GITHUB.COM/JULIHOCC

ECUACIONES DIFERENCIALES Y ÁLGEBRA LINEAL

JULIHO CASTILLO COLMENARES PH.D.

Índice general

1 Ecuaciones de primer orden

1.1 Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales

1.1.1 Conceptos básicos

Definición 1.1. ▪ *Una* ecuación diferencial *es una ecuación que involucra derivadas o diferenciales de una o varias variables.*

- *Si la ecuación sólo involucra derivadas respecto a una única variable independiente, diremos que es* ordinaria. *En otro caso, que es* parcial.
- *Si la ecuación involucra derivadas de orden n, pero no de orden más alto, diremos que la propia ecuación es de* orden n.

Problema Resuelto 1.1. *Clasifica cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales enunciando su orden; sus variables dependientes e independientes; y si es ordinaria o parcial:*

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right) y = 0 \tag{1.1}$$

Solución. (i) Orden 2;

(ii) variable dependiente: y;

(iii) variable independiente: x;

(iv) ecuación ordinaria.

□

$$\frac{dx}{dy} = x^2 + y^2 \tag{1.2}$$

Solución. (i) Orden 1;

(ii) variable dependiente: x;

(iii) variable independiente: y;

(IV) ordinaria.

□

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + y^2} \tag{1.3}$$

Solución. (I) Orden 1;

(II) variable dependiente: y;

(III) variable independiente: x;

(IV) ordinaria.

□

$$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)^3 + u^4 = 1 \tag{1.4}$$

Solución. (I) Orden 2;

(II) variable dependiente: u;

(III) variable independiente: t;

(IV) ordinaria.

□

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \tag{1.5}$$

Solución. (I) Orden 2;

(II) variable dependiente: Y;

(III) variables independientes: x, t;

(IV) parcial.

□

$$\left(x^2 + 2y^2\right) dx + \left(3x^3 - 4y^2\right) dy = 0 \tag{1.6}$$

Solución. (I) Orden 1;

(II) variable dependiente: y;

(III) variable independiente: x;

(IV) ordinaria.

□

Definición 1.2. *Una constante arbitraria es un valor que es independiente de las variables involucradas en la ecuación.*

Observación 1.1. *Generalmente las denotaremos con las primeras letras del alfabeto:*

$$A, B, C, c_1, c_2, \ldots \tag{1.7}$$

Ejemplo 1.1. *En la ecuación*

$$y = x^2 + c_1 x + c_2 \tag{1.8}$$

los símbolos c_1, c_2 representan constantes arbitrarias.

Ejemplo 1.2. *La relación $y = Ae^{-4x+B}$ se puede reescribir como $y = Ce^{-4x}$. Por lo que sólo involucra una constante arbitraria.*

Observación 1.2. *Siempre reduciremos las ecuaciones al número mínimo de constantes arbitrarias, a las que llamaremos* esenciales.

1.1.2 *Soluciones de ecuaciones diferenciales*

- Una *solución de una ecuación diferencial* es una relación entre las variables que está libre de derivadas, y que satisface la ecuación diferencial en al menos un intervalo.
- Una *solución general* de una ecuación diferencial de orden n es aquella que involucra n constantes arbitrarias esenciales.
- Una *solución particular* es aquella que se obtiene de una general, sustituyendo valores específicos en las constantes arbitrarias.
- Una *solución singular* es una aquella que no se puede obtener de la solución general sólo especificando valores para las constantes arbitrarias.

Problema Resuelto 1.2. *Demuestra que $y = x^2 + c_1 x + c_2$ es una solución general de $y'' = 2$.*

Problema Resuelto 1.3. *Verifica que $y = x^2 - 3x + 2$ es una solución particular de $y'' = 2$.*

Problema Resuelto 1.4. *Muestra que La solución general de $y = xy' - y'^2$ es $y = cx - c^2$.*

Observación 1.3. *Sin embargo,* $y = \dfrac{x^2}{4}$ *es una solución que no se puede obtener sustituyendo* c*. Por tanto, es una solución particular.*

Definición 1.3. *Una solución general de orden* n *tiene* n *parámetros (constantes arbitrarias esenciales) y por tanto, geométricamente representa una* familia de curvas $n-$paramétrica.

De manera reciproca, una relación con n *constantes arbitrarias (también llamada* primitiva*) tiene asociada una ecuación diferencial de orden* n *(de la cual es solución general), llamada la* ecuación diferencial de la familia.

1.1.3 *Ejemplos de soluciones*

Para cada una de las siguientes ecuaciones, verifica si la relación indicada es solución; y en ese caso, determina si es general.

$$\begin{cases} y' - x + y = 0 \\ y = Ce^{-x} + x - 1 \end{cases} \tag{1.9}$$

Solución. (I) $y' = -Ce^{-x} + 1$

(II) $y' - x + y = (-Ce^{-x} + 1) - x + (Ce^{-x} + x - 1) = 0$

(III) C es su único parámetro.

(IV) Por tanto y es solución general.

□

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{3y^2 - x^2} \\ x^2y - y^3 = c \end{cases} \tag{1.10}$$

Solución. (I) Derivando de forma implícita obtenemos

$$x^2y' + 2xy - 3y^2y' = 0 \tag{1.11}$$

(II) Despejando y' obtenemos

$$y' = \frac{2xy}{3y^2 - x^2} \tag{1.12}$$

(III) Como C es el único parámetro, y es una solución general.

□

$$\begin{cases} \dfrac{d^2I}{dt^2} + 2\dfrac{dI}{dt} - 3I = 2\cos(t) - 4\sin(t) \\ I = c_1e^t + c_2e^{-3t} + \sin(t) \end{cases} \tag{1.13}$$

Solución. (I) $\dfrac{dI}{dt} = c_1e^t - 3c_2e^{-3t} + \cos(t)$

(II) $\dfrac{d^2I}{dt^2} = c_1e^t + 9c_2e^{-3t} - \sin(t)$

(III)

$$\left(c_1e^t + 9c_2e^{-3t} - \sin(t)\right) \tag{1.14}$$

$$+2\left(c_1e^t - 3c_2e^{-3t} + \cos(t)\right) \tag{1.15}$$

$$-3\left(c_1e^t + c_2e^{-3t} + \sin(t)\right) \tag{1.16}$$

$$= 2\cos(t) - 4\sin(t) \tag{1.17}$$

(IV) Como c_1, c_2 son parámetros, entonces I es una solución general.

□

$$\begin{cases} x^3\left(\dfrac{d^2v}{dx^2}\right)^2 = 2v\dfrac{dv}{dx} \\ v = cx^2 \end{cases} \tag{1.18}$$

Solución. (I) $\dfrac{dv}{dx} = 2cx$

(II) $\dfrac{d^2v}{dx^2} = 2c$

(III) Sustituimos en el lado izquierdo

$$x^3\,(2c)^2 = 4c^2x^3 \tag{1.19}$$

(IV) Sustituimos en el lado derecho

$$2\left(cx^2\right)(2cx) = 4c^2x^3 \tag{1.20}$$

(V) Entonces v es solución, pero como la ecuación es de grado 2 y c es el único parámetro, no es general.

□

Problema Resuelto 1.5. *Determine la solución particular de la ecuación diferencia del problema 1.13, tal que satisface las condiciones*

$$I(0) = 2 \tag{1.21}$$

$$I'(0) = -5 \tag{1.22}$$

Solución. (I) $I(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-3t} + \sin(t)$

(II) $I(0) = c_1 + c_2 = 2$

(III) $I'(t) = c_1 e^t - 3c_2 e^{-3t} + \cos(t)$

(IV) $I'(0) = c_1 - 3c_2 + 1 = -5$

(V) $c_1 - 3c_2 = -6$

(VI) $c_1 = 0, c_2 = 1$

(VII) $I = 2e^{-3t} + \sin(t)$

□

Problema Resuelto 1.6. *Mostrar que la solución de problema de valor inicial*

$$\begin{cases} Q''(t) + 4Q'(t) + 20Q(t) = 16e^{-2t} & t \geq 0 \\ Q(0) = 2, Q'(0) = 0 \end{cases} \tag{1.23}$$

is

$$Q(t) = e^{-2t}\left(1 + \sin(4t) + \cos(4t)\right) \tag{1.24}$$

Solución

$$Q'(t) = e^{-2t}\left(4\cos(4t) - 4\sin(4t)\right) - 2e^{-2t}\left(1 + \sin(4t) + \cos(4t)\right) \tag{1.25}$$

$$= e^{-2t}\left(2\cos(4t) - 6\sin(4t) - 2\right) \tag{1.26}$$

Solución

$$Q''(t) = e^{-2t}\left(-8\sin(4t) - 24\cos(4t)\right) - 2e^{-2t}\left(2\cos(4t) - 6\sin(4t) - 2\right) \tag{1.27}$$

$$= e^{-2t}\left(4\sin(4t) - 28\cos(4t) + 4\right) \tag{1.28}$$

Solución

$$Q''(t) + 4Q'(t) + 20Q(t) \tag{1.29}$$

$$= e^{-2t}\left(4\sin(4t) - 28\cos(4t) + 4\right) \tag{1.30}$$

$$+4e^{-2t}\left(2\cos(4t) - 6\sin(4t) - 2\right) \tag{1.31}$$

$$+20e^{-2t}\left(1 + \sin(4t) + \cos(4t)\right) \tag{1.32}$$

$$= 16e^{-2t} \tag{1.33}$$

Determine gráficamente una relación entre la solución general

$$y = cx - c^2 \tag{1.34}$$

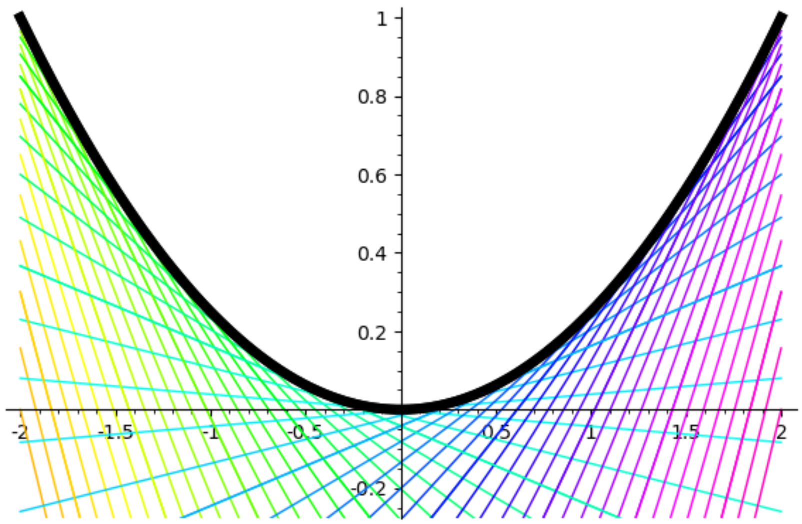


Figura 1.1: La parábola es la envolvente de la familia de lineas rectas.

y la solución singular $y = \frac{x^2}{4}$ de la ecuación diferencial

$$y = xy' - y^2 \tag{1.35}$$

La envolvente de una familia de curvas

$$G(x, y, c) = 0, \tag{1.36}$$

si es que existe, puede encontrarse resolviendo simultaneamente las ecuaciones

$$\begin{cases} \partial_c G(x, y, c) = 0 \\ G(x, y, c) = 0 \end{cases} \tag{1.37}$$

Solución

(I) Calculamos la parcial $\partial_c G(x, y, c) = -x + 2c$

(II) Plantemos las ecuaciones

$$-x + 2c = 0 \tag{1.38}$$

$$y - cx + c^2 = 0 \tag{1.39}$$

(III) Resolvemos las ecuaciones y obtenemos la solución paramética

$$x = 2c, y = c^2 \tag{1.40}$$

(IV) La solución se puede reescribir como

$$y = \frac{x^2}{4} \tag{1.41}$$

Problema Resuelto 1.7. *1. Trace la gráfica de varios miembros de la familia uniparamétrica*

$$\left\{ y = cx^2 \middle| \, c \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Obtenga la ecuación diferencial de esta familia

Solución: Inciso (a)

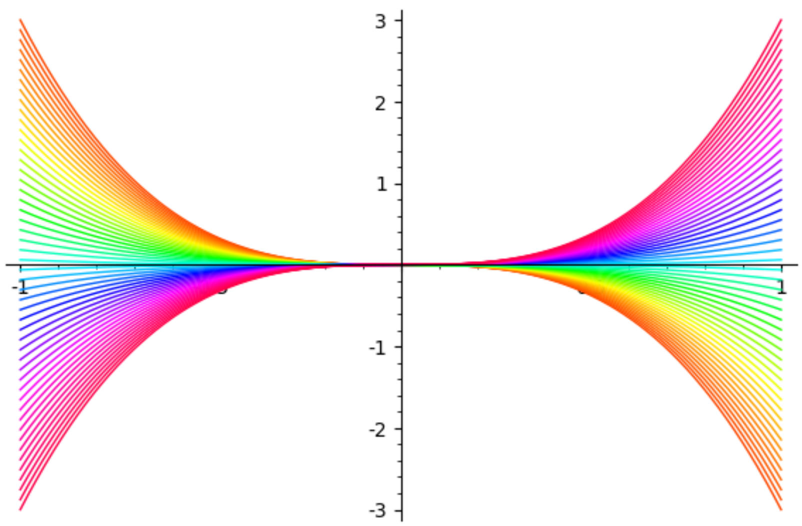


Figura 1.2: Familia uniparamétrica $y = cx^2$

Solución: Inciso (b)

(I) $y = cx^3 \to y' = 3cx^2$

(II) $c = \dfrac{y}{x^3}$

(III) $y' = 3\left(\dfrac{y}{x^3}\right)x^2$

(IV) $y' = \dfrac{3y}{x}$

Problema Resuelto 1.8. *Encuentre una ecuación diferencial para la familia biparamétrica de cónicas*

$$ax^2 + by^2 = 1 \tag{1.42}$$

Solución. Supongamos que $b \neq 0$.

