t]

PROBLEMA 3.4. Evalúe  $p(x) = x^3 - 7x + 6$  en  $x = 1$  utilizando

1. evaluación directa
2. el método de Horner
3. división sintética

DEFINICIÓN 3.1. Si al evaluar un polinomio  $p(x)$  en  $x = c$ , obtenemos

$$\color{red}p(c) = 0,$$

diremos que  $c$  es un *raíz* o “*cero*” del polinomio  $p(x)$ .

PROBLEMA 3.5. Evalúe  $p(x) = x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 15x$  en  $x = -3, 0, 1, 5$  utilizando

1. evaluación directa
2. el método de Horner
3. división sintética

y compruebe que son *ceros* del polinomio.

## 2. Teorema de los ceros racionales

Decimos que  $c$  es un *cero racional* del polinomio  $p(x)$  si  $p(c) = 0$  y  $c$  es un número racional, es decir, una fracción.

OBSERVACIÓN 3.3. No todo cero de un polinomio es racional. Por ejemplo, los ceros del polinomio  $p(x) = x^2 - 2$  son  $c = \pm\sqrt{2}$ , y desde los tiempos de Pitágoras es sabido que las raíces de números primos no son números racionales.

TEOREMA 3.1 (Teorema de los ceros racionales, caso particular). *Si el polinomio  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  tiene coeficientes enteros, entonces todo cero racional es divisor de término constante  $a_0$ .*

PROBLEMA 3.6. Hallar los ceros racionales de

$$p(x) = x^3 - 3x + 2.$$

TEOREMA 3.2 (Teorema de los ceros racionales, caso particular). *Si el polinomio*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

tiene **coeficientes enteros**, entonces todo cero racional de la forma  $\frac{p}{q}$  donde  $p$  es divisor de coeficiente constante  $a_0$  y  $q$  es divisor de coeficiente líder  $a_n$ .

PROBLEMA 3.7. Encuentre los ceros racionales del polinomio

$$p(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6.$$

### 3. Algoritmo de factorización

#### 3.1. Diferencias de potencias.

PROPIEDAD 3.1.

$$(dP) \quad x^n - c^n = (x - c)(x^{n-1} + x^{n-2}c + \dots + xc^{n-2} + c^{n-1})$$

PROBLEMA 3.8.

$$\begin{aligned} x^2 - 121 &= \\ x^3 - 27 &= \\ x^4 - 256 &= \end{aligned}$$

PROBLEMA 3.9.

$$\begin{aligned} x^2 - c^2 &= (x - c)(x^1 + c^1) \\ &= (x - c)(x + c) \\ x^3 - c^3 &= (x - c)(x^2 + x^1c^1 + c^2) \\ &= (x - c)(x^2 + cx + c^2) \\ x^4 - c^4 &= (x - c)(x^3 + x^2c^1 + x^1c^1 + c^3) \\ &= (x - c)(x^3 + cx^2 + c^2x + c^3) \end{aligned}$$

El segundo factor en el lado derecho de (dP) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &x^{n-1} + x^{n-2}c + \dots + xc^{n-2} + c^{n-1} \\ &= x^{n-1}c^0 + x^{n-2}c^1 + \dots + x^1c^{n-2} + x^0c^{n-1} \\ (pS) \quad &\quad = \sum_{i+j=n-1} x^i c^j =: S_{x,c}^{n-1} \end{aligned}$$

donde  $\sum_{i+j=M}$  denota la suma la suma sobre todas las parejas  $i, j$  de números naturales, cuya suma sea igual a  $M$ .

Diremos que  $S_{x,c}^M$  es el **polinomio simétrico** de grado  $M$  (para  $x, c$ ).

PROBLEMA 3.10. Calcule los siguientes polinomios simétricos

$$S_{x,11}^1 = x + 11$$

$$S_{x,3}^2 = x^2 + 3x + 9$$

$$S_{x,4}^3 = x^3 + 4x^2 + 16x + 64$$

### 3.2. Divisores de un polinomio.

DEFINICIÓN 3.2. Decimos que un polinomio  $D(x)$  divide a otro polinomio  $P(x)$  si existe un tercer polinomio  $Q(x)$  tal que  $D(x)Q(x) = P(x)$ .

En tal caso decimos que  $D(x)$  divide a  $P(x)$  y escribimos  $D(x) \mid P(x)$ . Al polinomio  $Q(x)$  se le llama *polinomio cociente*.

TEOREMA 3.3. *Un número  $x = c$  es un cero de  $P(x)$  si y solo si  $(x - c)$  divide a  $P(x)$ .*

*Diremos que  $D_c(x) = (x - c)$  es el divisor asociado a  $x = c$ .*

ALGORITMO 3.1 (Factorización de un divisor asociado). *Supongamos que  $x = c$  es un cero del polinomio  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ .*

1. *Rescribimos explícitamente  $P(x) = P(x) - P(c)$*
2. *Factorizamos cada coeficiente*

$$P(x) = a_n (x^n - c^n) + \dots + a_1 (x - c)$$

3. *Aplicamos diferencias de cuadrados en cada término*

$$P(x) = a_n (x - c) S_{x,c}^{n-1} + \dots + a_1 (x - c)$$

4. *Factorizamos  $D_c(x) = x - c$*

$$P(x) = (x - c) (a_n S_{x,c}^{n-1} + \dots + a_1)$$

PROBLEMA 3.11. Para cada uno de los siguientes polinomios, factorice los divisores asociados a cada uno de sus ceros racionales tantas veces como sea posible, utilizando diferencias de potencias:

1.  $x^3 + 3x^2 - 4 = (x + 2)^2(x - 1)$
2.  $x^4 - 5x^2 + 4 = (x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2)$

- ALGORITMO 3.2 (Encontrar los ceros racionales de un polinomio).
1. Enlistar los posibles ceros. *Enliste los posibles ceros racionales usando el teorema de los ceros racionales.*
  2. Dividir. *Use la división sintética para evaluar el polinomio en cada uno de los candidatos para ceros racionales que encontró en el paso anterior. Cuando el residuo es 0, observe el cociente que obtuvo.*
  3. Repetir. *Repita los pasos anteriores para el cociente. Pare cuando llegue al cociente que no tenga ceros racionales.*

PROBLEMA 3.12. Para cada uno de los siguientes polinomios, factorice los divisores asociados a cada uno de sus ceros racionales tantas veces como sea posible:

1.  $x^3 + 3x^2 - 4 = (x + 2)^2(x - 1)$
2.  $x^4 - 5x^2 + 4 = (x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2)$

### 3.3. Raíces irracionales. Un polinomio cuadrático

$$p(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

tiene raíces  $r_1$  y  $r_2$  si y solo si

$$p(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Fórmula general

PROPIEDAD 3.2. *Las soluciones de la ecuación*

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

*están dadas por la fórmula*

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \\ r = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \end{cases}$$

Discriminante El número  $D = b^2 - 4ac$  se llama *discriminante* del polinomio cuadrático  $p(x) = ax^2 + bx + c$ .

- COROLARIO 3.1. (a) *Si  $D > 0$ , entonces  $p(x) = 0$  tiene exactamente dos raíces reales y diferentes.*  
 (b) *Si  $D = 0$ , entonces  $p(x) = 0$  tiene una única raíz real de multiplicidad 2.*  
 (c) *Si  $D < 0$ , entonces  $p(x) = 0$  tiene un par de raíces complejas conjugadas.*

PROBLEMA 3.13. Factorice completamente el polinomio

$$P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$$

#### 4. Criterios para evaluar raíces

4.1. **Regla de los signos de Descartes.** Variaciones de signo Si un polinomio  $P(x)$  tiene coeficientes reales, escritos sus *exponentes en forma descendiente y omitiendo exponentes con coeficiente cero*, entonces una *variación de signo* ocurre siempre que dos signos opuestos.

PROBLEMA 3.14. ■  $x^2 + 4x + 1$  tiene 0 variaciones de signo.

- $2x^3 + x - 6$  tiene 1 variación de signo.
- $x^4 - 3x^2 - x + 4$  tiene 2 variaciones de signo.
- $5x^7 - 3x^5 - x^4 + 2x^2 + x - 3$  tiene 3 variaciones de signo.

Regla de los signos de Descartes

PROPIEDAD 3.3. *Sea  $P$  un polinomio con coeficientes reales*

- (a) *El número de ceros reales positivos es o bien igual al número de variaciones de signo en  $P(x)$  o bien menor este número por un número par.*  
 (b) *El número de ceros reales negativos es o bien igual al número de variaciones de signo en  $P(-x)$  o bien menor este número por un número par.*

PROBLEMA 3.15. Use la regla de los signos de Descartes para estimar el número posible de ceros reales negativos y positivos del polinomio

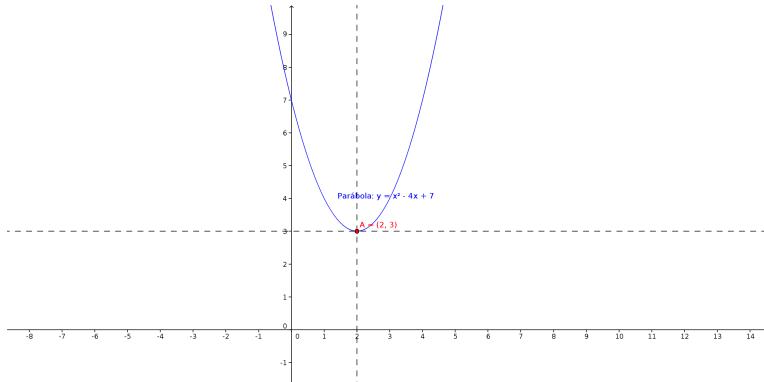
$$P(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$$

RESPUESTA 3.1.  $P(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$  tiene una única raíz real positiva y o bien tres o bien una raíces real negativas.

4.2. **Teorema de las Cotas.** Diremos que  $m \in \mathbb{R}$  es una *cota inferior* y  $M \in \mathbb{R}$  es una cota superior para el conjunto de *ceros reales* de un polinomio si para cada raíz  $c$  tenemos que

$$m \leq c \leq M.$$

TEOREMA 3.4. *Sea  $P(x)$  un polinomio con coeficientes reales.*

FIGURA 1.  $y = x^2 - 4x + 7$ 

- (a) Si se divide  $P(x)$  entre  $x - b$  con  $b > 0$  usando división sintética, y si la fila de coeficientes del cociente y residuo tiene entradas no negativas, entonces  $b$  es una cota superior para los ceros reales de  $P(x)$ .
- (b) Si se divide  $P(x)$  entre  $x - a$  con  $a < 0$  usando división sintética, y si la fila de coeficientes del cociente y residuo tiene entradas alternantemente no positivas y no negativas, entonces  $a$  es una cota inferior para los ceros reales de  $P(x)$ .

PROBLEMA 3.16. Muestre que todos los ceros reales del polinomio

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5$$

están entre  $-3$  y  $2$ .

PROBLEMA 3.17. Factorice completamente el polinomio  $P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$

$$\text{RESPUESTA 3.2. } P(x) = (x - 1)(2x - 3)(x + 1)^2(x + 3)$$

## 5. Ecuaciones de segundo grado

Una función cuadrática es de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c;$$

su gráfica se llama *parábola*.

**5.1. Complemento de cuadrados.** Cualquier función cuadrática se puede reescribir en la forma

$$f(x) = a(x - h)^2 + k,$$

por el método de *complementos de cuadrado*.

El punto  $(h, k)$  se llama *vértice*, y corresponde al *extremo* de la parábola

$$y = a(x - h)^2 + k.$$

La fórmula para encontrar el vértice de la parábola  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$  es

$$\begin{cases} h = -\frac{b}{2a} \\ k = f(h). \end{cases}$$

Para completar el cuadrado, podemos usar el *método de división sintética*:

$$\begin{array}{c|ccc} h & a & b & c \\ \downarrow & & +ah & \dots \\ \hline a & \dots & k \end{array}$$

PROBLEMA 3.18. Complete el cuadrado de

$$y = x^2 - 4x + 7.$$

PROBLEMA 3.19. Complete el cuadrado de

$$y = 3x^2 + 30x + 63.$$

**5.2. Intersecciones con los ejes.** Las raíces de un polinomio  $p(x)$  son aquellos números reales  $r$  tales que  $p(r) = 0$ .

Para encontrar las raíces de una *polinomio cuadrático*, necesitamos resolver la *ecuación de segundo grado*

$$a(x - h)^2 + k = 0.$$

Si  $r$  es una raíz de  $p(x) = a(x - h)^2 + k$ , entonces la parábola  $y = a(x - h)^2 + k$  cruza al eje  $x$  en el punto  $(r, 0)$ .

OBSERVACIÓN 3.4. Si bien  $a, k > 0$  o bien  $a, k < 0$ , entonces  $a(x - h)^2 + k > 0$  y por tanto no existen raíces. Por lo tanto, la parábola  $y = a(x - h)^2 + k$  nunca cruza el eje  $x$ .

PROBLEMA 3.20. Determine si existen raíces de

$$y = x^2 - 4x + 7,$$

**5.3. Diferencia de cuadrados.** Una identidad que es muy útil al momento de resolver ecuaciones es la *diferencia de cuadrados*

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Una ecuación de la forma

$$z^2 - c^2 = 0$$

se puede reescribir como

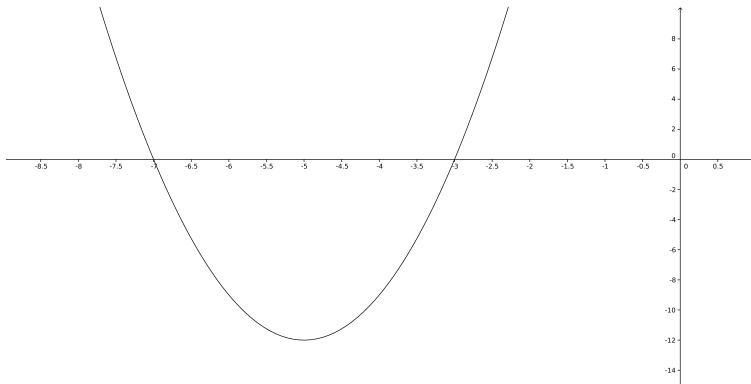
$$(z - c)(z + c) = 0 \dots$$

...en cuyo caso tenemos que  $z - c = 0$  o  $z + c = 0$ , y por tanto las soluciones son

$$z = \pm c.$$

PROBLEMA 3.21. Encuentre las raíces de

$$y = 3x^2 + 30x + 63.$$



#### 5.4. Ejemplos.

PROBLEMA 3.22. Resuelva las siguientes ecuaciones

1.  $x^2 - 40 = 9$
2.  $2x^2 - 400 = 0$
3.  $x^2 + 36 = 9 - 2x^2$

PROBLEMA 3.23. Resuelva las siguientes ecuaciones

1.  $\frac{x}{16} = \frac{4}{x}$
2.  $\frac{y^2}{3} = \frac{y^2}{6} + 2$

PROBLEMA 3.24. Resuelva la siguiente ecuación

$$\frac{1-2x}{3-x} = \frac{x-2}{3x-1}.$$

PROBLEMA 3.25. Resuelva la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{4}.$$

PROBLEMA 3.26. Resuelva la siguiente ecuación

$$x - \frac{2x}{x+1} = \frac{5}{x+1} - 1.$$

PROBLEMA 3.27. Encuentre las raíces de los siguientes polinomios

1.  $7x^2 - 5x$
2.  $x^2 - 5x + 6$
3.  $3x^2 + 2x - 5$
4.  $x^2 - 4x + 4$

PROBLEMA 3.28. Encuentre las raíces de los siguientes polinomios

1.  $x^2 - 6x - 2$
2.  $3x^2 - 5x + 1$
3.  $4x^2 - 6x + 3$

**5.5. Factorización.** Si un polinomio  $p(x) = ax^2 + bx + c$  tiene raíces  $r_1, r_2$  diferentes, entonces podemos factorizar de la siguiente manera

$$p(x) = a(x - r_1)(x - r_2).$$

Si un polinomio  $p(x) = ax^2 + bx + c$  tiene una única raíz  $r_1$ , entonces podemos factorizar de la siguiente manera

$$p(x) = a(x - r_1)^2.$$

PROBLEMA 3.29. Factorice los siguientes polinomios

1.  $7x^2 - 5x$
2.  $x^2 - 5x + 6$
3.  $3x^2 + 2x - 5$
4.  $x^2 - 4x + 4$

PROBLEMA 3.30. Factorice los siguientes polinomios

1.  $x^2 - 6x - 2$
2.  $3x^2 - 5x + 1$
3.  $4x^2 - 6x + 3$

### 5.6. Aplicaciones.

PROBLEMA 3.31. Encuentre dos números positivos sabiendo que uno de ellos es igual al triple del otro más 5 y que el producto de ambos es igual a 68.

PROBLEMA 3.32. Encuentre un número sabiendo que la suma del triple del mismo con el doble de su recíproco es igual a 5.

PROBLEMA 3.33. Encuentre las dimensiones de un rectángulo cuto perímetro es de 50 pies y área es de 150 pies cuadrados.

PROBLEMA 3.34. La hipotenusa de un triángulo es igual a 34 pulgadas. Encuentre las longitudes de los catetos sabiendo que uno de ellos es 14 pulgadas mayor que el otro.

PROBLEMA 3.35. Las dimensiones exteriores de un marco de fotografía son 12 por 15 pulgadas. Sabiendo que el ancho permanece constante, encuentre su valor a) cuando la superficie de la fotografía es de 88 pulgadas y b) cuando dicha superficie vale 100 pulgadas cuadradas.

PROBLEMA 3.36. Un piloto realiza un vuelo de 600 millas. Sabiendo que si aumenta la velocidad en 40 millas/hora podría recorrer dicha distancia empleando 30 minutos menos, encuentre la velocidad promedio.

PROBLEMA 3.37. Un comerciante compra determinado número de camisas por \$180 y las vende todas menos 6 con una ganancia de \$2 en cada camisa. Sabiendo que con el dinero recaudado en la venta podría haber comprado 30 camisas más que antes, calcule el precio de cada camisa.

PROBLEMA 3.38. Dos operarios A y B juntos, realizan una tarea en 10 días. Trabajando por separado, A tardaría 5 días más que B. Encuentre el número de días que tardarían en hacer la tarea trabajando cada no por sí sólo.

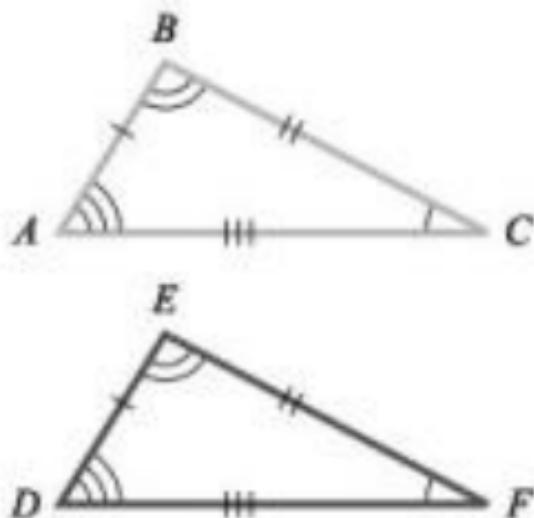


## Capítulo 4

# Trigonometría

### 1. La geometría de los triángulos: congruencia, similitud y el teorema de Pitágoras

**1.1. Triángulos congruentes.** Los triángulos que tienen el mismo tamaño y la misma forma se llaman *triángulos congruentes*.



Si dos triángulos  $\triangle ABC, \triangle DEF$  son congruentes, escribiremos

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

PROPIEDAD 4.1 (Criterios de congruencia).  
*lo incluido iguales.*

■ LAL: *Dos lados y su ángulo incluido iguales.*

- ALA: *Dos ángulos y su lado incluido iguales.*
- LLL: *Tres lados iguales.*

### 1.2. Triángulos

semejantes. [t]



Diremos que dos triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle DEF$  son *similares* si existe un correspondencia  $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$  tal que  $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|} =: \alpha$ .

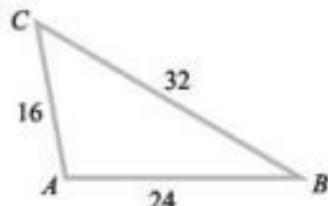
A tal constante de proporcionalidad  $\alpha$  se conoce como *escala*.

**PROPIEDAD 4.2** (Criterio *AA*). *Si las medidas de dos ángulos de un triángulo son iguales a las de dos ángulos correspondientes de un segundo triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.*

[t]

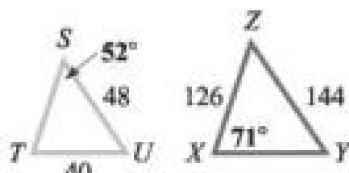
**PROBLEMA 4.1.** Suponga que en la figura, ambos triángulos son semejantes. Encuentre las longitudes desconocidas de los lados de  $\triangle EDF$ .

[t]



**PROBLEMA 4.2.** Encuentre las medidas de las partes desconocidas de los triángulos semejantes  $\triangle STU$  y  $\triangle ZXY$ .

[t]



**PROBLEMA 4.3.** La jefa de oficina de correos de una ciudad quiere medir la altura del asta de la bandera de la oficina. Observa que en el instante en el que la sombra de la estación mide 18fts, la sombra del asta mide 99fts. El edificio tiene 10fts de altura. ¿Cuál es la altura del asta?

### 1.3. El teorema de Pitágoras.

**TEOREMA 4.1** (Pitágoras).

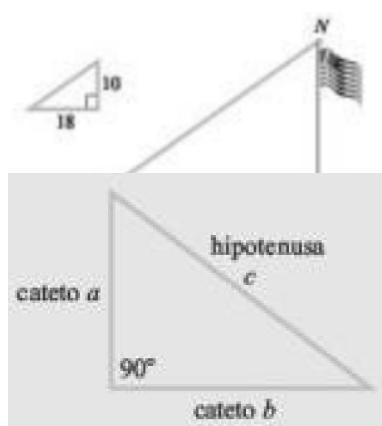
$$a^2 + b^2 = c^2$$

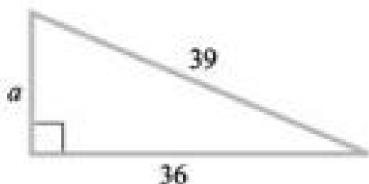
Los números naturales  $\{3, 4, 5\}$  forman una *terna pitagórica*, ya que satisfacen las ecuaciones del teorema de Pitágoras.

[t]

**PROBLEMA 4.4.** Determine la longitud  $a$  del triángulo rectángulo que se muestra.

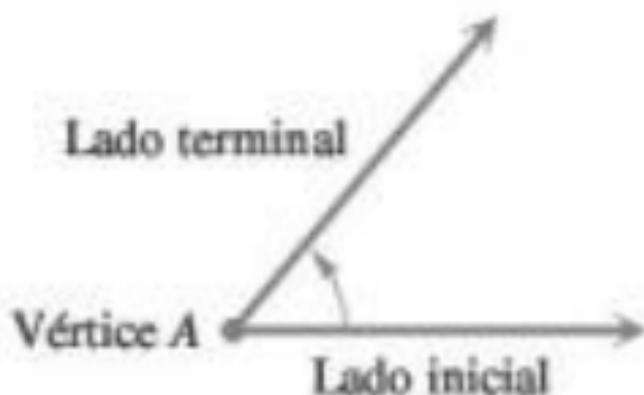
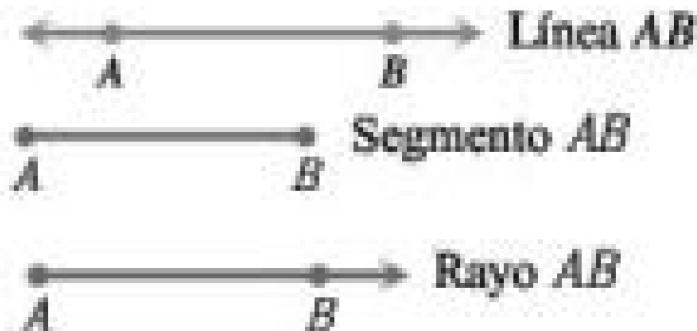
[t]





**PROBLEMA 4.5.** Una escalera de 10 metros de longitud tiene su base a 6 metros de la pared. ¿Qué altura alcanza la escalera?

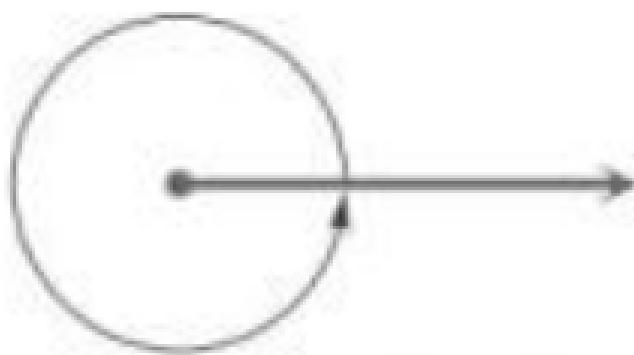
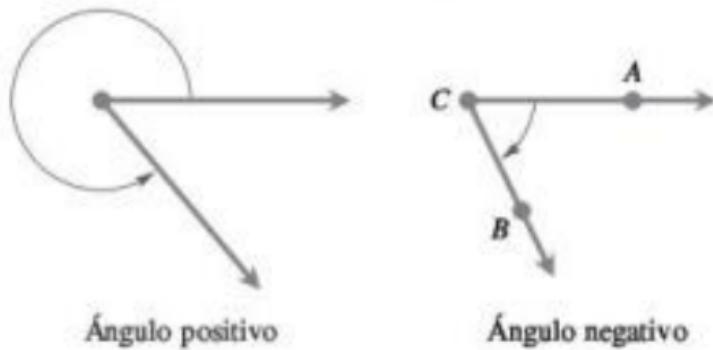
## 2. Los ángulos y sus medidas



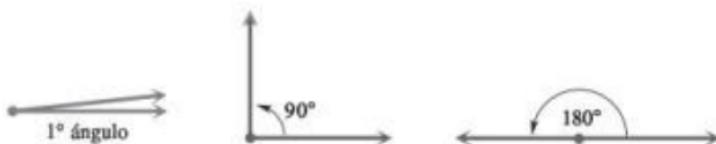
**2.1. Terminología básica.** Si la suma de las medidas de dos ángulos es  $90^\circ$ , los ángulos se llaman *complementarios*. En tanto que dos ángulos cuyas medidas sumen  $180^\circ$  son *suplementarios*.

**PROBLEMA 4.6.** Diga cuál es el complemento y el suplemento de  $50^\circ$ .





**La rotación completa de un rayo genera un ángulo cuya medida es de 360°.**

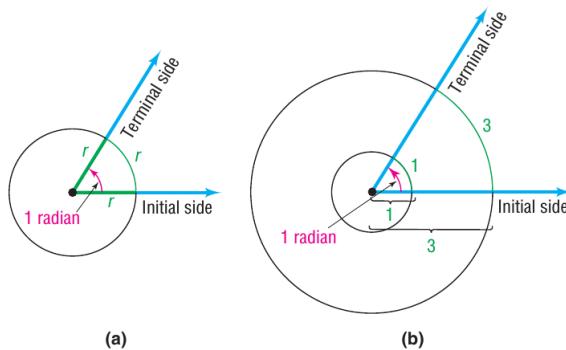


**2.2. Radianes.** Un *ángulo central* es un ángulo positivo cuyo vértice esta en el centro de un círculo.

**TEOREMA 4.2** (Longitud de arco). *Para un círculo de radio  $r$ , un ángulo central de  $\theta$  radianes subtienede un arco cuya longitud es*

$$(80) \qquad s = r\theta$$

| Nombre            | Medida del ángulo              | Ejemplo(s)                                                                         |
|-------------------|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Ángulo agudo      | Entre $0^\circ$ y $90^\circ$   |  |
| Ángulo recto      | Exactamente $90^\circ$         |   |
| Ángulo obtuso     | Entre $90^\circ$ y $180^\circ$ |  |
| Ángulo rectilineo | Exactamente $180^\circ$        |   |



**PROBLEMA 4.7.** Encuentre la longitud de arco de un círculo de radio 2 subtenido por un ángulo central de 0.25 radianes.

PROBLEMA 4.8. Encuentre la longitud de arco de un círculo de radio 10 subtendido por un ángulo central de  $\frac{1}{2}$  radianes.

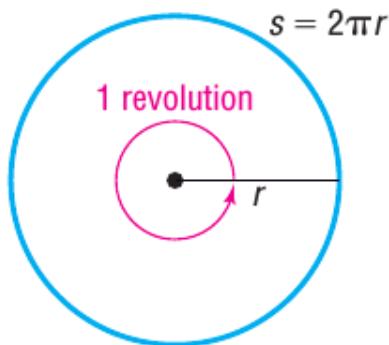


FIGURA 1. 1 revolución =  $2\pi$  radianes

**2.3. Conversión entre grados y radianes.** Como una revolución equivale a  $360^\circ$ , entonces  $1\text{rad} = 360^\circ$ . De manera simplificada:

$$180^\circ = \pi \text{rad}$$

PROBLEMA 4.9. Convierta cada uno de los ángulos a radianes:

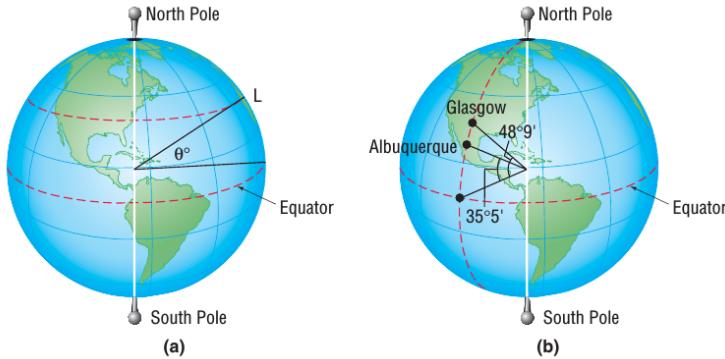
- $60^\circ =$
- $150^\circ =$
- $-45^\circ =$
- $90^\circ =$
- $107^\circ =$

PROBLEMA 4.10. ■ Convierta  $35^\circ$  a radianes, expresándolo como un múltiplo de  $\pi$ .  
■ Convierta  $-40^\circ$  a radianes, expresándolo en decimales.

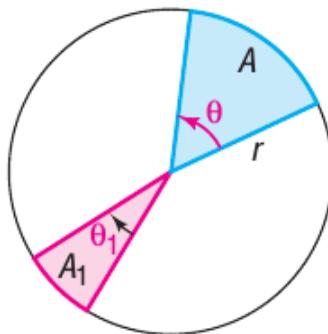
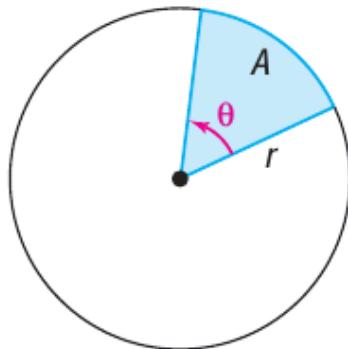
|                |                  |                  |                  |                  |                  |                  |                   |                  |             |
|----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|-------------|
| <b>Degrees</b> | $0^\circ$        | $30^\circ$       | $45^\circ$       | $60^\circ$       | $90^\circ$       | $120^\circ$      | $135^\circ$       | $150^\circ$      | $180^\circ$ |
| <b>Radians</b> | 0                | $\frac{\pi}{6}$  | $\frac{\pi}{4}$  | $\frac{\pi}{3}$  | $\frac{\pi}{2}$  | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$  | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$       |
| <b>Degrees</b> | $210^\circ$      | $225^\circ$      | $240^\circ$      | $270^\circ$      | $300^\circ$      | $315^\circ$      | $330^\circ$       | $360^\circ$      |             |
| <b>Radians</b> | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$           |             |

PROBLEMA 4.11. La latitud de una locación  $L$  es la medida del ángulo formado por un rayo dibujado desde el centro de la tierra al ecuador y un rayo dibujado del centro de la tierra a  $L$ .

Glasgow, Montana está al norte de Albuquerque, Nuevo México. Encuentre la distancia entre Glasgow,  $48^\circ, 9'$ , latitud Norte y Albuquerque,  $35^\circ, 5'$ . Suponga que el radio de la tierra es 3960 millas.



PROBLEMA 4.12. Memphis, Tennessee, está al norte de Nueva Orleans, Louisiana. Encuentre la distancia entre Memphis,  $35^\circ, 9'$  latitud norte, y Nueva Orleans,  $29^\circ, 57'$  latitud norte. Suponga que el radio de la tierra es 3960 millas.



#### 2.4. Área de un sector de un círculo.

TEOREMA 4.3 (Área de un sector). *El área  $A$  de un sector de un círculo de radio  $r$  formado por un ángulo central de  $\theta$  radianes es*

$$(81) \quad A = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

PROBLEMA 4.13. Encuentre el área del sector de un círculo de radio  $2\text{ft}$ s formado por un ángulo de  $30^\circ$ . Redondee la respuesta dos decimales.

PROBLEMA 4.14. Encuentre el área del sector de un círculo de radio  $10\text{m}$  formado por un ángulo de  $\frac{1}{2}\text{rad}$ . Redondee la respuesta dos decimales.

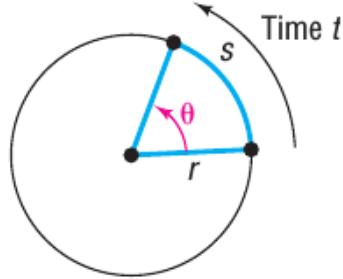
**2.5. Movimiento circular.** Supongamos que un objeto se mueve alrededor de un círculo de radio  $r$  a una rapidez constante. Si  $s$  es la distancia recorrida en un tiempo  $t$  alrededor del círculo, entonces la *rapidez lineal*  $v$  de este objeto se define como

$$(82) \quad v = \frac{s}{t}$$

La *rapidez angular*  $\omega$  de este objeto es el ángulo  $\theta$  (medido en radianes) barrido, dividido por el lapso  $t$ , es decir,

$$(83) \quad \omega = \frac{\theta}{t}.$$

$$v = \frac{s}{t}$$



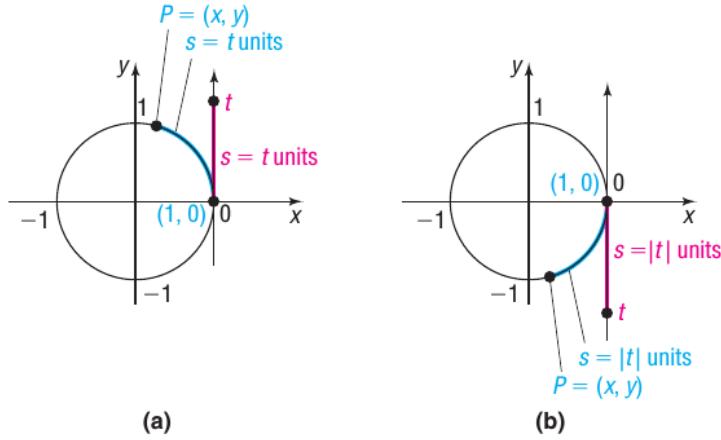
De manera que

$$(84) \quad v = r\omega.$$

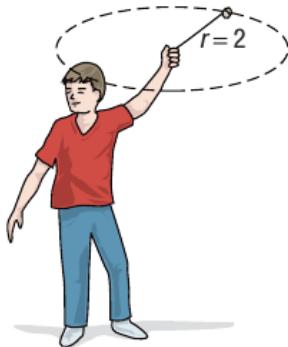
**PROBLEMA 4.15.** Una persona está haciendo una roca atada al extremo de un cuerda de  $2\text{fts}$  a un ritmo de  $180\text{rpm}$ . Encuentre la rapidez lineal de la roca en el instante en que es liberada.

**PROBLEMA 4.16.** Un objeto está viajando alrededor de un círculo de radio  $5\text{cm}$ . Si en  $20\text{s}$  un ángulo central de  $\frac{1}{3}\text{rad}$  es barrido, ¿cuál es su rapidez angular? ¿Cuál es su rapidez lineal?

### 3. Funciones trigonométricas: El enfoque del círculo unitario



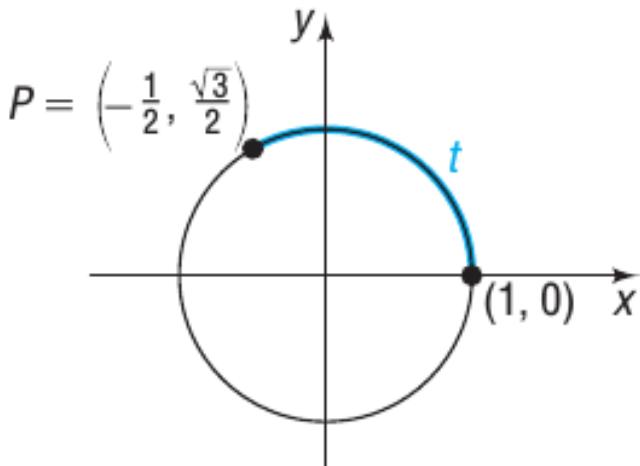
#### 3.1. El círculo unitario.



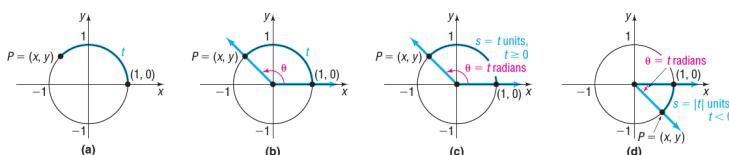
**DEFINICIÓN 4.1** (Funciones trigonométricas). Sea  $t$  un número real y  $P = (x, y)$  el punto en el círculo unitario que corresponde a  $t$ .

- $\sin(t) = y$
- $\csc(t) = \frac{1}{y}$
- $\cos(t) = x$
- $\sec(t) = \frac{1}{x}$
- $\tan(t) = \frac{y}{x}$
- $\cot(t) = \frac{x}{y}$

**PROBLEMA 4.17.** Sea  $t$  un número real y  $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  un punto en el círculo unitario que corresponde a  $t$ . Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas.



**PROBLEMA 4.18.** Sea  $t$  un número real y  $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$  un punto en el círculo unitario que corresponde a  $t$ . Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas.



**3.2. Funciones trigonométricas de ángulos.** Entonces, podemos definir una función trigonométrica en ángulos siempre y cuando este medido en radianes:

$$f(\theta) = f(t \text{ radianes})$$

si  $\theta = t$  radianes.

**PROBLEMA 4.19.** Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas en:

- $\theta = 0 = 0^\circ$
- $\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$
- $\theta = \pi = 180^\circ$
- $\theta = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$

| Quadrantal Angles  |                    |               |               |               |               |               |               |
|--------------------|--------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\theta$ (Radians) | $\theta$ (Degrees) | $\sin \theta$ | $\cos \theta$ | $\tan \theta$ | $\csc \theta$ | $\sec \theta$ | $\cot \theta$ |
| 0                  | 0°                 | 0             | 1             | 0             | Not defined   | 1             | Not defined   |
| $\frac{\pi}{2}$    | 90°                | 1             | 0             | Not defined   | 1             | Not defined   | 0             |
| $\pi$              | 180°               | 0             | -1            | 0             | Not defined   | -1            | Not defined   |
| $\frac{3\pi}{2}$   | 270°               | -1            | 0             | Not defined   | -1            | Not defined   | 0             |

**PROBLEMA 4.20.** Encuentre el valor exacto de:

- $\sin(3\pi)$
- $\cos(-270^\circ)$

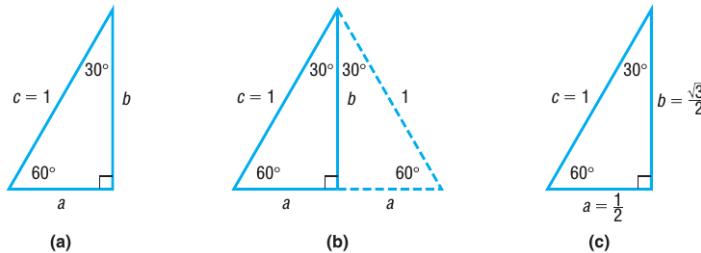
**PROBLEMA 4.21.** Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas en  $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ .

Valor exacto en  $\frac{\pi}{4}$

**PROBLEMA 4.22.** Encuentre el valor exacto de cada expresión:

- $\sin(45^\circ) \cos(180^\circ)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
- $\left(\sec\frac{\pi}{4}\right)^2 + \csc\frac{\pi}{2}$

Valor exacto en  $\frac{\pi}{6}$  y  $\frac{\pi}{3}$

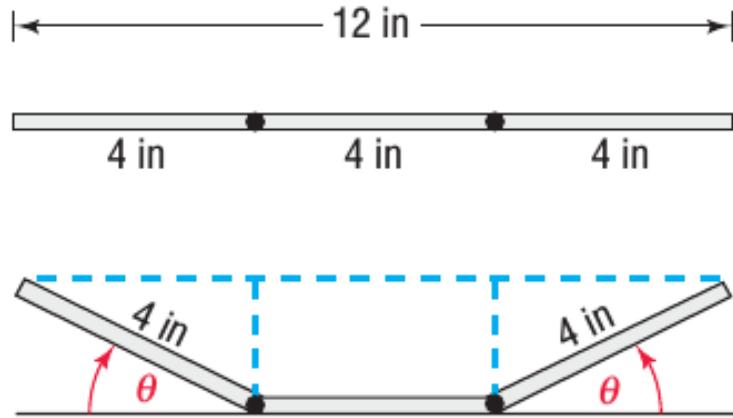


**PROBLEMA 4.23.** Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas de  $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$ .

| $\theta$ (Radians) | $\theta$ (Degrees) | $\sin \theta$        | $\cos \theta$        | $\tan \theta$        | $\csc \theta$         | $\sec \theta$         | $\cot \theta$        |
|--------------------|--------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| $\frac{\pi}{6}$    | $30^\circ$         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 2                     | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$           |
| $\frac{\pi}{4}$    | $45^\circ$         | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1                    | $\sqrt{2}$            | $\sqrt{2}$            | 1                    |
| $\frac{\pi}{3}$    | $60^\circ$         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | $\sqrt{3}$           | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | 2                     | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

PROBLEMA 4.24. Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas de  $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ .

PROBLEMA 4.25. Un recolector de lluvia se construye a partir de planchas de aluminio de 12 pulgadas de ancho. Después de marcar 4 pulgadas a partir de cada extremo, está longitud se dobla a un ángulo  $\theta$ . Encuentre el área transversal máxima del recolector.



#### 4. Funciones trigonométricas inversas

**4.1. Funciones inversas.** Sea  $f : A \rightarrow B$  una función. Diremos que  $f$  es *invertible* si para cada  $y \in B$  siempre corresponde un único  $x \in A$ , tal que

$$f(x) = y.$$

Si una función  $f$  es invertible, entonces existe una función  $g : B \rightarrow A$  tal que  $y = f(x)$  si y solo si  $g(y) = x$ . En otras palabras, podemos despejar  $x$ . Es usual denotar a tal función  $g$  por  $f^{-1}$  y llamarle *inversa de  $f$* .

Propiedades del inversa

- $f^{-1}(f(p))$  para todo  $p \in A$ .
- $f(f^{-1}(p))$  para todo  $p \in B$ .
- $\text{Dominio}(f) = \text{Rango}(f^{-1})$  y viceversa.
- La gráfica de  $f^{-1}$  es la reflexión a  $45^\circ$  de la gráfica de  $f$ .

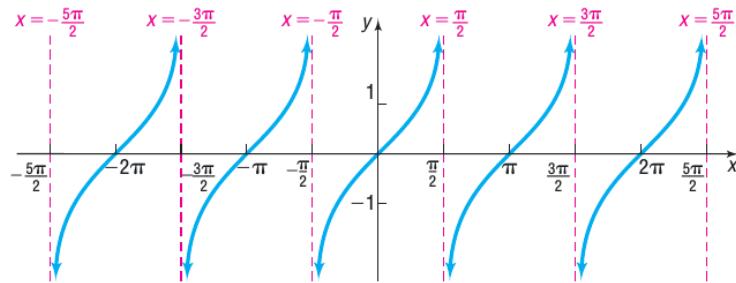


FIGURA 2.  $y = \tan(x)$

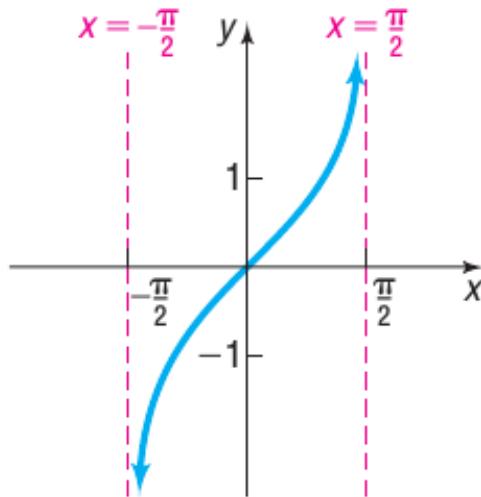
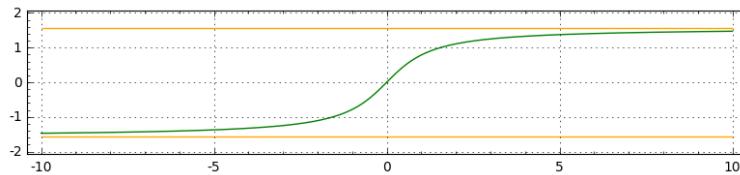
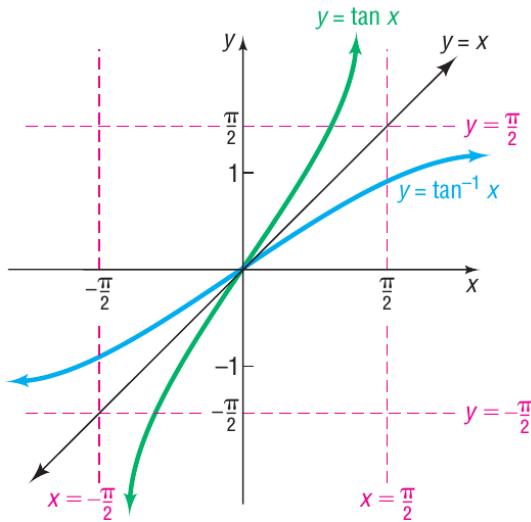


FIGURA 3.  $y = \tan(x)$ ,  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\infty < x < \infty$

#### 4.2. Tangente inversa. Tangente inversa

$$y = \tan^{-1}(x) \iff \begin{cases} x = \tan(y) \\ -\infty < x < \infty \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

PROBLEMA 4.26. Encuentre el valor exacto de

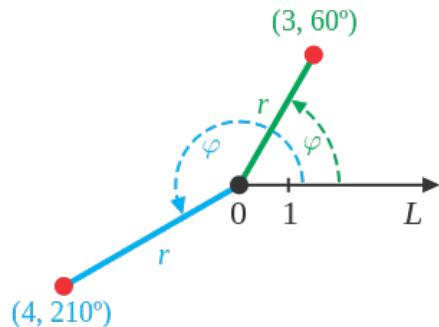
FIGURA 4.  $y = \tan^{-1}(x)$ 

- $\tan^{-1} 1$
- $\tan(-\sqrt{3})$
- $\tan^{-1} 0$
- $\tan^{-1} (\tan \frac{4\pi}{5})$

**4.3. Vectores.** Diremos que un vector  $\langle x, y \rangle$  esta en su *forma polar (estándar)*  $r \exp(\theta i)$  si

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \end{aligned}$$

con  $-\pi < \theta \leq \pi$ .



PROBLEMA 4.27. Escriba los siguientes vectores en su forma polar (estándar):

- $\langle 1, \sqrt{3} \rangle$
- $\langle 1, -\sqrt{3} \rangle$
- $\langle -1, \sqrt{3} \rangle$
- $\langle -1, -\sqrt{3} \rangle$

#### 4.4. Optimización.

PROBLEMA 4.28. Suponga que en una sala de cine, una pantalla tiene 28 pies de alto. Cuando un espectador se sienta, la parte inferior de la pantalla tiene una altura de 6 pies por encima de su nivel de visión. El ángulo formado al dibujar una linea desde la parte inferior de la pantalla a la parte superior se conoce como ángulo de visión. Encuentre el ángulo máximo de visión respecto a la distancia al muro que sostiene la pantalla.

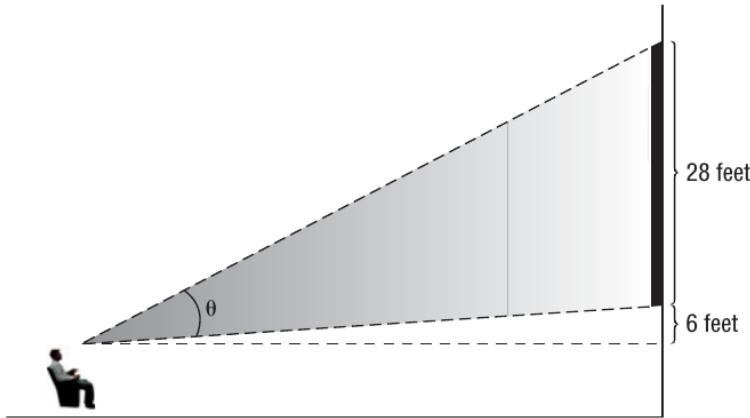


FIGURA 5. Ángulo de visión

Sugerencia

$$\frac{d}{dx} \left( \tan^{-1} \left( \frac{A}{x} \right) \right) = -\frac{A}{A^2 + x^2}$$

## Capítulo 5

# Trigonometría Analítica

### 1. Propiedades de funciones trigonométricas

- PROBLEMA 5.1.
- Grafique cada una de las seis funciones trigonométricas en **Sagemath**.
  - Determine el dominio y el rango de cada una.

DEFINICIÓN 5.1. Una función se llama periódica si existe un número positivo  $p$  tal que siempre que  $\theta$  esté en el dominio de  $f$ , entonces  $\theta + p$  lo está y

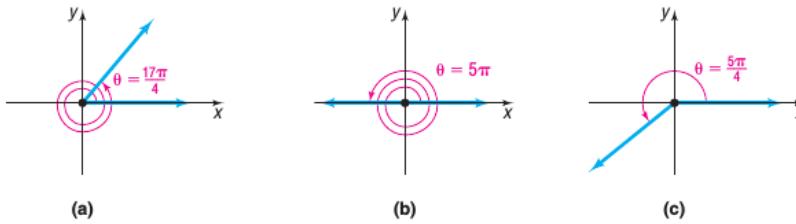
$$f(\theta + p) = f(\theta).$$

Si existe un número minimal  $p$  con tal propiedad, diremos que este es el *periodo fundamental* de  $f$ .

PROBLEMA 5.2. Determine el periodo respectivo de cada una de las seis funciones trigonométricas.

PROBLEMA 5.3. Encuentre el valor exacto de

- $\sin\left(\frac{17\pi}{4}\right)$
- $\cos(5\pi)$
- $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$



PROBLEMA 5.4. Determine el valor exacto de

- $\sin(405^\circ)$
- $\cot(390^\circ)$
- $\sec\left(\frac{17\pi}{4}\right)$

Identidades reciprocas

$$\begin{aligned}\csc(\theta) &= \frac{1}{\sin(\theta)} \\ \sec(\theta) &= \frac{1}{\cos(\theta)} \\ \cot(\theta) &= \frac{1}{\tan(\theta)}\end{aligned}$$

PROBLEMA 5.5. Dado

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos(\theta) &= \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

encuentre el valor de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

PROBLEMA 5.6. Dado

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= -\frac{3}{5} \\ \cos(\theta) &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

encuentre el valor de las cuatro funciones trigonométricas restantes.

Identidades pitagóricas

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

La función seno es par:

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

mientras que la función coseno es impar:

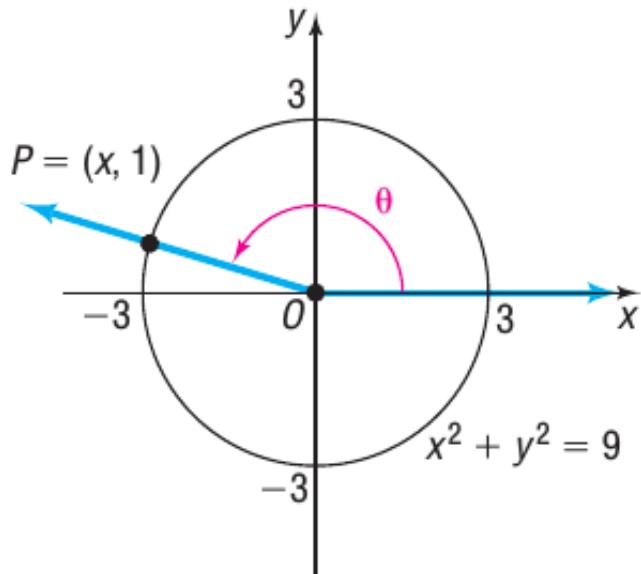
$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

PROBLEMA 5.7. Encuentre el valor exacto de cada expresión *sin usar calculadora*:

- $\tan(20^\circ) - \frac{\sin(20^\circ)}{\cos(20^\circ)}$
- $\sin^2 \frac{\pi}{12} + \frac{1}{\sec^2 \frac{\pi}{12}}$

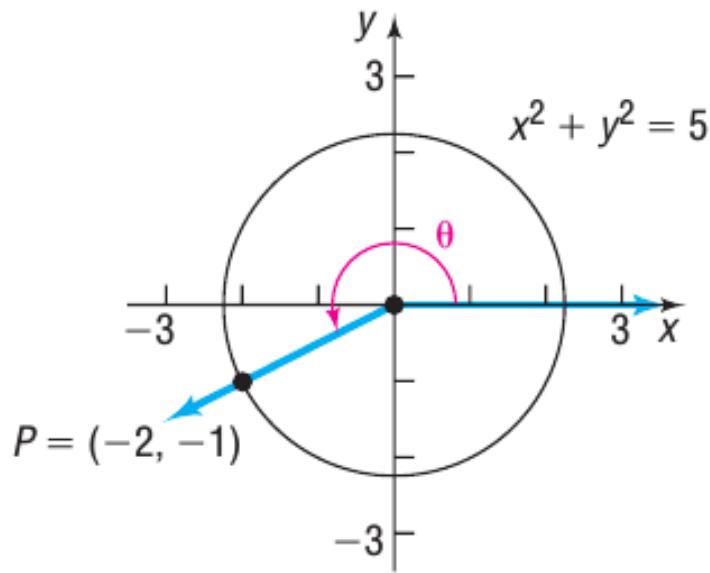
PROBLEMA 5.8. Encuentre el valor exacto de cada expresión *sin usar la calculadora*:

- $\sin(80^\circ) \csc(80^\circ)$
- $\cos(400^\circ) \sec(40^\circ)$
- $\frac{\sin(-20^\circ)}{\cos(380^\circ)} + \tan(200^\circ)$



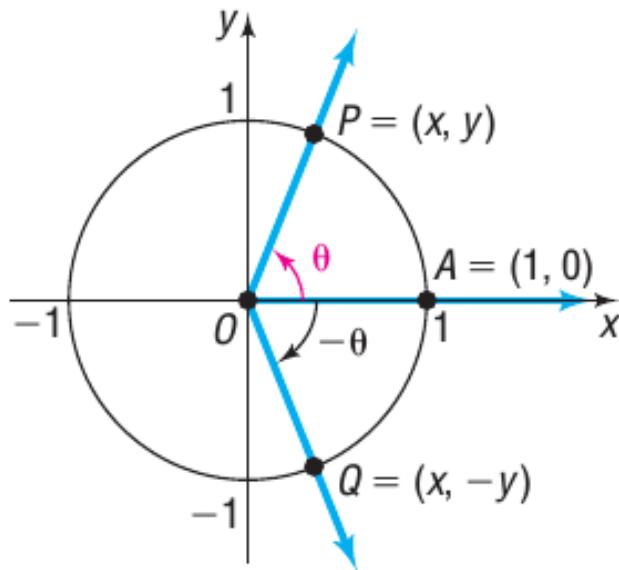
**PROBLEMA 5.9.** Dado que  $\sin \theta = \frac{1}{3}$  y  $\cos \theta$ , encuentre el valor exacto de cada una de las restantes cinco funciones trigonométricas.

**PROBLEMA 5.10.** Dado que  $\tan \theta = \frac{1}{2}$  y  $\sin \theta < 0$ , encuentre el valor exacto de cada una de las restantes cinco funciones trigonométricas en  $\theta$ .



**PROBLEMA 5.11.** Encuentre el valor de cada una de las restantes funciones trigonométricas en  $\theta$  conociendo que  $\sin \theta = \frac{12}{13}$  y  $\theta$  se encuentra en el segundo cuadrante.

Paridad e imparidad Por un lado, una función  $f(\theta)$  es par si  $f(-\theta) = f(\theta)$ . Por otro lado, función  $f(\theta)$  si  $f(-\theta) = -f(\theta)$ .



**PROPIEDAD 5.1.** La función cos es par, pero la función sin es par.

**PROBLEMA 5.12.** Determine si las funciones trigonométricas restantes son pares o impares.

**PROBLEMA 5.13.** Encuentre el valor exacto de

- $\sin(-45^\circ)$
- $\cos(-\pi)$
- $\cot\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$
- $\tan\left(-\frac{37\pi}{4}\right)$

**PROBLEMA 5.14.**

■  $\sin(-60^\circ)$

■  $\csc(-30^\circ)$

■  $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

■  $\sec(-\pi)$

## 2. Suma y diferencias de ángulos

Suma y diferencias para el coseno

$$\cos(s + t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t)$$

$$\cos(s - t) = \cos(s)\cos(t) + \sin(s)\sin(t)$$

PROBLEMA 5.15. Demuestre las siguientes identidades

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$$

Suma y diferencias para el coseno

$$\sin(s + t) = \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t)$$

$$\sin(s - t) = \sin(s)\cos(t) - \cos(s)\sin(t)$$

PROBLEMA 5.16. Establezca la siguiente identidad

$$\frac{\cos(s - t)}{\sin(s)\sin(t)} = \cot(s)\cot(t) + 1$$

PROBLEMA 5.17. Demuestre las siguientes identidades

1.

$$\tan(s + t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$$

2.

$$\tan(s - t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$

3.

$$\tan(s + \pi) = \tan(s)$$

4.

$$\tan\left(s + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(s)$$

PROBLEMA 5.18. Demuestre las siguientes identidades

1.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$$

2.

$$\frac{\sin(s + t)}{\sin(s)\cos(t)} = 1 + \cot(s)\tan(t)$$



# **Parte 2**

# **Álgebra Lineal**



## Capítulo 6

# Sistemas lineales

### 1. Sistemas de Ecuaciones Lineales Simultáneas

**1.1. Sistemas de Dos Ecuaciones Lineales.** Supongamos que  $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2$  son números dados:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

En el sistema anterior, nuestro objetivo es encontrar dos números  $x, y$  tales que cumplan ambas ecuaciones simultáneamente.

PROBLEMA 6.1. La solución del sistema

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

es  $x = 5, y = 2$ .

A continuación, ejemplificaremos algunos de los métodos más comunes para resolver sistemas de ecuaciones.

$$(85) \quad 2x - y = 4$$

$$(86) \quad x + 2y = -3$$

Método de sustitución Despejando de (85), obtenemos

$$y = 2x - 4.$$

Sustituyendo en (??), obtenemos

$$x + 2(2x - 4) = -3.$$

Método de igualación Despejando de (85), obtenemos

$$y = 2x - 4.$$

Despejando de (??), obtenemos

$$y = -\frac{3+x}{2}.$$

Igualando ambos lados derechos, obtenemos

$$2x - 4 = -\frac{3+x}{2}.$$

Método gráfico

Tipos de sistemas

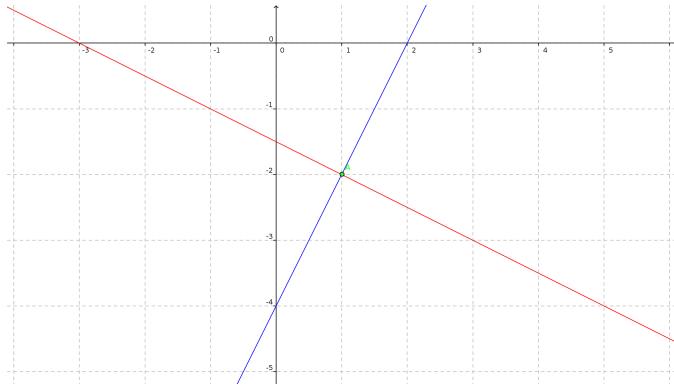
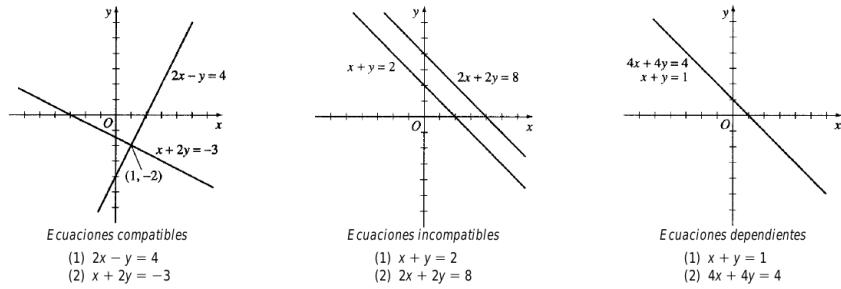


FIGURA 1.  
 $2x - y = 4, x + 2y = -3$



## 2. Determinantes

### 2.1. Determinantes de Segundo Orden. Definición

DEFINICIÓN 6.1.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

PROBLEMA 6.2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

Si consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$(87) \quad \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \dots$$

...y definimos

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \dots \end{aligned}$$

...entonces

$$(88) \quad \begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta} \\ y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} \end{aligned}$$

PROBLEMA 6.3. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

**2.2. Ejemplos.** El método de solución de sistemas de ecuaciones lineales, por medio de determinantes, se conoce como Regla de Cramer.

PROBLEMA 6.4. Resuelva el siguiente sistema por la Regla de Cramer

$$\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$$

PROBLEMA 6.5. Resuelva el siguiente sistema por la Regla de Cramer

$$\begin{cases} 3u + 2v = 18 \\ -5u - v = 12 \end{cases}$$

**2.3. Sistemas Indeterminados.** Un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas tiene una única solución si y solo si su determinante principal  $\Delta \neq 0$ .

En este caso, decimos que el sistema es consistente.

Si  $\Delta = 0$ , entonces o bien existen múltiples soluciones, o bien no existe alguna en absoluto.

En cualquier caso, decimos que el sistema es inconsistente.

Determine si

$$\begin{cases} 5x - 2y = 10 \\ 10x - 4y = 20 \end{cases}$$

es consistente; y de no ser el caso, explique qué sucede con las soluciones.

Determine si

$$\begin{cases} 5x + 3y = 15 \\ 10x + 6y = 60 \end{cases}$$

es consistente; y de no ser el caso, explique qué sucede con las soluciones.

#### 2.4. Ejemplos.

PROBLEMA 6.6.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$$

PROBLEMA 6.7.

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 3 \\ 2x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

PROBLEMA 6.8.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 3 \\ 6y - 6x &= 1 \end{aligned}$$

PROBLEMA 6.9.

$$5y = 3 - 2x$$

$$3x = 2y + 1$$

PROBLEMA 6.10.

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{3} + \frac{y+1}{6} &= 2 \\ \frac{x+3}{4} - \frac{2y-1}{2} &= 1 \end{aligned}$$

### 3. Fracciones parciales

La técnica de fracciones parciales se utiliza para integrar funciones racionales, es decir, aquellas de la forma

$$\frac{N(x)}{D(x)},$$

donde  $N, D$  son polinomios.

Por simplicidad, supondremos que

1. El coeficiente líder de  $D(x)$  es igual a 1.
2. El grado de  $D(x)$  es mayor que el de  $N(x)$ .

Sin embargo, ninguna de estas dos condiciones son esenciales.

PROBLEMA 6.11.

$$\int \frac{2x^3}{5x^8 + 3x - 4} dx = \frac{1}{5} \int \frac{2x^3}{x^8 + \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}}$$

PROBLEMA 6.12.

$$\frac{2x^5 + 7}{x^2 + 3} = 2x^3 - 6x + \frac{18x + 7}{x^2 + 3}$$

DEFINICIÓN 6.2. Un polinomio es irreducible si no se puede expresar como el producto de dos polinomios de grado menor.

1. Todo polinomio lineal es irreducible
2. Un polinomio cuadrático

$$g(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

es irreducible si y solo  $b^2 - 4ac < 0$ .

PROBLEMA 6.13. Verifique que

1.  $x^2 + 4$  es irreducible;
2.  $x^2 + x - 4$  es reducible.

TEOREMA 6.1. *Todo polinomio cuyo coeficiente líder sea igual a 1 se puede expresar como producto de factores lineales, o factores cuadráticos irreducibles.*

PROBLEMA 6.14.      1.  $x^3 - 4x =$

2.  $x^3 + 4x =$

3.  $x^4 - 9 =$

4.  $x^3 - 3x^2 - x + 3 =$

#### 3.1. Método de Fracciones Parciales.

**3.2. Caso I.**  $D(x)$  es producto de factores lineales distintos.

PROBLEMA 6.15. Resuelva

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4}$$

PROBLEMA 6.16. Resuelva

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3 + x^2 - 6x}$$

**3.3. Regla General para Caso 1.** El integrando se representa como una suma de términos de la forma  $\frac{A}{x-a}$ , para cada factor  $x-a$ , y  $A$  una constante por determinar.

**3.4. Caso 2.**  $D(x)$  es producto de factores lineales repetidos.

PROBLEMA 6.17. Encuentre

$$\int \frac{(3x+5)dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

PROBLEMA 6.18.

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3(x-2)^2}$$

**3.5. Regla General para el Caso 2.** Para cada factor  $x-c$  de multiplicidad  $k$ , se utiliza la expresión

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-r)^k}.$$

**3.6. Caso 3. Factores cuadráticos irreducibles distintos, y lineales repetidos.** A cada factor irreducible  $x^2 + bx + c$  de  $D(x)$  le corresponde el integrando

$$\frac{Ax+B}{x^2 + bx + c}.$$

PROBLEMA 6.19. Encuentre

$$\int \frac{(x-1)dx}{x(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$$

**3.7. Caso IV. Factores cuadráticos irreducibles repetidos.** A cada factor cuadrático irreducible  $x^2 + bx + c$  de multiplicidad  $k$  le corresponde el integrando

$$\sum_{i=1}^k \frac{A_i x + B_i}{(x^2 + bx + c)^i}$$

PROBLEMA 6.20. Encuentre

$$\int \frac{2x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

#### 4. Factores lineales sin repetición

PROBLEMA 6.21. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$(89) \quad \frac{-29x + 143}{2x^2 - 22x + 56}$$

$$\frac{-29x + 143}{2x^2 - 22x + 56} = -\frac{9}{2(x-4)} - \frac{10}{x-7}$$

PROBLEMA 6.22. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$(90) \quad \frac{-10x - 30}{7x^2 + 4x - 3}$$

$$\frac{-10x - 30}{7x^2 + 4x - 3} = -\frac{24}{7x-3} + \frac{2}{x+1}$$

PROBLEMA 6.23. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$(91) \quad \frac{171x + 175}{15x^2 + 38x + 7}$$

$$\frac{171x + 175}{15x^2 + 38x + 7} = \frac{22}{5x+1} + \frac{21}{3x+7}$$

#### 5. Factores lineales con repetición

PROBLEMA 6.24. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$(92) \quad \frac{-10x + 109}{x^2 - 20x + 100}$$

$$\frac{-10x + 109}{x^2 - 20x + 100} = -\frac{10}{x-10} + \frac{9}{(x-10)^2}$$

PROBLEMA 6.25. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$(93) \quad \frac{80x + 31}{256x^2 + 96x + 9}$$

$$\frac{80x + 31}{256x^2 + 96x + 9} = \frac{5}{16x+3} + \frac{16}{(16x+3)^2}$$

PROBLEMA 6.26. Encuentre la expresión en fracciones parciales de

$$(94) \quad \frac{30x - 14}{25x^2 - 20x + 4}$$

$$\frac{30x - 14}{25x^2 - 20x + 4} = \frac{6}{5x-2} - \frac{2}{(5x-2)^2}$$

## Capítulo 7

# Espacios Vectoriales

### 1. Definición y ejemplos

Hasta ahora hemos considerado a los vectores como elementos de un espacio

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_k \in \mathbb{R}\},$$

por ejemplo vectores en el plano  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$  o en el espacio  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ . En cada caso, teníamos una suma entre vectores y una multiplicación por *escalares*, es decir, número reales.

**PROBLEMA 7.1.** Si  $u = (u_1, u_2)$  y  $v = (v_1, v_2)$  son vectores en  $\mathbb{R}^2$ , y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

mientras que

$$\alpha(u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2).$$

En este caso, la suma tiene las siguientes propiedades:

1. (Cerradura)  $u + v = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ , es un vector en  $\mathbb{R}^2$ ,
2. (Asociatividad) Si  $w = (w_1, w_2)$  es otro vector en  $\mathbb{R}^2$ , entonces

$$\begin{aligned} (u + v) + w &= ((u_1, u_2) + (v_1, v_2)) + (w_1, w_2) \\ &= (u_1, u_2) + ((v_1, v_2) + (w_1, w_2)) \\ &= u + (v + w), \end{aligned}$$

3. (Commutatividad)  $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2) = v + u$
4. (Existencia de un elemento neutro)  $u + \vec{0} = (u_1, u_2) + (0, 0) = (u_1, u_2) = u$ , y de la misma forma  $\vec{0} + u = u$ .
5. (Inversos aditivos) Para  $u = (u_1, u_2)$ , definimos

$$-u = (-u_1, -u_2),$$

y este elemento satisface que

$$u + (-u) = (-u) + u = 0.$$

La multiplicación por escalares satisface las siguientes propiedades

1.  $\alpha u$  es de nuevo un vector en  $\mathbb{R}^2$ ,
2.  $1u = 1(u_1, u_2) = (1 \cdot u_1, 1 \cdot u_2) = u$ ,
3.  $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u_1, \beta u_2) = \alpha(\beta u)$ .

Finalmente, la suma de vectores y la multiplicación por escalares están relacionadas por las siguientes leyes distributivas.

1.  $(\alpha + \beta)u = ((\alpha + \beta)u_1, (\alpha + \beta)u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2) + (\beta u_1, \beta u_2) = \alpha u + \beta u$ ,

$$2. \alpha(u+v) = \alpha(u_1+v_1, u_2+v_2) = (\alpha(u_1+v_1), \alpha(u_2+v_2)) = \alpha(u_1, u_2) + \alpha(v_1, v_2) = \alpha u + \alpha v.$$

PROBLEMA 7.2 ( $\dagger$ ). Verificar que las mismas propiedades se cumplen para  $\mathbb{R}^3$ , usando la suma de vectores y multiplicación por escalares conocida.

Estas propiedades se cumplen para muchos y muy diferentes conjuntos, donde tenemos una operación suma entre sus elementos y podemos definir una multiplicación por números reales. De hecho, estos conjuntos son los objetos de estudio en el álgebra lineal.

DEFINICIÓN 7.1. Sea  $V$  un conjunto, con una operación  $+ : V \times V \rightarrow V$  y una operación  $\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ . Decimos que  $V$  es un *espacio vectorial* (sobre  $\mathbb{R}$ ) si para todo  $u, v, w \in V$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  se cumplen las siguientes propiedades.

1. (Cerradura)  $u+v \in V$ ,
2. (Asociatividad)  $(u+v)+w = u+(v+w)$ ,
3. (Comutatividad)  $u+v = v+u$ ,
4. (Elemento neutro) Existe  $0 \in V$ , tal que para todo  $u \in V$ :  $u+0 = 0+u = u$ ,
5. (Elementos inversos) Para todo  $u \in V$ , existe  $-u \in V$ , tal que  $u+(-u) = (-u)+u = 0$ .
6.  $\alpha u \in V$ ,
7.  $1u = u$ ,
8.  $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$ ,
9.  $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$ ,
10.  $\alpha(u, v) = \alpha u + \alpha v$ .

A los elementos del espacio vectorial  $V$  les llamamos *vectores*.

OBSERVACIÓN 7.1. Cuando  $V$  es un espacio vectorial, con operación suma  $+ : V \times V \rightarrow V$  y multiplicación por escalares  $\cdot : \mathbb{R} \rightarrow V \rightarrow V$ , por brevedad, decimos que  $(V, +, \cdot)$  es un espacio vectorial.

**Ejemplos.** Para resolver los ejercicios de esta sección puede consultar (? , sec. 4.2) y (? , sec. 2.1).

PROBLEMA 7.3 ( $\dagger$ ). Demuestre usando las propiedades anteriores, que en cualquier espacio vectorial se cumplen las siguientes propiedades.

1.  $0u = \alpha 0 = 0$ . (Note que el cero escrito a la izquierda denota el cero como número, mientras que escrito a la izquierda o solo, denota el elemento neutro del espacio vectorial.)
2.  $-u = (-1)u$ . Sugerencia: Verifique que  $u + (-1)u = 0$ .
3. Si  $\alpha u = 0$ , entonces o bien  $\alpha = 0$  o  $u = 0$ .
4. El elemento neutro 0 es único.
5. Para cada vector  $u$ , su inverso aditivo  $-u$  es único.

PROBLEMA 7.4. Compruebe que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales (reales), con las operaciones suma y multiplicación por escalar usuales.

1.  $\{0\}$ .
2.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = mx\}$  para  $m \in \mathbb{R}$  fijo.
3.  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz = 0\}$  para  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
4.  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0\}$  para  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .
5.  $\{f | f : S \rightarrow \mathbb{R}\}$ , donde  $S$  puede ser cualquier conjunto fijos.

6.  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , es decir, el conjunto de matrices  $m \times n$  con entradas reales.
7. El espacio de polinomios con coeficientes reales.
8. El espacio de polinomios con coeficientes reales de grado  $\leq n$ , para  $n \in \mathbb{N}$  fijo.
9.  $C[a, b]$ , el espacio de funciones continuas en el intervalo  $[a, b]$ .
10. El conjunto de números reales *positivos* con las operaciones  $u \oplus v := u, v$  y  $\alpha \cdot u := u^\alpha$ .

PROBLEMA 7.5. Considere la ecuación diferencial de segundo orden homogénea

$$y''(x) + a(x)y' + b(x)y(x) = 0$$

donde  $a, b$  son funciones continuas. Demuestre que el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial es un espacio vectorial bajo las reglas usuales para la suma de funciones y multiplicación por escalares.