(I) $2ax + 2byy' = 0$

(II) $a = \dfrac{-byy'}{x}$

(III) $\left(-\frac{byy'}{x}\right)x^2 + by^2 = 1$

(IV) $-bxyy' + by^2 = 1$

(V) $-b\left(xyy'' + xy'^2 + yy'\right) + 2byy' = 0$

(VI) $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$

□

1. Encuentra una solución general para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 3x^2$
2. Traza la gráfica de las soluciones obtenidas en el inciso (a)
3. Determina la ecuación de la curva particular en el inciso (b), que pasa por el punto $(1, 3)$

Solución: Inciso (a)

(I) $dy = 3x^2dx$

(II) $\int dy = \int 3x^2dx$

(III) $y = x^3 + c$

Solución: Inciso (b)
Inciso (c)

(I) Como la curva pasa por $(1, 3)$, entonces

$$x = 1 \rightarrow y = 3$$

(II)

$$3 = 1^3 + c \rightarrow c = 2$$

(III) $y = x^3 + 2$

Problema Resuelto 1.9. *Resuelva el problema de condición inicial*

$$\begin{cases} y'' = 3x - 2 \\ y(0) = 2 \\ y'(1) = -3 \end{cases} \tag{1.43}$$

Solución. (I) $y' = \frac{3x^2}{2} - 2x + c_1$

(II) $y'(1) = -3 \rightarrow -3 = \frac{3}{2} - 2 + c_1 \rightarrow c_1 = -\frac{5}{2}$

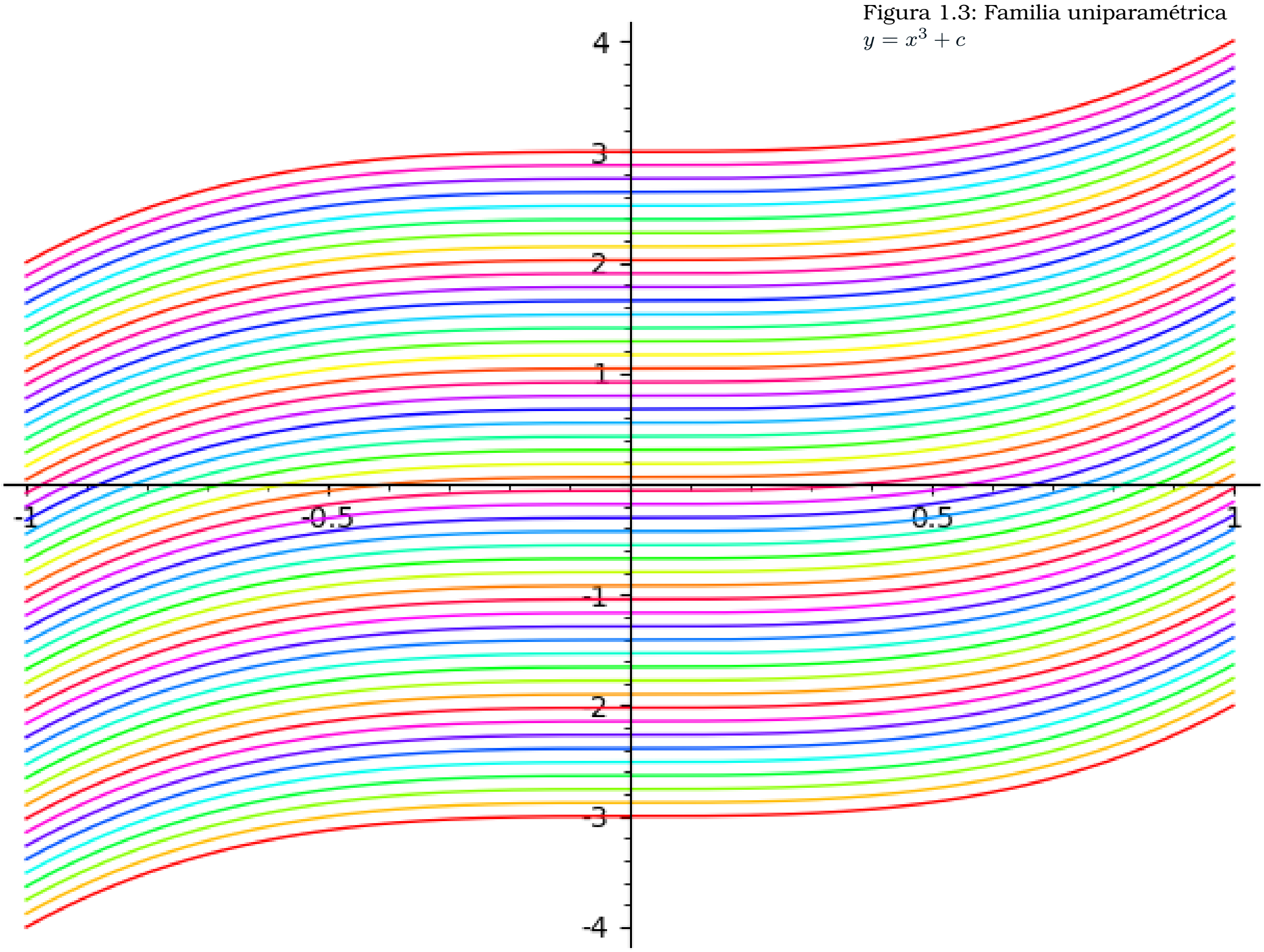


Figura 1.3: Familia uniparamétrica $y = x^3 + c$

(III) $y = \frac{x^3}{2} - x^2 - \frac{5x}{2} + c_2$

(IV) $y(0) = 2 \to c_2 = 2 \to y = \frac{x^3}{2} - x^2 - \frac{5x}{2} + 2$

$\square$

1.2 Ecuaciones Especiales de Primer Orden

Cualquier ecuación diferencial de primer orden en la *forma normal*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1.44}$$

puede ser reescrita en la *forma diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1.45}$$

y viceversa.

1.2.1 Separación de variables

Una ecuación es *separable* si se puede escribir en la forma.

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \tag{1.46}$$

En ese caso, su solución está dada por

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = c \tag{1.47}$$

siempre que $g_1(y)f_2(x) \neq 0$.

Problema Resuelto 1.10. *Resuelve la ecuación diferencial*

$$xdy - ydx = 0 \tag{1.48}$$

1.2.2 Ecuaciones exactas

Una ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1.49}$$

es *exacta* si existe una función diferenciable $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dU(x,y) = 0 \tag{1.50}$$

En ese caso, la solución está dada por

$$U(x,y) = c \tag{1.51}$$

Un criterio para determinar si una ecuación es exacta es verificar que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{1.52}$$

Problema Resuelto 1.11. *Determina si la ecuación*

$$xdy - ydx = 0 \tag{1.53}$$

es exacta.

De manera equivalente, podemos encontrar la solución de la siguiente manera

$$\int M\partial x + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\partial x\right) dy = c \tag{1.54}$$

donde ∂x indica que la integración es realizada únicamente respecto a x, manteniendo y constante.

Problema Resuelto 1.12. *Demuestra que la ecuación*

$$\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0 \tag{1.55}$$

es exacta y resuelvela.

1.2.3 *Factor Integrante*

Cuando una ecuación no es exacta, en ocasiones se puede encontrar de manera explícita una función $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ llamada *factor integrante* tal que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \tag{1.56}$$

y por tanto

$$\mu M dx + \mu N dy = 0 \tag{1.57}$$

es exacta.

1.2.4 *Ecuaciones lineales*

Diremos que una ecuación es lineal si se puede reescribir en la forma:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{1.58}$$

En este caso, un factor integrantes está dado por

$$\mu = e^{\int p(x)dx} \tag{1.59}$$

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right) \\
&(b) \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = -d\left(\frac{x}{y}\right) \\
&(c) \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) \\
&(d) \quad \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}\,d\left\{\ln\frac{x-y}{x+y}\right\} \\
&(e) \quad \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \tfrac{1}{2}d\{\ln(x^2+y^2)\}
\end{aligned}
$$

Figura 1.4: Algunos ejemplos de factores integrantes.

y la ecuación se puede reescribir como

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu q(x) \tag{1.60}$$

Entonces,

$$\mu y = \int \mu q(x)dx + c \tag{1.61}$$

y la solución está dada por

$$y = e^{-\int pdx}\left(\int e^{\int pdx}q(x)dx + c\right) \tag{1.62}$$

$$= e^{-\int pdx}\int e^{\int pdx}q(x)dx + ce^{-\int pdx} \tag{1.63}$$

Problema Resuelto 1.13. *Reescribe la ecuación*

$$xdy - ydx = 0 \tag{1.64}$$

en forma lineal; calcula el factor integrante y resuelve.

1.2.5 *Ecuaciones homogéneas de orden cero*

Diremos que una ecuación diferencial es *homogénea de orden cero* si se puede reescribir como

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.65}$$

Definimos la variable dependiente $\nu = \dfrac{y}{x}$, de manera que $y = \nu x$.

Entonces la ecuación diferencial se puede reescribir como

$$v + x\frac{d\nu}{dx} = F(\nu) \tag{1.66}$$

o de manera equivalente

$$xd\nu + (F(\nu) - v)\, dx = 0. \tag{1.67}$$

Entonces tiene su solución está dada por

$$\ln|x| = \int \frac{d\nu}{F(\nu) - \nu} + c \tag{1.68}$$

Problema Resuelto 1.14. *Reescriba la ecuación*

$$xdy - ydx = 0 \tag{1.69}$$

como una ecuación homogénea de orden cero y resuelva.

1.2.6 Ecuaciones de Bernoulli

Diremos que una ecuación es de Bernoulli si se puede reescribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n \tag{1.70}$$

siempre que $n \neq 0, 1$

En ese caso, hacemos la sustitución $\nu = y^{1-n}$ y la ecuación se reduce a una ecuación lineal, cuya solución está dada por

$$\nu e^{(1-n)\int pdx} = (1-n)\int qe^{(1-n)\int pdx} + c \tag{1.71}$$

Observación 1.4. (I) *Si $n = 0$, la ecuación ya es lineal sin necesidad de hacer sustitución alguna.*

(II) *Si $n = 1$, la ecuación se puede reescribir como separable.*

Problema Resuelto 1.15. *Resuelve la ecuación*

$$x\frac{dy}{dx} + y = xy^3 \tag{1.72}$$

1.2.7 Ecuaciones solubles

Diremos que una ecuación diferencial es soluble para y si

$$y = g(x, p) \tag{1.73}$$

donde $p = y'$.

En ese caso,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.74}$$

o de manera equivalente

$$p = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{1.75}$$

Resolvemos la ecuación anterior para p

$$G(x, p, c) = 0 \tag{1.76}$$

y sustituimos en $y = g(x, p)$.

Problema Resuelto 1.16. *Resuelve la ecuación*

$$xp^2 + 2px - y = 0 \tag{1.77}$$

donde $p = y'$.

1.2.8 *Ecuación de Clairaut*

Diremos que una ecuación es de Clairaut si se puede reescribir como

$$y = px + F(p) \tag{1.78}$$

donde $p = y'$

Este es un caso especial del tipo anterior con solución

$$y = cx + F(c) \tag{1.79}$$

Problema Resuelto 1.17. *Resuelve la ecuación*

$$y = px \pm \sqrt{p^2 + 1} \tag{1.80}$$

donde $p = y'$.

1.2.9 *Miscelanea*

Si la ecuación se puede reescribir como

$$\frac{dy}{dx} = F(\alpha x + \beta y), \tag{1.81}$$

entonces la podemos reducir a una separable con la sustitución

$$\nu = \alpha + \beta y \tag{1.82}$$

Si la ecuación se puede reescribir como

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}\right) \tag{1.83}$$

Si $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \frac{\beta_1}{\beta_2}$, entonces podemos elegir constantes h, k tales que la ecuación se reduce a una homogénea con el cambio de variables

$$x = X + h, y = Y + k \tag{1.84}$$

Si $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2}$,la ecuación se reduce al tipo anterior.

1.2.10 *Reducción de orden*

Si una ecuación diferencial es de orden $m > 1$, pero hace falta de forma explícita la variable dependiente y, entonces se puede reducir de orden con la sustitución $y' = p$.

Problema Resuelto 1.18. *Resuelve la ecuación*

$$y'' + 2y' = 4x \tag{1.85}$$

Problema Resuelto 1.19. *Resuelve la ecuación*

$$1 + yy'' + y'^2 = 0 \tag{1.86}$$

con la reducción de orden $y' = p$.

1.3 *Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden*

1.3.1 *Crecimiento y decaimiento*

Sea $N(t)$ la cantidad de algún recurso, sustancia o población que (de-)crece respecto del tiempo.

En este caso $N'(t)$ la tasa de cambio y supondremos que es proporcional a $N(t)$:

$$\frac{dN}{dt} = rN,$$

donde r es la constante de proporcionalidad.

Problema Resuelto 1.20. *Una persona deposita* $\$20,000$ *en una cuenta de ahorros que paga el 5 % de interés anual, compuesto continuamente. Encuentre*

1. *el monto en la cuenta después de tres años;*
2. *el tiempo requerido para que la cuenta al doble de su valor, sin contar retiros ni depósitos extras.*

1.3.2 Ejemplos de enfriamiento

La ley de enfriamiento de Newton establece que *la tasa de cambio de la temperatura de un cuerpo (respecto del tiempo) es proporcional a la diferencia entre el cuerpo y el medio circundante:*

$$\frac{dT}{dt} = -k\,(T - T_m)$$

donde k es una constante (positiva) de proporcionalidad; T es la temperatura del cuerpo; y T_m es la temperatura del medio.

Problema Resuelto 1.21. *Una barra de metal a una temperatura de $100°F$ es ubicado en un cuarto a una temperatura constante de $0°F$. Si después de 20 minutos, la temperatura de la barra es de $50°F$, encuentre:*

1. *el tiempo que tomará alcanzar $25°F$ y;*
2. *la temperatura de la barra después de 10 minutos.*

1.3.3 Caída de cuerpos

Observación 1.5 (Segunda ley de Newton)**.** *La fuerza neta que actúa en un cuerpo es igual a la razón cambio respecto del tiempo del momento del cuerpo; o para masa constante*

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

donde F es la fuerza neta en el cuerpo y v es la velocidad del mismo, en el tiempo t.

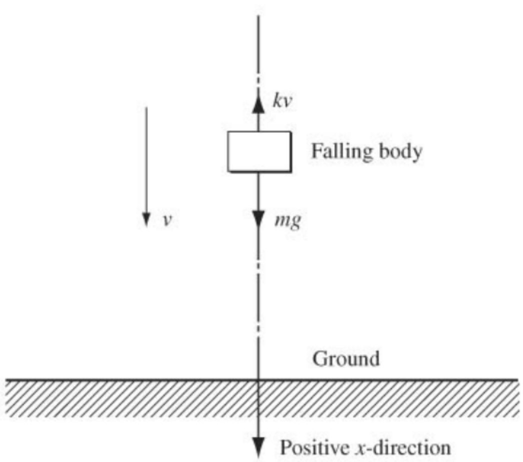


Fig. 7-1

En nuestro modelo, $F = mg - kv$, donde m es la masa, g es la aceleración debida a la gravedad y $k > 0$ es una constante de proporcionalidad debida a la resistencia del aire.

De manera que obtenemos la ecuación diferencial $mg - kv = m\frac{dv}{dt}$, o de manera equivalente

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g.$$

Problema Resuelto 1.22. *Una bola de acero que pesa 2 lbs se deja caer desde una altura de 3000 pies sin velocidad. Mientras cae, encuentra una resistencia del aire (numéricamente) igual a $\frac{v}{8}$ (en libras), donde v indica la velocidad de la bola (en pies sobre segundo). Encuentre*

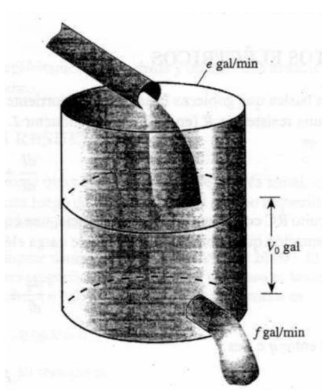
1. *la velocidad límite para la bola;*
2. *y el tiempo requerido para que bola impacte en el suelo.*

1.3.4 Ejemplos de Disolución

Consideremos un tanque que inicialmente contiene V_0 litros de salmuera, que contiene Q_0 kgs de sal.

Otra solución de salmuera, que contiene b kgs por litro se vierte en el tanque a una tasa o ritmo de e litros/minuto en tanto que simultáneamente, la solución bien agitada abandona el tanque a un ritmo de f litros/minuto.

El problema es encontrar la cantidad de sal en el tanque en respecto del tiempo t.



Por Q denotaremos la cantidad (en kilos) de sal que se encuentra en el tanque en en el tiempo t.

El volumen de salmuera al tiempo t es

$$V(t) = V_0 + e \times t - f \times t.$$

La concentración de sal en el tanque en un momento dado es

$$\frac{Q(t)}{V(t)},$$

de lo que se deduce que la sal sale del tanque a una tasa de

$$f \times \left(\frac{Q(t)}{V(t)}\right) \texttt{kgs/min.}$$

De este modo,

$$\frac{dQ}{dt} = be - f \times \left(\frac{Q}{V_0 + (e-f)t}\right),$$

o de manera equivalente

$$\frac{dQ}{dt} + f \times \left(\frac{Q}{V_0 + (e-f) \times t}\right) = be.$$

Problema Resuelto 1.23. *Un tanque contiene inicialmente* 100 *litros de una solución de salmuera con* 1 *kilo de sal. En* $t = 0$ *se vierte otra solución de salmuera que contiene* 1 *kilo de sal por litro a un ritmo de* 3 *litros/minuto, en tanto que la salmuera bien agitada abandona el tanque al mismo ritmo. Encuentre*

1. *la cantidad de sal en el tanque en cualquier tiempo* t*, y*
2. *el tiempo en el cual la mezcla en el tanque contiene 2 kilos de sal.*

1.3.5 Circuitos Eléctricos

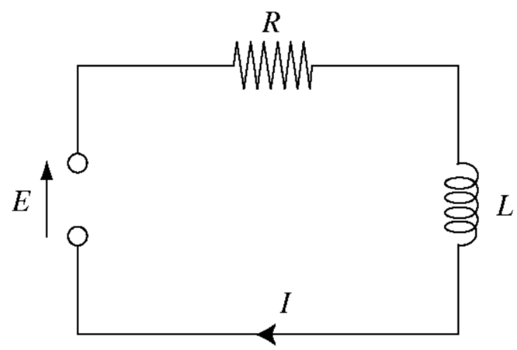
La ecuación básica que gobierna la cantidad de corriente I (en amperios) en un circuito RL simple (fig. 1.3) consiste en una resistencia R (en ohmios), un inductor L (en henrios) y una fuerza electromotriz (abreviado fem)E (en voltios) es

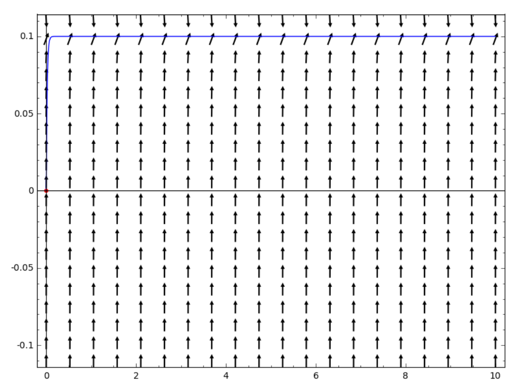
$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}.$$

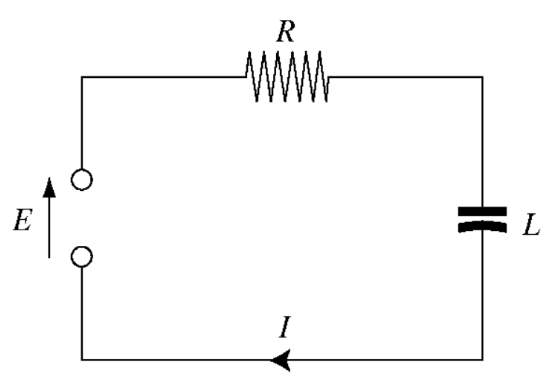
Problema Resuelto 1.24. *Un circuito* RL *tiene una* fem *de 5 voltios, una resistencia de 50 ohmios, una inductancia de 1 henrio y no tiene corriente inicial. Encuentre la corriente de estado estacionario, i.e., cuando* $t \to \infty$.

Para un circuito RC consistente en una resistencia, una capacidad C (en faradios), una fem y sin inductancia (fig. 1.3), la ecuación que gobierna la cantidad de carga eléctrica q (en coulombios) sobre el capacitor es

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{R \cdot C}q = \frac{E}{R}.$$


R
E
L
I


0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
0
2
4
6
8
10


R
E
L
I

La relación entre q e I es

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Problema Resuelto 1.25. *Un circuito `RC` tiene una `fem` dada por* $400\cos(2t)$, *una resistencia de `100 ohms` y una capacitancia de `1/100 faradios`. No existe carga inicial en el capacitor. Encuentre la corriente del circuito en función del tiempo, y determine su comportamiento asintótico.*

1.4 Problemas de práctica

1.4.1 Clasificación

Problema 1.1. *Clasifica cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales enunciando su orden; sus variables dependientes e independientes; y si es ordinaria o parcial:*

1.

$$\left(y''\right)^2 + 3x = 2\left(y'\right)^3 \tag{1.87}$$

2.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 \tag{1.88}$$

3.

$$\frac{d^2Q}{dt^2} - 3\frac{dQ}{dt} + 2Q = 4\sin(2t) \tag{1.89}$$

4.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \tag{1.90}$$

5.

$$(x+y)dx + (y-x)dy = 0 \tag{1.91}$$

6.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{1.92}$$

1.4.2 Ecuaciones especiales

Problema 1.2. *(I) Encuentra la solución general de*

$$\left(4x + xy^2\right) dx + \left(y + x^2 y\right) dy = 0 \tag{1.93}$$

(II) Encuentra la solución particular para $y(1) = 2$.

Problema 1.3. *Resuelve el problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 3y = 8 \\ y(0) = 2 \end{cases} \tag{1.94}$$

Problema 1.4. *Resuelve la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} = \sec(y)\tan(x) \tag{1.95}$$

1.4.3 Aplicaciones

Problema 1.5. *Un cuerpo a una temperatura de $50^o F$ está colocado en el exterior donde la temperatura es de $100^o F$. Si después de 5 minutos la temperatura del cuerpo es $60^o F$, encontrar:*

1. *cuanto le tomará al cuerpo alcanzar una temperatura de $75^o F$ y*
2. *la temperatura del cuerpo después de 20 minutos.*

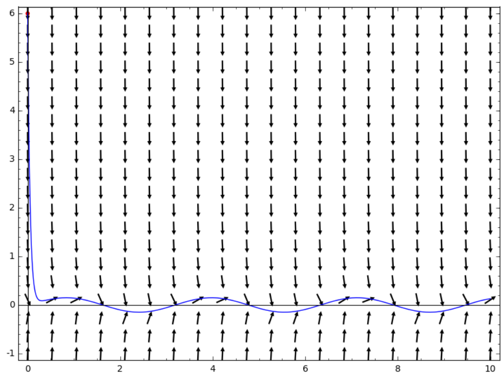
Problema 1.6. *Un cuerpo que pesa `64lbs` es dejado caer desde una altura de `100fts` con velocidad inicial de `10ft/sec`.*

Suponga que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del cuerpo. Se sabe que la velocidad límite del cuerpo es de `128ft/sec`. Encuentre:

1. *una expresión para la velocidad del cuerpo en cualquier tiempo t, y*
2. *una expresión para la posición del cuerpo en cualquier tiempo.*
3. *Determine el instante en que choca contra el suelo.*

Problema 1.7. *Un tanque de 50 lts contiene inicialmente 10 litros de agua fresca. Al tiempo $t = 0$ se vierte al tanque una solución de salmuera que contiene 1 kilo de sal por litro a un ritmo 4 lts/min, mientras que la mezcla bien agitada abandona el tanque a un ritmo de 2 lts/min. Encuentre*

1. *la cantidad de tiempo requerido para que ocurra un derrame y;*



2. *la cantidad de sal en el tanque al momento del derrame.*

Problema 1.8. *Un circuito RL tiene una fem (en voltios) dada por $3sin(2t)$, una resistencia de 10 ohmios, una inductancia de 0.5 henrios y una corriente inicial de 6 amperios. Encuentre la corriente de estado estacionario.*

2 Espacios Vectoriales

2.1 Definición y ejemplos

Hasta ahora hemos considerado a los vectores como elementos de un espacio

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n | x_k \in \mathbb{R})\},$$

por ejemplo vectores en el plano $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}\}$ o en el espacio $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)|x,y,z \in \mathbb{R}\}$. En cada caso, teníamos una suma entre vectores y una multiplicación por *escalares,* es decir, número reales.

Problema Resuelto 2.1. *Si $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$ son vectores en $\mathbb{R}^2$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces*

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

mientras que

$$\alpha(u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2).$$

En este caso, la suma tiene las siguientes propiedades:

1. *(Cerradura) $u + v = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, es un vector en $\mathbb{R}^2$,*

2. *(Asociatividad) Si $w = (w_1, w_2)$ es otro vector en $\mathbb{R}^2$, entonces*

$$\begin{aligned} (u+v)+w &= ((u_1,u_2)+(v_1,v_2))+(w_1,w_2) && (2.1)\\ &= (u_1,u_2)+((v_1,v_2)+(w_1,w_2)) && (2.2)\\ &= u+(v+w), && (2.3) \end{aligned}$$

3. *(Conmutatividad) $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2) = v + u$*

4. *(Existencia de un elemento neutro) $u + \vec{0} = (u_1, u_2) + (0, 0) = (u_1, u_2) = u$, y de la misma forma $\vec{0} + u = u$.*

5. *(Inversos aditivos) Para $u = (u_1, u_2)$, definimos*

$$-u = (-u_1, -u_2),$$

y este elemento satisface que

$$u + (-u) = (-u) + u = 0.$$

La multiplicación por escalares satisface las siguientes propiedades

1. αu *es de nuevo un vector en* $\mathbb{R}^2$,
2. $1u = 1(u_1, u_2) = (1 \cdot u_1, 1 \cdot u_2) = u$,
3. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u_1, \beta u_2) = \alpha(\beta u)$.

Finalmente, la suma de vectores y la multiplicación por escalares estan relacionadas por las siguiente leyes distributivas.

1. $(\alpha + \beta)u = ((\alpha + \beta)u_1, (\alpha + \beta)u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2) + (\beta u_1, \beta u_2) = \alpha u + \beta u$,
2. $\alpha(u + v) = \alpha(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = (\alpha(u_1 + v_1), \alpha(u_2 + v_2)) = \alpha(u_1, u_2) + \alpha(v_1, v_2) = \alpha u + \alpha v$.

Problema Resuelto 2.2 (†). *Verificar que las mismas propiedades se cumplen para* $\mathbb{R}^3$, *usando la suma de vectores y multiplicación por escalares conocida.*

Estas propiedades se cumplen para muchos y muy diferentes conjuntos, donde tenemos una operación suma entre sus elementos y podemos definir una multiplicación por números reales. De hecho, estos conjuntos son los objetos de estudio en el álgebra lineal.

Definición 2.1. *Sea* V *un conjunto, con una operación* $+ : V \times V \to V$ *y una operación* $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$. *Decimos que* V *es un* espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) *si para todo* $u, v, w \in V$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *se cumplen las siguientes propiedades.*

1. *(Cerradura)*$u + v \in V$,
2. *(Asociatividad)*$(u + v) + w = u + (v + w)$,
3. *(Conmutatividad)*$u + v = v + u$,
4. *(Elemento neutro) Existe* $0 \in V$, *tal que para todo* $u \in V$: $u + 0 = 0 + u = u$,
5. *(Elementos inversos) Para todo* $u \in V$, *existe* $-u \in V$, *tal que* $u + (-u) = (-u) + u = 0$.
6. $\alpha u \in V$,
7. $1u = u$,

8. $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$,

9. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$,

10. $\alpha(u, v) = \alpha u + \alpha v$.

A los elementos del espacio vectorial V les llamamos vectores.

Observación 2.1. *Cuando V es un espacio vectorial, con operación suma $+ : V \times V \to V$ y multiplicación por escalares $\cdot : \mathbb{R} \to V \to V$, por brevedad, decimos que $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.*

Ejemplos

Problema Resuelto 2.3 (†). *Demuestre usando las propiedades anteriores, que en cualquier espacio vectorial se cumplen las siguientes propiedades.*

1. $0u = \alpha 0 = 0$. *(Note que el cero escrito a la izquierda denota el cero como número, mientras que escrito a la izquierda o solo, denota el elemento neutro del espacio vectorial.)*

2. $-u = (-1)u$. Sugerencia: Verifique que $u + (-1)u = 0$.

3. *Si $\alpha u = 0$, entonces o bien $\alpha = 0$ o $u = 0$.*

4. *El elemento neutro 0 es único.*

5. *Para cada vector u, su inverso aditivo $-u$ es único.*

Problema Resuelto 2.4. *Compruebe que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales (reales), con las operaciones suma y multiplicación por escalar usuales.*

1. $\{0\}$.

2. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = mx\right\}$ *para $m \in \mathbb{R}$ fijo.*

3. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz = 0\right\}$ *para $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

4. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (a, b, c) \cdot (x, y, z) = 0\right\}$ *para $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

5. $\{f | f : S \to \mathbb{R}\}$, *donde S puede ser cualquier conjunto fijos.*

6. $\mathbb{R}^{m\times n}$, *es decir, el conjunto de matrices $m \times n$ con entradas reales.*

7. *El espacio de polinómios con coeficientes reales.*

8. *El espacio de polinómios con coeficientes reales de grado $\leq n$, para $n \in \mathbb{N}$ fijo.*

9. *$C[a, b]$, el espacio de funciones continuas en el intervalo $[a, b]$.*

10. *El conjunto de número reales* positivos *con las operaciones* $u \oplus v := u, v$ *y* $\alpha \cdot u := u^{\alpha}$.

Problema Resuelto 2.5. *Considere la ecuación diferencial de segundo orden homogénea*

$$y''(x) + a(x)y' + b(x)y(x) = 0$$

donde a, b son funciones continuas. Demuestre que el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial es un espacio vectorial bajo las reglas usuales para la suma de funciones y multiplicación por escalares.

2.2 Subespacios vectoriales

Problema Resuelto 2.6. $\mathbb{R}^2$ *es un espacio vectorial con las operaciones*

$$(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

y

$$\alpha(u_1, u_2) = (\alpha u_1, \alpha u_2).$$

En la sección anterior consideramos el subjunto

$$L_c = \{(u_1, u_2) | u_2 = cu_1\} \subset \mathbb{R}^2$$

para c una pendiente fija, y verificamos que en efecto, con las mismas operaciones es un espacio vectorial.

Decimos entonces que L_c es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Definición 2.2. *Si $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial y $W \subset V$ es también espacio vectorial, con las mismas operaciones $+, \cdot$ decirmos que W es un subespacio vectorial de V, y podemos escribir $W < V$.*

En principio, si $W < V$, tendríamos que verificar todos loa axiomas de espacio vectorial para $(W, +, \cdot)$. Sin embargo, si en el espacio V, la suma es asociativa y conmutativa, también lo será en W. De igual manera, el elemento neutro $1 \in V$ de la multiplicación por escalares es el mismo en W, y se sigue cumpliendo la asociatividad de la multiplicación por escalares y las leyes de distribución.