## 2. Subespacios vectoriales

PROBLEMA 7.6.  $\mathbb{R}^2$  es un espacio vectorial con las operaciones

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

y

$$\alpha(u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2).$$

En la sección anterior consideramos el subconjunto

$$L_c = \{(u_1, u_2) | u_2 = cu_1\} \subset \mathbb{R}^2$$

para  $c$  una pendiente fija, y verificamos que en efecto, con las mismas operaciones es un espacio vectorial.

Decimos entonces que  $L_c$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$ .

DEFINICIÓN 7.2. Si  $(V, +, \cdot)$  es un espacio vectorial y  $W \subset V$  es también espacio vectorial, con las mismas operaciones  $+, \cdot$  decimos que  $W$  es un subespacio vectorial de  $V$ , y podemos escribir  $W < V$ .

En principio, si  $W < V$ , tendríamos que verificar todos los axiomas de espacio vectorial para  $(W, +, \cdot)$ . Sin embargo, si en el espacio  $V$ , la suma es asociativa y commutativa, también lo será en  $W$ . De igual manera, el elemento neutro  $1 \in V$  de la multiplicación por escalares es el mismo en  $W$ , y se sigue cumpliendo la asociatividad de la multiplicación por escalares y las leyes de distribución.

Entonces, basta demostrar que se cumplen los restantes axiomas, a saber:

1. Si  $u, v \in W$ , entonces  $u + v \in W$ .
2. Si  $\alpha \in \mathbb{R}, v \in W$ , entonces  $\alpha v \in W$ .
3.  $0 \in W$ .
4. Si  $u \in W$ , entonces  $-u \in W$ .

Sin embargo, los dos últimos incisos se siguen del segundo. En efecto, si escogemos  $\alpha = 0$  y cualquier  $u \in W$ , entonces

$$0 = 0 \cdot u \in W.$$

De igual manera, para cualquier  $u \in W$ , si escogemos  $\alpha = -1$ , entonces  $-u = (-1)u \in W$ .

Por último, verificar los dos axiomas restantes es equivalente a verificar que para todo  $\alpha \in \mathbb{R}, u, v \in W$ ,

$$\alpha u + v \in W.$$

PROPIEDAD 7.1. Si  $W \subset V$ , entonces

$$W < V \iff \forall \alpha \in \mathbb{R}, u, v \in W, \alpha u + v \in W.$$

COROLARIO 7.1. Todo  $W < V$  contiene a  $0 \in V$ .

DEFINICIÓN 7.3. Si  $W < V$ , pero  $W \neq \{0\}$  y  $W \neq V$ , entonces decimos que  $W$  es un subespacio (vectorial) propio.

DEFINICIÓN 7.4. Sean  $u, v_1, \dots, v_k$  vectores en un espacio vectorial  $V$ . Decimos que  $u$  es combinación lineal de  $v_1, \dots, v_k$  si existen escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  tales que:

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k.$$

DEFINICIÓN 7.5. Sea  $V$  un espacio vectorial. El subespacio generado por un subconjunto  $S = \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$  se define como

$$\text{gen}(S) = \{\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_k v_k | \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\},$$

es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de  $v_1, \dots, v_k$ .

OBSERVACIÓN 7.2.  $\text{gen}(S) < V$ .

PROBLEMA 7.7.  $u = (2, 0, 2)$  es combinación lineal de  $v_1 = (1, 0, 1)$  y  $v_2 = (0, 1, 1)$  porque  $u = 2v_1 - v_2$ .

De hecho,

$$\text{gen}(v_1, v_2) = \{(a, b, a+b) | a, b \in \mathbb{R}\} < \mathbb{R}^3$$

es el plano que contiene a estos dos vectores.

$(-1, -1, 1) \notin \text{gen}(v_1, v_2)$ , porque no vive en este plano.

**Ejemplos.** Los siguientes ejercicios se pueden encontrar en (? , sec. 4.3) y (? , sec. 2.2).

PROBLEMA 7.8. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de vectores

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

en  $\mathbb{R}^3$  son subespacios de  $\mathbb{R}^3$ ?

1.  $\{u | u_1 \geq 0\}$
2.  $\{u | u_1 + 3u_2 = u_3\}$
3.  $\{u | u_2 = u_1^2\}$
4.  $\{u | u_1 u_2 = 0\}$
5.  $\{u | a_2 \text{ es racional}\}$

PROBLEMA 7.9. Sea  $V$  el espacio vectorial (real) de todas las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de  $V$ ?

1. todas las funciones  $f$  tales que  $f(x^2) = f^2(x)$
2. todas las funciones  $f$  tales que  $f(0) = f(1)$
3. todas las funciones  $f$  tales que  $f(3) = 1 + f(-5)$
4. todas las funciones  $f$  tales que  $f(-1) = 0$

PROBLEMA 7.10. Sea  $W$  el conjunto de todos los vectores  $(x_1, \dots, x_5)$  que satisfacen

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 &= 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Mostrar que  $W$  es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^5$ .

PROBLEMA 7.11 ( $\dagger$ ). 1. Verificar que si  $U, W \subset V$ , entonces  $U \cap W \subset V$ .

2. Demostrar que si  $U = \{u_1, \dots, u_m\}$  y  $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ , entonces

$$U \cap W = \text{gen}(u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m).$$

PROBLEMA 7.12 ( $\dagger$ ). ■ Sean  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . Mostrar que

$$W = \{\alpha u + \beta v | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

■ Mostrar que si  $u, v$  no son paralelos, entonces para cualquier  $w \in \mathbb{R}^2$ , podemos encontrar  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  de manera que  $w = \alpha u + \beta v$ .

PROBLEMA 7.13 ( $\dagger$ ). Sea  $A$  una matriz  $m \times n$  con entradas reales. Demostrar que el conjunto de todos los vectores columna  $u$  de longitud  $n$ , tales que  $Au = 0$  es un subespacio vectorial de todos los vectores columna  $\mathbb{R}^n$ .

### 3. Transformaciones lineales

#### Definición y ejemplos.

DEFINICIÓN 7.6. Sean  $V, W$  espacios vectoriales. Decimos que  $T : V \rightarrow W$  es una *transformación lineal* si para todos  $\alpha \in \mathbb{R}, u, v \in V$  se cumple

1.  $T(u + v) = T(u) + T(v)$  ( $T$  abre sumas)
2.  $T(\alpha u) = \alpha T(u)$  ( $T$  saca escalares)

o de manera equivalente

$$T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v),$$

es decir,  $T$  respeta la estructura de espacio vectorial.

En el caso  $V = W$ , decimos que  $T : V \rightarrow V$  es un operador y al conjunto de operadores en  $V$  lo denotamos por  $L(V)$ . En el caso  $W = \mathbb{R}$ , decimos que  $T : V \rightarrow \mathbb{R}$  es un funcional en  $V$ .

PROBLEMA 7.14. Sea  $a = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^n$  fijo y definamos  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T(u) = a \cdot u$ . Entonces,  $T$  es una transformación lineal.

PROBLEMA 7.15. Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de dimensión  $n \times m$ , donde  $n$  indica el número de columnas y  $m$  el de renglones.

Si definimos  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $T(u) = Au$ , entonces  $T$  es una transformación lineal. En otras palabras, cada matriz define una transformación lineal. Lo inverso también es cierto.

Sea

$$e_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

el vector columna con un 1 en la  $k$ -ésima posición y ceros en el resto, y sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una transformación lineal. Entonces,  $T(e_k) \in \mathbb{R}^m$  y digamos que es de la forma

$$T(e_k) = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}.$$

Si definimos  $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$  entonces  $T(e_k) = Ae_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Por linealidad tanto de  $T$  como de  $A$ , obtenemos que  $T(x) = Ax$ , para todo vector  $x \in \mathbb{R}^n$ .

PROBLEMA 7.16. Las siguientes transformaciones son lineales:

- $T : C^1[0, 1] \rightarrow C^0[0, 1]$ ,

$$T(f)(x) = f'(x).$$

- $T : C^0[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$T(f) = \int_0^1 f(t) dt.$$

- $T : C^0[0, 1] \rightarrow C^1[0, 1]$ ,

$$T(f)(x) = C + \int_0^x f(t) dt,$$

donde  $x \in [0, 1]$  y  $C \in \mathbb{R}$  es alguna constante.

PROBLEMA 7.17. Indique si la siguiente transformación  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es lineal y de ser así, encuentre su representación matricial.

$$(95) \quad T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN. La prueba de que la transformación es lineal se deja al lector. Ahora bien,

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la representación matricial de  $T$  está dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

□

**Operadores en  $\mathbb{R}^n$ .** Sean  $T, S \in L(\mathbb{R}^n)$ . La composición  $TS$ , es decir,  $TS(x) = T(S(x))$  es de nuevo un operador y de hecho, si  $B = [b_{ij}]$  es la matriz asociada a  $T$  como en el ejemplo 7.15 y  $A = [A_{ij}]$  la asociada a  $S$ , entonces la matriz asociada a  $TS$  es  $C = [c_{ij}]$  conjunto

$$c_{ij} = \sum_k b_{ik} a_{kj}.$$

Decimos que  $C = BA$  es el producto de  $B$  con  $A$  (es este orden), y esta composición es asociativa.

El operador de  $T$  con  $S$  suma esta definido como  $(T + S)(u) = T(u) + S(u)$ , y de hecho tiene asociada la matriz

$$[b_{ij} + a_{ij}].$$

Dos operadores especiales en  $\mathbb{R}^n$  son la *transformación cero*  $0(x) = 0$  y la *identidad*  $\text{Id}(x) = x$ .

PROBLEMA 7.18 (†). Encuentre la matriz asociada a los operadores cero e identidad.

Podemos definir la multiplicación de operadores por escalares de la siguiente forma.  $(\alpha T)(u) = \alpha T(u)$ . De esta manera, con la operación suma entre operadores y esta multiplicación por escalares, resulta que  $L(\mathbb{R}^n)$  es un espacio vectorial.

Finalmente, si para  $P \in L(\mathbb{R}^n)$  existe  $Q \in L(\mathbb{R}^n)$ , de manera que  $PQ = \text{Id}$ , decimos que  $P$  es *invertible* y que  $Q$  es el operador inverso de  $P$ . También podemos escribir  $Q$  como  $P^{-1}$ . De hecho, si  $A$  es la matriz asociada a  $P$ , entonces  $A^{-1}$  es la asociada a  $P^{-1}$ .

### Ejemplos.

PROBLEMA 7.19. Verificar que las siguientes transformaciones son lineales, y encontrar la representación matricial de cada una.

1. (Proyección sobre el plano)

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ y + z \\ 2x - y - z \\ -x + y + 2z \end{bmatrix}$$

3.

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y + 3z \\ 4x - 2y + 6z \\ -6x + 3y - 9z \end{bmatrix}$$

4.

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ 2y - 4x \end{bmatrix}$$

5.

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3x - y \end{bmatrix}$$

6.

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y + 3z \\ 6x - 3y + 9z \end{bmatrix}$$

7.

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 2y - x \\ x + 8y \end{bmatrix}$$

8.

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x - 3z \\ -y + 5z \end{bmatrix}$$

9.

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ -4x + 2y \\ 8x + 4y \end{bmatrix}$$

10.

$$T = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - z \\ -y + 2z \\ 15x - 2y - z \end{bmatrix}$$

PROBLEMA 7.20. Encuentre una expresión matemática para la transformación que rota un vector en el plano, con un ángulo  $\phi$  en el sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj). Indique si esta transformación es lineal y de serlo, encuentre su representación matricial. *Sugerencia: Exprese el vector en coordenadas polares.*

#### 4. Núcleo e imagen

DEFINICIÓN 7.7. El *núcleo* de una transformación lineal  $T : V \rightarrow W$ , donde  $V$  y  $W$  son espacios vectoriales, es el conjunto

$$\ker(T) = \{v \in V | T(v) = 0\}.$$

La imágen de  $T : V \rightarrow W$  es el conjunto

$$\text{Im}(T) = \{w \in W | \exists v \in V, T(v) = w\}.$$

PROPIEDAD 7.2.  $\ker(T) \subset V, \text{Im}(T) \subset W$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $u, v \in \ker(T)$ , entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha u + v) &= \alpha T(u) + T(v) && (\text{Por linealidad de } T) \\ &= \alpha 0 + 0 && (\text{Porque } T(u) = T(v) = 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto,  $\ker(T) \subset V$ .

Ahora, si  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $w, w' \in \text{Im}(T)$ , entonces Existen  $v, v' \in V$  tales que  $T(v) = w, T(v') = w'$ . Por lo cual,

$$\begin{aligned} \alpha w + w' &= \alpha T(v) + T(v') \\ &= T(\alpha v + v'). \end{aligned}$$

Como  $\alpha v + v' \in V$ , entonces  $\alpha w + w' \in W$ . □

PROBLEMA 7.21. Encontrar un conjunto de vectores que generen  $\ker(T)$ , para la transformación lineal  $T$  dada por (95).

SOLUCIÓN. Supongamos que

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto equivale a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ z - y &= 0 \\ 2x + 7y - 3z &= 0, \end{aligned}$$

que podemos reescribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

y utilizando Gauss-Jordan, se reduce a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es decir, tenemos dos ecuaciones con tres incognitas

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ y - z &= 0 \end{aligned}$$

por lo que sustituyendo  $y = z = t$ , tenemos que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, es decir, todos los vectores en  $\ker(T)$  son multiplos de

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De manera equivalente,

$$\ker(T) = \text{gen} \left( \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

□

**PROBLEMA 7.22.** Encontrar un conjunto de vectores que generen  $\text{Im}(T)$ , para la transformación lineal  $T$  dada por (95).

**SOLUCIÓN.** Un vector en  $\text{Im}(T)$  es de la forma,

$$\begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

por lo que  $\text{Im}(T)$  estaría generado por los vectores

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, por el ejercicio anterior,  $w = 2u - v$ , y por tanto

$$\begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix} = xu + yv + wz = (x + 2z)u + (y - z)v.$$

De hecho, para cualesquiera  $\lambda, \mu$ , si escogemos una solución de las ecuaciones las ecuaciones

$$\begin{aligned} \lambda &= x + 2z \\ \mu &= y - z, \end{aligned}$$

podemos escribir

$$\begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix} = xu + yv + zw = \lambda u + \mu v.$$

Es decir,

$$\text{Im}(T) = \text{gen}(u, v) = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}\right).$$

□

### Ejemplos.

**PROBLEMA 7.23.** Encuentre un conjunto de vectores, con el mínimo número de elementos posible, que generen  $\ker(T)$  e  $\text{Im}(T)$  para cada una de las transformaciones lineales del ejercicio 7.19.

## 5. Bases y dimensión

**DEFINICIÓN 7.8.** Sea  $V$  un espacio vectorial y  $B = \{u_1, \dots, u_k\} \subset V$ . Decimos que  $B$  es unconjunto *linealmente independiente* si para cualesquiera  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ ,

$$c_1u_1 + \dots + c_ku_k = 0 \Rightarrow c_1 = \dots = c_k = 0,$$

es decir, la única relación lineal entre los elementos de  $B$  es la trivial. En otro caso, decimos que  $B$  es *linealmente dependiente*.

**DEFINICIÓN 7.9.** Decimos que  $B \subset V$  es una base de  $V$  si:

1.  $V = \text{gen}(B)$  y
2.  $B$  es linealmente independiente.

**OBSERVACIÓN 7.3.** Es decir,  $B$  es un base si cualquier  $v \in V$  es una combinación lineal de sus elementos, no falta información, y ninguno de los elementos de la base es combinación lineal de los restantes, es decir, no sobra información. Una vez que tenemos una base, toda lo que necesitamos saber sobre el espacio vectorial se puede obtener a partir de los elementos de la base.

**PROPIEDAD 7.3.** *Toda base de un espacio vectorial tiene el mismo número de elementos.*

**DEFINICIÓN 7.10.**

1. Si  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  es una base de  $V$ , decimos que  $n$  es la *dimensión* de  $V$  y escribimos  $\dim V = n$ .
2. Si  $T : V \rightarrow W$  es una transformación lineal decimos que  $\dim(\ker T)$  es la *nulidad* de  $T$  y la denotamos por  $\text{nul}(T)$ .
3. Si  $T : V \rightarrow W$  es una transformación lineal decimos que  $\dim(\text{Im } T)$  es el rango de  $T$  y la denotamos por  $\text{ran}(T)$ .

Determinar si un conjunto forma una base de  $\mathbb{R}^n$  puede ser bastante laborioso. Sin embargo, las siguientes dos proposiciones, que se presentan sin prostración, sirven como criterios avanzados para determinar si un conjuntos es base.

**PROPIEDAD 7.4.** *Si  $n = \dim V$ , cualquier conjunto  $B \subset V$  linealmente independiente con  $n$  elementos es una base de  $V$ .*

PROPIEDAD 7.5.  $B = \left\{ \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,n} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{bmatrix} \right\}$  es un conjunto de vectores linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$  si y solo si

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

PROBLEMA 7.24. Determine si

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es base de  $\mathbb{R}^2$ .

SOLUCIÓN. Sabemos que

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces  $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ .

Pero como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

entonces

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es un conjunto de 2 vectores *linealmente independientes*. Por tanto,  $B'$  también es una base de  $\mathbb{R}^2$ .  $\square$

PROBLEMA 7.25. Encuentre una base para  $\ker T$  y otra para  $\text{Im } T$ , para la transformación definida en el ejercicio de muestra 95. Indique cuál es la dimensión de cada espacio.

SOLUCIÓN. Como ya vimos en el ejercicio de muestra 7.21,

$$\ker(T) = \text{gen} \left( \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Consideremos la ecuación

$$c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

es decir

$$\begin{bmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La única solución es  $c = 0$  y por tanto

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es un conjunto linealmente independiente.

Por tanto,  $B$  es una base de  $\ker T$  y  $\text{nul}(T) = 1$ .

De manera similar, en el ejercicio de muestra 7.22,

$$\text{Im}(T) = \text{gen} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_2 \\ 2c_1 + 7c_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow c_1 = c_2 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$

es un conjunto linealmente independiente, y por tanto una base de  $\text{Im}(T)$ . Entonces  $\text{ran}(T) = 2$ .

□

Finalmente, enunciaremos una de las proposiciones importantes en nuestro curso. Si  $T : V \rightarrow W$  es una transformación lineal, tenemos la siguiente relación entre las dimensiones de  $V, \ker T$  e  $\text{Im } T$ .

**PROPIEDAD 7.6** (Teorema de la dimensión).

$$\dim V = \text{nul}(T) + \text{ran}(T).$$

### Ejemplos.

**PROBLEMA 7.26.** Determine si el conjunto  $E$  es base del espacio vectorial  $V$ .

1.  $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^2,$
2.  $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^2,$
3.  $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^3.$

**PROBLEMA 7.27.** Para cada una de las transformaciones lineales  $T : V \rightarrow W$ , del ejercicio 7.19, encuentre

1. Una base de  $\ker T$ ,
2. Una base de  $\text{Im } T$ ,
3.  $\text{nul}(T)$ ,
4.  $\text{ran}(T)$ ,

y verifique la afirmación del teorema 7.6.

## 6. Coordenadas y cambios de base.

**Coordenadas.** Si  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  es base de un espacio vectorial  $V$ , entonces todo vector  $v \in V$  se puede escribir de la forma

$$(96) \quad v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n.$$

Esto es cierto para cualquier otro conjunto que genere  $V$ . Lo importante de una base es que, debido a la independencia lineal de  $E$ , esta manera de escribir el vector es *única*.

Supongamos que podemos escribir  $v = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$ . Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= v - v \\ &= (v_1 e_1 + \dots + v_n e_n) - (c_1 e_1 + \dots + c_n e_n) \\ &= (v_1 - c_1)e_1 + \dots + (v_n - c_n)e_n. \end{aligned}$$

Como  $E$  es linealmente independiente, entonces  $v_1 - c_1 = \dots = v_n - c_n = 0$ . Es decir,

$$v_1 = c_1, \dots, v_n = c_n.$$

En otras palabras, los escalares  $v_1, \dots, v_n$  en la expresión (96) es *única*.

Para simplificar la expresión (96) necesitamos el concepto de orden de una base.

**DEFINICIÓN 7.11.** Una base ordenada  $(e_1, \dots, e_n)$  es una sucesión de vectores en  $V$  tal que  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es una base.

Dos bases ordenadas  $(e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_n)$  son iguales si y solo si

$$e_1 = f_1, \dots, e_n = f_n.$$

**OBSERVACIÓN 7.4.** Si intercambiamos un par de elementos de una base ordenada obtendremos una base ordenada distinta, aunque como conjuntos sean diferentes.

PROBLEMA 7.28.

$$\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

y

$$\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

son dos bases ordenadas distintas de  $\mathbb{R}^2$ .

Si consideramos  $E$  como la base ordenada  $(e_1, \dots, e_n)$  entonces, la expresión (96) se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_E.$$

Decimos que  $v_1, \dots, v_n$  son las coordenadas de  $v$  en la base  $E$ .

PROBLEMA 7.29. Si consideramos la base ordenada

$$E = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \right)$$

de  $\mathbb{R}^2$ , entonces

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_E.$$

En cambio, si consideramos

$$F = \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

entonces

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}_F.$$

DEFINICIÓN 7.12. La base

$$\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

de  $\mathbb{R}^n$  se conoce como *base canónica*.

**Cambios de base.** Supongamos que tenemos dos bases  $B = (e_1, \dots, e_n)$  y  $F = (f_1, \dots, f_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ . ¿Cómo podemos comparar las coordenadas de un vector  $v \in \mathbb{R}^n$  en ambas bases? Digamos que sus coordenadas son

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_F.$$

Para realizar la comparación, digamos que las coordenadas de cada elemento de la base  $F$  en la base  $B$  son

$$f_k = \begin{bmatrix} f_{k,1} \\ \vdots \\ f_{k,n} \end{bmatrix}_B.$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_F &= w_1 f_1 + \dots + w_n f_n \\ &= w_1 \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ \vdots \\ f_{1,n} \end{bmatrix}_B + \dots + w_n \begin{bmatrix} f_{n,1} \\ \vdots \\ f_{n,n} \end{bmatrix}_B \\ &= \begin{bmatrix} w_1 f_{1,1} + \dots + w_n f_{n,1} \\ \vdots \\ w_1 f_{1,n} + \dots + w_n f_{n,n} \end{bmatrix}_B, \end{aligned}$$

y como las coordenadas en una base son únicas, tenemos que

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 f_{1,1} + \dots + w_n f_{n,1} \\ \vdots \\ w_1 f_{1,n} + \dots + w_n f_{n,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_{1,1} & \dots & f_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n,1} & \dots & f_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

DEFINICIÓN 7.13.

$$P_{F,B} := \begin{bmatrix} f_{1,1} & \dots & f_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n,1} & \dots & f_{n,n} \end{bmatrix}$$

se conoce como *matriz de paso* de  $F$  a  $B$ . También decimos que es la matriz cambio de base de  $F$  a  $B$ .

Así como podemos cambiar las coordenadas de la base  $F$  a la base  $B$ , podemos aplicar el mismo procedimiento para encontrar la matriz de paso de  $B$  a  $F$ . Sin embargo, al ser el procedimiento inverso, basta encontrar la matriz inversa. En otras palabras.

PROPIEDAD 7.7.  $P_{B,F} = P_{F,B}^{-1}$ .

OBSERVACIÓN 7.5. El hecho de que  $P_{F,B}$  sea invertible se debe a que esta formada por los vectores columna que son las coordenadas de cada elemento de la base  $F$  en términos de  $B$ . Estos vectores generan todo  $\mathbb{R}^n$ , que es equivalente a que la matriz  $P_{F,B}$  sea invertible.

PROBLEMA 7.30.

1. Verifique que

$$F = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

es una base de  $\mathbb{R}^3$ .

2. Si denotamos por  $E$  la base estandar de  $\mathbb{R}^3$ , encuentre las matrices de paso  $P_{F,E}$  y  $P_{E,F}$ .

SOLUCIÓN. Por la proposición 7.4, basta verificar que  $F$  es un conjunto linealmente independiente. Ahora bien, por la proposición 7.5, basta verificar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aunque esto lo podemos hacer *a mano*, usaremos **WxMaxima** para hacer dichas cuentas. Primero introducimos la matriz, a partir de la cual calcularemos el determinante y la denotaremos por  $P$ .

```
(%i1) P: matrix(
[1,0,1],
[0,-2,0],
[0,0,1]
);
```

$$(%o1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posteriormente, calculamos su determinante.

```
(%i2) determinant(%);
```

$$(%o2) -2$$

y concluimos que  $F$  es una base.

Note que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

están ya dados en términos de la base canónica  $E$  y por tanto

$$P_{F,E} = P.$$

Por la proposición 7.7, sabemos que  $P_{E,F} = P^{-1}$  y usando nuevamente **WxMaxima**, calculamos esta matriz inversa.

```
(%i3) invert(P);
```

$$(%o3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

### Ejemplos.

**PROBLEMA 7.31.** Encuentre las matrices de paso  $P_{F,E}$  y  $P_{E,F}$  para los siguientes casos.

1.  $E$  la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ ,  $F = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ ,
2.  $E$  la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ ,  $F = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$
3.  $E$  la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ ,  $F = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ .

**PROBLEMA 7.32.** Encuentre las coordenadas de los siguientes vectores  $v$ , en las bases ordenadas  $F$  indicadas. Utilice el resultado en el ejercicio 7.31.

1.  $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $F = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ ,
2.  $v = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ,  $F = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

$$3. \ v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \ F = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

PROBLEMA 7.33. Encuentre las coordenadas de los elementos de la base canonica de  $V$  en terminos de las bases ordenadas  $F$  indicadas. Utilice el resultado en el ejercicio 7.31.

$$1. \ V = \mathbb{R}^2, \ F = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right),$$

$$2. \ V = \mathbb{R}^2, \ F = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$3. \ V = \mathbb{R}^3, \ F = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$



## Capítulo 8

# Teoría espectral

### 1. Valores propios

Como hemos visto, hacer cálculos que involucren matrices, por ejemplo multiplicar una matriz por un vector, puede ser complicados por la cantidad de operaciones involucradas. En cambio, multiplicar por escalares es muy sencillo. ¿Podríamos encontrar alguna manera de convertir las operaciones con matrices en operaciones con escalares? En este capítulo trataremos de responder esta pregunta.

**DEFINICIÓN 8.1.** Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una transformación lineal y  $A$  su representación matricial en la base estandar. Si  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $v \in \mathbb{R}$ ,  $v \neq 0$  tales que

$$Av = \lambda v,$$

decimos que  $\lambda$  es un valor propio y  $v$  un  $\lambda$ -vector propio.

Supongamos que  $F = (v_1, \dots, v_n)$  es una base ordenada de vectores propios de  $\mathbb{R}^n$ , es decir,

$$Av_k = \lambda_k v_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Entonces, la representación matricial de  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  en la base  $F$  es

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

es decir, una matriz con los valores propios en la diagonal y ceros en otras partes.

Si expresamos un vector  $v \in \mathbb{R}^n$  en esta base, tendría la forma

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n,$$

y aplicando la transformación, o de manera equivalente, multiplicando por  $B$ , obtendríamos

$$T(v) = c_1 \lambda_1 v_1 + \dots + c_n \lambda_n v_n,$$

es decir, simplemente haríamos operaciones con escalares. Por esta razón, es importante estudiar los valores y vectores propios asociados a operadores en  $\mathbb{R}^n$ , es decir, transformaciones lineales  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Esta teoría se conoce como *espectral*.

### 2. Valores propios

El primer paso para desarrollar la teoría espectral de un operador es determinar sus valores propios. Antes, recordemos el siguiente criterio para determinar si un operador es invertible.

PROPIEDAD 8.1. *Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una transformación lineal, y  $A$  una representación lineal en alguna base de  $\mathbb{R}^n$ . Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1.  *$A$  es invertible,*
2.  *$Av = 0$  si y solo si  $v = 0$ ,*
3.  *$\det(A) \neq 0$ .*

La misma proposición se puede reescribir de la siguiente manera.

PROPIEDAD 8.2. *Sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una transformación lineal, y  $M$  una representación lineal en alguna base de  $\mathbb{R}^n$ . Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1.  *$M$  no es invertible,*
2. *Existe un vector  $v \neq 0$ , tal que  $Mv = 0$ ,*
3.  *$\det(A) = 0$ .*

Supongamos que  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  y  $v$  un  $\lambda$ -vector propio. Como  $v = Iv$ , entonces

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda Iv \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0.$$

Es decir,  $v \in \ker(T)$  aunque  $v \neq 0$ . Esto quiere decir que  $A - \lambda I$  no es invertible y por tanto,

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Este es el criterio que buscábamos para localizar los valores propios.

DEFINICIÓN 8.2. Si  $A \in M_{n \times n}$ , entonces

$$p(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A)$$

se conoce como *polinomio característico* de  $A$ .

OBSERVACIÓN 8.1.  $\lambda$  es valor propio de  $A$  si y solo si es raíz de  $p(\lambda)$ .

PROBLEMA 8.1. Encuentre los valores propios, de la transformación lineal con representación matricial

$$(97) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN. Primero determinamos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= - \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2 - \lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2. \end{aligned}$$

Los valores propios de  $A$  son las raíces de  $p(\lambda) = (x - 1)(x - 2)^2$ , es decir,

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

Podemos verificar nuestra respuesta en **WxMaxima**, de la siguiente manera:  
Primero, introducimos la matriz.

```
(%i1) matrix(
  [3,1,-1],
  [2,2,-1],
  [2,2,0]
);

(%o1) 
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

```

Posteriormente, calculamos el polinomio característico. En este caso, **WxMaxima** usará la definición

$$p(x) = \det(A - xI).$$

```
(%i2) charpoly(% , x), expand;
(%o2) - x^3 + 5 x^2 - 8 x + 4
```

Finalmente, factorizamos el polinomio.

```
(%i8) factor(%o2);
```

```
(%o8) -(x - 2)^2 (x - 1)
```

Otra manera, más directa, es encontrar directamente las raíces del polinomio

```
(%i13) realroots(%o2);
```

```
(%o13)[x = 2, x = 1]
```

Otra manera de obtener los valores propios es la siguiente:

```
(%i21) eigenvalues(A);
```

(%o21) [[1, 2], [1, 2]] En este caso, el primer arreglo nos dice los valores propios, mientras que el segundo, nos dice sus *multiplicidades algebraicas*, que es el exponente que tienen asociado en el polinomio característico.  $\square$

**Ejemplos.** Los ejercicios de esta sección se pueden encontrar en (? , sec. 6.3).

PROBLEMA 8.2. Encuentre los valores propios de las siguientes matrices. Verifique sus resultados usando **WxMaxima**.

1.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

3.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

4.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

5.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

6.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

7.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

8.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

9.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

10.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

### 3. Vectores propios

DEFINICIÓN 8.3. Si  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una transformación lineal y  $A$  su representación matricial, en la base estandar, y  $\lambda$  un valor propio de  $A$ , entonces cualquier vector  $v \in \mathbb{R}^n$  que satisfaga la ecuación

$$Av = \lambda v$$

se conoce como  $\lambda$ -vector propio.

Al conjunto de  $\lambda$ -vectores propios se le conoce como  $\lambda$ -espacio propio y se denota por  $E_\lambda$ .

OBSERVACIÓN 8.2. En el caso anterior, tenemos que

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I).$$

PROBLEMA 8.3. Encuentre el espacio propio asociado al valor propio  $\lambda_1 = 2$  de la matriz  $A$  definida en (97).

SOLUCIÓN. Si

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in E_{\lambda_1},$$

entonces  $(A - 2I)v = 0$ , es decir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que se reduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x = z \\ z = 2y \end{cases}.$$

Escogiendo  $z = 2t$ , donde  $t \in \mathbb{R}$ , obtenemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Es decir  $\ker(A - 2I)$  esta generado por el conjunto  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$  y al consistir de un solo vector, este es linealmente independiente, y por tanto es una base. En resumen,

$$\ker(A - 2I) = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

□

**PROBLEMA 8.4.** Encuentre el espacio propio asociado al valor propio  $\lambda_2 = 1$  de la matriz  $A$  definida en (97).

SOLUCIÓN.

$$\ker(A - I) = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

□

Para comprobar nuestros resultados, podemos usar **WxMaxima**. Primero, introducimos nuestra matriz.

```
(%i1) matrix(
    [3,1,-1],
    [2,2,-1],
    [2,2,0]
);
(%o1) ⎛3 1 -1⎞
      ⎝2 2 -1⎠
      ⎝2 2 0⎠
```

Posteriormente, calculamos los vectores propios de la siguiente manera.

```
(%i2) eigenvectors(%);
(%o2) [[[1,2],[1,2]],[[[1,0,2]],[[1,1,2]]]]
```

El primer arreglo  $[1, 2]$  nos dice los dos valores propios, mientras que el segundo  $[1, 2]$  nos dice su multiplicidad algebraica. El tercer arreglo  $[1, 0, 2]$  es un vector propio de  $\lambda = 1$ , mientras que el último  $[1, 1, 2]$  es uno asociado a  $\lambda = 2$ . Como explicamos anteriormente, cada uno de estos constituye una base de sus respectivos espacios propios.

Ejemplos.

**PROBLEMA 8.5.** Encuentre los espacios propios de los diferentes valores propios de las matrices dadas en el ejercicio 8.2.

#### 4. Diagonalización

DEFINICIÓN 8.4.  $A \in M_n$  se dice que es *diagonalizable* si existe una base de  $\mathbb{R}^n$  que consista de vectores propios de  $A$ .

PROBLEMA 8.6. Determine si la matriz  $A$  definida en (97) es diagonalizable.

SOLUCIÓN. Como vimos en las secciones anteriores, los valores propios de  $A$  son  $\lambda_1 = 2$  y  $\lambda_2 = 1$ , con respectivos espacio propios

$$\ker(A - 2I) = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

y

$$\ker(A - I) = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Como cualquier otro vector propio es o bien multiplo de  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  o bien de  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ , tendríamos a los más una conjunto de dos vectores propios linealmente independientes. Sin embargo, cualquier base de  $\mathbb{R}^3$  debe tener exactamente 3 vectores propios linealmente independientes. Por tanto  $A$  no es diagonalizable.

Podemos comprobar este resultado usando WxMaxima de la siguiente manera.

Primero, introducimos la matriz de manera habitual.

```
(%i1) A: matrix(
      [3,1,-1],
      [2,2,-1],
      [2,2,0]
    );
(%o1) 
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

```

Y posteriormente usamos el comando `nondiagonalizable`, siempre calculando primero los vectores propios de la matriz.

```
(%i4) eigenvectors(A);
(%o4) [[[1, 2], [1, 2]], [[[1, 0, 2]], [[1, 1, 2]]]]
(%i5) nondiagonalizable;
(%o5) true
```

Si la respuesta es `true`, esto quiere decir que en efecto, tal matriz no es diagonalizable. En otro caso, obtenendremos `false`.  $\square$

¿Porqué decimos que una matriz es diagonalizable? Consideremos una transformación lineal  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , y una base

$$F = (v_1, v_2)$$

de valores propios. Como  $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ ,  $T(v_2) = \lambda_2 v_2$  y en términos de esta base

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_F, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_F,$$

entonces

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_F\right) = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_F = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix}_F$$

y de manera similar

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_F\right) = \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_F = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}_F.$$

Entonces, la representación matricial  $D$  de la transformación  $T$  en la base  $F$  estará formada por los dos vectores columna, que resultan de aplicar la transformación a cada elemento de la base, es decir,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Este mismo razonamiento, lo podemos aplicar a cualquier transformación lineal  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , si podemos obtener una base de vectores propios para su representación matricial  $A$  (en la base estandar o de hecho, en cualquier otra base), es decir, si  $A$  es diagonalizable.

En este caso, ¿cómo podemos relacionar las representaciones matriciales de  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , en la base estandar y en una base de vectores propios? Denotemos por  $A$  a la primera y por  $D$  a la segunda, mientras que por  $V = (\mathbb{R}^n, E)$  al espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  en la base  $E$  estandar, mientra que  $V' = (\mathbb{R}^n, F)$  en la de valores propios. Considere el diagrama ??, donde  $P$  denota la matriz cambio de base  $P_{F,E}$ . Es claro que

$$AP = PD,$$

y por tanto, multiplicando por  $P^{-1} = P_{E,F}$  por la izquierda en ambos lados de la ecuación,

$$D = P^{-1}AP.$$

En este caso, decimos que  $D$  es una matriz diagonal *semejante* a  $A$ . Para un repaso de cambios de base, consulte la sección 6.

**PROBLEMA 8.7.** Determine si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

es diagonalizable y encuentre una matriz diagonal semejante.

**SOLUCIÓN.** Para encontrar los vectores propios, podemos proceder como en la sección 3. Para hacer más eficientes los cálculos, usaremos **WxMaxima**. Primero, introducimos la matriz:

```
(%i1) A: matrix(
      [3,2,4],
      [2,0,2],
      [4,2,3]
    );
```

$$(\%o1) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Después, encontramos los valores propios:

```
(%i2) eigenvectors(A);
```

$$(\%o2) [[[[8, -1], [1, 2]], [[[1, \frac{1}{2}], [1, 0, -1], [0, 1, -\frac{1}{2}]]]]]$$

La salida de la última instrucción quiere decir que  $\lambda = 8$  es un vector propio, de multiplicidad 1 con vector propio

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

mientras que  $\lambda_1 = -1$  es un vector propio, de multiplicidad 2 y por tanto, los siguientes dos vectores

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

son vectores propios, linealmente independientes asociados a  $\lambda_2 = -1$ .