Entonces, basta demostrar que se cumplen los restantes axiomas, a saber:

1. Si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$.

2. Si $\alpha \in \mathbb{R}, v \in W$, entonces $\alpha v \in W$.
3. $0 \in W$.
4. Si $u \in W$, entonces $-u \in W$.

Sin embargo, los dos últimos incisos se siguen del segundo. En efecto, si escogemos $\alpha = 0$ y cualquier $u \in W$, entonces

$$0 = 0 \cdot u \in W.$$

De igual manera, para cualquier $u \in W$, si escogemos $\alpha = -1$, entonces $-u = (-1)u \in W$.

Por último, verificar los dos axiomas restantes es equivalente a verificar que para todo $\alpha \in \mathbb{R}, u, v \in W$,

$$\alpha u + v \in W.$$

Proposición 2.1. *Si $W \subset V$, entonces*

$$W < V \iff \forall \alpha \in \mathbb{R}, u, v \in W, \alpha u + v \in W.$$

Corolario 2.1. *Todo $W < V$ contiene a $0 \in V$.*

Definición 2.3. *Si $W < V$, pero $W \neq \{0\}$ y $W \neq V$, entonces decimos que W es un subespacio (vectorial) propio.*

Definición 2.4. *Sean $u, v_1, ..., v_k$ vectores en un espacio vectorial V. Decimos que u es combinación lineal de $v_1, ..., v_k$ si existen escalares $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ tales que:*

$$u = \alpha_1 v_1 + ...\alpha_k v_k.$$

Definición 2.5. *Sea V un espacio vectorial. El subespacio generado por un subconjunto $S = \{v_1, ..., v_k\} \subset V$ se define como*

$$\operatorname{gen}(S) = \{\alpha_1 v_k, ..., \alpha_k v_k | \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}\},$$

es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1, ..., v_k$.

Observación 2.2. $\operatorname{gen}(S) < V$.

Problema Resuelto 2.7. *$u = (2, 0, 2)$ es combinación lineal de $v_1 = (1, 0, 1)$ y $v_2 = (0, 1, 1)$ porque $u = 2v_1 - v_2$.*

De hecho,

$$\operatorname{gen}(v_1, v_2) = \{(a, b, a + b) | a, b \in \mathbb{R}\} < \mathbb{R}^3$$

es el plano que contiene a estos dos vectores.

$(-1, -1, 1) \notin \operatorname{gen}(v_1, v_2)$*, porque no vive en este plano.*

Ejemplos

Problema Resuelto 2.8. *¿Cuál de los siguientes conjuntos de vectores*

$$u = (u_1, u_2, u_3)$$

en $\mathbb{R}^3$ *son subespacios de* $\mathbb{R}^3$*?*

1. $\{u | u_1 \geq 0\}$
2. $\{u | u_1 + 3u_2 = u_3\}$
3. $\left\{u | u_2 = u_1^2\right\}$
4. $\{u | u_1 u_2 = 0\}$
5. $\{u | a_2 \text{ es racional}\}$

Problema Resuelto 2.9. *Sea* V *el espacio vectorial (real) de todas las funciones* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. ¿Cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de V?*

1. *todas las funciones* f *tales que* $f(x^2) = f^2(x)$
2. *todas las funciones* f *tales que* $f(0) = f(1)$
3. *todas las funciones* f *tales que* $f(3) = 1 + f(-5)$
4. *todas las funciones* f *tales que* $f(-1) = 0$

Problema Resuelto 2.10. *Sea* W *el conjunto de todos los vectores* $(x_1, ..., x_5)$ *que satisfacen*

$$2x_1 - x_2 + \frac{4}{3}x_3 - x_4 = 0 \tag{2.4}$$

$$x_1 + \frac{2}{3}x_3 - x_5 = 0 \tag{2.5}$$

$$9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0. \tag{2.6}$$

Mostrar que W *es subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^5$.

Problema Resuelto 2.11 (†). *1. Verificar que si* $U, W < V$*, entonces* $U \cap W < V$.

2. *Demostrar que si* $U = \{u_1, ..., u_m\}$ *y* $W = \{w_1, ..., w_m\}$*, entonces*

$$U \cap W = \operatorname{gen}(u_1, ..., u_n, w_1, ..., w_m).$$

Problema Resuelto 2.12 (†). ▪ *Sean* $u, v \in \mathbb{R}^2$*. Mostrar que*

$$W = \{\alpha u + \beta v | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} < \mathbb{R}^2.$$

- *Mostrar que si* u, v *no son paralelos, entonces para cualquier* $w \in \mathbb{R}^2$, *podemos encontrar* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *de manera que* $w = \alpha u + \beta v$.

Problema Resuelto 2.13 (†). *Sea* A *una matriz* $m \times n$ *con entradas reales. Demostrar que el conjunto de todas los vectores columna* u *de longitud* n, *tales que* $Au = 0$ *es un subespacio vectorial de todos los vectores columna* $\mathbb{R}^n$.

2.3 Transformaciones lineales

Definición y ejemplos

Definición 2.6. *Sean* V, W *espacios vectoriales. Decimos que* $T : V \to W$ *es una* transformación lineal *si para todos* $\alpha \in \mathbb{R}, u, v \in V$ *se cumple*

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$ *(*T *abre sumas)*
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ *(*T *saca escalares)*

o de manera equivalente

$$T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v),$$

es decir, T respeta la estructura de espacio vectorial.

En el caso $V = W$, *decimos que* $T : V \to V$ *es un operador y al conjunto de operadores en* V *lo denotamos por* $L(V)$. *En el caso* $W = \mathbb{R}$, *decimos que* $T : V \to \mathbb{R}$ *es un funcional en* V.

Problema Resuelto 2.14. *Sea* $a = [a_1, ..., a_n] \in \mathbb{R}^n$ *fijo y definamos* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $T(u) = a \cdot u$. *Entonces,* T *es una transformación lineal.*

Problema Resuelto 2.15. *Sea* $A = \left[a_{ij}\right]$ *una matriz de dimensión* $n \times m$, *donde* n *indica el número de columnas y* m *el de renglones.*

Si definimos $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T(u) = Au$, *entonces* T *es una tranformación lineal. En otras palabras, cada matriz define una transformación lineal. Lo inverso también es cierto.*

Sea

$$e_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

el vector columna con un 1 en la $k-$ésima posición y ceros en el resto, y sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Entonces, $T(e_k) \in \mathbb{R}^m$ y digamos que es de la forma

$$T(e_k) = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}.$$

Si definimos $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ entonces $T(e_k) = Ae_k$, $k = 1, ..., n$. Por linealidad tanto de T como de A, obtenemos que $T(x) = Ax$, para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$.

Problema Resuelto 2.16. *Las siguientes transformaciones son lineales:*

- $T : C^1[0,1] \to C^0[0,1]$,
$$T(f)(x) = f'(x).$$
- $T : C^0[0,1] \to \mathbb{R}$,
$$T(f) = \int_0^1 f(t)dt.$$
- $T : C^0[0,1] \to C^1[0,1]$,
$$T(f)(x) = C + \int_0^x f(t)dt,$$

donde $x \in [0,1]$ y $C \in \mathbb{R}$ es alguna constante.

Problema Resuelto 2.17. *Indique si la siguiente transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es lineal y de ser así, encuentre su representación matricial.*

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ z-y \\ 2x+7y-3z \end{bmatrix}$$

Solución 2.1. *La prueba de que la transformación es lineal se deja al lector. Ahora bien,*

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la representación matricial de T esta dada por

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Operadores en $\mathbb{R}^n$

Sean $T, S \in L(\mathbb{R}^n)$. La composición TS, es decir, $TS(x) = T(S(x))$ es de nuevo un operador y de hecho, si $B = [b_{ij}]$ es la matriz asociada a T como en el ejemplo 2.15 y $A = [A_{ij}]$ la asociada a S, entonces la matriz asociada a TS es $C = [c_{ij}]$ conjunto

$$c_{ij} = \sum_{k}^{n} b_{ik} a_{kj}.$$

Decimos que $C = BA$ es el producto de de B con A (es este orden), y esta composicion es asociativa.

El operador de T con S suma esta definido como $(T + S)(u) = T(u) + S(u)$, y de hecho tiene asociada la matriz

$$\left[b_{ij} + a_{ij}\right].$$

Dos operadores especiales en R^n son la *transformación cero* $0(x) = 0$ y la *identidad* $\mathrm{Id}(x) = x$.

Problema Resuelto 2.18 (†). *Encuentre la matriz asociada a los operadores cero e identidad.*

Podemos definir la multiplicación de operadores por escalares de la siguiente forma. $(\alpha T)(u) = \alpha T(u)$. De esta manera, con la operación suma entre operadores y esta multiplicación por escalares, resulta que $L(\mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial.

Finalmente, si para $P \in L(\mathbb{R}^n)$ existe $Q \in L(\mathbb{R}^n)$, de manera que $PQ = \mathrm{Id}$, decimos que P es *invertible* y que Q es el operador inverso de P. También podemos escribir Q como P^{-1}. De hecho, si A es la matriz asociada a P, entonces A^{-1} es la asociada a P^{-1}.

Ejemplos

Problema Resuelto 2.19. *Verificar que las siguientes transformaciones son lineales, y encontrar la representación matricial de cada una.*

1. *(Proyección sobre el plano)*

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ y + z \\ 2x - y - z \\ -x + y + 2z \end{bmatrix}$$

3.
$$T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y+3z\\4x-2y+6z\\-6x+3y-9z\end{bmatrix}$$

4.
$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y\\2y-4x\end{bmatrix}$$

5.
$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x\\3x-y\end{bmatrix}$$

6.
$$T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y+3z\\6x-3y+9z\end{bmatrix}$$

7.
$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x+y\\2y-x\\x+8y\end{bmatrix}$$

8.
$$T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1x-3z\\-y+5z\end{bmatrix}$$

9.
$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x+y\\-4x+2y\\8x+4y\end{bmatrix}$$

10.
$$T=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x-z\\-y+2z\\15x-2y-z\end{bmatrix}$$

Problema Resuelto 2.20. *Encuentre una expresión matemática para la transformación que rota un vector en el plano, con un ángulo ϕ en el sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj). Indique si esta transformación es lineal y de serlo, encuentre su representación matricial.* Sugerencia: Exprese el vector en coordenadas polares.

2.4 Núcleo e imagen

Definición 2.7. *El* núcleo *de una transformación lineal* $T : V \to W$*, donde* V *y* W *son espacios vectoriales, es el conjunto*

$$\ker(T) = \{v \in V | T(v) = 0\}.$$

La imágen de $T : V \to W$ *es el conjunto*

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W | \exists v \in V, T(v) = w\}.$$

Proposición 2.2. $\ker(T) < V, \mathrm{Im}(T) < W$.

Demostración. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in \ker(T)$, entonces

$$\begin{aligned} T(\alpha u + v) &= \alpha T(u) + T(v) && \text{(Por linealidad de } T\text{)} \quad (2.7) \\ &= \alpha 0 + 0 && \text{(Porque } T(u) = T(v) = 0\text{)} \quad (2.8) \\ &= 0 && (2.9) \end{aligned}$$

Por tanto, $\ker(T) < V$.

Ahora, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $w, w' \in \mathrm{Im}(T)$, entonces Existen $v, v' \in V$ tales que $T(v) = w, T(w') = v'$. Por lo cual,

$$\begin{aligned} \alpha w + w' &= \alpha T(v) + T(v') && (2.10) \\ &= T(\alpha v + v'). && (2.11) \end{aligned}$$

Como $\alpha v + v' \in V$, entonces $\alpha w + w' \in W$. □

Problema Resuelto 2.21. *Encontrar un conjunto de vectores que generen* $\ker(T)$*, para la tranformación lineal* T *dada por (2.17).*

Solución 2.2. *Supongamos que*

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto equivale a resolver el sistema de ecuacuones

$$\begin{aligned} x + 2y &= 0 && (2.12) \\ z - y &= 0 && (2.13) \\ 2x + 7y - 3x &= 0, && (2.14) \end{aligned}$$

que podemos reescribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

y utilizando Gauss-Jordan, se reduce a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es decir, tenemos dos ecuaciones con tres incognitas

$$x + 2y = 0 \tag{2.15}$$
$$y - z = 0 \tag{2.16}$$

por lo que sustituyendo $y = z = t$, *tenemos que*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, es decir, todos los vectores en $\ker(T)$ *son multiplos de*

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De manera equivalente,

$$\ker(T) = \operatorname{gen}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Problema Resuelto 2.22. *Encontrar un conjunto de vectores que generen* $\operatorname{Im}(T)$, *para la tranformación lineal* T *dada por (2.17).*

Solución 2.3. *Un vector en* $\operatorname{Im}(T)$ *es de la forma,*

$$\begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

por lo que $\operatorname{Im}(T)$ *estaría generado por los vectores*

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, por el ejercicio anterior, $w = 2u - v$, *y por tanto*

$$\begin{bmatrix} x + 2y \\ z - y \\ 2x + 7y - 3z \end{bmatrix} = xu + yv + wz = (x + 2z)u + (y - z)v.$$

De hecho, para cualesquiera λ, μ, si escogemos una solución de las ecuaciones las ecuaciones

$$\lambda = x + 2z \tag{2.17}$$

$$\mu = y - z, \tag{2.18}$$

podemos escribir

$$\begin{bmatrix} x+2y \\ z-y \\ 2x+7y-3z \end{bmatrix} = xu + yv + zw = \lambda u + \mu v.$$

Es decir,

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{gen}(u, v) = \operatorname{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}\right).$$

Ejemplos

Problema Resuelto 2.23. *Encuentre un conjunto de vectores, con el mínimo número de elementos posible, que generen* $\ker(T)$ *e* $\operatorname{Im}(T)$ *para cada una de las transformaciones lineales del ejercicio 2.19.*

2.5 Bases y dimensión

Definición 2.8. *Sea V un espacio vectorial y $B = \{u_1, ..., u_k\} \subset V$. Decimos que B es unconjunto* linealmente independiente *si para cualesquiera $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$,*

$$c_1 u_1 + ... + c_k u_k = 0 \Rightarrow c_1 = ... = c_k = 0,$$

es decir, la única relación lineal entre los elementos de B es la trivial. En otro caso, decimos que B es linealmente dependiente.

Definición 2.9. *Decimos que $B \subset V$ es una base de V si:*

1. $V = \operatorname{gen}(B)$ *y*
2. *B es linealmente independiente.*

Observación 2.3. *Es decir, B es un base si cualquier $v \in V$ es una combinación lineal de sus elementos, no falta información, y ninguno de los elementos de la base es combinación lineal de los restantes, es decir, no sobra información. Una vez que tenemos una base, toda lo que necesitamos saber sobre el espacio vectorial se puede obtener a partir de los elementos de la base.*

Proposición 2.3. *Toda base de un espacio vectorial tiene el mismo número de elementos.*

Definición 2.10. *1. Si $B = \{u_1, ..., u_n\}$ es una base de V, decimos que n es la* dimensión *de V y escribimos $\dim V = n$.*

2. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal decimos que $\dim(\ker T)$ es la nulidad *de T y la denotamos por $\operatorname{nul}(T)$.*

3. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal decimos que $\dim(\operatorname{Im} T)$ es el rango de T y la denotamos por $\operatorname{ran}(T)$.

Determinar si un conjunto forma una base de $\mathbb{R}^n$ puede ser bastante laborioso. Sin embargo, las siguientes dos proposiciones, que se presentan sin prostración, sirven como criterios avanzados para determinar si un conjuntos es base.