Por lo tanto,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Introducimos esta matriz en **WxMaxima** y calculamos su inversa, a la que denominamos por  $Q$ .

```
(%i5) P: matrix(
      [1,1,0],
      [1/2,0,1],
      [1,-1,-1/2]
    );
```

$$(\%o5) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

```
(%i6) Q: invert(P);
```

$$(\%o6) \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Finalmente, realizamos el cálculo  $P^{-1}AP$

(%i7) Q.A.P;

$$(%o7) \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

para verificar que, en efecto, la matriz resultante es diagonal, y en su diagonal estan ordenados los valores propios de  $A$ .  $\square$

### Ejemplos.

PROBLEMA 8.8. Determine si cada matriz  $A$  en el ejercicio 8.2 son diagonalizables, y en caso de serlo, encuentre

1. Una base  $F$  de vectores propios de  $A$ ;
2. la matriz  $P = P_{F,E}$  cambio de base, donde  $E$  es la base estandar del respectivo espacio vectorial;
3. la matriz diagonal  $D$  semejante a  $A$ , usando la matriz cambio de base  $P$ .



## **Parte 3**

### **Cálculo**



## Capítulo 9

# Cálculo Diferencial

### 1. Límites y continuidad

**1.1. Límites.** Definición Diremos que la función tiene un *límite  $L$  cuando  $x$  aproxima a  $a$*  si para cada  $\epsilon > 0$ , podemos encontrar  $\delta > 0$  tal que

$$(98) \quad |f(x) - l| < \epsilon$$

siempre que

$$(99) \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

En ese caso, escribimos

$$(100) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

PROBLEMA 9.1. Calcula los siguientes límites, trazando las gráficas correspondientes:

$$(I) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 8)$$

$$(II) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$(III) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Propiedades de límites Si  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L_1$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_2$ , entonces

$$(I) \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \pm f_2(x)) = L_1 \pm L_2$$

$$(II) \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x)f_2(x)) = L_1 L_2.$$

$$(III) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2} \text{ siempre y cuando } L_2 \neq 0.$$

**1.2. Continuidad.** Diremos que una función es *continua en el punto  $x = a$*  si

$$(101) \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

PROBLEMA 9.2.  $f(x) = x^2 - 4x + 8$  es continua en  $x = 1$ .

PROBLEMA 9.3. Sin embargo,

$$(102) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 6 & x = 2 \end{cases}$$

es *discontinua* en  $x = 2$  y decimos que  $x = 2$  es una *discontinuidad*.

Si  $f(x)$  es continua en cada punto del intervalo  $x_1 < x < x_2$ , entonces diremos que es continua en dicho intervalo.

PROPIEDAD 9.1. Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son continuas en un mismo intervalo, entonces también lo son

- (I)  $f(x) \pm g(x)$
- (II)  $f(x)g(x)$
- (III)  $\frac{f(x)}{g(x)}$  siempre que  $g(x) \neq 0$  en dicho intervalo.

### 1.3. Ejemplos.

PROBLEMA 9.4. Demostrar por definición que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$  si

$$(I) \quad f(x) = x^2$$

$$(II) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

PROBLEMA 9.5. Demostrar que si  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = l_1$  y  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = l_2$ , entonces

$$(103) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = l_1 + l_2$$

PROBLEMA 9.6. Mostrar que  $f(x) = x^2$  es continua en  $x = 2$ , pero  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$  no lo es.

## 2. Derivadas

Definición La derivada de  $y = f(x)$  en el punto  $x$  está definida como

$$(104) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

donde  $h = \Delta x$ ,  $\Delta y = f(x+h) - f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$  siempre que tal límite exista. Diferencial Si  $\Delta x \approx 0$  y  $f'(x)$  existe, entonces

$$(105) \quad \Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

El diferencial de  $x$  es un cambio infinitesimal en tal variable.

DEFINICIÓN 9.1. Si  $y = f(x)$  y  $f'(x)$  existe, el diferencial de  $y$  está dado por

$$(106) \quad dy = f'(x)dx$$

El proceso de encontrar las derivadas de una función se conoce como *diferenciación*.

Derivadas de alto orden

DEFINICIÓN 9.2.

$$(107) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \begin{cases} f(x) & n = 0 \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} f(x) \right) & n > 0 \end{cases}$$

Usualmente rescribimos

$$(108) \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$(109) \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad \frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} & 4. \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2} \\
 2. \quad \frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx} & 5. \quad \frac{d}{dx}u^p = pu^{p-1} \frac{du}{dx} \\
 3. \quad \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} & 6. \quad \frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a
 \end{array}$$

FIGURA 1. Fórmulas usuales de derivadas

$$\begin{array}{ll}
 7. \quad \frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx} & 14. \quad \frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx} \\
 8. \quad \frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} & 15. \quad \frac{d}{dx}\sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \\
 9. \quad \frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx} & 16. \quad \frac{d}{dx}\cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \\
 10. \quad \frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx} & 17. \quad \frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \\
 11. \quad \frac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx} & 18. \quad \frac{d}{dx}\cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \\
 12. \quad \frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx} & 19. \quad \frac{d}{dx}\sinh u = \cosh u \frac{du}{dx} \\
 13. \quad \frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx} & 20. \quad \frac{d}{dx}\cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}
 \end{array}$$

FIGURA 2. Fórmulas usuales de derivadas

En el caso  $n > 2$ , es más común escribir  $y^{(n)}$  para denotar a la  $n$ -ésima derivada.

Interpretación geométrica Geométricamente, la derivada  $f'(a)$  de una función  $f(x)$ , en un punto dado  $x = a$ , representa *pendiente de la recta tangente a  $y = f(x)$  en el punto  $(a, f(a))$* .

Relación con continuidad Si una función tiene derivada en un punto, entonces es continua en dicho punto.

Sin embargo, el recíproco no es necesariamente cierto.

**2.1. Fórmulas de derivación.** En lo subsecuente,  $u, v$  representarán funciones de  $x$ , mientras que  $a, c, p$  representarán constantes.

*Supondremos que las derivadas de  $u$  y  $v$  existe, es decir, que son diferenciables.*

En particular, cuando  $u = x$ , las fórmulas se simplifican porque  $\frac{du}{dx} = 1$ .

## 2.2. Ejemplos.

PROBLEMA 9.7. Demostrar que si  $u$  y  $v$  son funciones diferenciables

(I)

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

(II)

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{du} + v \frac{du}{dx}$$

PROBLEMA 9.8. Demostrar que si  $f(x)$  tiene una derivada en  $x = a$ , entonces  $f(x)$  es continua en  $x = a$ .

PROBLEMA 9.9. Demostrar que si  $p$  es cualquier entero positivo, y  $u$  es una función diferenciable respecto a  $x$ , entonces

$$(110) \quad \frac{d}{dx} u^p = p u^{p-1} \frac{du}{dx}$$

PROBLEMA 9.10. Dando por hecho que

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sin(b)}{b} = 1$$

demostrar que

(I)

$$\frac{d}{dx} \sin(u) = \cos(u) \frac{du}{dx}$$

(II)

$$\frac{d}{dx} \cos(u) = -\sin(u) \frac{du}{dx}$$

(III)

$$\frac{d}{dx} \tan(u) = \sec^2(u) \frac{du}{dx}$$

PROBLEMA 9.11. Demostrar que

$$(111) \quad \frac{d}{dx} \tan^{-1}(u) = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$$

PROBLEMA 9.12. Dando por hecho que

$$\lim_{b \rightarrow 0} (1+b)^{1/b} = e$$

demostrar que

(I)

$$\frac{d}{dx} \ln(u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

(II)

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

PROBLEMA 9.13. Encontrar

(I)

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x^4 + 2x}$$

(II)

$$\frac{d}{dx} \sin(\ln(x))$$

(III)

$$\frac{d}{dx} \ln(e^{3x} + \cos(2x))$$

PROBLEMA 9.14. Si

$$x^2 y - e^{2x} = \sin(y)$$

, encontrar  $y'$ .

PROBLEMA 9.15. Mostrar que si

$$y = 3x^2 + \sin(2x)$$

entonces

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 12x^2 + 6$$

PROBLEMA 9.16. Encontrar los diferenciales de

(I)

$$y = x^2 - \ln x$$

(II)

$$y = e^{-2x} + \cos(3x)$$

### 3. Derivación implícita

Denotaremos por  $y'$  la derivada  $\frac{dy}{dx}$ .

PROBLEMA 9.17. Si

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

donde  $r$  es una constante, encontrar  $y'$ .

SOLUCIÓN. Por regla de la cadena,  $(y^2)' = 2yy'$ . Esto porque

$$\frac{dy^2}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{dy}{dx}.$$

Si derivamos el lado izquierdo de la ecuación, respecto de  $x$ , usando linealidad, obtenemos  $2x + 2yy'$ , mientras que si derivamos el derecho, ya que  $r^2$  es constante, obtenemos cero e igualando, tenemos que

$$2x + 2yy' = 0.$$

Después de despejar obtenemos que

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

□

OBSERVACIÓN 9.1. Observe que

$$x^2 + y^2 = r^2$$

es la ecuación de un círculo con centro en el origen con radio  $r > 0$ . Use **Sagemath** para graficar esta ecuación para un radio dado, por ejemplo,  $r = 5$ .

1. Compare las pendientes de las rectas tangente en  $(x, y)$  y  $(-x, -y)$ . ¿Qué relación sobre estas dos rectas podemos deducir?
2. Compare la pendiente de la recta tangente en  $(x, y)$  y la recta que pasa por el origen y este punto. ¿Qué relación sobre estas dos rectas podemos deducir?

PROBLEMA 9.18. Si

$$x^3 + y^3 = 6xy,$$

encontrar  $y'$ .

SOLUCIÓN. Por regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} (y^3) = \frac{dy^3}{dy} \frac{dy}{dx},$$

es decir,  $(y^3)' = (3y^2)(y')$ .

Además, por la regla de Leibniz,

$$(xy)' = x'y + xy' = y + xy'.$$

Entonces, derivando ambos lados de la ecuación, y usando linealidad, tenemos que

$$3x^2 + 3y^2y' = 6(y + xy').$$

Despejando  $y'$ , obtenemos

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.$$

□

PROBLEMA 9.19. Encuentre  $y'$  en términos de  $x$ , si  $y = \arcsin(x)$ , con imagen  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .

Solución En este caso  $x = \sin(y)$ . Por regla de la cadena obtenemos que

$$\frac{d}{dx} \sin(y) = \frac{d}{dy} \sin(y) \frac{dy}{dx} = \cos(y)y'.$$

Sin embargo, también sabemos que

$$\frac{d}{dx} \sin(y) = \frac{dx}{dy} = 1.$$

Por lo cual  $1 = \cos(y)y'$ , y entonces  $y' = 1/\cos(y)$ . Pero también sabemos que, por la manera en que escogemos el rango de  $y$ ,  $\cos(y) > 0$ , y por tanto

$$\cos(y) = \sqrt{1 - \sin^2(y)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Es decir

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

PROBLEMA 9.20. Encuentre  $y'$ .

1.  $\sin(x+y) = y^2 \cos(x)$ ,
2.  $x^4 + y^2 = 16$ ,
3.  $y = \text{arc cos}(x)$ ,
4.  $y = \text{arctan}(x)$ .

#### 4. Derivación logarítmica

Recordemos que  $y = e^x$  si y solo si  $x = \ln(y)$ , por lo cual  $\ln(y)$  solamente está definido para  $y > 0$ . Dos propiedades fundamentales del logaritmo son las siguientes:

1.  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ ,
2.  $\ln(a^b) = b \ln(a)$ .

De esto se deduce, usando leyes de los exponentes, que  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ . Por regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx} \ln(y) = \frac{d}{dy} \ln(y) \frac{dy}{dx},$$

es decir,

$$(\ln(y))' = \frac{y'}{y}.$$

De esto se deduce que

$$(112) \quad y' = y \left( \frac{d}{dx} \ln(y) \right).$$

Esta forma de derivar, conocida como *derivación logarítmica*, es especialmente útil si necesitamos derivar funciones que involucren multiplicación, división, exponenciación y radicales.

**PROBLEMA 9.21.** Si  $y = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$ , encontrar  $y'$ .

Solución Primero, escribimos  $y = (x+1)(x-2)^{-1/2}$ . Entonces

$$\ln(y) = \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x-2),$$

de donde

$$\frac{d}{dx} \ln(y) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-2} \right).$$

Simplificando la última expresión obtenemos

$$\frac{d}{dx} \ln(y) = \frac{x-3}{2(x+1)(x-2)},$$

de donde obtenemos

$$y' = \left( \frac{x+1}{(x-2)^{1/2}} \right) \left( \frac{x-3}{2(x+1)(x-2)} \right),$$

y simplificando obtenemos,

$$y' = \frac{x-3}{2(x-2)^{3/2}}.$$

De hecho, podemos obtener la fórmula para la derivada del cociente usando la fórmula (112). En efecto,

$$\ln\left(\frac{f}{g}\right) = \ln(fg^{-1}) = \ln(f) - \ln(g).$$

Derivando obtenemos

$$\frac{d}{dx} \ln\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}.$$

Entonces

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(\frac{f}{g}\right) \left( \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \right) = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

Otro ejemplo del uso de la derivada es el siguiente. Supongamos que  $y = x^\alpha$ , con  $x \neq 0$ . Entonces  $\ln(y) = \alpha \ln(x)$ , y por tanto

$$\frac{d}{dx} \ln(y) = \frac{\alpha}{x}.$$

Entonces  $y' = (x^\alpha)(\alpha x^{-1}) = \alpha x^{\alpha-1}$ .

Por último, derivaremos  $y = \ln|x|$ . Observe que solamente necesitamos deducir el caso cuando  $x < 0$ , es decir  $|x| = -x$ . En esta situación  $y = \ln(-x)$  y por regla de la cadena, sustituyendo  $u = -x$ ,  $y = \ln(u)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} u' = \frac{u'}{u}.$$

Pero  $u' = -1$ , y por tanto  $\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$ . Entonces, siempre que  $x \neq 0$ ,

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}.$$

PROBLEMA 9.22. Encuentre  $y'$  usando derivación logarítmica.

1.  $y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$ ,

2.  $y = x^{\sqrt(x)}$ ,

3.  $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$ ,

4.  $y = \frac{x}{1 - \ln(x-1)}$

5.  $y = x^x$ ,

6.  $y = x^{\sin(x)}$ ,

7.  $x^y = y^x$ .

PROBLEMA 9.23. Use la definición de derivada para demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

## 5. Linealización

Supongamos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en  $a \in \mathbb{R}$ , es decir, existe la derivada  $f'(a)$ . Como ya hemos visto, esta derivada es la *pendiente* de la *recta tangente*, que es la mejor *aproximación lineal* de  $f$  en  $a$ .

La ecuación de la recta tangente se puede obtener a partir de la siguiente ecuación:

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a),$$

que es la ecuación de una recta que pasa por el punto  $(a, f(a))$  con pendiente  $f'(a)$ .

DEFINICIÓN 9.3. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Definimos la *linealización* de  $f$  alrededor de (o con pivote en)  $a \in \mathbb{R}$  como

$$L_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

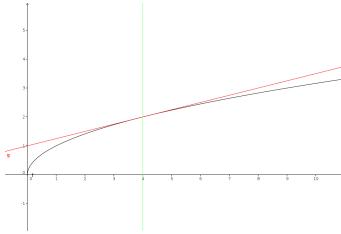
La linealización  $L_{f,a}(x)$  se puede usar para hacer calcular de manera bastante precisa de valor de  $f(x)$  para  $x \approx a$ .

Aproximación de la raíz cuadrada

Existen varios algoritmos para calcular la raíz de un número real. Sin embargo, podemos calcular raíces de números reales de manera muy precisa, usando la linealización.

Por ejemplo, calculemos  $\sqrt{4.1}$ . Primero determinamos la función a linealizar, en este caso,  $f(x) = \sqrt{x}$ . La derivada de  $f$  es

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

FIGURA 3. Linealización de  $\sqrt{x}$  alrededor  $a = 4$ .

Después, escogemos como pivote el punto  $a = 4$ . En este caso  $f(4) = 2$  y  $f'(4) = \frac{1}{4}$ . De donde obtenemos

$$L(x) = f(4) + f'(4)(x - 4) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4).$$

Entonces

$$\sqrt{4.1} \approx L(4.1) = 2 + .25(4.1 - 4) = 2.025.$$

Si usáramos una calculadora, obtendríamos  $\sqrt{4.1} = 2.02484567313$ .

El error absoluto entre este valor y el que obtuvimos de la aproximación es

$$|2.025 - 2.02484567313| \approx 1.54 \times 10^{-4}.$$

**PROBLEMA 9.24.** Use una aproximación lineal para calcular los siguientes valores. Posteriormente, use una calculadora para encontrar su valor y determine el error absoluto.

1.  $(2.001)^5$
2.  $e^{-0.015}$
3.  $(8.06)^{2/3}$
4.  $\frac{1}{1002}$
5.  $\tan(44^\circ)$
6.  $\sqrt{99.8}$

## 6. Optimización univariada

**DEFINICIÓN 9.4.** Sea  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que:

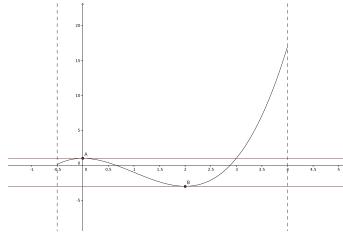
1.  $f$  alcanza su *valor máximo o máximo global* en  $c \in D$  si  $f(c) \geq f(x)$ , para toda  $x \in D$ ;
2.  $f$  alcanza su *valor mínimo o mínimo global* en  $c \in D$  si  $f(c) \leq f(x)$ , para toda  $x \in D$ .

**TEOREMA 9.1** (Teorema del Valor Extremo). *Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces  $f$  alcanza su máximo y su mínimo.*

Aunque el criterio anterior nos es útil al optimizar en intervalos compactos, es decir, de la forma  $[a, b]$ , en un caso general no siempre esto es cierto. Sin embargo, tenemos la siguiente noción de máximo (mínimo) en intervalos abiertos.

**DEFINICIÓN 9.5.** Sea  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que:

1.  $f$  tiene un *máximo local* en  $c \in D$  si existe un radio  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, de manera que  $f(c) \geq f(x)$ , para toda  $x \in (c - \epsilon, c + \epsilon) \subset D$ ;

FIGURA 4.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 

2.  $f$  tiene un *mínimo local* en  $c \in D$  si existe un radio  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, de manera que  $f(c) \leq f(x)$ , para toda  $x \in (c - \epsilon, c + \epsilon) \subset D$ .

OBSERVACIÓN 9.2. La condición de que exista si existe un radio  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, y que  $x \in (c - \epsilon, c + \epsilon) \subset D$  se puede entender como que  $x \in D$  este suficientemente cerca de  $c \in D$ . De manera informal, podemos decir que  $f$  alcanza un máximo local en  $c$  si  $f(c) \geq f(x)$  para  $x$  suficientemente cercanos a  $c$ . Lo mismo se puede decir para un mínimo local. Note que todo máximo (mínimo) global es, en particular, un máximo (mínimo resp.) local.

TEOREMA 9.2 (Teorema de Fermat). *Si  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  alcanza un máximo o mínimo local en  $c \in D$  y  $f'(c)$  existe, entonces necesariamente  $f'(c) = 0$ .*

OBSERVACIÓN 9.3. Debemos tener cuidado al usar el teorema de Fermat. Por ejemplo  $f = |x|$  alcanza su mínimo en cero, pero en este punto la derivada no existe. En cambio,  $f(x) = x^3$  tiene derivada igual a cero en  $x = 0$ , pero este punto no es máximo ni mínimo de la función.

Como podemos apreciar, los puntos más interesantes para nuestro estudio son aquellos donde la derivada no existe o si existe, es igual a cero.

DEFINICIÓN 9.6. Sea  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $c \in D$ . Decimos que  $c$  es un punto crítico si  $f'(c)$  no existe o si existe,  $f'(c) = 0$ .

Con los resultados anteriores, podemos describir un criterio para optimizar funciones continuas en compactos.

PROPIEDAD 9.2. *Supongamos que*

1.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua,
2.  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable.

*Si  $f$  alcanza su máximo (o mínimo) global en  $c$ , entonces*

1.  $c = a$  o  $c = b$ , o
2.  $f'(c) = 0$  un punto crítico.

En decir, para encontrar donde  $f$  alcanza sus valores extremos, basta probar en los extremos del intervalo o en los puntos críticos, que se encuentran en su interior.

PROBLEMA 9.25. Encuentre el máximo y el mínimo global de la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  si  $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ .

Solución

Como  $f$  es continua en  $[-\frac{1}{2}, 4]$  y diferenciable en su interior  $(-\frac{1}{2}, 4)$  (*¿porqué?*), podemos aplicar el criterio de la proposición 9.2.

Primero evaluamos en los extremos.

$$\begin{cases} f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} \\ f(4) = 17 \end{cases}$$

Derivamos  $f$  y obtenemos los puntos críticos, resolviendo la ecuación

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0.$$

Los puntos críticos son  $x = 0$  y  $x = 2$ . Sus respectivos valores son  $f(0) = 1$  y  $f(2) = -3$ .

Finalmente, basta comparar los diferentes valores obtenidos para concluir que el máximo global es 17 y se alcanza en  $x = 4$ , mientras que el mínimo global es -3 y se alcanza en  $x = 2$ .

**PROBLEMA 9.26.** Encuentre los máximos y mínimos absolutos en el intervalo indicado. Grafique.

1.  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ ,  $[-2, 3]$
2.  $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$ ,  $[0, 3]$
3.  $f(x) = t\sqrt{4 - t^2}$ ,  $[-1, 2]$
4.  $\phi(t) = 2\cos(t) + \sin(2t)$ ,  $[0, \frac{\pi}{2}]$
5.  $f(x) = xe^{-x^2/8}$ ,  $[-1, 4]$
6.  $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ ,  $[-1, 1]$
7.  $f(x) = x - 2\arctan(x)$ ,  $[0, 4]$

### 6.1. Optimización aplicada.

**PROBLEMA 9.27.** Una caja abierta está hecha al cortar pequeños cuadrados congruentes, de las esquinas, de una hoja de lata de 12 in por 12 in, y doblando los lados hacia arriba.

¿Qué tan largas deben ser las esquinas cortadas de las esquinas para hacer la caja tan grande como sea posible?

Se te ha pedido diseñar una lata de un litro, con la forma de un cilindro circular recto. ¿Qué dimensiones utilizarán el menor material posible?

Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 2. ¿Cuál es el área más grande que se puede obtener, y cuáles son las dimensiones?

[Ley de Snell (refracción)] La velocidad de la luz depende del medio a través del cual viaje, y es generalmente más lenta en medios más densos.

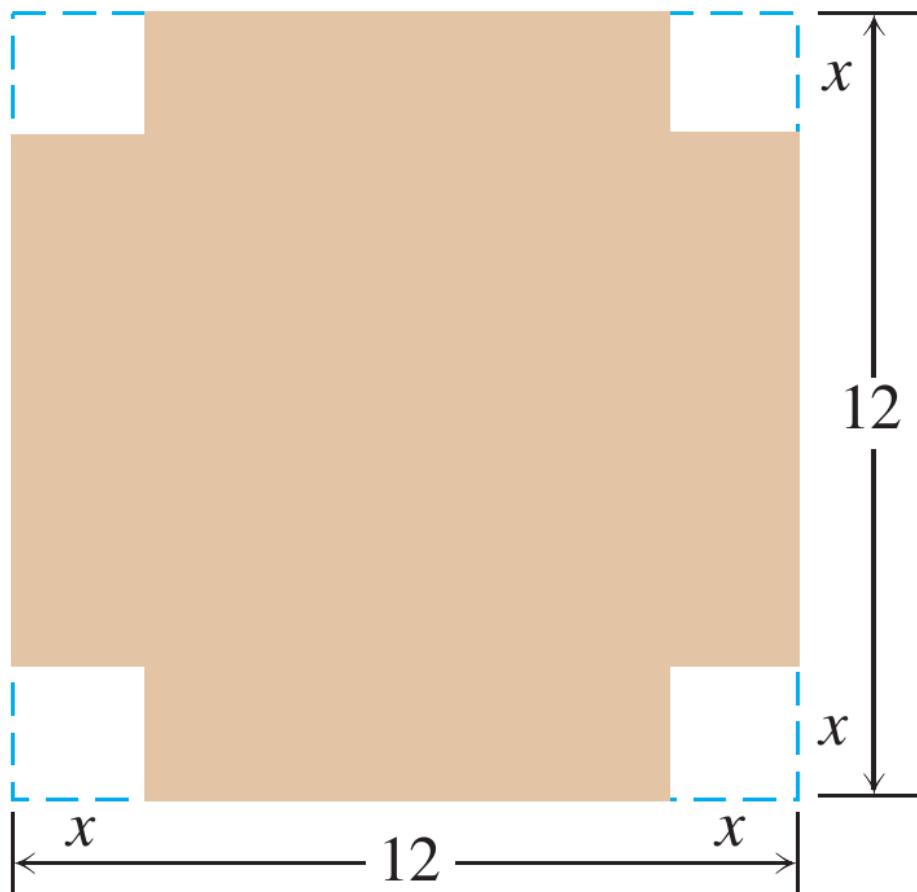
El *principio de Fermat* (de óptica) establece que la luz viaja de un punto a otro a lo largo de un camino para el cual el tiempo es mínimo.

Describe el camino para el cual un rayo de luz seguirá yendo de un punto  $A$  en un medio en el que la velocidad es  $c_1$ , a un punto  $B$  en un medio en el que la velocidad es  $c_2$ .

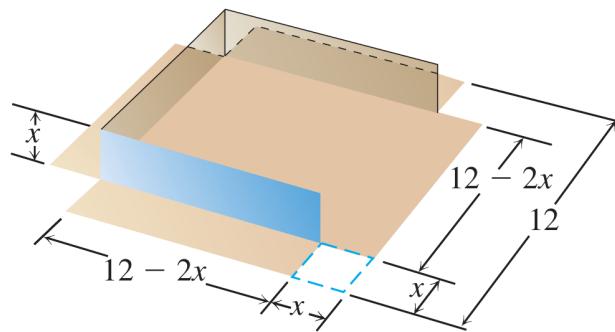
## 7. Análisis de Gráficas

Supongamos que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función con segunda derivada. Podemos proceder de la siguiente manera para encontrar su gráfica.

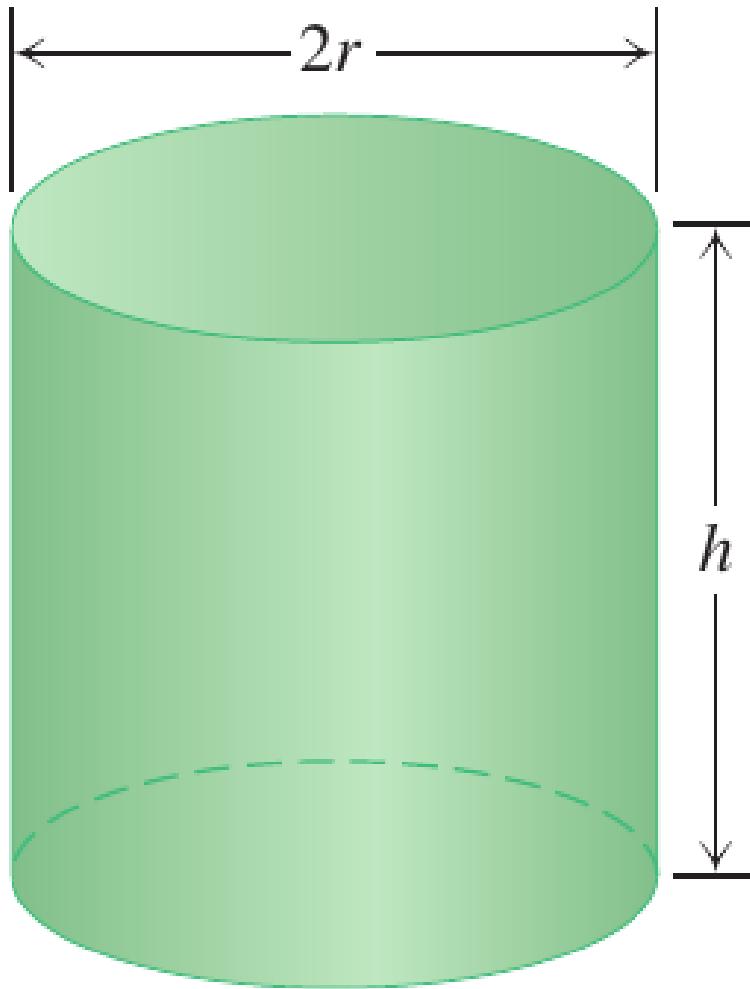
1. Encontrar las raíces, es decir, los puntos  $c$  tales que  $f(c) = 0$ ;
2. Encontrar los puntos críticos, es decir, los puntos  $c$  tales que  $f'(c) = 0$ ;
  - a) Si  $f''(c) > 0$ , entonces  $c$  es mínimo local,
  - b) Si  $f''(c) < 0$ , entonces  $c$  es máximo local,



(a)



(b)



3. Encontrar los puntos de inflexión, es decir, los puntos  $c$  tales que  $f'(c) = 0$ .

Los puntos de inflexión pueden ser como en la figura 7. Si  $f''$  cambia de negativa a positiva, la gráfica localmente como la de la izquierda, mientras que en el otro caso, luce como en la de la derecha.

Falta por caracterizar los puntos críticos  $c$  donde  $f''(c) = 0$ , es decir, que también son puntos de inflexión. Estos puntos se les conoce como *puntos de silla* y alrededor de estos, la gráfica se ve como alguna de las de la figura 8.

PROBLEMA 9.28. Grafique la función  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - x$ .

Solución

Primero, resolvemos la ecuación

$$x^3 - x = 0,$$

y tenemos que las raíces de  $f$  son  $x = -1, 0, 1$ .

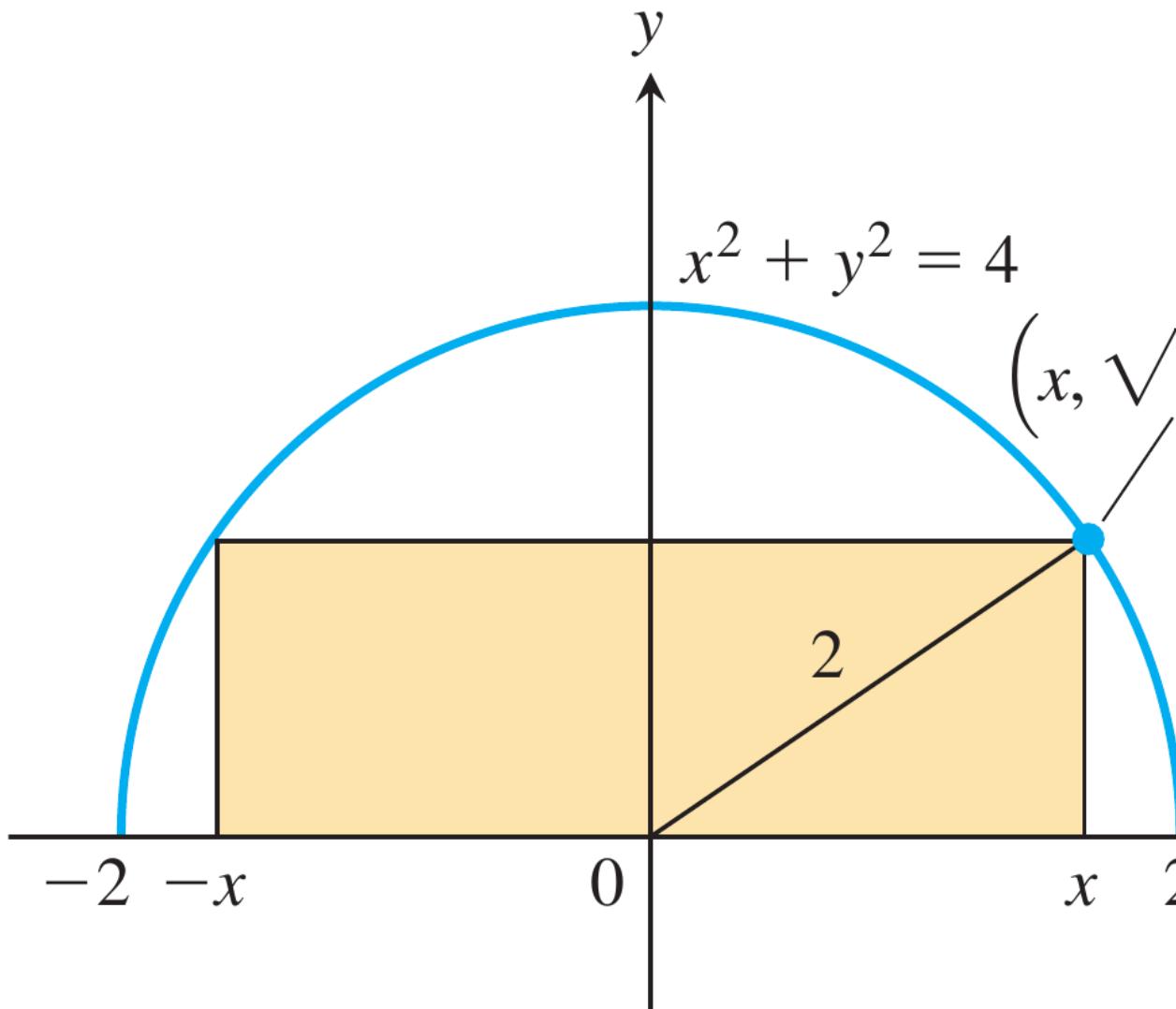


FIGURA 5.

Después derivamos  $f$ :

$$f'(x) = 3x^2 - 1,$$

y resolvemos la ecuación  $f'(c) = 0$ .

Entonces, los puntos críticos de la función son  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Utilizamos el criterio ?? para decidir si son máximos o mínimos locales, o incluso, puntos de silla.

La segunda derivada de  $f$  es

$$f''(x) = 6x.$$

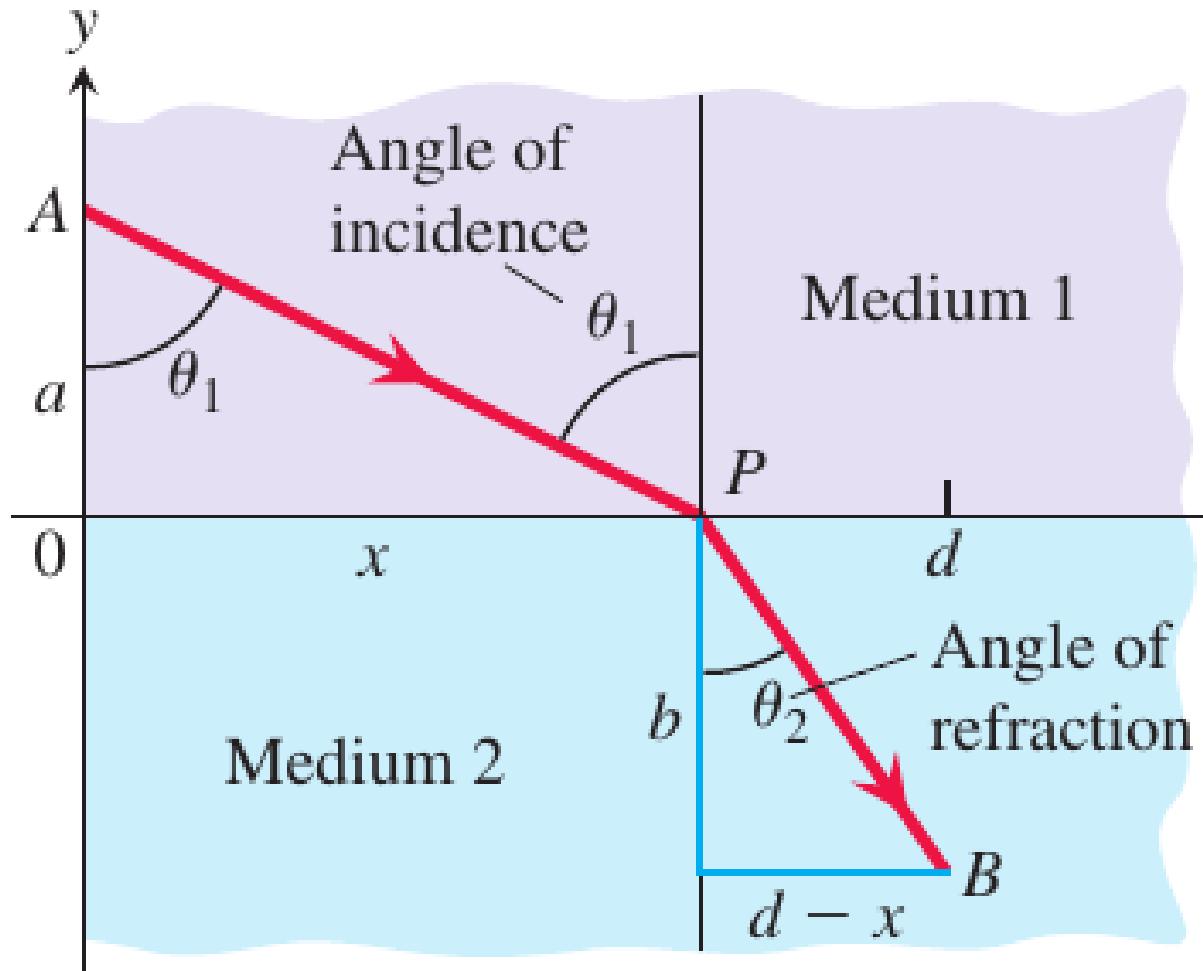


FIGURA 6.