Proposición 2.4. *Si $n = \dim V$, cualquier conjunto $B \subset V$ linealmente independiente con n elementos es una base de V.*

Proposición 2.5. $B = \left\{ \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,n} \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{bmatrix} \right\}$ *es un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ si y solo si*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Problema Resuelto 2.24. *Determine si*

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es base de $\mathbb{R}^2$.

Solución 2.4. *Sabemos que*

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathbb{R}^2$. Entonces $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Pero como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

entonces

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es un conjunto de 2 vectores linealmente independientes. *Por tanto, B' también es una base de $\mathbb{R}^2$.*

Problema Resuelto 2.25. *Encuentre una base para* $\ker T$ *y otra para* $\operatorname{Im} T$*, para la transformación definida en el ejercicio de muestra 2.17. Indique cuál es la dimensión de cada espacio.*

Solución 2.5. *Como ya vimos en el ejercicio de muestra 2.21,*

$$\ker(T) = \operatorname{gen}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Consideremos la ecuación

$$c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

es decir

$$\begin{bmatrix} -2c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La única solución es $c = 0$ *y por tanto*

$$B = \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

es un conjunto linealmente independiente.

Por tanto, B *es una base de* $\ker T$ *y* $\operatorname{nul}(T) = 1$.

De manera similar, en el ejercicio de muestra 2.22,

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}\right).$$

Entonces

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_2 \\ 2c_1 + 7c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0. \tag{2.21}$$

Por tanto,

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}\right\}$$

es un conjunto linealmente independiente, y por tanto una base de $\operatorname{Im}(T)$*. Entonces* $\operatorname{ran}(T) = 2$.

Finalmente, enunciaremos una de las proposicones importantes en nuestro curso. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, tenemos ls siguiente relación entre las dimensiones de $V, \ker T$ e $\operatorname{Im} T$.

Proposición 2.6 (Teorema de la dimensión)**.**

$$\dim V = \operatorname{nul}(T) + \operatorname{ran}(T).$$

Ejemplos

Problema Resuelto 2.26. *Determine si el conjunto E es base del espacio vectorial V.*

1. $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{R}^2$,
2. $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{R}^2$,
3. $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

Problema Resuelto 2.27. *Para cada una de las transformaciones lineales $T : V \to W$, del ejercicio 2.19, encuentre*

1. *Una base de* $\ker T$,
2. *Una base de* $\operatorname{Im} T$,
3. $\operatorname{nul}(T)$,
4. $\operatorname{ran}(T)$,

y verifique la afirmación del teorema 2.6.

2.6 *Coordenadas y cambios de base.*

Coordenadas

Si $E = \{e_1, ..., e_n\}$ es base de un espacio vectorial V, entonces todo vector $v \in V$ se puede escribir de la forma

$$v = v_1 e_1 + ... + v_n e_n.$$

Esto es cierto para cualquier otro conjunto que genere V. Lo importante de una base es que, debido a la independencia lineal de E, esta manera de escribir el vector es *única*.

Supongamos que podemos escribir $v = c_1e_1 + ... + c_ne_n$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= v - v && (2.22)\\ &= (v_1e_1 + ... + v_ne_n) - (c_1e_1 + ... + c_ne_n) && (2.23)\\ &= (v_1 - c_1)e_1 + ... + (v_n - c_n)e_n. && (2.24) \end{aligned}$$

Como E es linealmente independiente, entonces $v_1 - c_1 = ... = v_n - c_n = 0$. Es decir,

$$v_1 = c_1, ..., v_n = c_n.$$

En otras palabras, los escalares $v_1, ..., v_n$ en la expresión (2.6) es *única.*

Para simplificar la expresión (2.6) necesitamos el concepto de orden de una base.

Definición 2.11. *Una base ordenada* $(e_1, ..., e_n)$ *es una sucesión de vectores en* V *tal que* $\{e_1, ..., e_n\}$ *es una base.*

Dos bases ordendas $(e_1, ..., e_n), (f_1, ..., f_n)$ *son iguales si y solo si*

$$e_1 = f_1, ..., e_n = f_n.$$

Observación 2.4. *Si intercambiamos un par de elementos de una base ordenada obtendremos una base ordenada distinta, aunque como conjuntos sean diferentes.*

Problema Resuelto 2.28.

$$\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

y

$$\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$$

son dos bases ordenadas distintas de $\mathbb{R}^2$.

Si consideramos E como la base ordenada $(e_1, ..., e_n)$ entonces, la expresión (2.6) se puede escribir como

$$\begin{bmatrix}v_1\\...\\v_n\end{bmatrix}_E.$$

Decimos que $v_1, ..., v_n$ son las cordenadas de v en la base E.

Problema Resuelto 2.29. *Si consideramos la base ordenada*

$$E = (\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},)$$

de $\mathbb{R}^2$, *entonces*

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_E .$$

En cambio, si consideramos

$$F = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right),$$

entonces

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}_F .$$

Definición 2.12. *La base*

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

de $\mathbb{R}^n$ *se conoce como* base canónica.

Cambios de base

Supongamos que tenemos dos bases $B = (e_1, ..., e_n)$ y $F = (f_1, .., f_n)$ de $\mathbb{R}^n$. ¿Como podemos comparar las cordenadas de un vector $v \in \mathbb{R}^n$ en ambas bases? Digamos que sus coordenadas son

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_F .$$

Para realizar la comparación, digamos que las coordenadas de cada elemento de la base F en la base B son

$$f_k = \begin{bmatrix} f_{k,1} \\ \vdots \\ f_{k,n} \end{bmatrix}_B .$$

Ahora bien

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_F = w_1 f_1 + ... + w_n f_n \tag{2.25}$$

$$= w_1 \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ \vdots \\ f_{1,n} \end{bmatrix}_B + ... + w_n \begin{bmatrix} f_{n,1} \\ \vdots \\ f_{n,n} \end{bmatrix}_B \tag{2.26}$$

$$= \begin{bmatrix} w_1 f_{1,1} + ... + w_n f_{n,1} \\ \vdots \\ w_1 f_{1,n} + ... + w_n f_{n,n} \end{bmatrix}_B , \tag{2.27}$$

y como las coordenadas en una base son únicas, tenemos que

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 f_{1,1} + ... + w_n f_{n,1} \\ \vdots \\ w_1 f_{1,n} + ... + w_n f_{n,n} \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$$= \begin{bmatrix} f_{1,1} & ... & f_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n,1} & ... & f_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Definición 2.13.

$$P_{F,B} := \begin{bmatrix} f_{1,1} & ... & f_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n,1} & ... & f_{n,n} \end{bmatrix}$$

se conoce como matriz de paso *de F a B. También decimos que es la matriz cambio de base de F a B.*

Así como podemos cambiar las coordenadas de la base F a la base B, podemos aplicar el mismo procedimiento para encontrar la matriz de paso de B a F. Sin embargo, al ser el procedimiento inverso, basta encontrar la matriz inversa. En otras palabras.

Proposición 2.7. $P_{B,F} = P_{F,B}^{-1}$.

Observación 2.5. *El hecho de que $P_{F,B}$ sea invertible se debe a que esta formada por los vectores columna que son las coordenadas de cada elemento de la base F en términos de B. Estos vectores generen todo $\mathbb{R}^n$, que es equivalente a que la matriz $P_{F,B}$ sea invertible.*

Problema Resuelto 2.30. *1. Verifique que*

$$F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

es una base de $\mathbb{R}^3$.

2. *Si denotamos por E la base estandar de $\mathbb{R}^3$, encuentre las matrices de paso $P_{F,E}$ y $P_{E,F}$.*

Solución 2.6. *Por la proposición 2.4, basta verificar que F es un conjunto linealmente independiente. Ahora bien, por la proposición 2.5, basta verificar que*

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aunque esto lo podemos hacer a mano, *usaremos WxMaxima para hacer dichas cuentas. Primero introducimos la matriz, a partir de la cual calcularemos el determinante y la denotaremos por P.*

```
(%i1)   P: matrix(
         [1,0,1],
         [0,-2,0],
         [0,0,1]
        );
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Posteriormente, calculamos su determinante.

```
(%i2)   determinant(%);
```

(%o2) -2

y concluimos que F es una base.

Note que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

estan ya dados en terminos de la base canónica E y por tanto

$$P_{F,E} = P.$$

Por la proposición 2.7, sabemos que $P_{E,F} = P^{-1}$ y usando nuevamente WxMaxima, calculamos esta matriz inversa.

```
(%i3)   invert(P);
```

(%o3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ejemplos

Problema Resuelto 2.31. *Encuentre las matrices de paso $P_{F,E}$ y $P_{E,F}$ para los siguientes casos.*

1. *E la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $F = \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\right)$,*
2. *E la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $F = \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$*
3. *E la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $F = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$.*

Problema Resuelto 2.32. *Encuentre las coordenadas de los siguientes vectores v, en las bases ordendas F indicadas. Utilice el resultado en el ejercicio 2.31.*

1. *$v = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$, $F = \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\right)$,*
2. *$v = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$, $F = \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$*
3. *$v = \begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}$, $F = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$.*

Problema Resuelto 2.33. *Encuentre las coordendas de los elementos de la base canonica de V en terminos de las bases ordenadas F indicadas. Utilice el resultado en el ejercicio 2.31.*

1. *$V = \mathbb{R}^2$, $F = \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}\right)$,*
2. *$V = \mathbb{R}^2$, $F = \left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right)$*
3. *$V = \mathbb{R}^3$, $F = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$.*

3 Teoría espectral

3.1 Valores propios

Como hemos visto, hacer cálculos que involucren matrices, por ejemplo multiplicar una matriz por un vector, puede ser complicados por la cantidad de operaciones involucradas. En cambio, multiplicar por escalares es muy sencillo. ¿Podríamos encontrar alguna manera de convertir las operanciones con matrices en operaciones con escalares? En este capítulo trataremos de responder esta pregunta.

Definición 3.1. *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y A su representación matricial en la base estandar. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$ tales que*

$$Av = \lambda v,$$

decimos que λ es un valor propio y v un λ-vector propio.

Supongamos que $F = (v_1, ..., v_n)$ es una base ordenada de vectores propios de $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$Av_k = \lambda_k v_k,\ k = 1, ...n.$$

Entonces, la representación matricial de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en la base F es

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

es decir, una matriz con los valores propios en la diagonal y ceros en otras partes.

Si expresamos un vector $v \in \mathbb{R}^n$ en esta base, tendría la forma

$$v = c_1 v_1 + ... + c_n v_n,$$

y aplicando la transformación, o de manera equivalente, multiplicando por B, obtendriamos

$$T(v) = c_1\lambda_1 v_1 + ... + c_n\lambda_n v_n,$$

es decir, simplemente haríamos operaciones con escalares. Por esta razón, es importante estudiar los valores y vectores propios asociados a operadores en $\mathbb{R}^n$, es decir, transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Esta teoría se conoce como *espectral.*

3.2 Valores propios

El primer paso para desarrollar la teoría espectral de un operador es determinar sus valores propios. Antes, recordemos el siguiente criterio para determinar si un operador es invertible.

Proposición 3.1. *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, y A una representación lineal en alguna base de $\mathbb{R}^n$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *A es invertible,*
2. *$Av = 0$ si y solo si $v = 0$,*
3. *$\det(A) \neq 0$.*

La misma proposición se puede reescribir de la siguiente manera.

Proposición 3.2. *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal, y M una representación lineal en alguna base de $\mathbb{R}^n$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. *M no es invertible,*
2. *Existe un vector $v \neq 0$, tal que $Mv = 0$,*
3. *$\det(A) = 0$.*

Supongamos que λ es un valor propio de A y v un λ-vector propio. Como $v = Iv$, entonces

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda Iv \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0.$$

Es decir, $v \in \ker(T)$ aunque $v \neq 0$. Esto quiere decir que $A - \lambda I$ no es invertible y por tanto,

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Este es el criterio que buscabamos para localizar los valores propios.

Definición 3.2. *Si $A \in M_{n\times n}$, entonces*

$$p(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A)$$

se conoce como polinomio característico *de A.*

Observación 3.1. *λ es valor propio de A si y solo si es raíz de $p(\lambda)$.*

Problema Resuelto 3.1. *Encuentre los valores propios, de la transformación lineal con representación matricial*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución 3.1. *Primero determinamos el polinomio característico:*

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} && (3.1) \\ &= \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 && (3.2) \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)^2. && (3.3) \end{aligned}$$

Los valores propios de A son las raices de $p(\lambda) = (x-1)(x-2)^2$, es decir,

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

Podemos verificar nuestra respuesta en `WxMaxima`, de la siguiente manera:

Primero, introducimos la matriz.

```
(%i1)   matrix(
         [3,1,-1],
         [2,2,-1],
         [2,2,0]
        );
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Posteriormente, calculamos el polinomio característico. En este caso, `WxMaxima` usará la definición

$$p(x) = \det(A - xI).$$

```
(%i2)   charpoly(%, x), expand;
```

(%o2) $-x^3 + 5x^2 - 8x + 4$

Finalmente, factorizamos el polinomio.

```
(%i8)   factor(%o2);
```

(%o8) $-(x-2)^2 (x-1)$

Otra manera, más directa, es encontrar directamenta las raices del polinomio

```
(%i13) realroots(%o2);
```

(%o13) $[x = 2, x = 1]$

Otra manera de obtener los valores propios es la siguiente:

```
(%i21) eigenvalues(A);
```

(%o21) $[[1, 2], [1, 2]]$ *En este caso, el primer arreglo nos dice los valores propios, mientras que el segundo, nos dice sus* multiplicidades algebráicas, *que es el exponente que tienen asociado en el polinomio característico.*

Ejemplos

Problema Resuelto 3.2. *Encuentre los valores propios de las siguientes matrices. Verifique sus resultados usando* `WxMaxima`.

1.
$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

2.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

3.
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

4.
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

5.
$$A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

6.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

7.
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

8.
$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

9.
$$A=\begin{bmatrix}7 & -2 & -4\\ 3 & 0 & -2\\ 6 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

10.
$$A=\begin{bmatrix}-3 & -7 & -5\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

3.3 Vectores propios

Definición 3.3. *Si $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es una transformación lineal y A su representación matricial, en la base estandar, y λ un valor propio de A, entonces cualquier vector $v\in\mathbb{R}^n$ que satisfaga la ecuación*

$$Av=\lambda v$$

se conoce como λ-vector propio.

Al conjunto de λ-vectores propios se le conoce como λ-espacio propio y se denota por E_λ.

Observación 3.2. *En el caso anterior, tenemos que*

$$E_\lambda=\ker\left(A-\lambda I\right).$$

Problema Resuelto 3.3. *Encuentre el espacio propio asociado al valor propio $\lambda_1=2$ de la matriz A definida en (3.1).*

Solución 3.2. *Si*

$$v=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\in E_{\lambda_1},$$

entonces $\left(A-2I\right)v=0$, es decir,

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

que se reduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}2x=z\\ z=2y\end{cases}.$$

Escogiendo $z = 2t$, *donde* $t \in \mathbb{R}$, *obtenemos*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Es decir $\ker(A - 2I)$ *esta generado por el conjunto* $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ *y al consistir de un solo vector, este es linealmente independiente, y por tanto es una base. En resumen,*

$$\ker(A - 2I) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Problema Resuelto 3.4. *Encuentre el espacio propio asociado al valor propio* $\lambda_2 = 1$ *de la matriz* A *definida en (3.1).*

Solución 3.3.

$$\ker(A - I) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Para comprobar nuestros resultados, podemos usar `WxMaxima`. Primero, introducimos nuestra matriz.

```
(%i1)   matrix(
         [3,1,-1],
         [2,2,-1],
         [2,2,0]
        );
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Posteriormente, calculamos los vectores propios de la siguiente manera.