Como  $f''(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 6 \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) > 0$ , entonces

$$c = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

es un mínimo local.

De manera similar, concluimos que

$$c = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

es un máximo local.

Finalmente, resolvemos  $f''(c) = 0$ , pero la única solución es  $c = 0$  y por tanto, este es el único punto de inflexión. Como antes de  $c = 0$ ,  $f'' < 0$ , mientras que

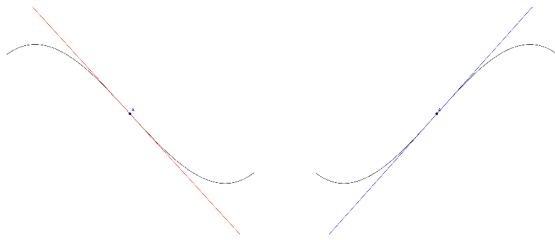


FIGURA 7. Puntos de inflexión

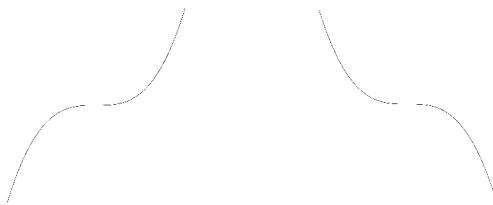
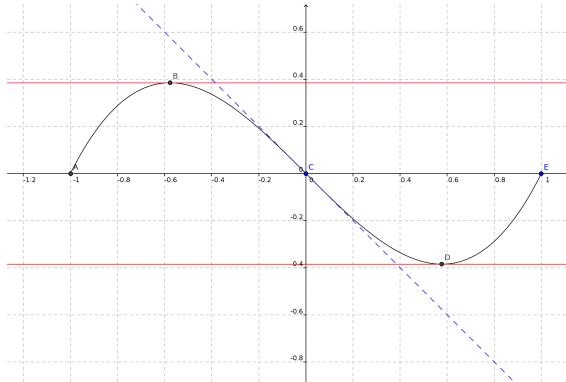


FIGURA 8. Puntos de silla



después  $f'' >$ , concluimos que en este punto, la gráfica se ve localmente como la gráfica de la derecha en la figura 7.

Podemos utilizar *Sagemath* para graficar y comparar con nuestros resultados. La gráfica esta dada en la figura 7.

## Capítulo 10

# Cálculo Integral

### 1. Antiderivadas

Si  $F'(x) = f(x)$ , diremos que  $F$  es una antiderivada de  $f$ .

PROBLEMA 10.1.  $x^3$  es una antiderivada de  $3x^2$ , porque...

$$D_x(x^3) = 3x^2$$

Pero  $x^3 + 5$  es también una antiderivada de  $3x^2$ , porque...

$$D_x(x^3 + 5) = 3x^2$$

En general, si  $F(x)$  es una antiderivada de  $f(x)$ , entonces  $F(x) + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$  es también una antiderivada.

Más aun, si  $F(x)$  y  $G(x)$  son antiderivadas de  $f(x)$ , entonces existe  $C \in \mathbb{R}$  tal que

$$F(x) = G(x) + C.$$

Diremos que  $C$  es una *constante de integración*.

$\int f(x)dx$  denotara cualquier antiderivada de  $f(x)$  más una constante de integración.

Diremos que  $f(x)$  es el integrando, mientras que  $\int f(x)dx$  es llamada *integral indefinida*.

PROBLEMA 10.2.      1.

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

2.

$$\int -\sin(x) dx = \cos(x) + C$$

PROPIEDAD 10.1 (Reglas para antiderivadas).

$$1. \int 0 dx = C$$

$$2. \int 1 dx = x + C$$

$$3. \int adx = ax + C$$

$$4. \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, r \neq -1$$

$$5. \int af(x) dx = aF(x) + C$$

$$6. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$7. \int (f(x) - g(x)) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

PROBLEMA 10.3.      1.  $\int \sqrt[3]{x} dx =$

$$2. \int \frac{1}{x^2} dx =$$

$$3. \int 7x^3 dx =$$

$$4. \int (x^2 + 4) dx =$$

$$5. \int (3x^6 - 4x) dx =$$

Con las reglas (3)-(7), podemos calcular la antiderivada de cualquier polinomio.

PROBLEMA 10.4.

$$\int \left( 6x^8 - \frac{2}{3}x^5 + 7x^4 + \sqrt{3} \right) dx =$$

### 1.1. Integración por sustitución.

PROPIEDAD 10.2 (Integración por sustitución).

$$\int (g(x))^r g'(x) dx = \frac{1}{r+1} (g(x))^{r+1} + C$$

para  $r \neq -1$ .

PROBLEMA 10.5.

$$\int \left( \frac{1}{3}x^3 + 7 \right)^5 x^2 dx =$$

PROBLEMA 10.6.

$$\int (x^2 + 1)^{2/3} x dx =$$

PROPIEDAD 10.3 (Regla 9, método de sustitución).

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$$

donde  $u = g(x)$ ,  $du = g'(x)dx$ .

Véase el ejercicio resuelto 10.13

PROBLEMA 10.7. Encuentre

$$\int x \sin(x^2) dx =$$

PROBLEMA 10.8. Encuentre

$$\int \sin(x/2) dx =$$

### 1.2. Ejemplos Resueltos.

PROBLEMA 10.9 (Fórmula de integración por sustitución (10.2)).

$$1. \int (s^3 + 2)^2 (3s^2) ds =$$

$$2. \int (x^3 + 2)^{1/2} x^2 dx =$$

$$3. \int \frac{8x^2}{(x^3 + 2)^3} dx =$$

$$4. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{x^3 + 2}} =$$

$$5. \int 3x \sqrt{1 - 2x^2} dx =$$

$$6. \int \sqrt[3]{1 - x^2} x dx =$$

$$7. \int \sin^2(x) \cos(x) dx =$$

PROBLEMA 10.10. 1.  $\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx =$

$$2. \int x \sec^2(4x^2 - 5) dx =$$

$$3. \int x^2 \sqrt{x + 1} dx =$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

$$\int \tan x \sec x \, dx = \sec x + C$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

$$\int \cot x \csc x \, dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \sin^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \tan^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \, dx = \sec^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad \text{for } a > 0$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} \, dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad \text{for } a > 0$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} \, dx = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad \text{for } a > 0$$

FIGURA 1. Antiderivadas comunes

PROBLEMA 10.11. Una piedra se lanza hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de  $64 \text{ ft/s}$ .

1. ¿Cuándo alcanzará su altura máxima?
2. ¿Cuál será su altura máxima?
3. ¿Cuándo tocará el suelo?
4. ¿Cuál será su velocidad al tocar el suelo?

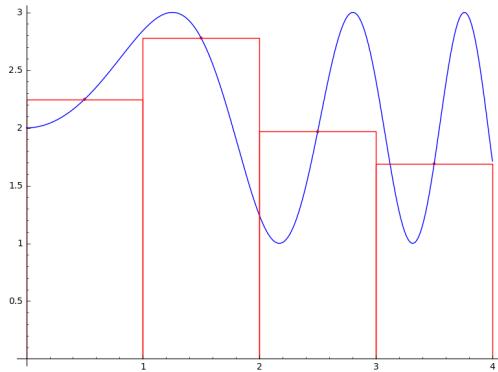


FIGURA 2. Aproximación de área bajo la curva

**PROBLEMA 10.12.** Encuentre la ecuación de una curva en el plano  $xy$  que pasa por el punto  $(0, 1)$  y cuya pendiente es igual a la altura en cada punto  $(x, y)$ .

PROBLEMA 10.13. Justifique el método de sustitución (10.3).

## 2. La integral definida

**2.1. Notación “Sigma”.** La letra griega  $\Sigma$  denota adición repetida:

$$\sum_{i=a}^b f(i) = f(a) + f(a+1) + \dots + f(b),$$

siempre que  $a \leq b$ .

- PROBLEMA 10.14.

  1.  $\sum_{j=1}^5 j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
  2.  $\sum_{i=0}^3 (2i + 1) = 1 + 3 + 5 + 7$
  3.  $\sum_{i=2}^{10} i^2 = 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2$
  4.  $\sum_{j=1}^4 \cos(j\pi) = \cos \pi + \cos 2\pi + \cos 3\pi + \cos 4\pi.$

## 2.2. Linealidad.

PROPIEDAD 10.4.

$$(113) \quad \sum_{i=a}^b cf(i) = c \sum_{i=a}^b f(i)$$

$$(114) \quad \sum_{i=a}^b f(i) + g(i) = \sum_{i=a}^b f(i) + \sum_{i=a}^b g(i)$$

**2.3. Área bajo la curva.** Sea  $f$  una función tal que  $f(x) \geq 0$  en el intervalo  $[a, b]$ .

ALGORITMO 10.1 (Sumas de Riemman).

*subintervalos*

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

2. Definimos la longitud de cada intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  como

$$\delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

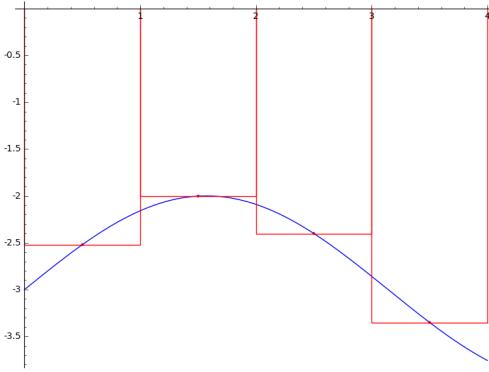


FIGURA 3. Aproximación de área bajo la curva

3. El área bajo la curva definida por  $f$  está aproximada por

$$\sum_{i=1}^N f(\xi_i) \delta x_i,$$

donde  $\xi_i$  es un punto en el intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ .

Una manera más concreta de construir una suma de Riemann es *fijando el tamaño del paso*:

1. Definimos  $h = \frac{b-a}{N}$ ;
2. Escogemos

$$\xi_k = a + kh, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N;$$

3. La suma de Riemann correspondiente será

$$\sum_{k=1}^N f(\xi_k) \cdot h = h (f(\xi_1) + \dots + f(\xi_N)).$$

Al fijar el tamaño del paso, hemos ocupado el extremo derecho de cada intervalo:  $x_k = a + k * h$ , pero también podemos escoger por ejemplo:

- el extremo izquierdo:

$$\xi_k = a + (k - 1) \cdot h;$$

- o el punto medio de cada intervalo:

$$\xi_k = a + \left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot h;$$

Si en un intervalo  $[a, b]$ ,  $f(x) < 0$ , entonces la suma anterior aproxima el área *sobre la curva*.

Por esta razón, cuando no distinguimos cuando  $f(x)$  cambia de signo en un intervalo, hablamos del *área con signo*.

DEFINICIÓN 10.1.

dada por por

1. La integral definida de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  está

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N f(\xi_i) \delta x_i \right),$$

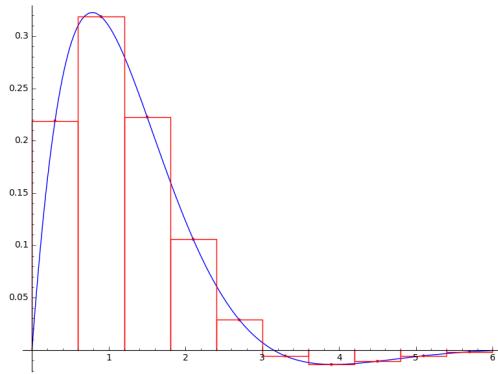


FIGURA 4. Aproximación de área bajo la curva

siempre y cuando el límite exista.

2. Si el límite existe, diremos que  $f$  es integrable (en  $[a, b]$ ).
3. La suma está definida como en el algoritmo 10.1 y se conoce como *suma de Riemann*.

PROBLEMA 10.15. Calcule

$$\int_1^5 1 dx.$$

PROBLEMA 10.16. Calcule

$$\int_0^5 x dx.$$

PROBLEMA 10.17. Calcule

$$\int_1^5 x dx.$$

PROPIEDAD 10.5.

$$(115) \quad \int_a^b 1 dx = b - a$$

$$(116) \quad \int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

PROBLEMA 10.18. Aproxime la integral

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

utilizando el algoritmo 10.1 fijando el tamaño del paso, con  $a = -1, b = 1, N = 5$  y usando el extremo derecho de cada intervalo.

PROBLEMA 10.19. Aproxime la integral del ejemplo 10.18 cuando:

1.  $a = 0, b = 3, N = 4$ ;
2.  $a = -2, b = 2, N = 8$ ;
3.  $a = -3, b = 3, N = 16$ .

#### 2.4. Propiedades de la Integral Definida.

### 2.5. Propiedades: Linealidad.

$$(117) \quad \int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

$$(118) \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

### 2.6. Propiedades: Límites.

$$(119) \quad \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$(120) \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$(121) \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

### 2.7. Ejemplos Resueltos.

PROBLEMA 10.20. Supongamos que  $f$  y  $g$  son integrables en  $[a, b]$ . Demostrar que:

- (a) Si  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ , entonces  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ .
- (b) Si  $f(x) \leq g(x)$  en  $[a, b]$ , entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

- (c) Si  $m \leq f(x) \leq M$  para todo  $x \in [a, b]$ , entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

PROBLEMA 10.21. Demuestre la fórmula

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

## 3. El Teorema Fundamental del Cálculo

### 3.1. Valor promedio de una función.

**3.2. Valor promedio de una función.** Si una función  $f$  se evalúa en  $n$  puntos  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ , el valor promedio de la función para estos puntos es

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \dots + f(\xi_N)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\xi_k).$$

Sin embargo, si tratamos de promediar una función en un intervalo  $[a, b]$ , esta definición no es útil porque habrá una infinidad<sup>1</sup> de puntos.

Aun así, todavía podemos encontrar una definición, motivada por el promedio en una cantidad finita de puntos

---

<sup>1</sup>De hecho, una cantidad no numerable de puntos, por lo que ni siquiera podemos tratar de aplicar algunas técnicas para series

Escogiendo el tamaño del paso fijo para un número  $N$  dado de subintervalos, tenemos que

$$h = \frac{b-a}{N}.$$

O de manera equivalente

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{b-a}h.$$

De manera que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\xi_k) = \frac{1}{b-a} \sum_{k=1}^N f(\xi_k) \cdot h.$$

Cuando  $N \rightarrow \infty$ , el lado derecho se aproxima a

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(\xi) d\xi.$$

**DEFINICIÓN 10.2.** El valor promedio de  $f$  en  $[a, b]$  está dado por

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$ . Si  $x \in [a, b]$ , entonces

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$$

es una función que depende de  $x$  tal que

$$(122) \quad D_x F(x) = D_x \left( \int_a^x f(\xi) d\xi \right) = f(x).$$

### 3.3. Enunciado del T.F.C.

**TEOREMA 10.1** (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$  y  $F(x)$  una antiderivada de  $f(x)$ . Entonces*

$$(TFC) \quad \int_a^b f(\xi) d\xi = F(b) - F(a).$$

La ecuación (TFC) nos da una manera sencilla de calcular

$$\int_a^b f(\xi) d\xi \dots$$

*siempre y cuando podamos encontrar una antiderivada de  $f(x)$ , en términos de funciones elementales.*

La expresión  $F(b) - F(a)$  generalmente se abrevia como

$$F(x) |_a^b.$$

Calcule las siguientes fórmulas utilizando el (TFC):

1.

$$\int_a^b x dx =$$

2.

$$\int_a^b x^2 dx =$$

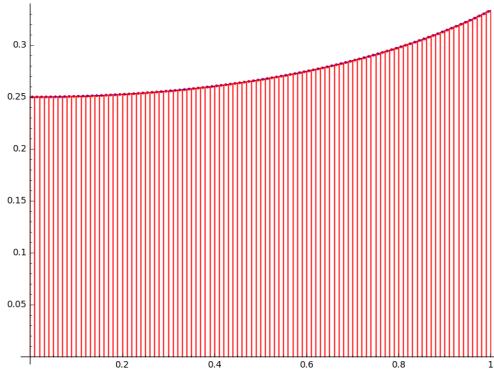


FIGURA 5.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

3.

$$\int_a^b x^r dx =$$

PROPIEDAD 10.6 (TFC con Cambio de Variables). *Supongamos que en el intervalo  $[a, b]$ , la función  $f$  es continua y la función  $g$  es diferenciable.*

*Entonces*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du,$$

donde  $u = g(x)$ .

PROBLEMA 10.22. Evalúe

$$\int_1^9 \sqrt{5x + 4} dx.$$

### 3.4. Ejemplos Resueltos.

PROBLEMA 10.23. Evalúe

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos(x) dx.$$

PROBLEMA 10.24. Encuentre el área de la región entre la curva dada por  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ , el eje  $x$ ,  $x = 0$  y  $x = 1$ .

PROBLEMA 10.25. Encuentre el valor promedio de  $f(x) = 4 - x^2$  en  $[0, 2]$ .

PROBLEMA 10.26. Demuestre la fórmula (122). Sugerencia: Utilice el teorema del valor medio.

TEOREMA 10.2 (Teorema del Valor Medio para Integrales). *Sea  $f$  una función continua en  $[a, b]$ . Entonces existe  $c \in [a, b]$  tal que*

$$(123) \quad \int_a^b f(\xi) d\xi = (b - a) f(c)$$

PROBLEMA 10.27. Demuestre que

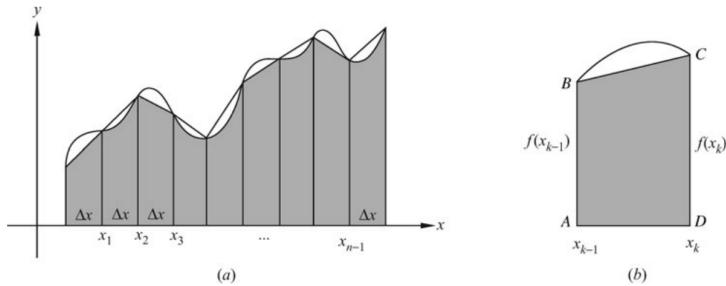


FIGURA 6. Regla trapezoidal

1. Si  $f$  es una función par, entonces para  $a > 0$  :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx;$$

2. Si  $f$  es una función impar, entonces para  $a > 0$  :

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

PROBLEMA 10.28 (Regla trapezoidal). Sea  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$ . Dividamos  $[a, b]$  en  $N$  subintervalos de longitud fija  $h = \frac{b-a}{N}$ , por medio de puntos

$$x_k = a + k \cdot h, \quad k = 1, \dots, N.$$

Muestre que

$$\int_a^b f(\xi)d\xi \approx \frac{h}{2} \left( f(a) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} f(\xi_k) + f(b) \right)$$

PROBLEMA 10.29. Use la regla trapezoidal para aproximar

$$\int_0^1 x^2 dx$$

con  $N = 1$ .

Utilice el (TFC) para calcular la integral de manera exacta y compare.

#### 4. Integración por partes

A partir de la regla del producto

$$\frac{d}{dx} (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx},$$

se deduce la fórmula de integración por partes:

$$(124) \quad \int u dv = uv - \int v du$$

Para elegir  $u$ , podemos seguir la regla empírica **LIATE**:

- Logaritmos
- Inversas trigonométricas
- Algebraicas
- Trigonométricas

■ Exponentiales

PROBLEMA 10.30. Encuentre

$$\int x \ln(x) dx.$$

PROBLEMA 10.31. Encuentre

$$\int xe^x dx.$$

PROBLEMA 10.32. Encuentre

$$\int e^x \cos(x) dx.$$

**4.1. Ejemplos Resueltos.**

PROBLEMA 10.33. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x^3 e^{x^2} dx$$

PROBLEMA 10.34. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \ln(x^2 + 2) dx$$

PROBLEMA 10.35. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \ln(x) dx$$

PROBLEMA 10.36. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x \sin(x) dx$$

PROBLEMA 10.37. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x^2 \ln(x) dx$$

PROBLEMA 10.38. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \sin^{-1}(x) dx$$

PROBLEMA 10.39. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \tan^{-1}(x) dx$$

PROBLEMA 10.40. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int \sec^3(x) dx$$

PROBLEMA 10.41. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x^2 \sin(x) dx$$

PROBLEMA 10.42. Por medio de integración por partes, encuentre la siguiente integral indefinida

$$\int x^3 e^{2x} dx$$

PROBLEMA 10.43. Deduzca la siguiente *fórmula de reducción*

$$(FR) \quad \begin{aligned} \int \sin^m(x) dx &= -\frac{\sin^{m-1}(x) \cdot \cos(x)}{m} \\ &\quad + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2}(x) dx. \end{aligned}$$

PROBLEMA 10.44. Aplique la formula de reducción (FR) para hallar

$$\int \sin^2(x) dx.$$

PROBLEMA 10.45. Aplique la formula de reducción (FR) para hallar

$$\int \sin^3(x) dx.$$

## 5. Fracciones parciales

La técnica de fracciones parciales se utiliza para integrar funciones racionales, es decir, aquellas de la forma

$$\frac{N(x)}{D(x)},$$

donde  $N, D$  son polinomios.

Por simplicidad, supondremos que

1. El coeficiente líder de  $D(x)$  es igual a 1.
2. El grado de  $D(x)$  es mayor que el de  $N(x)$ .

Sin embargo, ninguna de estas dos condiciones son esenciales.

PROBLEMA 10.46.

$$\int \frac{2x^3}{5x^8 + 3x - 4} dx = \frac{1}{5} \int \frac{2x^3}{x^8 + \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}} dx$$

PROBLEMA 10.47.

$$\frac{2x^5 + 7}{x^2 + 3} = 2x^3 - 6x + \frac{18x + 7}{x^2 + 3}$$

DEFINICIÓN 10.3. Un polinomio es irreducible si no se puede expresar como el producto de dos polinomios de grado menor.

1. Todo polinomio lineal es irreducible
2. Un polinomio cuadrático

$$g(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

es irreducible si y solo  $b^2 - 4ac < 0$ .

PROBLEMA 10.48. Verifique que

1.  $x^2 + 4$  es irreducible;
2.  $x^2 + x - 4$  es reducible.

TEOREMA 10.3. *Todo polinomio cuyo coeficiente líder sea igual a 1 se puede expresar como producto de factores lineales, o factores cuadráticos irreducibles.*

PROBLEMA 10.49.      1.  $x^3 - 4x =$

2.  $x^3 + 4x =$
3.  $x^4 - 9 =$
4.  $x^3 - 3x^2 - x + 3 =$

### 5.1. Método de Fracciones Parciales.

#### 5.2. Caso I. $D(x)$ es producto de factores lineales distintos.

PROBLEMA 10.50. Resuelva

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4}$$

PROBLEMA 10.51. Resuelva

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3 + x^2 - 6x}$$

**5.3. Regla General para Caso 1.** El integrando se representa como una suma de términos de la forma  $\frac{A}{x-a}$ , para cada factor  $x-a$ , y  $A$  una constante por determinar.

#### 5.4. Caso 2. $D(x)$ es producto de factores lineales repetidos.

PROBLEMA 10.52. Encuentre

$$\int \frac{(3x+5)dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

PROBLEMA 10.53.

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^3(x-2)^2}$$

**5.5. Regla General para el Caso 2.** Para cada factor  $x-c$  de multiplicidad  $k$ , se utiliza la expresión

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-r)^k}.$$

**5.6. Caso 3. Factores cuadráticos irreducibles distintos, y lineales repetidos.** A cada factor irreducible  $x^2 + bx + c$  de  $D(x)$  le corresponde el integrando

$$\frac{Ax + B}{x^2 + bx + c}.$$

PROBLEMA 10.54. Encuentre

$$\int \frac{(x-1)dx}{x(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$$

**5.7. Caso IV. Factores cuadráticos irreducibles repetidos.** A cada factor cuadrático irreducible  $x^2 + bx + c$  de multiplicidad  $k$  le corresponde el integrando

$$\sum_{i=1}^k \frac{A_i x + B_i}{(x^2 + bx + c)^i}$$

PROBLEMA 10.55. Encuentre

$$\int \frac{2x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

## 6. Técnicas de integración trigonométrica

### 6.1. Integrados trigonométricos.

6.2. Caso 1. Considérense las integrales de la forma

$$\int \sin^k(x) \cos^n(x) dx,$$

con  $k, n$  enteros no negativos.

6.3. **Tipo 1.1.** Si al menos uno de los números  $k, n$  es impar, entonces podemos escoger  $u = \cos(x)$  o  $u = \sin(x)$ .

PROBLEMA 10.56.

$$\int \sin^3(x) \cos^2(x) dx.$$

PROBLEMA 10.57.

$$\int \sin^4(x) \cos^7(x) dx$$

PROBLEMA 10.58.

$$\int \sin^5(x) dx$$

6.4. **Tipo 1.2.** Si ambas potencias  $k, n$  son pares. Entonces utilizaremos las identidades

$$\begin{cases} \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\ \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \end{cases}$$

PROBLEMA 10.59.

$$\int \cos^2(x) \sin^4(x) dx$$

6.5. **Caso 2.** Consideraremos integrales de la forma

$$\int \tan^k(x) \sec^n(x) dx.$$

y utilizaremos la identidad

$$\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x).$$

6.6. **Tipo 2.1.** Si  $n$  es par, entonces se sustituye  $u = \tan(x)$ .

PROBLEMA 10.60.

$$\int \tan^2(x) \sec^4(x) dx$$

**6.7. Tipo 2.2.** Si  $n, k$  son impares, se sustituye  $u = \sec(x)$ .

PROBLEMA 10.61.

$$\int \tan^3(x) \sec(x) dx.$$

**6.8. Tipo 2.3.** Si  $n$  es impar y  $k$  par, reducimos a los casos anteriores y utilizaremos la fórmula

$$\int \sec(x) dx = \ln |\tan(x) + \sec(x)|$$

PROBLEMA 10.62.

$$\int \tan^2(x) \sec(x) dx =$$

**6.9. Caso 3.** Consideremos ahora integrales de la forma  $\int f(Ax)g(Bx)dx$ , donde  $f, g$  pueden ser o bien  $\sin$  o bien  $\cos$ .

Necesitaremos las identidades

$$(125) \quad \sin(Ax)\cos(Bx) = \frac{1}{2} (\sin((A+B)x) + \sin((A-B)x))$$

$$(126) \quad \sin(Ax)\sin(Bx) = \frac{1}{2} (\cos((A-B)x) - \cos((A+B)x))$$

$$(127) \quad \cos(Ax)\cos(Bx) = \frac{1}{2} (\cos((A-B)x) + \cos((A+B)x))$$

PROBLEMA 10.63.

$$\int \sin(7x)\cos(3x)$$

PROBLEMA 10.64.

$$\int \sin(7x)\cos(3x)$$

PROBLEMA 10.65.

$$\int \sin(7x)\sin(3x)$$

PROBLEMA 10.66.

$$\int \cos(7x)\cos(3x)$$

**6.10. Sustitución trigonométrica.** Existen tres principales tipos de sustitución trigonométrica. Introduciremos cada uno por medio de ejemplos típicos.

PROBLEMA 10.67. Encuentre

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$

**6.11. Estrategia I.** Si  $\sqrt{a^2 + x^2}$  aparece en el integrando, intente  $x = a\tan(\theta)$

PROBLEMA 10.68. Encuentre

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$$

**6.12. Estrategia II.** Si  $\sqrt{a^2 - x^2}$  aparece en un integrando, trate con la sustitución  $x = a \sin(\theta)$ .

PROBLEMA 10.69. Encuentre

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} dx.$$

**6.13. Estrategia III.** Si  $\sqrt{x^2 - a^2}$  aparece en un integrando, trate con la sustitución  $x = a \sec \theta$ .

## 7. Área y longitud de arco

**7.1. Área entre una curva y el eje vertical.** Nostros ya sabemos como encontrar el área de una región como la siguiente

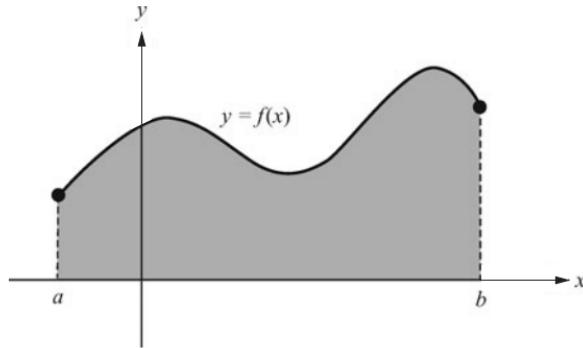


FIGURA 7. Área bajo la curva

El área de la región acotada por

$$x = a, x = b, y = 0, y = f(x)$$

está dada por

$$\int_a^b f(x) dx$$

Ahora consideremos una región como la siguiente

De manera similar, el área de la región acotada por

$$x = 0, x = g(y), y = c, y = d$$

está dada por

$$\int_c^d g(y) dy$$

PROBLEMA 10.70. Calcule el área de la región dada en la figura 9, que está acotada por el eje  $y$ , arriba por  $y = 2$ , abajo por  $y = -1$  y la curva

$$x + y^2 = 4.$$

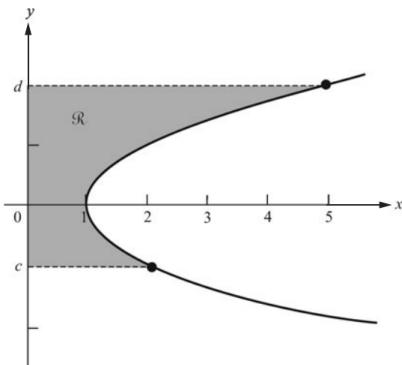


FIGURA 8. Área entre curva y eje vertical

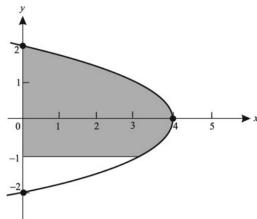


FIGURA 9. Área acotada por una parábola

**7.2. Área entre curvas.** Supongamos que  $f$  y  $g$  son funciones continuas para  $a \leq x \leq b$ .

El área  $A$  de la región contenida entre estas dos curvas y los ejes  $x = a$  y  $x = b$  está dada por la fórmula

$$(128) \quad A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

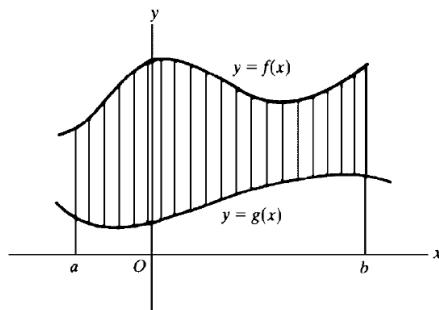


Fig. 29-4

FIGURA 10. Área entre curvas (funciones positivas)

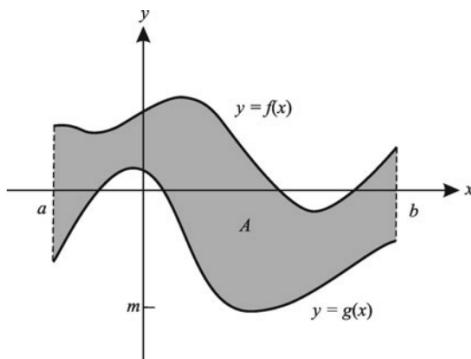


FIGURA 11. Área entre curvas

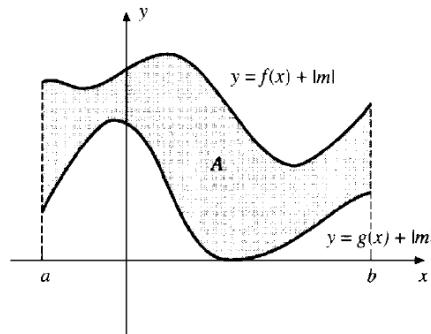


FIGURA 12. Deducción de la fórmula

PROBLEMA 10.71. Calcule el área de región de la figura 13, acotada por

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = \frac{1}{2}x + 2, \quad y = x^2.$$

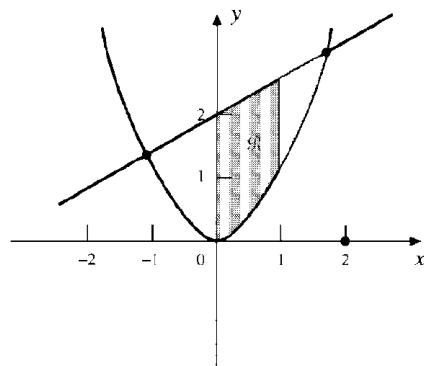


FIGURA 13. Área entre línea y parábola

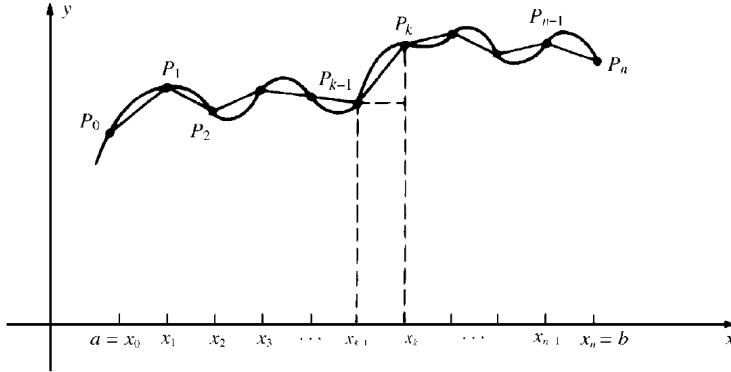


FIGURA 14. Aproximación de la longitud de un arco

**7.3. Longitud de arco.** Por la fórmula de distancia

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Por el teorema del valor medio, existe  $x_k^* \in (x_{k-1}, x_k)$  tal que

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) f'(x_k^*) = (\Delta x) f'(x_k^*).$$

Entonces

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{1 + (f'(x_k^*))^2} (\Delta x)$$

De manera que

$$\sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(x_k^*))^2} (\Delta x),$$

donde  $(\Delta x)n = b - a$ .

Tomando el límite  $n \rightarrow \infty$  de ambos lados obtenemos que la longitud  $L(f, a, b)$  de al arco dado por la curva  $f(x)$  en el intervalo  $a \leq x \leq b$  esta dado por

$$(129) \quad L(f, a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

PROBLEMA 10.72. Encuentre la longitud del arco descrito por la curva  $y = x^{3/2}$  de  $x = 0$  a  $x = 5$ .

#### 7.4. Ejemplos.

PROBLEMA 10.73. Encuentre el área acotada por la parábola

$$x = 8 + y - y^2,$$

el eje  $y$  y las líneas  $y = -1$  y  $y = 3$ .

PROBLEMA 10.74. Encuentre el área de la región acotada por las parábolas

$$y = 6x - x^2$$

y

$$y = x^2 - 2x.$$

PROBLEMA 10.75. Encuentre la longitud de arco de la curva

$$x = 3y^{3/2} - 1$$

desde  $y = 0$  hasta  $y = 4$ .

PROBLEMA 10.76. Encuentre la longitud de arco de la *catenaria*

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{x/a} + e^{-x/a} \right)$$

desde  $x = 0$  hasta  $x = a$ .

## 8. Volumen

Un *sólido de revolución* se obtiene al girar una región del plano alrededor de una línea que no intersecta la región.

La línea alrededor del cuál se realiza la rotación se llama *eje de revolución*.

Sea  $f$  una función continua tal que  $f(x) \geq 0$  para  $a \leq x \leq b$ . Considere la región  $\mathcal{R}$  bajo la gráfica de  $f$ , arriba del eje  $x$ , entre  $x = a$  y  $x = b$ :

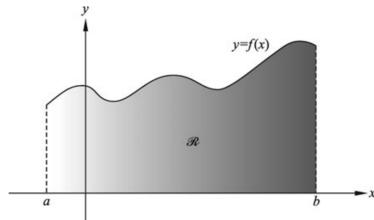


FIGURA 15. Región de revolución

PROBLEMA 10.77. Grafique la superficie de revolución generada por la región acotada por la recta  $y = x$  y la parábola  $y = x^2$ .

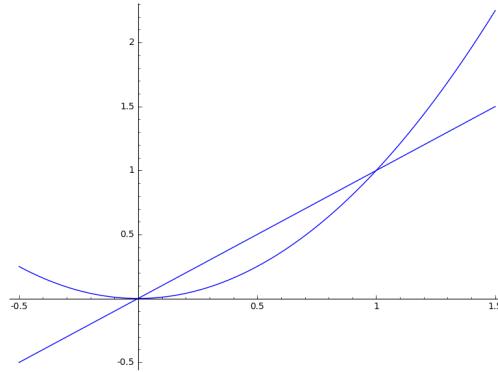
OBSERVACIÓN 10.1. A partir de ahora, usaremos el sistema algebraico de computo **SageMath**, para visualizar las gráficas.