```
(%i2)   eigenvectors(%);
```

(%o2) $[[[1,2],[1,2]],[[[1,0,2]],[[1,1,2]]]]$

El primer arreglo $[1,2]$ nos dice los dos valores propios, mientras que el segundo $[1,2]$ nos dice su multiplicidad algebráica. El tercer arreglo $[1,0,2]$ es un vector propio de $\lambda = 1$, mientras que el último $[1,1,2]$ es uno asociado a $\lambda = 2$. Como explicamos anteriormente, cada uno de estos constituye una base de sus respectivos espacios propios.

Ejemplos

Problema Resuelto 3.5. *Encuentre los espacios propios de los diferentes valores propios de las matrices dadas en el ejercicio 3.2.*

3.4 Diagonalización

Definición 3.4. $A \in M_n$ *se dice que es* diagonalizable *si existe una base de* $\mathbb{R}^n$ *que consista de vectores propios de* A*.*

Problema Resuelto 3.6. *Determine si la matriz* A *definida en (3.1) es diagonalizable.*

Solución 3.4. *Como vimos en las secciones anteriores, los valores propios de* A *son* $\lambda_1 = 2$ *y* $\lambda_2 = 1$, *con respectivos espacio propios*

$$\ker(A-2I) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

y

$$\ker(A-I) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$$

Como cualquier otro vector propio es o bien multiplo de $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *o bien de* $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, *tendríamos a los más una conjuto de dos vectores propios linealmente independientes. Sin embargo, cualquier base de* $\mathbb{R}^3$ *debe tener exactamente 3 vectores propios linealmente independientes. Por tanto* A *no es diagonalizable.*

Podemos comprobar este resultado usando `WxMaxima` *de la siguiente manera.*

Primero, introducimos la matriz de manera habitual.

```
(%i1)   A: matrix(
         [3,1,-1],
         [2,2,-1],
         [2,2,0]
        );
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Y posteriormente usamos el comando `nondiagonalizable`, *siempre calculando primero los vectores propios de la matriz.*

```
(%i4)   eigenvectors(A);
```

(%o4) $[[[1,2],[1,2]],[[[1,0,2]],[[1,1,2]]]]$

```
(%i5)   nondiagonalizable;
```

(%o5) $true$

Si la respuesta es `true`, esto quiere decir que en efecto, tal matriz no es diagonalizable. En otro caso, obtenendremo `false`.

¿Porqué decimos que una matriz es diagonalizable? Consideremos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, y una base

$$F = (v_1, v_2)$$

de valores propios. Como $T(v_1) = \lambda_1 v_1$, $T(v_a) = \lambda_2 v_2$ y en terminos de esta base

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_F, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_F,$$

entonces

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_F\right) = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_F = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix}_F$$

y de manera similar

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_F\right) = \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_F = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}_F.$$

Entonces, la representación matricial D de la transformación T en la base F estará formada por los dos vectores columna, que resultan de aplicar la transformación a cada elemento de la base, es decir,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Este mismo razonamiento, lo podemos aplicar a cualquier tranformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, si podemos obtener una base de vectores propios para su representación matricial A (en la base estandar o de hecho, en cualquier otra base), es decir, si A es diagonalizable.

En este caso, ¿cómo podemos relacionar las representaciones matriciales de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, en la base estandar y en una base de vectores propios? Denotemos por A a la primera y por D a la segunda, mientras que por $V = (\mathbb{R}^n, E)$ al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ en la base E estandar, mientra que $V' = (\mathbb{R}^n, F)$ en la de valores propios. Considere el diagrama **??**, donde P denota la matriz cambio de base $P_{F,E}$. Es claro que

$$AP = PD,$$

y por tanto, multiplicando por $P^{-1} = P_{E,F}$ por la izquierda en ambos lados de la ecuación,

$$D = P^{-1}AP.$$

En este caso, decimos que D es una matriz diagonal *semejante* a A. Para un repaso de cambios de base, consulte la sección 2.6.

Problema Resuelto 3.7. *Determine si la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

es diagonalizable y encuentre una matriz diagonal semejante.

Solución 3.5. *Para encontrar los vectores propios, podemos proceder como en la sección 3.3. Para hacer más eficientes los cálculos, usaremos* `WxMaxima`*. Primero, introducimos la matriz:*

```
        A: matrix(
         [3,2,4],
(%i1)    [2,0,2],
         [4,2,3]
        );
```

(%o1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Después, encontramos los valores propios:

```
(%i2)   eigenvectors(A);
```

(%o2) $[[[8,-1],[1,2]],[[[1,\frac{1}{2},1]],[[1,0,-1],[0,1,-\frac{1}{2}]]]]$

La salida de la última instrucción quiere decir que $\lambda = 8$ *es un vector propio, de multiplicidad 1 con vector propio*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

mientras que $\lambda_1 = -1$ *es un vector propio, de multiplicidad 2 y por tanto, los siguientes dos vectores*

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

son vectores propios, linealmente independientes asociados a $\lambda_2 = -1$.

Por lo tanto,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Introducimos esta matriz en `WxMaxima` *y calculamos su inversa, a la que denotamos por* Q.

```
(%i5)   P: matrix(
         [1,1,0],
         [1/2,0,1],
         [1,-1,-1/2]
        );
```

(%o5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

```
(%i6)   Q:invert(P);
```

(%o6) $\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$

Finalmente, realizamos el calculo $P^{-1}AP$

```
(%i7)   Q.A.P;
```

(%o7) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

para verificar que, en efecto, la matriz resultante es diagonal, y en su diagonal estan ordenados los valores propios de A.

Ejemplos

Problema Resuelto 3.8. *Determine si cada matriz* A *en el ejercicio 3.2 son diagonalizables, y en caso de serlo, encuentre*

1. *Una base* F *de vectores propios de A;*
2. *la matriz* $P = P_{F,E}$ *cambio de base, donde* E *es la base estandar del respectivo espacio vectorial;*
3. *la matriz diagonal* D *semejante a* A, *usando la matriz cambio de base* P.

4 Ecuaciones de Orden Superior

4.1 Ecuaciones Diferenciales Lineales

Una ec. dif. lineal de $n-$ésimo orden tiene la forma

$$b_n(x)y^{(n)} + \cdots + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x)$$

donde $g(x)$ y los *coeficientes* $b_j(x)$ dependen *sólo* de x.

Si $g(x) \equiv 0$, diremos que (4.1) es *homogénea.*[1] también diremos que es de *coeficientes constantes* si cada $b_j(x)$ es precisamente una constante.

[1] Observe que es homogénea en un sentido diferente a la sección previa;

Teorema 4.1. *Consideremos el problema de valor inicial dado por* (4.1) *y n condiciones iniciales dadas*

$$y(x_0) = c_0,\, y'(x_0) = c_1,\, \cdots\, y^{(n-1)} = c_{n-1}.$$

Si $g(x)$ y $b_j(x), j = 0, 1, ..., n$ son continuas en algún intervalo $\mathcal{I}$ que contiene a x_0 y si $b_n(x) \neq 0$ en $\mathcal{I}$, entonces el problema de valor inicial dado por (4.1) *y* (4.1) *tiene una* única *solución definida a través de $\mathcal{I}$.*

Cuando las condiciones en $b_n(x)$ en el teorema 4.1 se satisfacen, podemos dividir (4.1) y obtenemos

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_0(x)y = \phi(x)$$

donde

$$a_j(x) = \frac{b_j(x)}{b_n(x)},\, j = 0, 1, \cdot, n-1$$

y $\phi(x) = \frac{g(x)}{b_n(x)}$.

Definimos el operador diferencial $L(y)$ por

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_0(x)y$$

donde $a_i(x)$, $i = 0, 1, ..., n-1$, son continuas en un intervalo de interés.

Entonces (4.1) puede reescribirse como

$$L(y) = \phi(x),$$

y en particular, una ec. dif. lineal homogénea se puede reescribir como

$$L(y) = 0$$

4.1.1 Soluciones Linealmente Independientes

Un conjunto de funciones

$$\{y_1(x), ..., y_n(x)\}$$

es *linealmente independiente* en $a \leq x \leq b$ si existe un conjunto de constantes

$$\{c_1, ..., c_n\}$$

no todas iguales a cero (es decir, al menos una de estas debe ser diferente de cero) tales que

$$c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x) \equiv 0$$

en $a \leq x \leq b$.

Problema Resuelto 4.1. *El conjunto*

$$\{x, 5x, 1, \sin(x)\}$$

es linealmente dependiente en $\mathbb{R}$ *ya que con las constantes*

$$c_1 = -5,\ c_2 = 1,\ c_3 = 0,\ c_4 = 0,$$

se satisface (4.1)*:*

$$-5 \cdot x + 1 \cdot 5x + 0 \cdot 1 + 0 \cdot \sin(x) = 0.$$

Observación 4.1. *El conjunto*

$$c_1 = \cdots = c_n = 0$$

siempre resuelve (4.1)*. De hecho,* si es la única solución *diremos que* $\{y_i(x)\}_{i=1,\ldots,n}$ *es* linealmente independiente.

La ec. dif. lineal homogénea de orden n $L(y) = 0$ siempre tiene n soluciones linealmente independientes. Si $y_1(x), ..., y_n(x)$ representan tales soluciones, entonces la solución general de $L(y) = 0$ es

$$y(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x)$$

donde $c_1, ..., c_2$ son constantes arbitrarias.

4.1.2 El Wronskiano

El *wronskiano* de un conjunto de funciones

$$\{z_1(x), ..., z_n(x)\}$$

en el intervalo $a \leq x \leq b$, (que tengan al menos $n-1$ derivadas en dicho intervalo) es el determinante

$$W(z_1, ..., z_n) = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1' & z_2' & \cdots & z_n' \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \cdots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Teorema 4.2. *1. Si el Wronskiano de un conjunto de n funciones definidas en un intervalo $a \leq x \leq b$ es diferente de cero, para al menos en un punto en este intervalo, entonces el conjunto de funciones es linealmente independiente.*

2. *Si el Wronskiano es* identicamente cero *en dicho intervalo y cada uno de las funciones es una* solución de la misma ecuación diferencial, *entonces el conjunto de funciones es linealmente dependiente.*

Observación 4.2. *El teorema 4.2 no es concluyente cuando el wronskiano es identicamente cero, pero las funciones no son soluciones de una misma ecuación diferencial.*

4.1.3 Ecuaciones No Homogeneas

Sea y_p cualquier solución particular de la ecuación (4.1) y y_h la solución *general* de la ecuación homogénea asociada $L(y) = 0$, (a y_h se le llama solución complementaria).

Teorema 4.3. *La solución general de la ecuación $L(y) = \phi(x)$ es* $y = y_p + y_h$.

4.1.4 Ejemplos

Problema Resuelto 4.2.

- *Encuentre el wronskiano de* $\left\{e^x, e^{-x}\right\}$.
- *Determine si el conjunto es linealmente independiente en* $(-\infty, +\infty)$.
- *Verifique directamente la definición.*

Problema Resuelto 4.3.

- *Encuentre el wronskiano de* $\{\sin(3x), \cos(3x)\}$.
- *Determine si el conjunto es linealmente independiente en* $(-\infty, +\infty)$.

- *Verifique directamente la definición.*

Problema Resuelto 4.4. ▪ *Encuentre el wronskiano de* $\left\{x, x^2, x^3\right\}$.

- *Determine si el conjunto es linealmente independiente en* $(-\infty, +\infty)$.
- *Verifique directamente la definición.*

Problema Resuelto 4.5. ▪ *Encuentre el wronskiano de* $\{1-x, 1+x, 1-3x\}$.

- *Verifique directamente si el linealmente independiente a partir de la definición.*
- *Realice nuevamente el ejercicio, sabiendo que las funciones son solución de la ecuación* $y'' = 0$.

4.2 *Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Segundo Orden con Coeficientes Constantes*

4.2.1 *La ecuación Característica*

Para la ec. dif.

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

con a_1, a_0 constantes, asociaremos la ec. algebráica

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

la cual se conoce como *ecuación característica* de (4.2).

Problema Resuelto 4.6. *La ecuación característica de*

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

es

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0;$$

mientras que la ecuación característica de

$$y'' - 2y' + y = 0$$

es

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Toda ecuación característica se puede factorizar de la siguiente manera

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0.$$

4.2.2 *La Solución General*

La solución general de (4.2) se obtienen a partir de las raices de (4.2); consideraremos los siguientes 3 casos.

4.2.3 *Caso 1.* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Si $\lambda_2 = -\lambda_1$, (4.2) se puede reescribir como

$$y = k_1 \cosh(\lambda_1 x) + k_2 \sinh(\lambda_2 x).$$

Problema Resuelto 4.7. *Resuelva*

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

4.2.4 *Caso 2.* $\lambda = a \pm ib \in \mathbb{C}, b \neq 0$.

En este caso, *necesariamente* $\lambda_2 = a - ib$; y la solución esta dada por

$$y = d_1 e^{(a+ib)x} + d_2 e^{(a-ib)x};$$

que es algebraicamente equivalente a

$$y = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx).$$

Problema Resuelto 4.8. *Resuelva*

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = 0 \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

4.2.5 *Caso 3.* $\lambda_1 = \lambda_2$.

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_2 x}.$$

Problema Resuelto 4.9. *Resuelva*

$$\begin{cases} 100\dfrac{d^2u}{dt^2} - 20\dfrac{du}{dt} + u = 0 \\ u(0) = 2,\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

Problema Resuelto 4.10. *Resuelva*

$$y'' - 7y' = 0.$$

Problema Resuelto 4.11. *Resuelva*

$$y'' - 5y = 0.$$

Problema Resuelto 4.12. *Vuelva a escribir el problema 4.11 en términos de funciones hiperbólicas.*

Problema Resuelto 4.13. *Resuelva*

$$\ddot{y} + 10\dot{y} + 21y = 0.$$

Problema Resuelto 4.14. *Resuelva*

$$y'' + 4y = 0.$$

4.3 *Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de $n-$ésimo Orden con Coeficientes Constantes*

La ecuación característica de la ecuación diferencial

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

con coeficientes constantes es

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

La ecuación característica de

$$y^{(4)} - 3y''' + 2y'' - y = 0$$

es

$$\lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 - 1 = 0.$$

4.3.1 *La solución general*

Si las soluciones de la ecuación característica

$$\lambda_1, ..., \lambda_n$$

son todas distintas, la solución es

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + ... + c_n e^{\lambda_n x}.$$

Diremos que una raíz λ_k tiene multiplicidad p si $(\lambda - \lambda_k)^p$ es factor de la ecuación característica, pero $(\lambda - \lambda_k)^{p+1}$ no.

En este caso, podemos asociar p soluciones linealmente independiente con λ_k :

$$e^{\lambda_k x}, xe^{\lambda_k x}, ..., x^{p-1}e^{\lambda_k x}.$$

4.3.2 Ejemplos

Problema Resuelto 4.15. *Resuelva*

$$\begin{cases} y''' + y' = 0 \\ y(0) = 3, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \end{cases}$$

Problema Resuelto 4.16. *Resuelva*

$$\begin{cases} y^{(4)} - 2y^{(3)} + 6y^{(2)} - 10y^{(1)} + 5y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 0. \end{cases}$$

4.3.3 Ejemplos

Problema Resuelto 4.17. *Resuelva*

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Problema Resuelto 4.18. *Resuelva*

$$y^{(4)} - 9y'' + 20y = 0.$$

Problema Resuelto 4.19. *Resuelva*

$$y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0.$$

Problema Resuelto 4.20. *Resuelva*

$$y^{(4)} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0.$$

Problema Resuelto 4.21. *Resuelva*

$$\frac{d^5P}{dt^5} - \frac{d^4P}{dt^4} - 2\frac{d^3P}{dt^3} + 2\frac{d^2P}{dt^2} + \frac{dP}{dt} - P = 0.$$

4.4 Método de Coeficientes Indeterminados

Por el teorema 4.3, la solución de $L(y) = 0$ está dada por la solución particular y_p más la solución general y_h, la cuál es la solución de la ecuación lineal homogénea $L(y) = 0$.

En esta sección, aprenderemos a obtener y_p, una vez que y_h es conocida, a través del *coeficientes indeterminados.*

4.4.1 *Forma simple del método*

Observación 4.3. *Para aplicar este método a la ecuación diferencial* $L(y) = \phi(x)$, ϕ y TODAS sus derivadas *deben estar generadas por un conjunto* finito *de funciones linealmente independientes*

$$\{y_1(x), ..., y_n(x)\}.$$

En ese caso, comenzaremos suponiendo que $y_p(x)$ es una combinanción lineal de $y_1(x), ..., y_n(x)$:

$$y_p(x) = A_1 y_1(x) + ... + A_n y_n(x)$$

donde $A_1, A_2, ..., A_n$ son constantes.

A continuación, revisaremos algunos casos comunes, en los que podemos aplicar dicho método.

4.4.2 *Caso* $\phi(x) = p_{n(x)}$

Si suponemos que $\phi(x)$ es un polinomio de grado n, entonces

$$y_p(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + ... + A_1 x + A_0.$$

Recordemos que la solución general de la ecuación $y'' - y' - 2y = 0$ está dada por...

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \tag{4.1}$$

Problema Resuelto 4.22. *Resuelva*

$$y'' - y' - 2y = 4x^2$$

4.4.3 *Caso* $\phi(x) = ke^{\alpha x}$

Si suponemos que $\phi(x)$ es una función exponencial, entonces

$$y_p(x) = Ae^{\alpha x}.$$

Problema Resuelto 4.23. *Resuelva*

$$y'' - y' - 2y = e^{3x}.$$

4.4.4 *Caso* $\phi(x) = ke^{\alpha x}$

Si suponemos que $\phi(x)$ es una función exponencial, entonces

$$y_p(x) = Ae^{\alpha x}.$$

4.4.5 *Caso* $\phi(x) = k_1 \sin(\beta x) + k_2 \cos(\beta x)$

Si suponemos que $\phi(x)$ es una función senoidal, entonces

$$y_p(x) = A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)$$

Problema Resuelto 4.24. *Resuelva*

$$y'' - y' - 2y = \sin(2x).$$

4.4.6 *Generalizaciones*

Si $\phi(x) = e^{\alpha x} p_n(x)$, entonces

$$y_p = e^{\alpha x} \left(A_n x^n + ... + A_1 x + A_0 \right).$$

Problema Resuelto 4.25. *Resolver*

$$y'' = e^{-x} x^2 \tag{4.2}$$

Si $\phi(x) = ke^{\alpha x} \sin(\beta x)$ o $\phi(x) = ke^{\alpha x} \cos(\beta x)$, entonces

$$y_p(x) = A_0 e^{\alpha x} \sin(\beta x) + B_0 e^{\alpha x} \cos(\beta x).$$

Problema Resuelto 4.26. *Resuelva*

$$y'' = e^{-x} \cos(3x) \tag{4.3}$$

Aun más, si $\phi(x) = ke^{\alpha x} \sin(\beta x) p_n(x)$ o $\phi(x) = ke^{\alpha x} \cos(\beta x) p_n(x)$, entonces

$$\begin{aligned} y_p(x) = {} & A_0 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \left(A_n x^n + ... + A_1 x + A_0 \right) \\ & + B_0 e^{\alpha x} \cos(\beta x) \left(B_n x^n + ... + B_1 x + B_0 \right). \end{aligned}$$

Observación 4.4. *Si cualquier término de y_p, salvo por los términos constantes, es también un término de y_h, entonces y_p* debe ser modificada *multiplicandola por x^m.*

Aquí m es el entero positivo más pequeño tal que el producto $x^m y_p$ no tiene términos en común con y_h.

Problema Resuelto 4.27. *Resuelve la ecuación*

$$y'' - y' - 2y = \frac{1}{2} e^{-x} \tag{4.4}$$

Observación 4.5. *Si $\phi(x)$ no tiene alguna de las formas anteriores o la ecuación diferencial no tiene coeficientes constantes, este método no se puede aplicar.*

4.4.7 Principio de superposición

Consideremos la ecuación diferencial

$$L[y] = \phi_1(x) + \phi_2(x) \tag{4.5}$$

donde L es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes de la forma

$$L[y] = y^{(n)} + ... + a_1 y' + a_0 y \tag{4.6}$$

Digamos que $y_h(x)$ es la solución de la ecuación homogénea asociada, es decir,

$$L[y_h] = 0,$$

mientras que $y_{p1(x)}$ resuelve

$$L[y_{p1}] = \phi_1(x)$$

y $y_{p2}(x)$,

$$L[y_{p2}] = \phi_2(x).$$

Entonces $y(x) = y_h(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$ resuelve la ecuación

$$L[y] = \phi_1(x) + \phi_2(x).$$

Problema Resuelto 4.28. *Resuelve la ecuación*

$$y'' - y' - 2y = 2e^{3x} - 3t^2 \tag{4.7}$$

4.5 Aplicaciones

4.5.1 Resortes

4.5.2 Resortes

4.5.3 Ley de Hooke

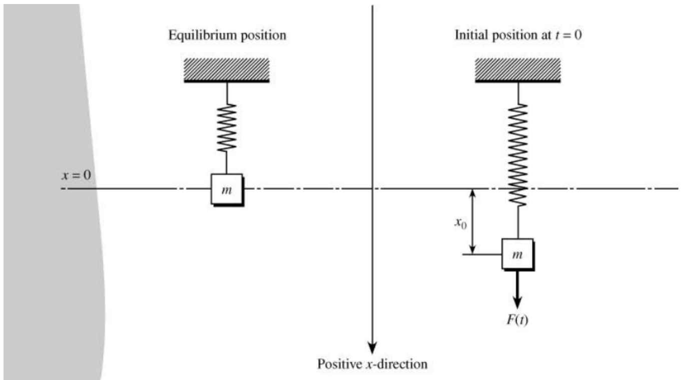
La fuerza restauradora F de un resorte es igual y opuesta a las fuerzas aplicadas al mismo y proporcional a la extensión (contracción) l del resorte de la fuerza aplicada, es decir, $F = -kl$, donde k indica la constante de proporcionalidad, generalmente llamada constante del resorte.

A partir de la segunda ley de Newton, tenemos que

$$m\ddot{x} = -kx - a\dot{x} + F(t),$$

o de manera equivalente

$$\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m},$$



img030601.png: 0x0 pixel, 300dpi, 0.00x0.00 cm, bb=

donde a, k son constantes positivas de proporcionalida; $F(t)$ es una fuerza externa; y sujeta a condiciones iniciales

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0.$$

Problema Resuelto 4.29. *Una masa de $2kg$ se suspende de un resorte con una constante conocida de $10N/m$, y se le permite llegar a una posición de reposo. Luego se le pone en movimiento dándole una velocidad inicial de $150cm/seg$. Encuentre una expresión para el movimiento de la masa, suponiendo que no hay resistencia del aire.*

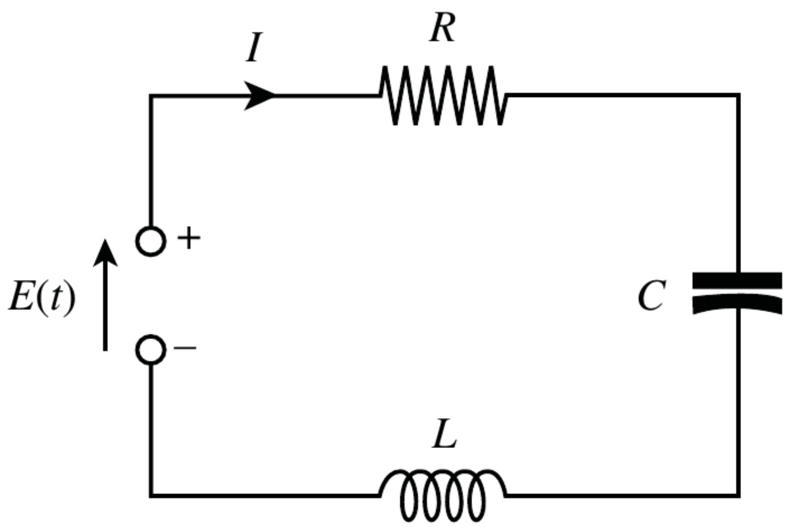
Problema Resuelto 4.30. *Encuentre la frecuencia circular; la frecuencia natural y el periodo el oscilador armónico simple del problema 4.29.*

4.5.4 *Círcuitos eléctricos*

- Cantidad de corriente I (en amperios)
- Resistencia R (en ohmios)
- Inductor L (en henrios)
- Fuerza electromotriz (abreviado fem)E (en voltios)
- Capacidad C (en faradios)

La ley del bucle de Kirchhoff La suma algebraica de las caídas de voltaje en un circuito eléctrico cerrado simple es cero.

$$RI + L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}q - E(t) = 0 \tag{4.8}$$



$$I = \frac{dq}{dt} \tag{4.9}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \tag{4.10}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}E(t) \tag{4.11}$$

$$q(0) = q_0 \tag{4.12}$$

$$I(0) = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=0} = I_0 \tag{4.13}$$

Problema Resuelto 4.31. *Un circuito RCL conectado en serie tiene* $R = 180$ *ohmios,* $C = 1/280$ *faradio,* $L = 20$ *henries, y una aplicada voltaje* $E(t) = 10 \operatorname{sen} t$.

Suponiendo que no hay carga inicial en el capacitor, sino una corriente inicial de 1 amperio en $t = 0$ *cuando se aplica la tensión por primera vez, encuentre la carga subsiguiente en el capacitor.*

4.6 Variación de parametros

La técnica de variación de parametros es otra forma de encontrar una solución particular de la ecuación diferencial:

$$L(y) = \phi(x)$$

una vez que conocemos la solución de $L(y) = 0$.

Recordemos que la solución de $L(y) = 0$ está dada por

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_n y_n(x)$$

4.6.1 El Método

Una solución particular de $L(y) = \phi(x)$ tiene la forma

$$y_p(x) = \nu_1(x) \cdot y_1(x) + ... + \nu_n(x) \cdot y_n(x)$$

donde $y_i(x),\ i = 1, 2, ..., n$ están dadas por (4.33) y $\nu_i(x),\ i = 1, 2, ..., n$ son funciones por determinar.

Para esto, primero resolvemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \nu_1' y_1 + ... + \nu_n' y_n & = 0 \\ \nu_1' y_1' + ... + \nu_n' y_n' & = 0 \\ \dots & \\ \nu_1' y_1^{(n-1)} + ... + \nu_n' y_n^{(n-1)} & = \phi(x) \end{cases}$$

Posteriormente, integramos cada $\nu_i'(x)$ para obtener $\nu(x)$.

Como $y_1(x), ..., y_n(x)$ son soluciones linealmente independientes de la misma ecuación $L(y) = 0$, su wronskiano nunca se anula (teorema 4.2), y esto significa que el sistema (4.6) tiene determinante siempre diferente de cero, y por tanto se puede resolver de manera única para $v_1'(x), ..., v_n'(x)$.

Observación 4.6. *El método de variación de parametros puede ser aplicado a todas las ecuaciones diferenciales lineales, y por tanto tiene un mayor alcance que el método de coeficientes indeterminados.*

Sin embargo, si ambos métodos son aplicables, es preferible el de coeficientes indeterminados por ser más eficiente.

Además, en algunos casos es imposible obtener una forma cerrada de la integral de $v_i'(x)$, y otros métodos deben ser aplicados.

4.6.2 Ejemplos

Problema Resuelto 4.32. *Resuelva* $y''' + y' = \sec(x)$

Problema Resuelto 4.33. *Resuelva* $y''' - 3y'' + 2y' = \dfrac{e^x}{1 + e^{-x}}$

Problema Resuelto 4.34. *Resuelva* $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

4.6.3 *Ejemplos de valor inicial*

Problema Resuelto 4.35. *Resuelva*

$$y'' - y' - 2y = 4x^2,\ y(0) = 1, y'(0) = 4.$$

Problema Resuelto 4.36. *Resuelva*

$$\begin{cases} y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0, \\ y(\pi) = 0, y'(\pi) = 0, y''(\pi) = 1. \end{cases}$$

5 Transformada de Laplace

5.1 La Transformada de Laplace

5.1.1 Definición

Sea $f(x)$ una función definida en $0 \leq x < \infty$ y sea s una variable arbitraria. La *Transformada de Laplace* de $f(x)$, denotada ya sea por $\mathcal{L}\{f(x)\}$ o por $F(s)$ está dada por

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx,$$

siempre y cuando dicha integral converja.

La convergencia ocurre cuando el límite

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^{R} e^{-sx} f(x) dx \tag{5.1}$$

existe.

Observación 5.1. *1. Si el límite anterior no existe, la integral impropia diverge y $f(x)$ no tiene transformada de Laplace.*

2. Cuando evaluamos la integral en (5.1), la variable s deberá tratarse como una constante debido a que la integración es respecto de x.

En esta sección usaremos la convención de que una función se denota por minúsculas, mientras que su transformada se denotará por la correspondiente mayúscula:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s), \mathcal{L}\{g(x)\} = G(s).$$

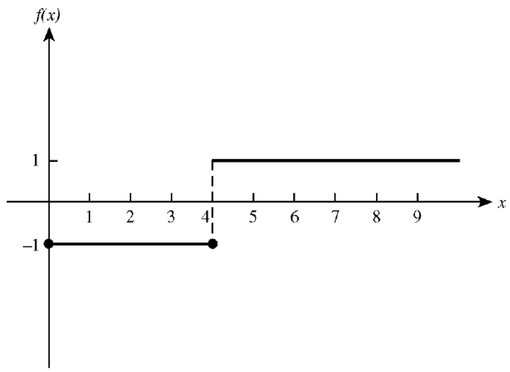
De manera similar, a, c_1, c_2 serán constantes arbitrarias.