[fragile]Código para graficar en 2D

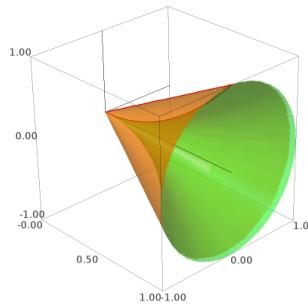
```
x = var("x")
line = x
parabola = x^2
graf = plot(line, (-0.5,1.5))
graf = graf+plot(parabola, (-0.5,1.5))
graf.show()
```

[fragile]Código para generar un sólido de revolución

```
x = var("x")
line = x
parabola = x^2
P = axes(1, color="black")
sur1=revolution_plot3d(line,(x,0,1),
    opacity=0.5,rgbcolor=(1,0.5,0),
    show_curve=True,parallel_axis='x')
sur2=revolution_plot3d(parabola,(x,0,1),
```

FIGURA 16. Región  $\mathcal{R}$  acotada por  $y = x$  y  $y = x^2$ 

```
opacity=0.5,rgbcolor=(0,1,0),
show_curve=True,parallel_axis='x')
(sur1+sur2+P).show()
```

FIGURA 17. Sólido generado por  $\mathcal{R}$ 

**8.1. Fórmula del Disco.** El volumen  $V$  de un sólido de revolución obtenido al rotar una región  $\mathcal{R}$  alrededor del eje  $x$  está dado por

(Fórmula del Disco)

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

De manera similar, la fórmula para una región como acotada por la gráfica  $x = g(y)$  está dada por

$$V = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy$$

**PROBLEMA 10.78.** Considere el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje  $x$  la región en el primer cuadrante acotada por

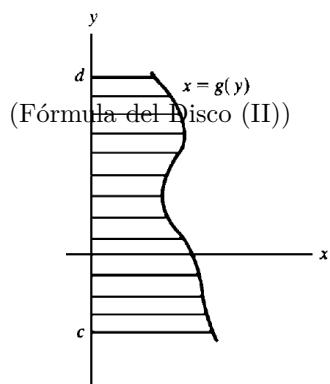
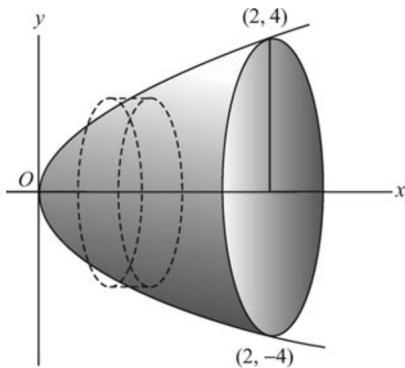
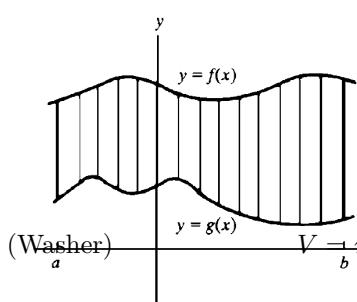
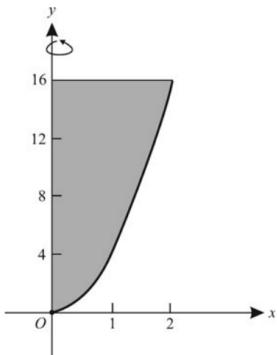


FIGURA  
18. Región  
acotada por  $x =$

la parábola  $y^2 = 8x$  y la línea  $x = 2$ . Encuentre su volumen.



**PROBLEMA 10.79.** Consideré el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje  $y$  la región en el primer cuadrante acotada por la parábola  $y = 4x^2$  y la línea  $y = 16$ . Encuentre su volumen.



**8.2. Método de Washer.** Supongamos que  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  para  $a \leq x \leq b$ . Consideremos la región acotada por  $x = a$ ,  $x = b$ , y las curvas  $y = g(x)$  y  $y = f(x)$ .

Entonces el volumen  $V$  del sólido de revolución generado por esta región rotando alrededor del eje  $x$  está dado por

$$V = \pi \int_a^b ((f(x))^2 - (g(x))^2) dx$$

Una fórmula similar

$$(Washer (II)) \quad V = \pi \int_c^d ((f(y))^2 - (g(y))^2) dy$$

se satisface cuando la región está acotada por las curvas  $x = f(y)$ ,  $x = g(y)$  y las rectas  $y = c$ ,  $y = d$ , siempre y cuando  $0 \leq g(y) \leq f(y)$  para  $c \leq y \leq d$  y se rota tal región alrededor del eje  $y$ .

PROBLEMA 10.80. Consideré el sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje  $x$  la región acotada por las curvas

$$y = 4x^2, \quad x = 0, \quad y = 16.$$

Encuentre el volumen por (Washer).

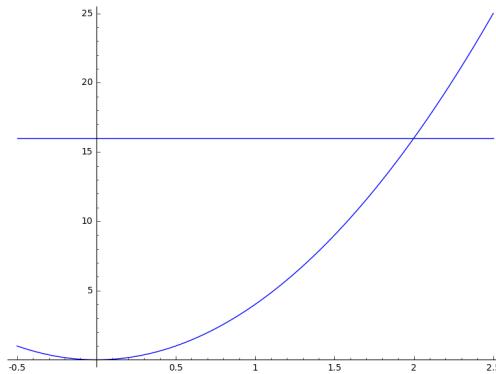


FIGURA 19. Región  $\mathcal{R}$  acotada por  $y = 4x^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 16$ .

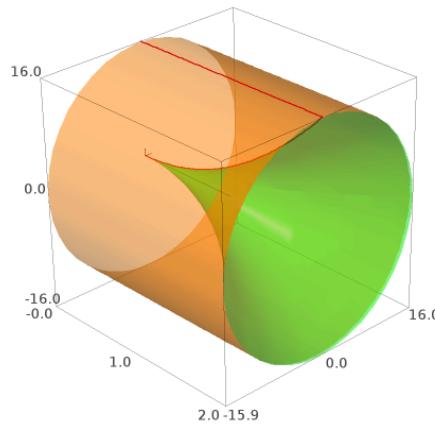
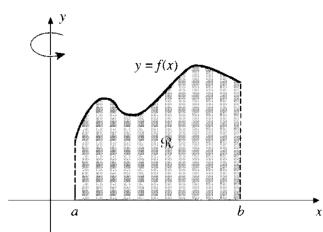


FIGURA 20. Sólido generado por región  $\mathcal{R}$ .

### 8.3. Método de las capas cilíndricas.

Consideremos el sólido de revolución obtenido al rotar alrededor del eje  $y$  la región  $\mathcal{R}$  en el primer cuadrante entre el eje  $x$  y la curva  $y = f(x)$ , entre  $x = a$  y  $x = b$ .



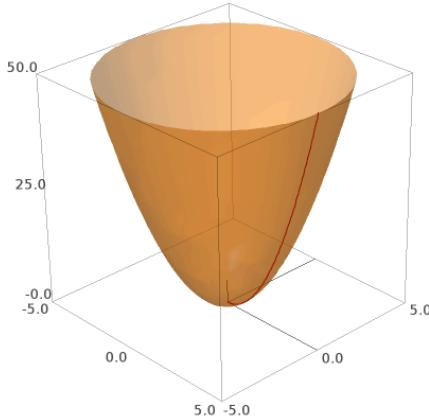
Entonces el volumen del sólido está dado por la fórmula de capas cilíndricas

$$(FCC) \quad V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

Una fórmula similar se satisface cuando se intercambian  $x$  y  $y$ , es decir, la región  $\mathcal{R}$  en el primer cuadrante entre el eje  $y$  y la curva  $x = f(y)$ , entre  $y = c$  y  $y = d$ , se gira alrededor del eje  $x$

$$(FCC(II)) \quad V = 2\pi \int_c^d yf(y)dy$$

PROBLEMA 10.81. Rote alrededor del eje  $y$  la región sobre el eje  $x$  y debajo de  $y = 2x^2$ , entre  $x = 0$  y  $x = 5$ . Por medio de (FCC). Encuentre el volumen.

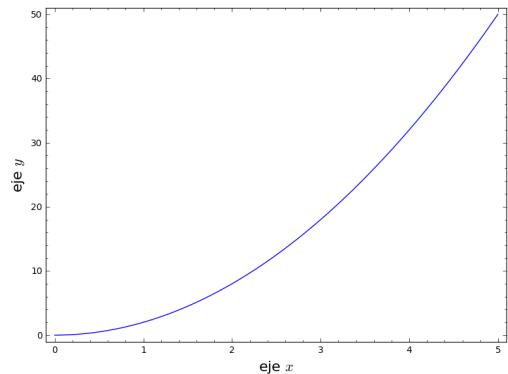
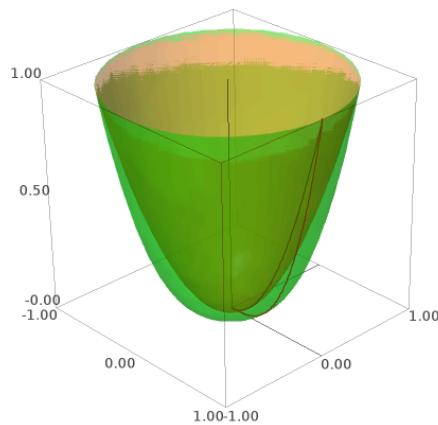


**8.4. Diferencia de Capas.** Supongamos que  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ ,  $a \geq 0$ . Sea  $\mathcal{R}$  la región en el primer cuadrante entre

$$y = f(x), \quad y = g(x), \quad x = a, \quad x = b.$$

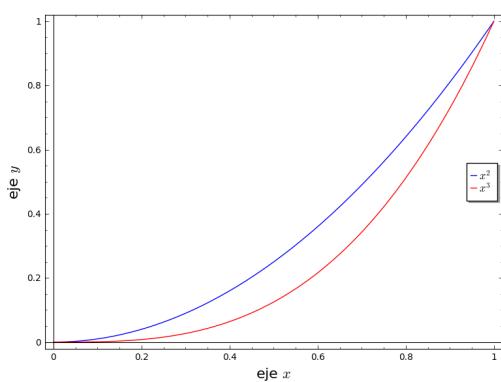
Entonces el volumen del sólido de revolución obtenido al rotar  $\mathcal{R}$  alrededor del eje  $y$  está dado por

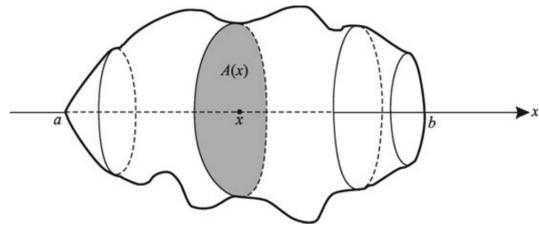
$$(FDC) \quad V = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))dx$$



PROBLEMA 10.82. Consideremos la región en el primer cuadrante acotado arriba por  $y = x^2$  y debajo por  $y = x^3$ .

Encuentre el volumen del sólido generado al rotar  $\mathcal{R}$  alrededor del eje  $y$ .





Para cada  $x \in [a, b]$ , supongamos que el plano perpendicular al eje  $x$  en el punto  $x$  intersecta al sólido en una región de área  $A(x)$ .

Entonces, el volumen  $V$  del sólido está dado por

$$(FST) \quad V = \int_a^b A(x)dx.$$

**PROBLEMA 10.83.** Supongamos que un segmento de un misil de longitud  $h$  es tal que la sección transversal perpendicular al eje de simetría del misil a una distancia  $x$  de la punta es un círculo de radio  $\sqrt{x}$ . Encuentre el volumen del misil.

## 9. Integrales impropias

### 9.1. Límites al infinito.

Para que

$$\int_a^b f(x)dx$$

esté bien definida, basta que  $f$  sea una función continua y  $a, b$  sean número reales.

Ahora veremos que sucede cuando

- (a)  $a$  o  $b$  tienden a  $\pm\infty$ ;
- (b)  $f$  es discontinuo.

Tales integrales se conocen como *improperas*.

Límites infinitos de integración

$$(130) \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x)dx$$

$$(131) \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x)dx$$

$$(132) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_c^{+\infty} f(x)dx + \int_{-\infty}^c f(x)dx$$

La última integral es válida siempre y cuando los dos límites del lado derecho existan.

**PROBLEMA 10.84.** Encuentre la intergral

$$\int_0^\infty e^{-x} \sin(x)dx$$

**PROBLEMA 10.85.** Encuentre la integral

$$\int_{-\infty}^0 e^{rx}dx$$

para  $r > 0$ .

### 8.5. Secciones transversales (rebanadas).

Supongamos que un sólido vive enteramente entre el plano perpendicular al eje  $x$  en  $x = a$  y el plano perpendicular al  $x$  en  $x = b$ .

PROBLEMA 10.86. Evalúe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

**9.2. Discontinuidades del integrando.** Caso I Si  $f$  es continuo en  $(a, b]$ , discontinuo en  $x = a$ , podemos definir

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f(x)dx,$$

siempre y cuando el límite exista.

PROBLEMA 10.87. Evalúe

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} dx$$

Caso II Si  $f$  es continuo en  $[a, b)$ , discontinuo en  $x = b$ , podemos definir

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \rightarrow b^-} \int_a^u f(x)dx,$$

siempre y cuando el límite exista.

PROBLEMA 10.88. Evalúe

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1 - \sin(x)}} dx$$

Caso III Si  $f$  es continuo en  $[a, b]$  excepto en un punto  $c \in (a, b)$ , entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \rightarrow c^-} \int_a^u f(x)dx + \lim_{u \rightarrow c^+} \int_u^b f(x)dx$$

siempre y cuando ambos límites del lado derecho existan.

PROBLEMA 10.89. Evalúe

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} dx$$

## 10. Área de Superficies de Revolución

Si un arco de una curva se gira alrededor de una línea que no se intersecta con el arco, entonces la superficie resultante se llama *superficie de revolución*.

Por *área de superficie*, nos referiremos al área de la superficie exterior.

Sea  $f$  una función continua y  $f(x) \geq 0$  en  $[a, b]$  que es diferenciable en  $(a, b)$ . Entonces el área de superficie  $S$  de la superficie de revolución generado al girar la gráfica de  $f$  en  $[a, b]$  alrededor del eje  $x$  está dado por la fórmula

$$(133) \quad S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

De manera similar, sea  $g$  una función continua y  $g(y) \geq 0$  en  $[c, d]$  que es diferenciable en  $(c, d)$ . Entonces el área de superficie  $S$  de la superficie de revolución generado al girar la gráfica de  $g$  en  $[c, d]$  alrededor del eje  $y$  está dado por la fórmula

$$(134) \quad S = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy.$$

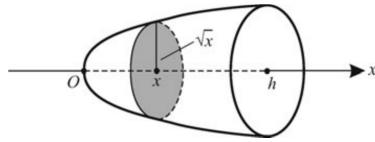
De manera más general, si una curva está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(u), \quad y = g(u)$$

y el arco va de  $u = u_1$  a  $u = u_2$  se rota alrededor del eje  $x$ , entonces el área de superficie de la superficie de revolución resultante está dada por la fórmula

$$(135) \quad S = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du$$

En la fórmula anterior, hemos supuesto que  $f, g$  son continuas en  $[u_1, u_2]$ , diferenciable en  $(u_1, u_2)$  y que  $y = g(u) \geq 0$  en  $[u_1, u_2]$ .



## Capítulo 11

# Cálculo en varias variables

### 1. Representación paramétrica de curvas

**1.1. Ecuaciones paramétricas.** Si las coordenadas  $(x, y)$  de un punto  $P$  en una curva están dadas por las funciones

$$(Ec.Par.) \quad x = f(t), y = g(t)$$

de una tercera variable o *parámetro*  $t$ , entonces (Ec.Par.) son llamadas *ecuaciones paramétricas* de la curva.

PROBLEMA 11.1. a

$$x = \cos(t), y = \sin^2(t)$$

son ecuaciones paramétricas de la parábola

$$4x^2 + y = 4.$$

b

$$x = \frac{1}{2}t, y = 4 - t^2$$

es otra parametrización de la misma curva.

PROBLEMA 11.2. 1. Las ecuaciones

$$x = r \cos(t), y = r \sin(t)$$

representan el círculo con radio en el origen.

2. Las ecuaciones

$$x = a + r \cos(t), y = b + r \sin(t)$$

representa el círculo de radio  $r$  y centro en  $(a, b)$ .

Supongamos que la curva está dada por (Ec.Par.). Entonces las primera y segunda derivadas están dadas por

$$(136) \quad D_x y = \frac{D_t y}{D_t x}$$

$$(137) \quad D_{xx} y = \frac{D_{tx} y}{D_t x}$$

**1.2. Longitud de arco.** Si una curva está dada por (Ec.Par.), entonces la *longitud de curva* entre dos puntos correspondientes a los valores parámetricos  $t_1$  y  $t_2$  es

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(D_t x)^2 + (D_t y)^2} dt$$

### 1.3. Ejemplos.

PROBLEMA 11.3. Encuentre  $D_{xy}$ ,  $D_{xxy}$  para

$$x = t - \sin(t), y = 1 - \cos(t)$$

PROBLEMA 11.4. Encuentre  $D_{xy}$  y  $D_{xxy}$  si  $x = e^t \cos(t)$ ,  $y = e^t \sin(t)$ .

PROBLEMA 11.5. Encuentre una ecuación a la línea tangente de la curva

$$x = \sqrt{t}, y = t - \frac{1}{\sqrt{t}}$$

en el punto  $t = 4$ .

PROBLEMA 11.6. La posición de una partícula que se está moviendo a lo largo de una curva está dada al tiempo  $t$  por las ecuaciones paramétricas

$$x = 2 - 3 \cos(t), y = 3 + 2 \sin(t)$$

donde  $x$  y  $y$  están medidos en pies y  $t$  en segundos.

Note que

$$\frac{1}{9}(x - 2)^2 + \frac{1}{4}(y - 3)^2 = 1$$

de manera que la curva es una elipse. ¿Porqué?

Continuación

1. Encuentre la tasa de cambio temporal de  $x$  cuando  $t = \frac{\pi}{3}$
2. Encuentre la tasa de cambio temporal de  $y$  cuando  $t = \frac{5\pi}{3}$
3. Encuentre la tasa de cambio temporal del ángulo de inclinación  $\theta$  de la línea tangente cuando  $t = \frac{2\pi}{3}$

PROBLEMA 11.7. Encuentre la longitud de arco de la curva

$$x = t^2, y = t^3$$

desde  $t = 0$  a  $t = 4$ .

PROBLEMA 11.8. Encuentre la longitud de arco de la cicloide

$$(138) \quad x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$$

entre  $\theta = 0$  y  $\theta = 2\pi$ .

## 2. Derivadas Parciales

### 2.1. Objetivos del aprendizaje.

1. Calcular e interpretar derivadas parciales.
2. Aplicar derivadas parciales para estudiar Ejemplos de análisis marginal en economía.
3. Calcular derivadas parciales de segundo orden.
4. Usar la regla de la cadena de derivadas parciales para encontrar tasas de cambio y hacer aproximaciones incrementales.

**2.2. Derivadas parciales de primer orden.** La derivada parcial de  $f(x, y)$  respecto de  $x$  se denota por

$$\partial_x f(x, y) \text{ ó } f_x(x, y)$$

y es la función obtenida al derivar  $f$  respecto de  $x$  *tratando a  $y$  como una constante*.

**2.3. Derivadas parciales de primer orden.** De manera similar, la derivada parcial de  $f(x, y)$  respecto de  $y$  se denota por

$$\partial_y f(x, y) \text{ ó } f_y(x, y)$$

y es la función obtenida al derivar  $f$  respecto de  $y$  *tratando a  $x$  como una constante*.

#### 2.4. Algunas propiedades y fórmulas.

PROPIEDAD 11.1. *Sean  $u(x, y), v(x, y)$  funciones de dos variables y  $h(y)$  una función que no depende de  $x$ .*

1.  $\partial_x h(y) = 0;$
2.  $\partial_x (h(y)u) = h(y)\partial_x u;$
3.  $\partial_x (u + v) = \partial_x u + \partial_x v;$
4.  $\partial_x (uv) = u\partial_x v + v\partial_x u;$
5.  $\partial_x u^n = nu^{n-1}\partial_x u;$
6.  $\partial_x e^u = e^u\partial_x u;$
7.  $\partial_x \ln(u) = \frac{\partial_x u}{u}.$

OBSERVACIÓN 11.1. Las reglas siguen valiendo si: cambiamos  $\partial_x$  por  $\partial_y$  y  $h$  no depende de  $y$ .

#### 2.5. Cálculo de derivadas parciales.

PROBLEMA 11.9. Encuentre las derivadas parciales de  $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2y}{3x}$

El desarrollo completo del ejercicio lo puede encontrar en mi Canal de YouTube. La comprobación de la solución la puede encontrar en SageMathCell.

PROBLEMA 11.10. Encuentre las derivadas parciales de

$$f(x, y) = (x^2 + x * y + y)^5.$$

El desarrollo completo del ejercicio lo puedes encontrar en mi Canal de YouTube. La comprobación se puede encontrar en <http://sagecell.sagemath.org/?q=vrfhpv>

PROBLEMA 11.11. Encuentre las derivadas parciales de

$$f(x, y) = xe^{-2xy}.$$

El desarrollo completo del ejercicio lo puedes encontrar en mi Canal de YouTube. La comprobación se puede encontrar en <http://sagecell.sagemath.org/?q=onrgkx>

PROBLEMA 11.12. Evalúe las derivadas parciales  $\partial_x f(x, y)$  y  $\partial_y f(x, y)$  en el punto  $(x_0, y_0)$  dado:

1.  $f(x, y) = x^3y - 2(x + y)$ ,  $x_0 = 1, y_0 = 0$ ;
2.  $f(x, y) = x + \frac{x}{y - 3x}$ ,  $x_0 = 1, y_0 = 1$ ;
3.  $f(x, y) = (x - 2y)^2 + (y - 3x)^2 + 5$ ,  $x_0 = 0, y_0 = -1$ ;
4.  $f(x, y) = xy \ln\left(\frac{y}{x}\right) + \ln(2x - 3y)^2$ ,  $x_0 = 1, y_0 = 1$ ;

Puede verificar sus resultados con este script.

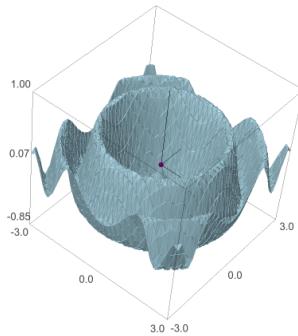
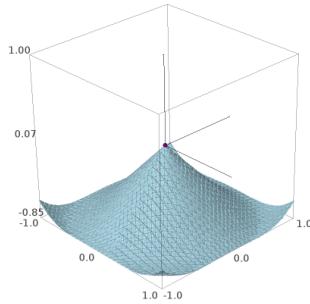


FIGURA 1. Máximo Relativo



## 2.6. Clasificación de Puntos Críticos.

DEFINICIÓN 11.1 (Extremos relativos). Diremos la función  $f(x,y)$  tiene un *máximo relativo* en  $(x_0, y_0)$  si

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

para todo  $(x, y)$  suficientemente cercano a  $(x_0, y_0)$ .

De manera similar, diremos la función  $f(x,y)$  tiene un *mínimo relativo* en  $(x_0, y_0)$  si

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

para todo  $(x, y)$  suficientemente cercano a  $(x_0, y_0)$ .

Los *extremos relativos* no siempre son *extremos absolutos...*

Est imagen la puede genera con el siguiente código: <http://sagecell.sagemath.org/?q=wdxppk>  
Sin embargo, para puntos suficientemente cercano, un *extremo relativo* sí lo es.

Esta imagen la puede generar con el siguiente código: <http://sagecell.sagemath.org/?q=butszu>

De hecho, el mapa topográfico de la región, nos indica que existen punto a una mayor altura que el *máximo relativo*.

Puede generar este mapa topográfico con el siguiente código <http://sagecell.sagemath.org/?q=zyutmy>

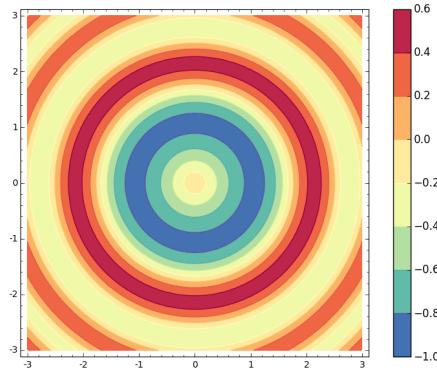


FIGURA 2. Mapa topográfico con alturas

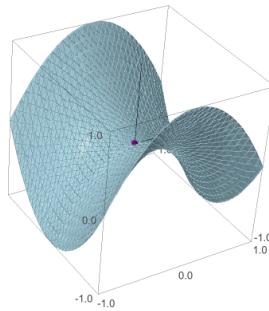


FIGURA 3. Punto de silla

**DEFINICIÓN 11.2** (Puntos críticos). Un punto  $(x_0, y_0)$  es un *punto crítico* de  $f(x, y)$  si

$$\partial_x f(x_0, y_0) = 0, \quad \partial_y f(x_0, y_0) = 0.$$

Todos los extremos relativos son puntos críticos...

Pero no todos los puntos críticos son extremos relativos.

<http://sagecell.sagemath.org/?q=kmfhcx>

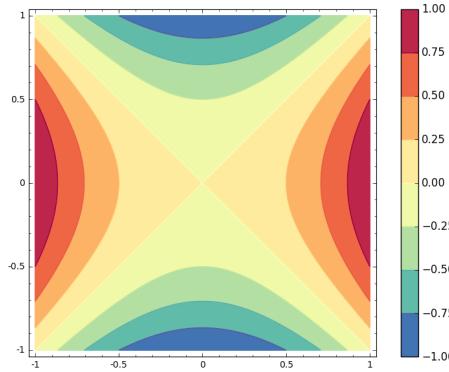
Diremos que un punto crítico que no es extremo local es un punto de silla.

<http://sagecell.sagemath.org/?q=mjknwh>

**OBSERVACIÓN 11.2.**  $(0, 0)$  es punto de silla de  $f(x, y) = x^2 - y^2$ .

**DEFINICIÓN 11.3** (Segundas derivadas). Las derivadas parciales de segundo orden de  $f(x, y)$  son

- $\partial_{xx} f(x, y) = \partial_x (\partial_x f(x, y)) = f_{xx}(x, y)$
- $\partial_{xy} f(x, y) = \partial_x (\partial_y f(x, y)) = f_{yx}(x, y)$
- $\partial_{yx} f(x, y) = \partial_y (\partial_x f(x, y)) = f_{xy}(x, y)$
- $\partial_{yy} f(x, y) = \partial_y (\partial_y f(x, y)) = f_{yy}(x, y)$

FIGURA 4. Mapa topográfico de  $f(x, y) = x^2 - y^2$ 

### 2.7. Hessiano de una función.

$$(139) \quad \text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f(x, y) & \partial_{yx}f(x, y) \\ \partial_{xy}f(x, y) & \partial_{yy}f(x, y) \end{pmatrix}$$

El determinante Hessiano de  $f(x, y)$  se define como

$$D(x, y) = \partial_{xx}f(x, y)\partial_{yy}f(x, y) - \partial_{xy}f(x, y)\partial_{yx}f(x, y).$$

OBSERVACIÓN 11.3. Si las derivadas parciales mixtas  $\partial_{xy}f(x, y)$ ,  $\partial_{yx}f(x, y)$  existen y son continuas, entonces

$$\partial_{xy}f(x, y) = \partial_{yx}f(x, y),$$

de manera que

$$D(x, y) = \partial_{xx}f(x, y)\partial_{yy}f(x, y) - (\partial_{xy}f(x, y))^2.$$

TEOREMA 11.1 (Clasificación de puntos críticos). *Supongamos que todas las derivadas de primer y segundo orden de  $f(x, y)$  existe y que  $(x_0, y_0)$  es un punto crítico de  $f(x, y)$ . Entonces*

- Si  $D(x_0, y_0) < 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  es un punto de silla.
- Si  $D(x_0, y_0) > 0$  y  $\partial_{xx}f(x_0, y_0) > 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  es un mínimo relativo.
- Si  $D(x_0, y_0) > 0$  y  $\partial_{xx}f(x_0, y_0) < 0$ , entonces  $(x_0, y_0)$  es un máximo relativo.

OBSERVACIÓN 11.4. Si  $D(x_0, y_0) = 0$ , la información no es concluyente.

PROBLEMA 11.13. Clasifique los puntos críticos de  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

Puede ver el desarrollo completo del ejercicio en <https://youtu.be/9Vz-quoiRPw>. Para encontrar los puntos críticos, puede usar este script.

Para evaluarlos en  $D(x, y)$  y  $\partial_{xx}f(x, y)$  puede utilizar este script.

PROBLEMA 11.14. Clasifique los puntos críticos de  $f(x, y) = 12x - x^3 - 4y^2$ .

Puede ver el desarrollo completo del ejercicio en <https://youtu.be/oY3DjTSqado>. Para encontrar los puntos críticos puede usar este script.

Para evaluarlos en  $D(x, y)$  y  $\partial_{xx}f(x, y)$  puede utilizar este script.

PROBLEMA 11.15. Clasifique los puntos críticos de  $f(x, y) = x^3 - y^3 + 6xy$ .

Puede ver el desarrollo completo del ejercicio en <https://youtu.be/oCk2O9SpJG4>.

Para encontrar los puntos críticos puede usar este script.

Para evaluarlos en  $D(x, y)$  y  $\partial_{xx}f(x, y)$  puede usar este script.

PROBLEMA 11.16. Clasifique los puntos críticos de cada una de las siguientes funciones:

1.  $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$
2.  $f(x, y) = \frac{16}{x} + \frac{6}{y} + x^2 - 3y^2$
3.  $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$
4.  $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$

Puede verificar sus resultados, utilizando este este script.



## **Parte 4**

# **Ecuaciones Diferenciales**



## Capítulo 12

# Ecuaciones de primer orden

## 1. Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales

**1.1. Conceptos básicos.** Definición Una *ecuación diferencial* es una ecuación que involucra derivadas o diferenciales de una o varias variables.

Si la ecuación sólo involucra derivadas respecto a una única variable independiente, diremos que es *ordinaria*. En otro caso, que es *parcial*.

Orden Si la ecuación involucra derivadas de orden  $n$ , pero no de orden más alto, diremos que la propia ecuación es de *orden n*.

PROBLEMA 12.1.

$$(140) \quad (y'')^2 + 3x = 2(y')^3$$

PROBLEMA 12.2.

$$(141) \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2$$

PROBLEMA 12.3.

$$(142) \quad \frac{d^2Q}{dt^2} - 3\frac{dQ}{dt} + 2Q = 4\sin(2t)$$

PROBLEMA 12.4.

$$(143) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

De manera equivalente

$$(x+y)dx + (y-x)dy = 0$$

PROBLEMA 12.5.

$$(144) \quad \frac{\partial^2V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2V}{\partial y^2} = 0$$

**1.2. Constantes arbitrarias.** Una constante arbitraria es un valor que es independiente de las variables involucradas en la ecuación.

Generalmente las denotaremos con las primeras letras del alfabeto:

$$A, B, C, c_1, c_2, \dots$$

PROBLEMA 12.6. En la ecuación

$$y = x^2 + c_1x + c_2$$

los símbolos  $c_1, c_2$  representan constantes arbitrarias.

PROBLEMA 12.7. La relación  $y = Ae^{-4x+B}$  se puede reescribir como  $y = Ce^{-4x}$ . Por lo que sólo involucra una constante arbitraria.

Siempre reduciremos las ecuaciones al número mínimo de constantes arbitrarias, a las que llamaremos *esenciales*.

**1.3. Soluciones.** Una *solución de una ecuación diferencial* es una relación entre las variables que está libre de derivadas, y que satisface la ecuación diferencial en al menos un intervalo.

Una *solución general* de una ecuación diferencial de orden  $n$  es aquella que involucra  $n$  constantes arbitrarias esenciales.

PROBLEMA 12.8.  $y = x^2 + c_1x + c_2$  es una solución general de  $y'' = 2$ .

Una *solución particular* es aquella que se obtiene de una general, sustituyendo valores específicos en las constantes arbitrarias.

PROBLEMA 12.9.  $y = x^2 - 3x + 2$  es una solución particular de  $y'' = 2$ .

Una *solución singular* es una aquella que no se puede obtener de la solución general sólo especificando valores para las constantes arbitrarias.

PROBLEMA 12.10. La solución general de  $y = xy' - y'^2$  es  $y = cx - c^2$ .

Sin embargo,  $y = \frac{x^2}{4}$  es una solución que no se puede obtener sustituyendo  $c$ . Por tanto, es una solución particular.

**1.4. Ecuación diferencial de una familia de curvas.** Una solución general de orden  $n$  tiene  $n$  parámetros (constantes arbitrarias esenciales) y por tanto, geométricamente representa una *familia de curvas  $n$ -paramétrica*.

De manera reciproca, una relación con  $n$  constantes arbitrarias (también llamada *primitiva*) tiene asociada una ecuación diferencial de orden  $n$  (de la cual es solución general), llamada la *ecuación diferencial de la familia*.

### 1.5. Ejemplos. Clasificación de ecuaciones diferenciales

PROBLEMA 12.11. Clasifica cada una e las siguientes ecuaciones diferenciales enunciando su orden; sus variables dependientes e independientes; y si es ordinaria o parcial:

$$(145) \quad x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

SOLUCIÓN. (I) Orden 2;  
 (II) variable dependiente:  $y$ ;  
 (III) variable independiente:  $x$ ;  
 (IV) ecuación ordinaria.

□

$$(146) \quad \frac{dx}{dy} = x^2 + y^2$$

SOLUCIÓN. (I) Orden 1;  
 (II) variable dependiente:  $x$ ;  
 (III) variable independiente:  $y$ ;  
 (IV) ordinaria.

□

$$(147) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

- SOLUCIÓN. (I) Orden 1;  
 (II) variable dependiente:  $y$ ;  
 (III) variable independiente:  $x$ ;  
 (IV) ordinaria.

□

$$(148) \quad \left( \frac{d^2u}{dt^2} \right)^3 + u^4 = 1$$

- SOLUCIÓN. (I) Orden 2;  
 (II) variable dependiente:  $u$ ;  
 (III) variable independiente:  $t$ ;  
 (IV) ordinaria.

□

$$(149) \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

- SOLUCIÓN. (I) Orden 2;  
 (II) variable dependiente:  $Y$ ;  
 (III) variables independientes:  $x, t$ ;  
 (IV) parcial.

□

$$(150) \quad (x^2 + 2y^2) dx + (3x^3 - 4y^2) dy = 0$$

- SOLUCIÓN. (I) Orden 1;  
 (II) variable dependiente:  $y$ ;  
 (III) variable independiente:  $x$ ;  
 (IV) ordinaria.

□

### Solución de ecuaciones diferenciales

**PROBLEMA 12.12.** Verifica para cada ecuación, si la relación indicada es solución; y en ese caso, determina si es general.

$$(151) \quad \begin{cases} y' - x + y = 0 \\ y = Ce^{-x} + x - 1 \end{cases}$$

- SOLUCIÓN. (I)  $y' = -Ce^{-x} + 1$   
 (II)  $y' - x + y = (-Ce^{-x} + 1) - x + (Ce^{-x} + x - 1) = 0$   
 (III)  $C$  es su único parámetro.  
 (IV) Por tanto  $y$  es solución general.

□

$$(152) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3y^2 - x^2} \\ x^2y - y^3 = c \end{cases}$$

SOLUCIÓN. (I) Derivando de forma implícita obtenemos

$$(153) \quad x^2y' + 2xy - 3y^2y' = 0$$

(II) Despejando  $y'$  obtenemos

$$(154) \quad y' = \frac{2xy}{3y^2 - x^2}$$

(III) Como  $C$  es el único parámetro,  $y$  es una solución general.

□

$$(155) \quad \begin{cases} \frac{d^2I}{dt^2} + 2\frac{dI}{dt} - 3I = 2\cos(t) - 4\sin(t) \\ I = c_1e^t + c_2e^{-3t} + \sin(t) \end{cases}$$

SOLUCIÓN. (I)  $\frac{dI}{dt} = c_1e^t - 3c_2e^{-3t} + \cos(t)$

(II)  $\frac{d^2I}{dt^2} = c_1e^t + 9c_2e^{-3t} - \sin(t)$

(III)

$$(156) \quad (c_1e^t + 9c_2e^{-3t} - \sin(t))$$

$$(157) \quad + 2(c_1e^t - 3c_2e^{-3t} + \cos(t))$$

$$(158) \quad - 3(c_1e^t + c_2e^{-3t} + \sin(t))$$

$$(159) \quad = 2\cos(t) - 4\sin(t)$$

(IV) Como  $c_1, c_2$  son parámetros, entonces  $I$  es una solución general.

□

$$(160) \quad \begin{cases} x^3 \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 = 2v \frac{dv}{dx} \\ v = cx^2 \end{cases}$$

SOLUCIÓN. (I)  $\frac{dv}{dx} = 2cx$

(II)  $\frac{d^2v}{dx^2} = 2c$

(III) Sustituimos en el lado izquierdo

$$(161) \quad x^3 (2c)^2 = 4c^2x^3$$

(IV) Sustituimos en el lado derecho

$$(162) \quad 2(cx^2)(2cx) = 4c^2x^3$$

(V) Entonces  $v$  es solución, pero como la ecuación es de grado 2 y  $c$  es el único parámetro, no es general.

□

PROBLEMA 12.13. Determine la solución particular de la ecuación diferencial del problema 155, tal que satisface las condiciones

$$(163) \quad I(0) = 2$$

$$(164) \quad I'(0) = -5$$

- SOLUCIÓN.
- (I)  $I(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-3t} + \sin(t)$
  - (II)  $I(0) = c_1 + c_2 = 2$
  - (III)  $I'(t) = c_1 e^t - 3c_2 e^{-3t} + \cos(t)$
  - (IV)  $I'(0) = c_1 - 3c_2 + 1 = -5$
  - (V)  $c_1 - 3c_2 = -6$
  - (VI)  $c_1 = 0, c_2 = 1$
  - (VII)  $I = 2e^{-3t} + \sin(t)$

□

PROBLEMA 12.14. Mostrar que la solución de problema de valor inicial

$$(165) \quad \begin{cases} Q''(t) + 4Q'(t) + 20Q(t) = 16e^{-2t} & t \geq 0 \\ Q(0) = 2, Q'(0) = 0 \end{cases}$$

is

$$(166) \quad Q(t) = e^{-2t} (1 + \sin(4t) + \cos(4t))$$

Solución

$$\begin{aligned} Q'(t) &= e^{-2t} (4 \cos(4t) - 4 \sin(4t)) - 2e^{-2t} (1 + \sin(4t) + \cos(4t)) \\ &= e^{-2t} (2 \cos(4t) - 6 \sin(4t) - 2) \end{aligned}$$

Solución

$$\begin{aligned} Q''(t) &= e^{-2t} (-8 \sin(4t) - 24 \cos(4t)) - 2e^{-2t} (2 \cos(4t) - 6 \sin(4t) - 2) \\ &= e^{-2t} (4 \sin(4t) - 28 \cos(4t) + 4) \end{aligned}$$

Solución

$$\begin{aligned} Q''(t) + 4Q'(t) + 20Q(t) &= e^{-2t} (4 \sin(4t) - 28 \cos(4t) + 4) \\ &\quad + 4e^{-2t} (2 \cos(4t) - 6 \sin(4t) - 2) \\ &\quad + 20e^{-2t} (1 + \sin(4t) + \cos(4t)) \\ &= 16e^{-2t} \end{aligned}$$

Determine gráficamente una relación entre la solución general

$$(167) \quad y = cx - c^2$$

y la solución singular  $y = \frac{x^2}{4}$  de la ecuación diferencial

$$(168) \quad y = xy' - y^2$$

La envolvente de una familia de curvas

$$(169) \quad G(x, y, c) = 0,$$

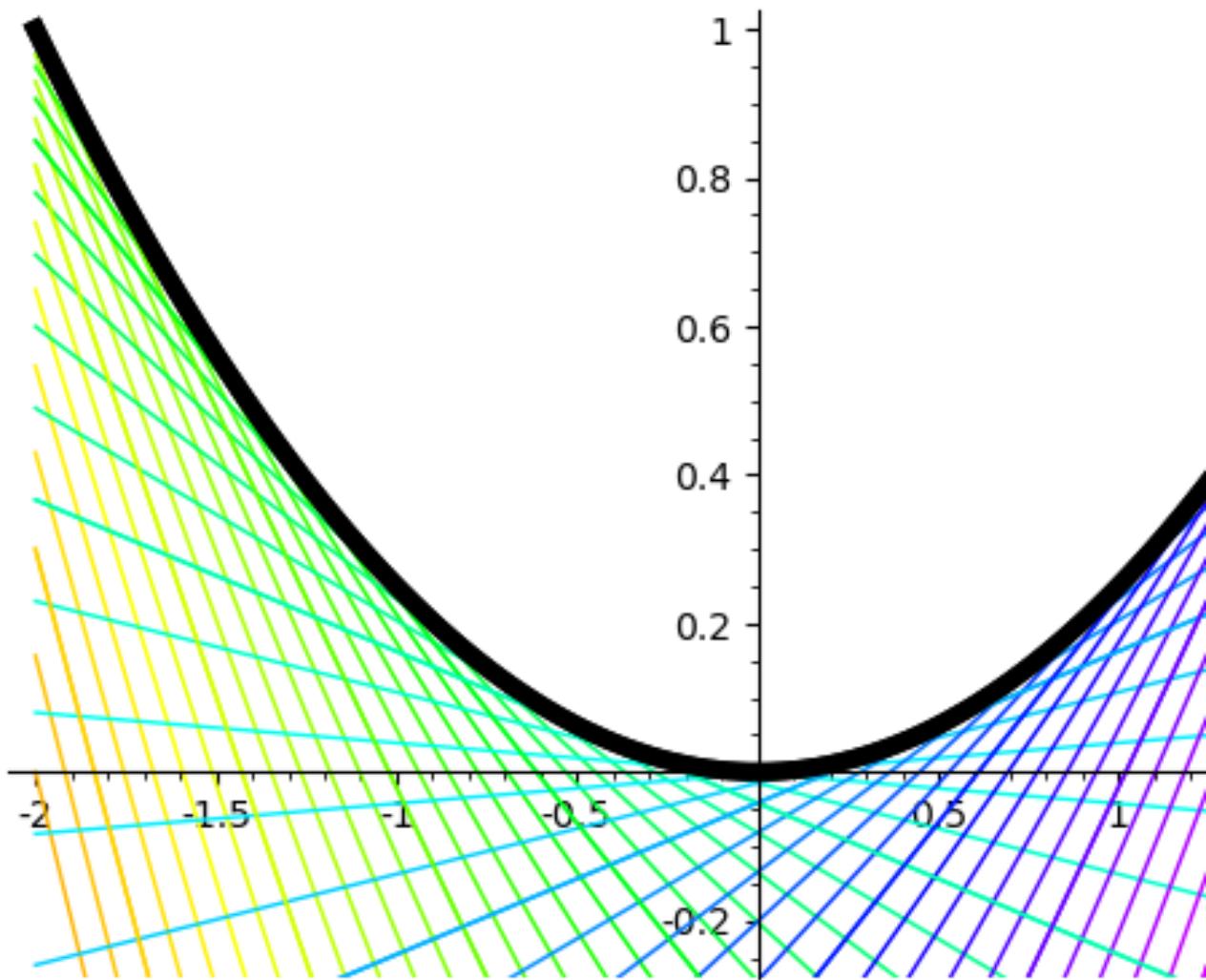


FIGURA 1. La parábola es la envolvente de la familia de líneas rectas.

si es que existe, puede encontrarse resolviendo simultáneamente las ecuaciones

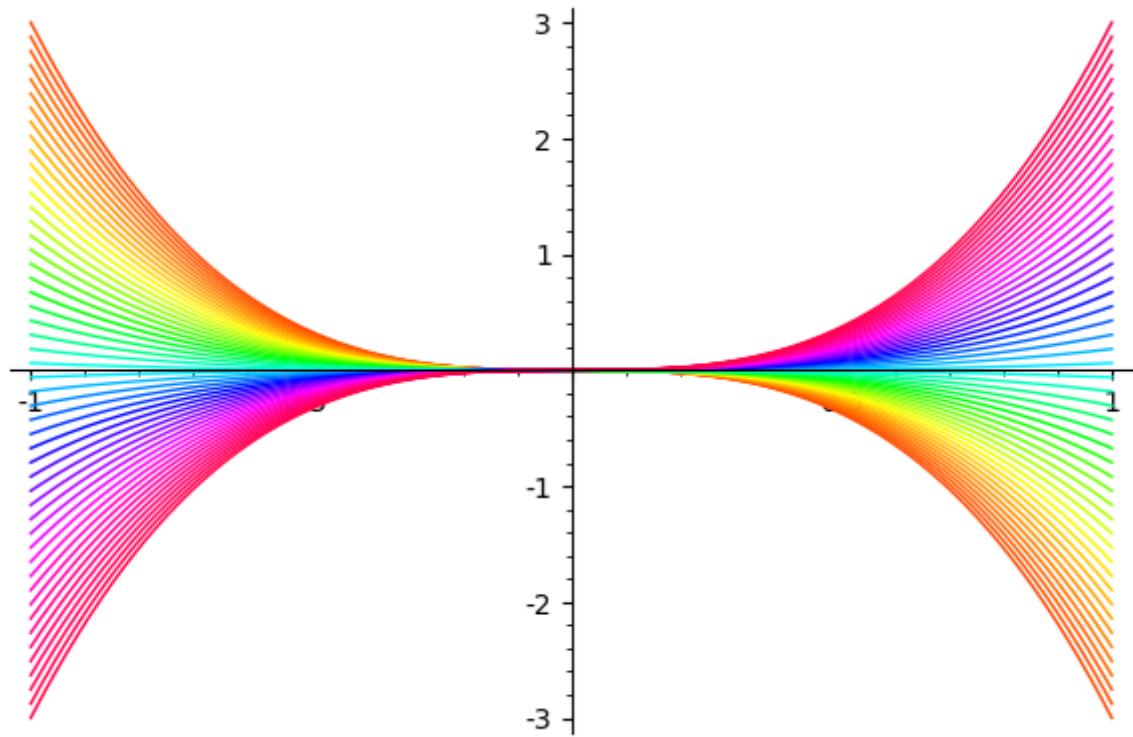
$$\begin{cases} \partial_c G(x, y, c) = 0 \\ G(x, y, c) = 0 \end{cases}$$

Solución

- (I) Calculamos la parcial  $\partial_c G(x, y, c) = -x + 2c$
- (II) Plantemos las ecuaciones

$$(170) \quad -x + 2c = 0$$

$$(171) \quad y - cx + c^2 = 0$$

FIGURA 2. Familia uniparamétrica  $y = cx^2$ 

(III) Resolvemos las ecuaciones y obtenemos la solución paramétrica

$$(172) \quad x = 2c, y = c^2$$

(IV) La solución se puede reescribir como

$$(173) \quad y = \frac{x^2}{4}$$

PROBLEMA 12.15. (a) Trace la gráfica de varios miembros de la familia uniparamétrica

$$\{y = cx^2 \mid c \in \mathbb{R}\}$$

(b) Obtenga la ecuación diferencial de esta familia

Solución: Inciso (a)

Solución: Inciso (b)

$$(I) \quad y = cx^3 \rightarrow y' = 3cx^2$$

$$(II) \quad c = \frac{y}{x^3}$$

$$(III) \quad y' = 3\left(\frac{y}{x^3}\right)x^2$$

$$(IV) \quad y' = \frac{3y}{x}$$

PROBLEMA 12.16. Encuentre una ecuación diferencial para la familia biparamétrica de cónicas

$$(174) \quad ax^2 + by^2 = 1$$

SOLUCIÓN. Supongamos que  $b \neq 0$ .

- (I)  $2ax + 2byy' = 0$
- (II)  $a = \frac{-byy'}{x}$
- (III)  $\left(-\frac{byy'}{x}\right)x^2 + by^2 = 1$
- (IV)  $-bxyy' + by^2 = 1$
- (V)  $-b(xy'' + xy'^2 + yy') + 2byy' = 0$
- (VI)  $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$

□

- (a) Encuentra una solución general para la ecuación diferencial  $\frac{dy}{dx} = 3x^2$
- (b) Traza la gráfica de las soluciones obtenidas en el inciso (a)
- (c) Determina la ecuación de la curva particular en el inciso (b), que pasa por el punto  $(1, 3)$

Solución: Inciso (a)

- (I)  $dy = 3x^2 dx$
- (II)  $\int dy = \int 3x^2 dx$
- (III)  $y = x^3 + c$

Solución: Inciso (b)

Inciso (c)

- (I) Como la curva pasa por  $(1, 3)$ , entonces

$$x = 1 \rightarrow y = 3$$

$$(II) \quad 3 = 1^3 + c \rightarrow c = 2$$

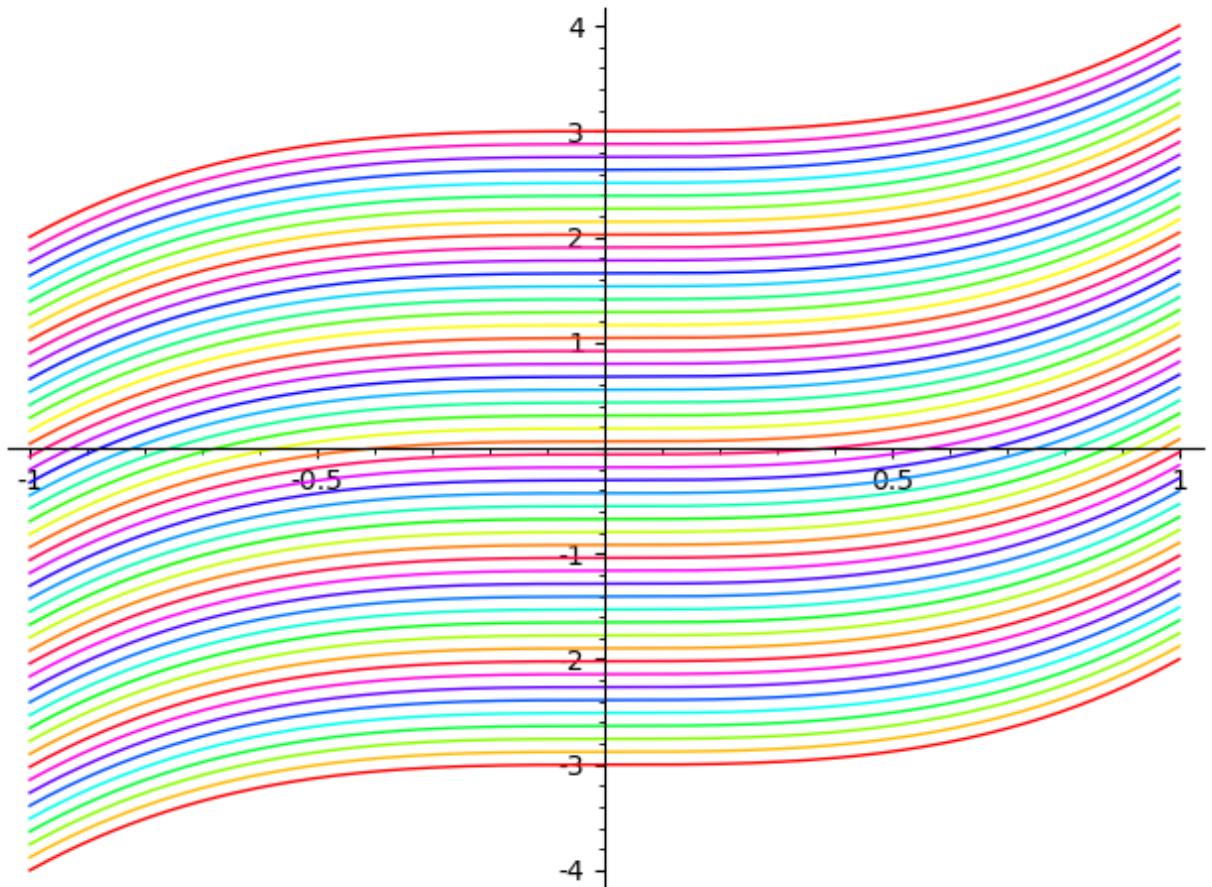
$$(III) \quad y = x^3 + 2$$

PROBLEMA 12.17. Resuelva el problema de condición inicial

$$(175) \quad \begin{cases} y'' = 3x - 2 \\ y(0) = 2 \\ y'(1) = -3 \end{cases}$$

- SOLUCIÓN.
- (I)  $y' = \frac{3x^2}{2} - 2x + c_1$
  - (II)  $y'(1) = -3 \rightarrow -3 = \frac{3}{2} - 2 + c_1 \rightarrow c_1 = -\frac{5}{2}$
  - (III)  $y = \frac{x^3}{2} - x^2 - \frac{5x}{2} + c_2$
  - (IV)  $y(0) = 2 \rightarrow c_2 = 2 \rightarrow y = \frac{x^3}{2} - x^2 - \frac{5x}{2} + 2$

□

FIGURA 3. Familia uniparamétrica  $y = x^3 + c$ 

## 2. Ecuaciones Especiales de Primer Orden

Cualquier ecuación diferencial de primer orden de la *forma normal*

$$(176) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

puede ser reescrita en la *forma diferencial*

$$(177) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

y viceversa.

Separación de variables Una ecuación es *separable* si se puede escribir en la forma.

$$(178) \quad f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

En ese caso, su solución está dada por

$$(179) \quad \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} dy = c$$

siempre que  $g_1(y)f_2(x) \neq 0$ .

PROBLEMA 12.18. Resuelve la ecuación diferencial

$$xdy - ydx = 0$$

Ecuaciones exactas Una ecuación

$$(180) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es *exacta* si existe una función diferenciable  $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$(181) \quad M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU(x, y) = 0$$

En ese caso, la solución está dada por

$$(182) \quad U(x, y) = c$$

Un criterio para determinar si una ecuación es exacta es verificar que

$$(183) \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

PROBLEMA 12.19. Determina si la ecuación

$$(184) \quad xdy - ydx = 0$$

es exacta.

De manera equivalente, podemos encontrar la solución de la siguiente manera

$$(185) \quad \int M \partial x + \int \left( N - \frac{\partial}{\partial y} \int M \partial x \right) dy = c$$

donde  $\partial x$  indica que la integración es realizada únicamente respecto a  $x$ , manteniendo  $y$  constante.

PROBLEMA 12.20. Demuestra que la ecuación

$$(186) \quad \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$$

es exacta y resuélvela.

Factor Integrante Cuando una ecuación no es exacta, en ocasiones se puede encontrar de manera explícita una función  $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  llamada *factor integrante* tal que

$$(187) \quad \frac{\partial}{\partial y} (\mu M) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu N)$$

y por tanto

$$(188) \quad \mu M dx + \mu N dy = 0$$

es exacta.

$$(a) \quad \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$(b) \quad \frac{x \, dy - y \, dx}{y^2} = -d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$(c) \quad \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$$

$$(d) \quad \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2} d\left\{\ln \frac{x - y}{x + y}\right\}$$

$$(e) \quad \frac{x \, dx + y \, dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} d\{\ln(x^2 + y^2)\}$$

FIGURA 4. Algunos ejemplos de factores integrantes.

**2.1. Ecuaciones lineales.** Diremos que una ecuación es lineal si se puede reescribir en la forma:

$$(189) \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

En este caso, un factor integrante está dado por

$$(190) \quad \mu = e^{\int p(x)dx}$$

y la ecuación se puede reescribir como

$$(191) \quad \frac{d}{dx} (\mu y) = \mu q(x)$$

Entonces,

$$(192) \quad \mu y = \int \mu q(x)dx + c$$

y la solución está dada por

$$(193) \quad y = e^{-\int pdx} \left( \int e^{\int pdx} q(x) dx + c \right)$$

$$(194) \quad = e^{-\int pdx} \int e^{\int pdx} q(x) dx + ce^{-\int pdx}$$

PROBLEMA 12.21. Reescribe la ecuación

$$(195) \quad xdy - ydx = 0$$

en forma lineal; calcula el factor integrante y resuelve.

**2.2. Ecuaciones homogéneas de orden cero.** Diremos que una ecuación diferencial es *homogénea de orden cero* si se puede reescribir como

$$(196) \quad \frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Definimos la variable dependiente  $\nu = \frac{y}{x}$ , de manera que  $y = \nu x$ .

Entonces la ecuación diferencial se puede reescribir como

$$(197) \quad v + x \frac{d\nu}{dx} = F(\nu)$$

o de manera equivalente

$$(198) \quad x d\nu + (F(\nu) - v) dx = 0.$$

Entonces tiene su solución está dada por

$$(199) \quad \ln|x| = \int \frac{d\nu}{F(\nu) - \nu} + c$$

PROBLEMA 12.22. Reescriba la ecuación

$$(200) \quad xdy - ydx = 0$$

como una ecuación homogénea de orden cero y resuelva.

**2.3. Ecuaciones de Bernoulli.** Diremos que una ecuación es de Bernoulli si se puede reescribir en la forma

$$(201) \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

siempre que  $n \neq 0, 1$

En ese caso, hacemos la sustitución  $\nu = y^{1-n}$  y la ecuación se reduce a una ecuación lineal, cuya solución está dada por

$$(202) \quad \nu e^{(1-n)\int pdx} = (1-n) \int q e^{(1-n)\int pdx} + c$$

OBSERVACIÓN 12.1. (i) Si  $n = 0$ , la ecuación ya es lineal sin necesidad de hacer sustitución alguna.

(ii) Si  $n = 1$ , la ecuación se puede reescribir como separable.

PROBLEMA 12.23. Resuelve la ecuación

$$(203) \quad x \frac{dy}{dx} + y = xy^3$$

**2.4. Ecuaciones solubles.** Diremos que una ecuación diferencial es soluble para  $y$  si

$$(204) \quad y = g(x, p)$$

donde  $p = y'$ .

En ese caso,

$$(205) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}$$

o de manera equivalente

$$(206) \quad p = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Resolvemos la ecuación anterior para  $p$

$$(207) \quad G(x, p, c) = 0$$

y sustituimos en  $y = g(x, p)$ .

PROBLEMA 12.24. Resuelve la ecuación

$$(208) \quad xp^2 + 2px - y = 0$$

donde  $p = y'$ .

**2.5. Ecuación de Clairaut.** Diremos que una ecuación es de Clairaut si se puede reescribir como

$$(209) \quad y = px + F(p)$$

donde  $p = y'$

Este es un caso especial del tipo anterior con solución

$$(210) \quad y = cx + F(c)$$

PROBLEMA 12.25. Resuelve la ecuación

$$(211) \quad y = px \pm \sqrt{p^2 + 1}$$

donde  $p = y'$ .

**2.6. Reducción de orden.** Si una ecuación diferencial es de orden  $m > 1$ , pero hace falta de forma explícita la variable dependiente  $y$ , entonces se puede reducir de orden con la sustitución  $y' = p$ .

PROBLEMA 12.26. Resuelve la ecuación

$$(212) \quad y'' + 2y' = 4x$$

PROBLEMA 12.27. Resuelve la ecuación

$$(213) \quad 1 + yy'' + y'^2 = 0$$

con la reducción de orden  $y' = p$ .

### 2.7. Ejemplos.

PROBLEMA 12.28. (I) Encuentra la solución general de

$$(214) \quad (4x + xy^2) dx + (y + x^2y) dy = 0$$

(II) Encuentra la solución particular para  $y(1) = 2$ .

Resuelve el problema de valor inicial

$$(215) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + 3y = 8 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

PROBLEMA 12.29. Resuelve la ecuación

$$(216) \quad \frac{dy}{dx} = \sec(y) \tan(x)$$

## 3. Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

**3.1. Crecimiento y decaimiento.** Sea  $N(t)$  la cantidad de algún recurso, sustancia o población que (de-)crece respecto del tiempo.

En este caso  $N'(t)$  la tasa de cambio y supondremos que es proporcional a  $N(t)$ :

$$(217) \quad \frac{dN}{dt} = rN,$$

donde  $r$  es la constante de proporcionalidad.

PROBLEMA 12.30. Una persona deposita \$20,000 en una cuenta de ahorros que paga el 5% de interés anual, compuesto continuamente. Encuentre

1. el monto en la cuenta después de tres años;
2. el tiempo requerido para que la cuenta al doble de su valor, sin contar retiros ni depósitos extras.

**3.2. Ejemplos de enfriamiento.** La ley de enfriamiento de Newton establece que *la tasa de cambio de la temperatura de un cuerpo (respecto del tiempo) es proporcional a la diferencia entre el cuerpo y el medio circundante*:

$$(218) \quad \frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

donde  $k$  es una constante (positiva) de proporcionalidad;  $T$  es la temperatura del cuerpo; y  $T_m$  es la temperatura del medio.

PROBLEMA 12.31. Un cuerpo a una temperatura de  $50^\circ F$  está colocado en el exterior donde la temperatura es de  $100^\circ F$ . Si después de 5 minutos la temperatura del cuerpo es  $60^\circ F$ , encontrar:

1. cuánto le tomará al cuerpo alcanzar una temperatura de  $75^\circ F$  y
2. la temperatura del cuerpo después de 20 minutos.

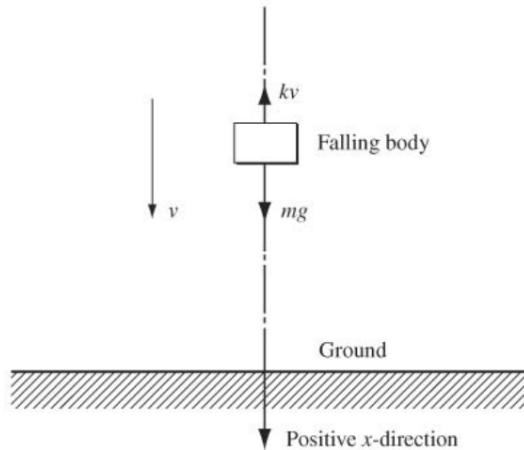


Fig. 7-1

### 3.3. Caída de cuerpos.

OBSERVACIÓN 12.2 (Segunda ley de Newton). La fuerza neta que actúa en un cuerpo es igual a la razón cambio respecto del tiempo del momento del cuerpo; o para masa constante

$$(219) \quad F = m \frac{dv}{dt}$$

donde  $F$  es la fuerza neta en el cuerpo y  $v$  es la velocidad del mismo, en el tiempo  $t$ .

En nuestro modelo,  $F = mg - kv$ , donde  $m$  es la masa,  $g$  es la aceleración debida a la gravedad y  $k > 0$  es una constante de proporcionalidad debida a la resistencia del aire.

De manera que obtenemos la ecuación diferencial  $mg - kv = m \frac{dv}{dt}$ , o de manera equivalente

$$(220) \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g.$$

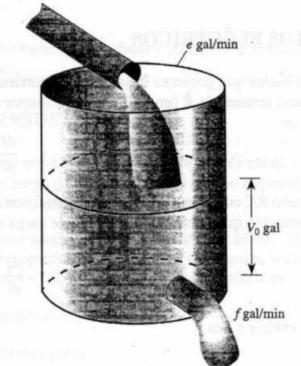
PROBLEMA 12.32. Un cuerpo que pesa 64lbs es dejado caer desde una altura de 100ft con velocidad inicial de 10ft/sec.

Suponga que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del cuerpo. Se sabe que la velocidad límite del cuerpo es de 128ft/sec. Encuentre:

1. una expresión para la velocidad del cuerpo en cualquier tiempo  $t$ , y
2. una expresión para la posición del cuerpo en cualquier tiempo.
3. Determine el instante en que choca contra el suelo.

**3.4. Ejemplos de Disolución.** Consideremos un tanque que inicialmente contiene  $V_0$  litros de salmuera, que contiene  $Q_0$  kgs de sal.

Otra solución de salmuera, que contiene  $b$  kgs por litro se vierte en el tanque a una tasa o ritmo de  $e$  litros/minuto en tanto que simultáneamente, la solución bien



agitada abandona el tanque a un ritmo de  $f$  litros/minuto.

El problema es encontrar la cantidad de sal en el tanque en respecto del tiempo  $t$ .

Por  $Q$  denotaremos la cantidad (en kilos) de sal que se encuentra en el tanque en en el tiempo  $t$ .

El volumen de salmuera al tiempo  $t$  es

$$(221) \quad V(t) = V_0 + e \times t - f \times t.$$

La concentración de sal en el tanque en un momento dado es

$$\frac{Q(t)}{V(t)},$$

de lo que se deduce que la sal sale del tanque a una tasa de

$$f \times \left( \frac{Q(t)}{V(t)} \right) \text{ kgs/min.}$$

De este modo,

$$\frac{dQ}{dt} = be - f \times \left( \frac{Q}{V_0 + (e-f)t} \right),$$

o de manera equivalente

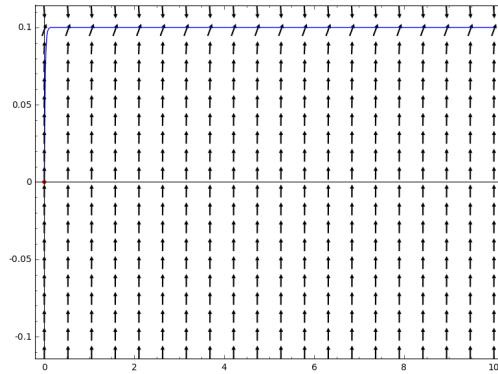
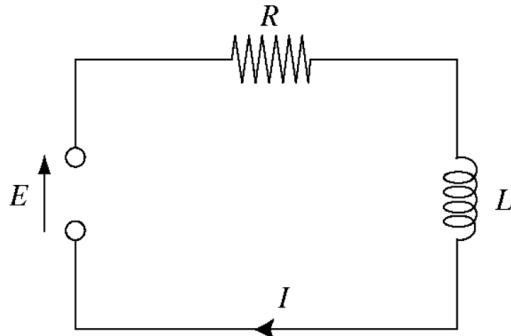
$$(222) \quad \frac{dQ}{dt} + f \times \left( \frac{Q}{V_0 + (e-f) \times t} \right) = be.$$

**PROBLEMA 12.33.** Un tanque contiene inicialmente 100 litros de una solución de salmuera con 1 kilo de sal. En  $t = 0$  se vierte otra solución de salmuera que contiene 1 kilo de sal por litro a un ritmo de 3 litros/minuto, en tanto que la salmuera bien agitada abandona el tanque al mismo ritmo. Encuentre

1. la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo  $t$ , y
2. el tiempo en el cual la mezcla en el tanque contiene 2 kilos de sal.

**PROBLEMA 12.34.** Un tanque de 50 lts contiene inicialmente 10 litros de agua fresca. Al tiempo  $t = 0$  se vierte al tanque una solución de salmuera que contiene 1 kilo de sal por litro a un ritmo 4 lts/min, mientras que la mezcla bien agitada abandona el tanque a un ritmo de 2 lts/min. Encuentre

1. la cantidad de tiempo requerido para que ocurra un derrame y;



2. la cantidad de sal en el tanque al momento del derrame.

**3.5. Circuitos Eléctricos.** La ecuación básica que gobierna la cantidad de corriente  $I$  (en amperios) en un circuito  $RL$  simple (fig. 3.5) consiste en una resistencia  $R$  (en ohmios), un inductor  $L$  (en henrios) y una fuerza electromotriz (abreviado fem)  $E$  (en voltios) es

$$(223) \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}.$$

PROBLEMA 12.35. Un circuito  $RL$  tiene una *fem* de 5 voltios, una resistencia de 50 ohmios, una inductancia de 1 henrio y no tiene corriente inicial. Encuentre la corriente de estado estacionario, i.e., cuando  $t \rightarrow \infty$ .

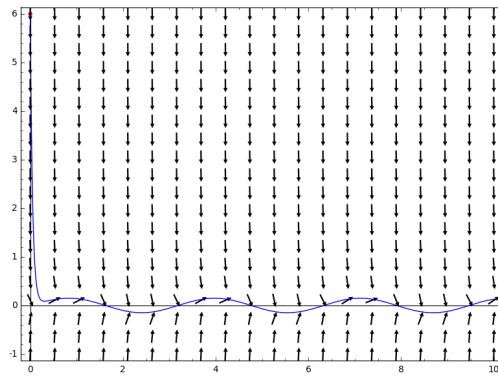
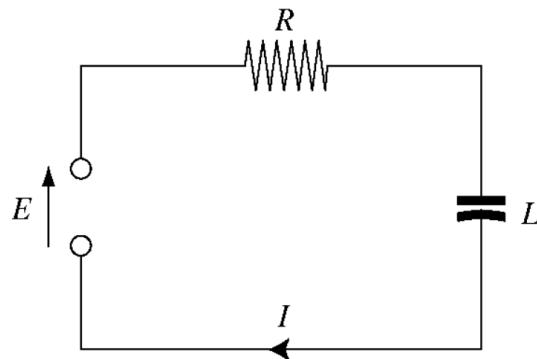
Para un circuito  $RC$  consistente en una resistencia, una capacidad  $C$  (en faradios), una *fem* y sin inductancia (fig. 3.5), la ecuación que gobierna la cantidad de carga eléctrica  $q$  (en coulombios) sobre el capacitor es

$$(224) \quad \frac{dq}{dt} + \frac{1}{R \cdot C}q = \frac{E}{R}.$$

La relación entre  $q$  e  $I$  es

$$(225) \quad I = \frac{dq}{dt}.$$

PROBLEMA 12.36. Un circuito  $RC$  tiene una *fem* dada por  $400\cos(2t)$ , una resistencia de 100 ohms y una capacitancia de  $1/100$  faradios. No existe carga



inicial en el capacitor. Encuentre la corriente del circuito en función del tiempo, y determine su comportamiento asintótico.

**PROBLEMA 12.37.** Un circuito  $RL$  tiene una *fem* (en voltios) dada por  $3\sin(2t)$ , una resistencia de 10 ohmios, una inductancia de 0.5 henrios y una corriente inicial de 6 amperios.

Encuentre la corriente de estado estacionario.

## Capítulo 13

# Ecuaciones de Orden Superior

### 1. Ecuaciones Diferenciales Lineales

Una ec. dif. lineal de  $n$ -ésimo orden tiene la forma

$$(226) \quad b_n(x)y^{(n)} + \cdots + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x)$$

donde  $g(x)$  y los coeficientes  $b_j(x)$  dependen sólo de  $x$ .

Si  $g(x) \equiv 0$ , diremos que (226) es *homogénea*.<sup>1</sup> También diremos que es de *coeficientes constantes* si cada  $b_j(x)$  es precisamente una constante.

**TEOREMA 13.1.** Consideremos el problema de valor inicial dado por (226) y  $n$  condiciones iniciales dadas

$$(227) \quad y(x_0) = c_0, y'(x_0) = c_1, \dots, y^{(n-1)} = c_{n-1}.$$

Si  $g(x)$  y  $b_j(x), j = 0, 1, \dots, n$  son continuas en algún intervalo  $\mathcal{I}$  que contiene a  $x_0$  y si  $b_n(x) \neq 0$  en  $\mathcal{I}$ , entonces el problema de valor inicial dado por (226) y (227) tiene una única solución definida a través de  $\mathcal{I}$ .

Cuando las condiciones en  $b_n(x)$  en el teorema 13.1 se satisfacen, podemos dividir (226) y obtenemos

$$(228) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = \phi(x)$$

donde

$$a_j(x) = \frac{b_j(x)}{b_n(x)}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

y  $\phi(x) = \frac{g(x)}{b_n(x)}$ .

Definimos el operador diferencial  $L(y)$  por

$$(229) \quad L(y) \equiv y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y$$

donde  $a_i(x), i = 0, 1, \dots, n-1$ , son continuas en un intervalo de interés.

Entonces (228) puede reescribirse como

$$(230) \quad L(y) = \phi(x),$$

y en particular, una ec. dif. lineal homogénea se puede reescribir como

$$(231) \quad L(y) = 0$$

<sup>1</sup>Observe que es homogénea en un sentido diferente a la sección previa;

### 1.1. Soluciones Linealmente Independientes.

Un conjunto de funciones

$$\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$$

es *linealmente independiente* en  $a \leq x \leq b$  si existe un conjunto de constantes

$$\{c_1, \dots, c_n\}$$

*no todas iguales a cero* (es decir, al menos una de estas debe ser diferente de cero) tales que

$$(232) \quad c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x) \equiv 0$$

en  $a \leq x \leq b$ .

PROBLEMA 13.1. El conjunto

$$\{x, 5x, 1, \sin(x)\}$$

es linealmente dependiente en  $\mathbb{R}$  ya que con las constantes

$$c_1 = -5, c_2 = 1, c_3 = 0, c_4 = 0,$$

se satisface (232):

$$-5 \cdot x + 1 \cdot 5x + 0 \cdot 1 + 0 \cdot \sin(x) = 0.$$

OBSERVACIÓN 13.1. El conjunto

$$c_1 = \dots = c_n = 0$$

siempre resuelve (232). De hecho, *si es la única solución* diremos que  $\{y_i(x)\}_{i=1,\dots,n}$  es *linealmente independiente*.

La ec. dif. lineal homogénea de orden  $n$   $L(y) = 0$  siempre tiene  $n$  soluciones linealmente independientes. Si  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  representan tales soluciones, entonces la solución general de  $L(y) = 0$  es

$$(233) \quad y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

donde  $c_1, \dots, c_n$  son constantes arbitrarias.

1.2. El Wronskiano. El *wronskiano* de un conjunto de funciones

$$\{z_1(x), \dots, z_n(x)\}$$

en el intervalo  $a \leq x \leq b$ , (que tengan al menos  $n - 1$  derivadas en dicho intervalo) es el determinante

$$W(z_1, \dots, z_n) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z'_1 & z'_2 & \cdots & z'_n \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \cdots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

TEOREMA 13.2. 1. Si el Wronskiano de un conjunto de  $n$  funciones definidas en un intervalo  $a \leq x \leq b$  es diferente de cero, para al menos en un punto en este intervalo, entonces el conjunto de funciones es linealmente independiente.

2. Si el Wronskiano es idénticamente cero en dicho intervalo y cada uno de las funciones es una solución de la misma ecuación diferencial, entonces el conjunto de funciones es linealmente dependiente.

## 2. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

**OBSERVACIÓN 13.2.** El teorema 13.2 no es concluyente cuando el wronskiano es idénticamente cero, pero las funciones no son soluciones de una misma ecuación diferencial.

**1.3. Ecuaciones No Homogéneas.** Sea  $y_p$  cualquier solución particular de la ecuación (230) y  $y_h$  la solución *general* de la ecuación homogénea asociada  $L(y) = 0$ , (a  $y_h$  se le llama solución complementaria).

TEOREMA 13.3. *La solución general de la ecuación  $L(y) = \phi(x)$  es  $y = y_p + y_h$ .*

### 1.4. Ejemplos.

PROBLEMA 13.2. ■ Encuentre el wronskiano de  $\{e^x, e^{-x}\}$ .  
 ■ Determine si el conjunto es linealmente independiente en  $(-\infty, +\infty)$ .  
 ■ Verifique directamente la definición.

PROBLEMA 13.3. ■ Encuentre el wronskiano de  $\{\sin(3x), \cos(3x)\}$ .  
 ■ Determine si el conjunto es linealmente independiente en  $(-\infty, +\infty)$ .  
 ■ Verifique directamente la definición.

PROBLEMA 13.4. ■ Encuentre el wronskiano de  $\{x, x^2, x^3\}$ .  
 ■ Determine si el conjunto es linealmente independiente en  $(-\infty, +\infty)$ .  
 ■ Verifique directamente la definición.

PROBLEMA 13.5. ■ Encuentre el wronskiano de  $\{1 - x, 1 + x, 1 - 3x\}$ .  
 ■ Verifique directamente si el linealmente independiente a partir de la definición.  
 ■ Realice nuevamente el ejercicio, sabiendo que las funciones son solución de la ecuación  $y'' = 0$ .

## 2. Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes

### 2.1. La ecuación Característica.

Para la ec. dif.

$$(234) \quad y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

con  $a_1, a_0$  constantes, asociaremos la ec. algebráica

$$(235) \quad \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

la cual se conoce como *ecuación característica* de (234).

PROBLEMA 13.6. La ecuación característica de

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

es

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0;$$

mientras que la ecuación característica de

$$y'' - 2y' + y = 0$$

es

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Toda ecuación característica se puede factorizar de la siguiente manera

$$(236) \quad (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0.$$

**2.2. La Solución General.** La solución general de (234) se obtienen a partir de las raíces de (236); consideraremos los siguientes 3 casos.

**2.3. Caso 1.**  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2..$

$$(237) \quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Si  $\lambda_2 = -\lambda_1$ , (237) se puede reescribir como

$$y = k_1 \cosh(\lambda_1 x) + k_2 \sinh(\lambda_1 x).$$

PROBLEMA 13.7. Resuelva

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

**2.4. Caso 2.**  $\lambda = a \pm ib \in \mathbb{C}, b \neq 0..$  En este caso, necesariamente  $\lambda_2 = a - ib$ ; y la solución esta dada por

$$(238) \quad y = d_1 e^{(a+ib)x} + d_2 e^{(a-ib)x};$$

que es algebraicamente equivalente a

$$(239) \quad y = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx).$$

PROBLEMA 13.8. Resuelva

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 2, y'(0) = 1 \end{cases}$$

**2.5. Caso 3.**  $\lambda_1 = \lambda_2..$

$$(240) \quad y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}.$$

PROBLEMA 13.9. Resuelva

$$\begin{cases} 100 \frac{d^2 u}{dt^2} - 20 \frac{du}{dt} + u = 0 \\ u(0) = 2, u'(0) = 1 \end{cases}$$

PROBLEMA 13.10. Resuelva

$$y'' - 7y' = 0.$$

PROBLEMA 13.11. Resuelva

$$y'' - 5y = 0.$$

PROBLEMA 13.12. Vuelva a escribir el problema 13.11 en términos de funciones hiperbólicas.

PROBLEMA 13.13. Resuelva

$$\ddot{y} + 10\dot{y} + 21y = 0.$$

PROBLEMA 13.14. Resuelva

$$y'' + 4y = 0.$$

### 3. Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de $n$ -ésimo Orden con Coeficientes Constantes

La ecuación característica de la ecuación diferencial

$$(241) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

con coeficientes constantes es

$$(242) \quad \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

La ecuación característica de

$$y^{(4)} - 3y''' + 2y'' - y = 0$$

es

$$\lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 - 1 = 0.$$

**3.1. La solución general.** Si las soluciones de la ecuación característica

$$\lambda_1, \dots, \lambda_n$$

son todas distintas, la solución es

$$(243) \quad y = c_1e^{\lambda_1x} + \dots + c_ne^{\lambda_nx}.$$

Diremos que una raíz  $\lambda_k$  tiene multiplicidad  $p$  si  $(\lambda - \lambda_k)^p$  es factor de la ecuación característica, pero  $(\lambda - \lambda_k)^{p+1}$  no.

En este caso, podemos asociar  $p$  soluciones linealmente independiente con  $\lambda_k$ :

$$e^{\lambda_kx}, xe^{\lambda_kx}, \dots, x^{p-1}e^{\lambda_kx}.$$

#### 3.2. Ejemplos.

PROBLEMA 13.15. Resuelva

$$\begin{cases} y''' + y' = 0 \\ y(0) = 3, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \end{cases}$$

PROBLEMA 13.16. Resuelva

$$\begin{cases} y^{(4)} - 2y^{(3)} + 6y^{(2)} - 10y^{(1)} + 5y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 0. \end{cases}$$

#### 3.3. Ejemplos.

PROBLEMA 13.17. Resuelva

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

PROBLEMA 13.18. Resuelva

$$y^{(4)} - 9y'' + 20y = 0.$$

PROBLEMA 13.19. Resuelva

$$y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0.$$

PROBLEMA 13.20. Resuelva

$$y^{(4)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0.$$

PROBLEMA 13.21. Resuelva

$$\frac{d^5P}{dt^5} - \frac{d^4P}{dt^4} - 2\frac{d^3P}{dt^3} + 2\frac{d^2P}{dt^2} + \frac{dP}{dt} - P = 0.$$

#### 4. Método de Coeficientes Indeterminados

Por el teorema 13.3, la solución de  $L(y) = 0$  está dada por la solución particular  $y_p$  más la solución general  $y_h$ , la cuál es la solución de la ecuación lineal homogénea  $L(y) = 0$ .

En esta sección, aprenderemos a obtener  $y_p$ , una vez que  $y_h$  es conocida, a través del *coeficientes indeterminados*.

##### 4.1. Forma simple del método.

OBSERVACIÓN 13.3. Para aplicar este método a la ecuación diferencial  $L(y) = \phi(x)$ ,  $\phi$  y *TODAS sus derivadas* deben estar generadas por un conjunto *finito* de funciones linealmente independientes

$$\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}.$$

En ese caso, comenzaremos suponiendo que  $y_p(x)$  es una combinación lineal de  $y_1(x), \dots, y_n(x)$ :

$$y_p(x) = A_1 y_1(x) + \dots + A_n y_n(x)$$

donde  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son constantes.

A continuación, revisaremos algunos casos comunes, en los que podemos aplicar dicho método.

**4.2. Caso  $\phi(x) = p_{n(x)}$ .** Si suponemos que  $\phi(x)$  es un polinomio de grado  $n$ , entonces

$$(244) \quad y_p(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0.$$

Recordemos que la solución general de la ecuación  $y'' - y' - 2y = 0$  está dada por...

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

PROBLEMA 13.22. Resuelva

$$y'' - y' - 2y = 4x^2$$

**4.3. Caso  $\phi(x) = k e^{\alpha x}$ .** Si suponemos que  $\phi(x)$  es una función exponencial, entonces

$$(245) \quad y_p(x) = A e^{\alpha x}.$$

PROBLEMA 13.23. Resuelva

$$y'' - y' - 2y = e^{3x}.$$

**4.4. Caso  $\phi(x) = k e^{\alpha x}$ .** Si suponemos que  $\phi(x)$  es una función exponencial, entonces

$$(246) \quad y_p(x) = A e^{\alpha x}.$$

**4.5. Caso  $\phi(x) = k_1 \sin(\beta x) + k_2 \cos(\beta x)$ .** Si suponemos que  $\phi(x)$  es una función senoidal, entonces

$$(247) \quad y_p(x) = A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)$$

PROBLEMA 13.24. Resuelva

$$y'' - y' - 2y = \sin(2x).$$

**4.6. Generalizaciones.** Si  $\phi(x) = e^{\alpha x} p_n(x)$ , entonces

$$(248) \quad y_p = e^{\alpha x} (A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0).$$

PROBLEMA 13.25. Resolver

$$y'' = e^{-x} x^2$$

Si  $\phi(x) = k e^{\alpha x} \sin(\beta x)$  o  $\phi(x) = k e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ , entonces

$$(249) \quad y_p(x) = A_0 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + B_0 e^{\alpha x} \cos(\beta x).$$

PROBLEMA 13.26. Resuelva

$$y'' = e^{-x} \cos(3x)$$

Aun más, si  $\phi(x) = k e^{\alpha x} \sin(\beta x) p_n(x)$  o  $\phi(x) = k e^{\alpha x} \cos(\beta x) p_n(x)$ , entonces

$$(250) \quad \begin{aligned} y_p(x) = & A_0 e^{\alpha x} \sin(\beta x) (A_n x^n + \dots + A_1 x + A_0) \\ & + B_0 e^{\alpha x} \cos(\beta x) (B_n x^n + \dots + B_1 x + B_0). \end{aligned}$$

OBSERVACIÓN 13.4. Si cualquier término de  $y_p$ , salvo por los términos constantes, es también un término de  $y_h$ , entonces  $y_p$  debe ser modificada multiplicandola por  $x^m$ .

Aquí  $m$  es el entero positivo más pequeño tal que el producto  $x^m y_p$  no tiene términos en común con  $y_h$ .

PROBLEMA 13.27. Resuelve la ecuación

$$y'' - y' - 2y = \frac{1}{2} e^{-x}$$

OBSERVACIÓN 13.5. Si  $\phi(x)$  no tiene alguna de las formas anteriores o la ecuación diferencial no tiene coeficientes constantes, este método no se puede aplicar.

**4.7. Principio de superposición.** Consideremos la ecuación diferencial

$$(251) \quad L[y] = \phi_1(x) + \phi_2(x)$$

donde  $L$  es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes de la forma

$$L[y] = y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$$

Digamos que  $y_h(x)$  es la solución de la ecuación homogénea asociada, es decir,

$$L[y_h] = 0,$$

mientras que  $y_{p1}(x)$  resuelve

$$L[y_{p1}] = \phi_1(x)$$

y  $y_{p2}(x)$ ,

$$L[y_{p2}] = \phi_2(x).$$

Entonces  $y(x) = y_h(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$  resuelve la ecuación

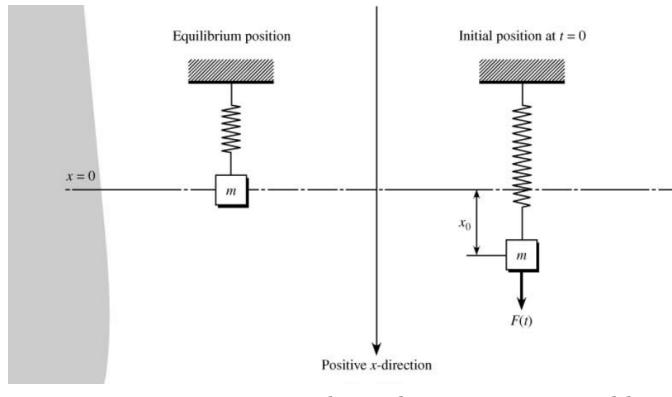
$$L[y] = \phi_1(x) + \phi_2(x).$$

PROBLEMA 13.28. Resuelve la ecuación

$$y'' - y' - 2y = 2e^{3x} - 3t^2$$

## 5. Aplicaciones

### 5.1. Resortes.



img030601.png: 0x0

pixel, 300dpi, 0.00x0.00 cm, bb=

## 5.2. Resortes.

**5.3. Ley de Hooke.** La fuerza restauradora  $F$  de un resorte es igual y opuesta a las fuerzas aplicadas al mismo y proporcional a la extensión (contracción)  $l$  del resorte de la fuerza aplicada, es decir,  $F = -kl$ , donde  $k$  indica la constante de proporcionalidad, generalmente llamada constante del resorte.

A partir de la segunda ley de Newton, tenemos que

$$m\ddot{x} = -kx - ax + F(t),$$

o de manera equivalente

$$(252) \quad \ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m},$$

donde  $a, k$  son constantes positivas de proporcionalidad;  $F(t)$  es una fuerza externa; y sujeta a condiciones iniciales

$$(253) \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0.$$

PROBLEMA 13.29. Una masa de  $2kg$  se suspende de un resorte con una constante conocida de  $10N/m$ , y se le permite llegar a una posición de reposo. Luego se le pone en movimiento dándole una velocidad inicial de  $150cm/seg$ . Encuentre una expresión para el movimiento de la masa, suponiendo que no hay resistencia del aire.

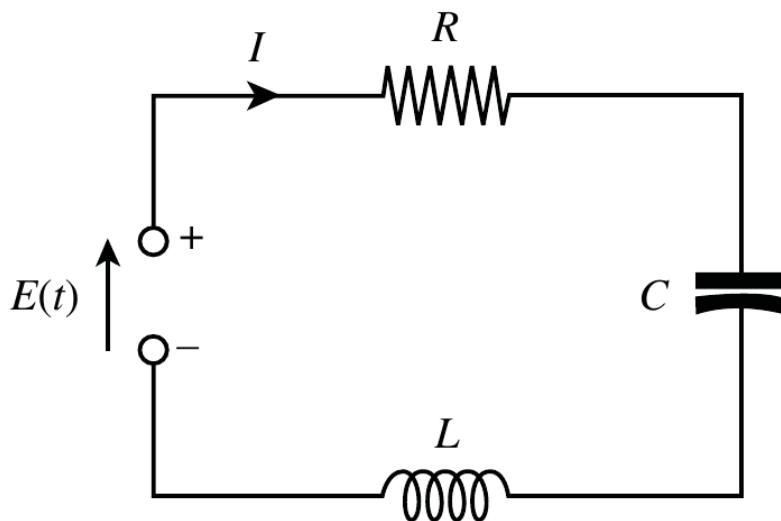
PROBLEMA 13.30. Encuentre la frecuencia circular; la frecuencia natural y el periodo el oscilador armónico simple del problema 13.29.

## 5.4. Circuitos eléctricos.

- Cantidad de corriente  $I$  (en amperios)
- Resistencia  $R$  (en ohmios)
- Inductor  $L$  (en henrios)
- Fuerza electromotriz (abreviado fem)  $E$  (en voltios)
- Capacidad  $C$  (en faradios)

La ley del bucle de Kirchhoff La suma algebraica de las caídas de voltaje en un circuito eléctrico cerrado simple es cero.

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}q - E(t) = 0$$



$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{1}{L} E(t)$$

$$q(0) = q_0$$

$$I(0) = \left. \frac{dq}{dt} \right|_{t=0} = I_0$$

PROBLEMA 13.31. Un circuito RCL conectado en serie tiene  $R = 180$  ohmios,  $C = 1/280$  faradio,  $L = 20$  henries, y una aplicada voltaje  $E(t) = 10 \sin t$ .

Suponiendo que no hay carga inicial en el capacitor, sino una corriente inicial de 1 amperio en  $t = 0$  cuando se aplica la tensión por primera vez, encuentre la carga subsiguiente en el capacitor.

## 6. Variación de parametros

La técnica de variación de parametros es otra forma de encontrar una solución particular de la ecuación diferencial:

$$(254) \quad L(y) = \phi(x)$$

una vez que conocemos la solución de  $L(y) = 0$ .

Recordemos que la solución de  $L(y) = 0$  está dada por

$$(255) \quad y_h(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

**6.1. El Método.** Una solución particular de  $L(y) = \phi(x)$  tiene la forma

$$(256) \quad y_p(x) = \nu_1(x) \cdot y_1(x) + \dots + \nu_n(x) \cdot y_n(x)$$

donde  $y_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  están dadas por (13.33) y  $\nu_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  son funciones por determinar.

Para esto, primero resolvemos el siguiente sistema

$$(257) \quad \begin{cases} \nu'_1 y_1 + \dots + \nu'_n y_n &= 0 \\ \nu'_1 y'_1 + \dots + \nu'_n y'_n &= 0 \\ \dots \\ \nu'_1 y_1^{(n-1)} + \dots + \nu'_n y_n^{(n-1)} &= \phi(x) \end{cases}$$

Posteriormente, integramos cada  $\nu'_i(x)$  para obtener  $\nu(x)$ .

Como  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  son soluciones linealmente independientes de la misma ecuación  $L(y) = 0$ , su wronskiano nunca se anula (teorema 13.2), y esto significa que el sistema (257) tiene determinante siempre diferente de cero, y por tanto se puede resolver de manera única para  $\nu'_1(x), \dots, \nu'_n(x)$ .

**OBSERVACIÓN 13.6.** El método de variación de parámetros puede ser aplicado a todas las ecuaciones diferenciales lineales, y por tanto tiene un mayor alcance que el método de coeficientes indeterminados.

Sin embargo, si ambos métodos son aplicables, es preferible el de coeficientes indeterminados por ser más eficiente.

Además, en algunos casos es imposible obtener una forma cerrada de la integral de  $\nu'_i(x)$ , y otros métodos deben ser aplicados.

## 6.2. Ejemplos.

PROBLEMA 13.32. Resuelva  $y''' + y' = \sec(x)$

PROBLEMA 13.33. Resuelva  $y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}$

PROBLEMA 13.34. Resuelva  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

## 6.3. Ejemplos de valor inicial.

PROBLEMA 13.35. Resuelva

$$y'' - y' - 2y = 4x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

PROBLEMA 13.36. Resuelva

$$\begin{cases} y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0, \\ y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 0, \quad y''(\pi) = 1. \end{cases}$$

## Capítulo 14

# Transformada de Laplace

### 1. La Transformada de Laplace

**1.1. Definición.** Sea  $f(x)$  una función definida en  $0 \leq x < \infty$  y sea  $s$  una variable arbitraria. La *Transformada de Laplace* de  $f(x)$ , denotada ya sea por  $\mathcal{L}\{f(x)\}$  o por  $F(s)$  está dada por

$$(258) \quad \mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx,$$

siempre y cuando dicha integral converja.

La convergencia ocurre cuando el límite

$$(259) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-sx} f(x) dx$$

existe.

- OBSERVACIÓN 14.1.
1. Si el límite anterior no existe, la integral impropia diverge y  $f(x)$  no tiene transformada de Laplace.
  2. Cuando evaluamos la integral en (259), la variable  $s$  deberá tratarse como una constante debido a que la integración es respecto de  $x$ .

En esta sección usaremos la convención de que una función se denota por minúsculas, mientras que su transformada se denotará por la correspondiente mayúscula:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s), \mathcal{L}\{g(x)\} = G(s).$$

De manera similar,  $a, c_1, c_2$  serán constantes arbitrarias.

### 1.2. Ejemplos.

PROBLEMA 14.1. Encuentre la Transformada de Laplace de  $f(x) = 1$ .

PROBLEMA 14.2. Encuentre la Transformada de Laplace

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

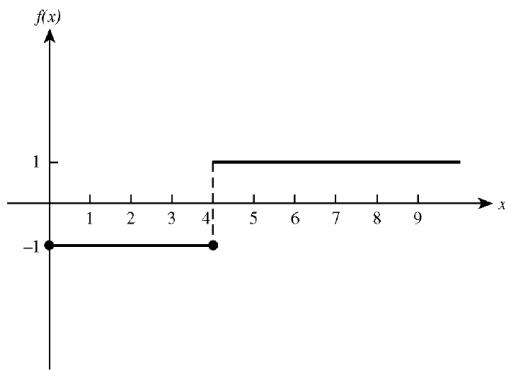
Algunas fórmulas básicas

$$(260) \quad \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \text{ n natural}$$

$$(261) \quad \mathcal{L}\{\sin(kt)\} = \frac{k}{s^2 + k^2}$$

$$(262) \quad \mathcal{L}\{\cos(kt)\} = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

$$(263) \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$



Linealidad

$$(PTL1) \quad \mathcal{L}\{c_1f(x) + c_2g(x)\} = c_1F(s) + c_2G(s)$$

PROBLEMA 14.3. Encuentre la Transformada de Laplace de  $f(x) = 3 + 2x^2$ .

PROBLEMA 14.4. Encuentre la Transformada de Laplace de

$$f(x) = 5 \sin(3x) - 17e^{-2x}$$

PROBLEMA 14.5. Encuentre la Transformada de Laplace de

$$f(x) = 2 \sin(x) + 3 \cos(2x).$$

PROBLEMA 14.6. Encuentre la Transformada de Laplace de

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 4.$$

### 1.3. Propiedades.

#### 1.4. Propiedades de la Transformada de Laplace.

$$(PTL2) \quad \mathcal{L}\{e^{ax}f(x)\} = F(s - a)$$

$$(PTL3) \quad \mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(F(s))$$

PROBLEMA 14.7. Encuentre la Transformada de Laplace de

$$g(x) = xe^{4x}$$

$$(264) \quad \mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$$

PROBLEMA 14.8. Encuentre la Transformada de Laplace de

$$g(x) = e^{-2x} \sin(5x)$$

PROBLEMA 14.9. Encuentre la Transformada de Laplace de

$$g(x) = x \cos(\sqrt{7}x).$$

PROBLEMA 14.10. Encuentre la Transformada de Laplace de

$$g(x) = e^{-x} x \cos(2x).$$

## 2. Transformada Inversa de Laplace

**2.1. Definición.** Una *transformada inversa de Laplace* de  $F(s)$ , denotada por  $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ , es una función  $f(x)$  tal que

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s).$$

La manera más práctica de encontrar las inversas es identificar, en una tabla de transformadas, la función  $F(s)$  como una transformada de Laplace de una función  $f(x)$ .

Generalmente, esto se hace manipulando algebraicamente  $F(s)$ .

**2.2. Manipulación de denominadores.** Para poder encontrar transformadas inversas de Laplace, necesitaremos manipular expresiones algebraicas.

Métodos algebraicos Especialmente, necesitaremos dos técnicas:

- Complemento de cuadrados.
- Fracciones parciales.

Complemento de cuadrados Si  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , entonces

$$p(x) = a(x - h)^2 + k,$$

donde  $h = -\frac{b}{2a}$  y  $k = p(h)$ .

Fracciones parciales Otro método útil que se recomienda repasar es la descomposición en fracciones parciales.

Linealidad

PROPIEDAD 14.1. Si  $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ,  $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$  y  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F(s) + c_2G(s)\} = c_1f(x) + c_2g(x).$$

### 2.3. Ejemplos.

PROBLEMA 14.11. Encontrar  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$

PROBLEMA 14.12. Encontrar  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-8}\right\}$

PROBLEMA 14.13. Encontrar  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6}\right\}$

PROBLEMA 14.14. Encontrar  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s}{(s^2+1)^2}\right\}$

PROBLEMA 14.15. Encontrar  $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-9}\right\}$

## 3. E.D. Lineales con Coeficientes Constantes

**3.1. Transformadas de Laplace de Derivadas.** Denotaremos  $\mathcal{L}\{y(x)\}$  por  $Y(s)$ . Bajo condiciones muy generales, la transformada de Laplace de la  $n$ -ésima derivada,  $n = 1, 2, 3, \dots$  de  $y(x)$  está dada por

$$(265) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dx^n}\right\} &= s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots \\ &\quad - s^{n-2}y''(0) - \dots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Si las condiciones iniciales en  $y(x)$  en  $x = 0$  está dada por

$$(266) \quad y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

entonces (267) se puede reescribir como

$$(267) \quad \mathcal{L} \left\{ \frac{d^n y}{dx^n} \right\} = s^n Y(s) - s^{n-1} c_0 - s^{n-2} c_1 - \dots - s c_{n-2} - c_{n-1}.$$

### 3.2. Casos Especiales.

$$(268) \quad \mathcal{L} \{y'(x)\} = sY(s) - c_0$$

$$(269) \quad \mathcal{L} \{y''(x)\} = s^2 Y(s) - c_0 s - c_1.$$

### 3.3. Ejemplos.

PROBLEMA 14.16. Resuelva

$$\begin{cases} y' - 5y = 0; \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

PROBLEMA 14.17. Resuelva

$$\begin{cases} y' - 5y = e^{5x}; \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 14.18. Resuelva

$$\begin{cases} y' + y = \sin(x); \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

PROBLEMA 14.19. Resuelva

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0; \\ y(0) = 2, y'(0) = 2. \end{cases}$$

PROBLEMA 14.20. Resuelva

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 4x^2; \\ y(0) = 1, y'(0) = 4. \end{cases}$$

PROBLEMA 14.21. Resuelva

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 4y = 0; \\ y(0) = 1, y'(0) = 5. \end{cases}$$

## 4. Transformada de funciones discontinuas

### 4.1. Convolución.

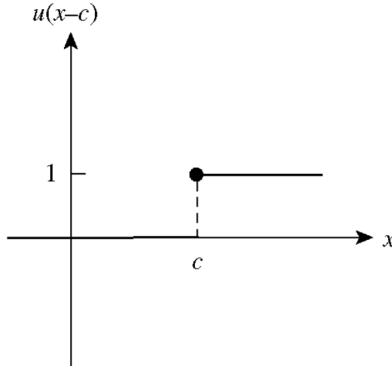


FIGURA 1. Función Escalón  
 $u(x - c)$

**4.2. Convolución.** La convolución de dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  se define como

$$(270) \quad f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt.$$

TEOREMA 14.1.

$$(271) \quad f(x) * g(x) = g(x) * f(x)$$

$$(272) \quad f(x) * (g(x) + h(x)) = f(x) * g(x) + f(x) * h(x).$$

TEOREMA 14.2 (Teorema de Convolución). *Si  $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$  y  $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$ , entonces*

$$\mathcal{L}\{f(x) * g(x)\} = F(s)G(s).$$

De los teoremas anteriores, obtenemos

$$(273) \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(x) * g(x) = g(x) * f(x).$$

**4.3. Función Escalón.** La función escalón se define como

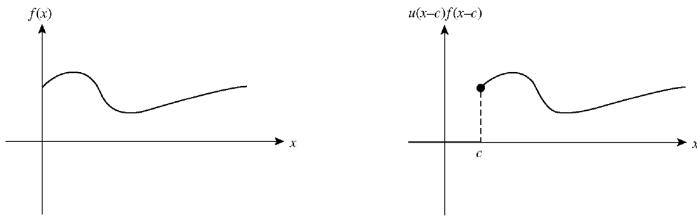
$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Al hacer un cambio de coordenadas  $x' = x - c$ , obtenemos

$$u(x - c) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c. \end{cases}$$

TEOREMA 14.3.

$$\mathcal{L}\{u(x - c)\} = \frac{1}{s}e^{-cs}.$$



**4.4. Traslaciones.** Para cualquier función  $f(x)$ , definida para  $x \geq 0$ , obtenemos

$$u(x-c)f(x-c) = \begin{cases} 0 & x < c \\ f(x-c) & x \geq c. \end{cases}$$

TEOREMA 14.4. Si  $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ , entonces

$$\mathcal{L}\{u(x-c)f(x-c)\} = e^{-cs}F(s).$$

De manera inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\} = u(x-c)f(x-c).$$

#### 4.5. Ejemplos.

PROBLEMA 14.22. Sean  $f(x) = e^{3x}$  y  $g(x) = e^{2x}$ .

1. Calcule  $f(x) * g(x)$ ;
2. calcule  $g(x) * f(x)$ ;
3. verifique el teorema 14.1.

PROBLEMA 14.23. Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 5s + 6}\right\}$$

por convoluciones.

PROBLEMA 14.24. Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2 - 1}\right\}$$

por convoluciones.

PROBLEMA 14.25. Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + 4)}\right\}$$

por convoluciones.

PROBLEMA 14.26. Encuentre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$$

por convoluciones.

PROBLEMA 14.27. Encuentre  $\mathcal{L}\{g(x)\}$  si

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ (x-4)^2 & x \geq 4. \end{cases}$$

PROBLEMA 14.28. Encuentre  $\mathcal{L}\{g(x)\}$  si

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ x^2 & x \geq 4. \end{cases}$$



## Capítulo 15

# Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

### 1. Proyecto final: Ecuaciones diferenciales

**Teoría.** Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$x'(t) = cx(t).$$

Esta ecuación describe un modelo donde la razón de crecimiento instantáneo  $x'$  es proporcional al estado del sistema, en un momento determinado. Aplicaciones de este modelo incluyen:

1. Crecimiento poblacional;
2. decaimiento radioactivo;
3. la Ley de Newton, para la temperatura de un cuerpo; y
4. interés compuesto.

De hecho, si conocemos la condición *inicial*, es decir, el valor del sistema en el tiempo  $t = 0$ , podemos encontrar una *única solución al problema*.

**TEOREMA 15.1.** *La única solución continuamente diferenciable a la ecuación diferencial*

$$x' = cx,$$

*con condición inicial*  $x(0) = x_0$  *es*

$$(274) \quad x(t) = e^{tc}x_0.$$

Es fácil comprobar que (274) es una solución derivando de manera usual; que esta sea la *única solución* con derivada continua es resultado del *teorema fundamental de las ecuaciones diferenciales ordinarias*.

Sin embargo, este modelo solo describe un sistema con una cantidad que evoluciona con el tiempo, ¿cómo modelar un sistema con más cantidades?

Podemos pensar que existen cantidades  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  de manera que la razón de cambio de cada una sea *combinación lineal* de cada una de los estados del sistema, es decir, para  $k = 1, \dots, n$ :

$$x'_k(t) = a_{k,1}x_1(t) + \dots + a_{k,n}x_n(t).$$

Esto es una manera de generalizar el hecho de que para una sola cantidad, su razón de cambio instantánea sea *proporcional*.

De manera matricial, podemos escribir este sistema como

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Si definimos

$$\begin{cases} x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \\ x'(t) = \begin{bmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix} \\ A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \end{cases}$$

el sistema anterior se puede reescribir como

$$x'(t) = Ax(t).$$

Note como se parece este sistema al de una sola variable. De hecho, así como podemos definir  $e^a$  para  $a \in \mathbb{R}$ , es posible definir  $e^A$ , donde  $A$  es una matriz  $n \times n$ . Para esto, necesitamos la siguiente definición de la función exponencial.

DEFINICIÓN 15.1.

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

Esta definición tiene sentido para matrices porque  $A^k = A \cdots A$  un número  $k$  de veces.

TEOREMA 15.2. *La única solución de la ecuación diferencial vectorial*

$$x'(t) = Ax(t),$$

para  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  para cada  $t \in \mathbb{R}$  y  $A \in M_n$ , con condición inicial

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{n,0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

es

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Sin embargo, calcular la  $n$ -ésima potencia de una matriz puede ser demasiado complicado... excepto para matrices diagonales.

PROPIEDAD 15.1. *Si*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal, entonces

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & & \\ 0 & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración se puede hacer por inducción.  $\square$

Supongamos que  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una transformación lineal, cuya representación matricial  $A$  (en la base estandar  $E$ ) es diagonalizable y  $P$  es la matriz de paso de la base  $F$  de vectores propios a la base  $E$ . Entonces si  $D$  es la matriz que representa la misma transformación en la base  $F$ , sabemos que

$$A = PDP^{-1}.$$

Por inducción, no es difícil demostrar que

$$A^n = PD^nP^{-1},$$

y por tanto, multiplicando por un escalar  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$tA^n = P(tD^n)P^{-1}.$$

Antes de continuar, recordemos que por propiedades distributivas de las matrices

$$R(M + N)S = RMS + RNS,$$

o de manera más generalizar

$$\sum (RM_k S) = R \left( \sum M_k \right) S.$$

Entonces

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k \geq 0} \frac{(tA)^k}{k!} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(P(tD^n)P^{-1})^k}{k!} \\ &= P \left( \sum_{k \geq 0} \frac{(tD^n)^k}{k!} \right) P^{-1} \\ &= Pe^{tD}P^{-1}. \end{aligned}$$

Basta entonces encontrar  $e^{tD}$ . Pero como vimos, calcular las potencias de  $D$  no es difícil.

$$\begin{aligned}
e^{tD} &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (tD)^k \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} (t\lambda_1)^k & 0 \\ 0 & (t\lambda_2)^k \\ & \ddots & \ddots & (t\lambda_n)^k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (t\lambda_1)^k & 0 & & & \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (t\lambda_n)^k \\ 0 & \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (t\lambda_2)^k & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (t\lambda_n)^k \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & & & \\ 0 & e^{t\lambda_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

¡Listo!

### Ejemplos.

PROBLEMA 15.1. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

con condiciones iniciales

$$x(0) = 0, y(0) = 3.$$

SOLUCIÓN. Rescribimos  $x = x_1, y = x_2$  y podemos escribir el sistema de forma matricial, en la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Usando **WxMaxima**, podemos encontrar los valores y vectores propios.

```

(%i1) A: matrix(
      [-1,0],
      [1,2]
    );
(%o1)  ⎛ -1   0 ⎞
         ⎜ ⎠
         ⎝ 1   2 ⎠
(%i2) eigenvectors(%);
(%o2) [[[[-1, 2], [1, 1]], [[[1, -1/3]]], [[0, 1]]]]

```

Esto quiere decir que  $\lambda_1 = -1$  es un valor propio con vector propio

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

mientras que  $\lambda_2 = 2$  también lo es, con vector propio

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

OBSERVACIÓN 15.1. Como tenemos dos vectores propios en un espacio de dimensión dos, basta verificar que son linealmente independientes, para saber que forman una base. Para comprobar que son linealmente independientes, formamos una matriz que tenga como columnas a estos vectores y verificamos que esta matriz es invertible.

```
(%i4) P: matrix(
    [1,0],
    [-1/3,1]
);
(%o4)  ⎛ 1   0 ⎞
      ⎝-1/3 1⎠
(%i5) determinant(%);
(%o5)  1
```

Entonces,  $F = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$  es una base de  $\mathbb{R}^2$ , de vectores propios de  $A$ . Por tanto  $A$  es diagonalizable. Como  $P$  es la matriz de cambio de la base  $F$  a la base estandar  $E$ , usamos la siguiente identidad

$$D = P^{-1}AP,$$

para encontrar la matriz diagonalizada  $D$ . Denotaremos a  $P^{-1}$  por  $Q$ .

```
(%i6) Q: invert(P);
```

$$(%o6) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i7) D:Q.A.P;
```

$$(%o7) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces, sabemos que

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix},$$

y podemos hallar  $e^{tA}$  con la ecuación

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}.$$

Podemos hacer los cálculos en WxMaxima de la siguiente manera

```
(%i8) matrix(
    [%e^(-t),0],
    [0,%e^(2*t)]
);
(%o8) 
$$\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

(%i9) P.%o8.Q;
(%o9) 
$$\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{e^{2t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

```

Es decir,

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{e^{2t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} & e^{2t} \end{bmatrix}$$

Las condiciones iniciales se pueden escribir en forma vectorial como

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

y por tanto, nuestra solución sera

$$\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{e^{2t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Realizamos los cálculos en **WxMaxima** de la siguiente manera. Primero introducimos el vector como si fuera una matriz de dos reglos y una columnas

```
(%i10) matrix(
    [0],
    [3]
);
(%o10) 
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

```

y posteriormente hacemos la multiplicación, recordando que **WxMaxima** le asigno la etiqueta **%o9** a nuestra matriz  $e^{tA}$ , y la etiqueta **%o10** a nuestro vector de condiciones iniciales.

```
(%i11) %o9.%o10;
(%o11) 
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

```

Por tanto, la solución a nuestro sistema de ecuaciones diferenciales es

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3e^{2t} \end{bmatrix}.$$

□

**Proyecto final.** Resuelva los siguientes sistema de ecuaciones diferenciales, como se hizo en el ejemplo anterior. Debe plantear de manera correcta todos los pasos, indicar los cálculos que hizo en **WxMaxima** y escribiendo de manera clara sus

conclusiones. El proyecto puede ser elaborado por equipos de a lo más tres personas, y debe ser entregado en computadora el día del examen final.<sup>1</sup>

1.

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 \\ x'_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

con condiciones iniciales  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 1$ .

2.

$$x' = Ax$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

y condiciones iniciales

$$x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.

$$x' = Ax$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

y condiciones iniciales

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ b \end{bmatrix}.$$

Para una revisión con más detalle de este tema y un repaso de álgebra lineal, puede consultar (?), capítulo 3).

## 2. Solución de Sistemas Lineales

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas  $u(x)$  y  $v(x)$ :

$$u' + u - v = 0$$

$$v' - u + v = 2$$

$$u(0) = 1$$

$$v(0) = 2$$

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas  $y(x)$  y  $z(x)$ :

$$y' + z = x$$

$$z' + 4y = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$z(0) = -1$$

---

<sup>1</sup>Para copiar el código que introduzca en **WxMaxima**, seleccione con el botón izquierdo de su ratón, el lado izquierdo del código, de manera que cambie a color azul como en la figura ?? y posteriormente presione el botón derecho, y seleccione la opción copiar.

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas  $w(x)$ ,  $y(x)$  y  $z(x)$ :

$$\begin{aligned} w' + y &= \sin x \\ y' - z &= e^x \\ z' + w + y &= 1 \end{aligned}$$

$$w(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1$$

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas  $y(x)$  y  $z(x)$ :

$$\begin{aligned} y'' + z + y &= 0 \\ z' + y' &= 0 \end{aligned}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad z(0) = 1$$

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas  $y(x)$  y  $z(x)$ :

$$\begin{aligned} z'' + y' &= \cos x \\ y'' - z &= \sin x \end{aligned}$$

$$z(0) = -1, \quad z'(0) = -1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

## Bibliografía

Cárdenas, H. (1973). *Álgebra superior.*