5.1.2 Ejemplos

Problema Resuelto 5.1. *Encuentre la Transformada de Laplace de $f(x) = 1$.*

Problema Resuelto 5.2. *Encuentre la Transformada de Laplace*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$



Algunas fórmulas básicas

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \texttt{ n natural} \tag{5.2}$$

$$\mathcal{L}\left\{\sin(kt)\right\} = \frac{k}{s^2+k^2} \tag{5.3}$$

$$\mathcal{L}\left\{\cos(kt)\right\} = \frac{s}{s^2+k^2} \tag{5.4}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a} \tag{5.5}$$

Linealidad

$$\mathcal{L}\left\{c_1 f(x) + c_2 g(x)\right\} = c_1 F(s) + c_2 G(s) \tag{PTL1}$$

Problema Resuelto 5.3. *Encuentre la Transformada de Laplace de* $f(x) = 3 + 2x^2$.

Problema Resuelto 5.4. *Encuentre la Transformada de Laplace de*

$$f(x) = 5\sin(3x) - 17e^{-2x}$$

Problema Resuelto 5.5. *Encuentre la Transformada de Laplace de*

$$f(x) = 2\sin(x) + 3\cos(2x).$$

Problema Resuelto 5.6. *Encuentre la Transformada de Laplace de*

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 4.$$

5.1.3 *Propiedades*

5.1.4 *Propiedades de la Transformada de Laplace*

$$\mathcal{L}\left\{e^{ax} f(x)\right\} = F(s-a) \tag{PTL2}$$

$$\mathcal{L}\left\{x^{n} f(x)\right\} = (-1)^{n} \frac{d^{n}}{ds^{n}}\left(F(s)\right) \tag{PTL3}$$

Problema Resuelto 5.7. *Encuentre la Transformada de Laplace de*

$$g(x) = xe^{4x}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^{n} e^{at}\right\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \tag{5.6}$$

Problema Resuelto 5.8. *Encuentre la Transformada de Laplace de*

$$g(x) = e^{-2x} \sin(5x)$$

Problema Resuelto 5.9. *Encuentre la Transformada de Laplace de*

$$g(x) = x\cos(\sqrt{7}x).$$

Problema Resuelto 5.10. *Encuentre la Transformada de Laplace de*

$$g(x) = e^{-x} x\cos(2x).$$

5.2 *Transformada Inversa de Laplace*

5.2.1 *Definición*

Una *transformada inversa de Laplace* de $F(s)$, denotada por $\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$, es una función $f(x)$ tal que

$$\mathcal{L}\left\{f(x)\right\} = F(s).$$

La manera más práctica de encontrar las inversas es identificar, en una tabla de transformadas, la función $F(s)$ como una transformada de Laplace de una función $f(x)$.

Generalmente, esto se hace manipulando algebraicamente $F(s)$.

5.2.2 Manipulación de denominadores

Para poder encontrar transformadas inversas de Laplace, necesitaremos manipular expresiones algebraicas.

Métodos algebraicos Especialmente, necesitaremos dos técnicas:

- Complemento de cuadrados.
- Fracciones parciales.

Complemento de cuadrados Si $p(x) = ax^2 + bx + c$, entonces

$$p(x) = a(x-h)^2 + k,$$

donde $h = -\dfrac{b}{2a}$ y $k = p(h)$.

Fracciones parciales Otro método útil que se recomienda repasar es la descomposición en fracciones parciales.

Linealidad

Proposición 5.1. *Si* $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$ *y* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F(s) + c_2G(s)\} = c_1f(x) + c_2g(x).$$

5.2.3 Ejemplos

Problema Resuelto 5.11. *Encontrar* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\}$

Problema Resuelto 5.12. *Encontrar* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-8}\right\}$

Problema Resuelto 5.13. *Encontrar* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+6}\right\}$

Problema Resuelto 5.14. *Encontrar* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s}{(s^2+1)^2}\right\}$

Problema Resuelto 5.15. *Encontrar* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2-9}\right\}$

5.3 E.D. Lineales con Coeficientes Constantes

5.3.1 Transformadas de Laplace de Derivadas

Denotaremos $\mathcal{L}\{y(x)\}$ por $Y(s)$. Bajo condiciones muy generales, la transformada de Laplace de la $n-$ésima derivada,

$n = 1, 2, 3...$ de $y(x)$ está dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dx^n}\right\} =& s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots \\ & - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

Si las condiciones iniciales en $y(x)$ en $x = 0$ está dada por

$$y(0) = c_0,\ y'(0) = c_1, \cdots,\ y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

entonce (5.3) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dx^n}\right\} =& s^n Y(s) - s^{n-1}c_0 - s^{n-2}c_1 - \cdots \\ & - sc_{n-2} - c_{n-1}.\end{aligned}$$

5.3.2 *Casos Especiales*

$$\mathcal{L}\left\{y'(x)\right\} = sY(s) - c_0 \tag{5.7}$$

$$\mathcal{L}\left\{y''(x)\right\} = s^2 Y(s) - c_0 s - c_1. \tag{5.8}$$

5.3.3 *Ejemplos*

Problema Resuelto 5.16. *Resuelva*

$$\begin{cases} y' - 5y = 0; \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Problema Resuelto 5.17. *Resuelva*

$$\begin{cases} y' - 5y = e^{5x}; \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Problema Resuelto 5.18. *Resuelva*

$$\begin{cases} y' + y = \sin(x); \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Problema Resuelto 5.19. *Resuelva*

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0; \\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2. \end{cases}$$

Problema Resuelto 5.20. *Resuelva*

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 4x^2; \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

Problema Resuelto 5.21. *Resuelva*

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 4y = 0; \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 5. \end{cases}$$

5.4 Transformada de funciones discontinuas

5.4.1 Convolución

La convolución de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se define como

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt.$$

Teorema 5.1.

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x) \tag{5.9}$$

$$f(x) * (g(x) + h(x)) = f(x) * g(x) + f(x) * h(x). \tag{5.10}$$

Teorema 5.2 (Teorema de Convolución)**.** *Si* $\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ *y* $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$, *entonces*

$$\mathcal{L}\{f(x) * g(x)\} = F(s)G(s).$$

De los teoremas anteriores, obtenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(x) * g(x) = g(x) * f(x).$$

5.4.2 Función Escalón

La función escalón se define como

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Al hacer un cambio de coordenadas $x' = x - c$, obtenemos

$$u(x-c) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c. \end{cases}$$

Teorema 5.3.

$$\mathcal{L}\{u(x-c)\} = \frac{1}{s}e^{-cs}.$$

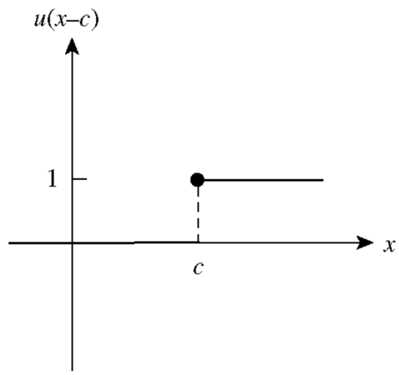
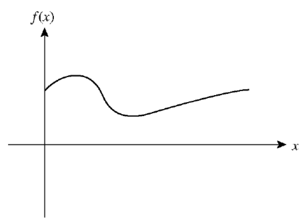
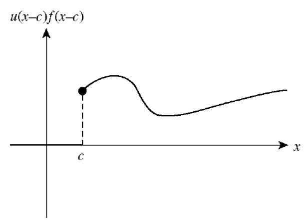


Figura 5.1: Función Escalón

$u(x-c)$





5.4.3 *Traslaciones*

Para cualquier función $f(x)$, definida para $x \geq 0$, obtenemos

$$u(x-c)f(x-c) = \begin{cases} 0 & x < c \\ f(x-c) & x \geq c. \end{cases}$$

Teorema 5.4. *Si* $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$, *entonces*

$$\mathcal{L}\{u(x-c)f(x-c)\} = e^{-cs}F(s).$$

De manera inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-cs}F(s)\right\} = u(x-c)f(x-c).$$

5.4.4 *Ejemplos*

Problema Resuelto 5.22. *Sean* $f(x) = e^{3x}$ *y* $g(x) = e^{2x}$.

1. *Calcule* $f(x) * g(x)$;
2. *calcule* $g(x) * f(x)$;
3. *verifique el teorema* 5.1.

Problema Resuelto 5.23. *Encuentre*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 5s + 6}\right\}$$

por convoluciones.

Problema Resuelto 5.24. *Encuentre*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2-1}\right\}$$

por convoluciones.

Problema Resuelto 5.25. *Encuentre*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\left(s^2+4\right)}\right\}$$

por convoluciones.

Problema Resuelto 5.26. *Encuentre*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-1\right)^2}\right\}$$

por convoluciones.

Problema Resuelto 5.27. *Encuentre* $\mathcal{L}\left\{g(x)\right\}$ *si*

$$g(x)=\begin{cases}0 & x<4\\ \left(x-4\right)^2 & x\geq 4.\end{cases}$$

Problema Resuelto 5.28. *Encuentre* $\mathcal{L}\left\{g(x)\right\}$ *si*

$$g(x)=\begin{cases}0 & x<4\\ x^2 & x\geq 4.\end{cases}$$

6 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

6.1 Proyecto final: Ecuaciones diferenciales

Teoría

Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$x'(t) = cx(t).$$

Esta ecuación describe un modelos donde la razón de crecimiento instantaneo x' es propocional al estado del sistema, en un momento determinado. Aplicaciones de este modelo incluyen:

1. Crecimiento poblacional;
2. decaimiento radioactivo;
3. la Ley de Newton, para la temperatura de un cuerpos; y
4. interés compuesto.

De hecho, si conocemos la condición *inicial,* es decir, el valor del sistema en el tiempo $t = 0$, podemos encontrar una *única solución al problema.*

Teorema 6.1. *La única solución* continuamente diferenciable *a la ecuación diferencial*

$$x' = cx,$$

con condición incial $x(0) = x_0$ *es*

$$x(t) = e^{tc}x_0.$$

Es fácil comprobar que (6.1) es un solución derivando de manera usual; que esta sea la *única solución* con derivada continua es resultado del *teorema fundamental de las ecuaciones diferenciales ordinarias.*

Sin embargo, este modelo solo describe un sistema con una cantidad que evoluciona con el tiempo, ¿como modelar un sistema con más cantidades?

Podemos pensar que existen cantidades $x_1(t), ..., x_n(t)$ de manera que la razón de cambio de cada una sea *combinación lineal* de cada una de los estados del sistema, es decir, para $k = 1, ..., n$:

$$x_k'(t) = a_{k,1}x_1(t) + ... + a_{k,n}x_n(t).$$

Esto es una manera de generalizar el hecho de que para una sola cantidad, su razón de cambio instantanea sea *proporcional*.

De manera matricial, podemos escribir este sistema como

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & ... & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

Si definimos

$$\begin{cases} x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \\ x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} \\ A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & ... & a_{n,n} \end{bmatrix} \end{cases}$$

el sistema anterior se puede reescribir como

$$x'(t) = Ax(t).$$

Note como se parece este sistema al de una sola variable. De hecho, así como podemos definir e^a para $a \in \mathbb{R}$, es posible definir e^A, donde A es una matriz $n \times n$. Para esto, necesitamos la siguiente definición de la función exponencial.

Definición 6.1.

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

Esta definición tiene sentido para matrices porque $A^k = A \cdots A$ un número k de veces.

Teorema 6.2. *La única solución de la ecuación diferencial* vectorial

$$x'(t) = Ax(t),$$

para $x(t) \in \mathbb{R}^n$ *para cada* $t \in \mathbb{R}$ *y* $A \in M_n$*, con condición inicial*

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{n,0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

es

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Sin embargo, calcular la n-ésima potencia de una matriz puede ser demasiado complicado... excepto para matrices diagonales.

Proposición 6.1. *Si*

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal, entonces

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & & \\ 0 & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

Demostración. La demostración se puede hacer por inducción. □

Supongamos que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una tranformación lineal, cuya representación matricial A (en la base estandar E) es diagonalizable y P es la matriz de paso de la base F de vectores propios a la base E. Entonces si D es la matriz que representa la misma transformación en la base F, sabemos que

$$A = PDP^{-1}.$$

Por inducción, no es difícil demostrar que

$$A^n = PD^nP^{-1},$$

y por tanto, multiplicando por un escalar $t \in \mathbb{R}$,

$$tA^n = P(tD^n)P^{-1}.$$

Antes de continuar, recordemos que por propiedades distributivas de las matrices

$$R(M+N)S = RMS + RNS,$$

o de manera más generalizar

$$\sum (RM_kS) = R\left(\sum M_k\right)S.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= \sum_{k\geq 0} \frac{(tA)^k}{k!} &(6.1)\\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{\left(P(tD^n)P^{-1}\right)^k}{k!} &(6.2)\\
&= P\left(\sum_{k\geq 0} \frac{(tD^n)^k}{k!}\right)P^{-1} &(6.3)\\
&= Pe^{tD}P^{-1}. &(6.4)
\end{aligned}$$

Basta entonces encontrar e^{tD}. Pero como vimos, calcular las potencias de D no es dificil.

$$\begin{aligned}
e^{tD} &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(tD)^k &(6.5)\\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} (t\lambda_1)^k & 0 & & \\ 0 & (t\lambda_2)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & (t\lambda_n)^k \end{bmatrix} &(6.6)\\
&= \begin{bmatrix} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(t\lambda_1)^k & 0 & & \\ 0 & \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(t\lambda_2)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}(t\lambda_n)^k \end{bmatrix} &(6.7)\\
&= \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & & \\ 0 & e^{t\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}. &(6.8)
\end{aligned}$$

¡Listo!

Ejemplos

Problema Resuelto 6.1. *Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

con condiciones inciales

$$x(0) = 0,\ y(0) = 3.$$

Solución 6.1. *Rescribimos $x = x_1, y = x_2$ y podemos escribir el sistema de forma matricial, en la siguiente manera*

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Usando `WxMaxima`*, podemos encontrar los valores y vectores propios.*

(%i1)
```
A: matrix(
 [-1,0],
 [1,2]
);
```

(%o1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(%i2)
```
eigenvectors(%);
```

(%o2) $[[[-1,2],[1,1]],[[[1,-\frac{1}{3}]],[[0,1]]]]$

Esto quiere decir que $\lambda_1 = -1$ es un valor propio con vector propio

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

mientras que $\lambda_2 = 2$ también lo es, con vector propio

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observación 6.1. *Como tenemos dos vectores propios en un espacio de dimensión dos, basta verificar que son linealmente independiente, para saber que forman una base. Para comprobar que son linealmente independientes, formamos una matriz que tenga como columnas a estos vectores y verificamos que esta matriz es invertible.*

(%i4)
```
P: matrix(
 [1,0],
 [-1/3,1]
);
```

(%o4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

(%i5)
```
determinant(%);
```

(%o5) 1

Entonces, $F = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ *es una base de* $\mathbb{R}^2$*, de vectores propios de* A*. Por tanto* A *es diagonalizable. Como* P *es la matriz de cambio de la base* F *a la base estandar* E*, usamos la siguiente identidad*

$$D = P^{-1}AP,$$

para encontrar la matriz diagonalizada D*. Denotaremos a* P^{-1} *por* Q*.*

(%i6)
```
Q:invert(P);
```

(%o6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

(%i7)
```
D:Q.A.P;
```

(%o7) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Entonces, sabemos que

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}, \tag{6.9}$$

y podemos hallar e^{tA} *con la ecuación*

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}.$$

Podemos hacer los cálculos en `WxMaxima` *de la siguiente manera*

(%i8)
```
matrix(
 [%e^(-t),0],
 [0,%e^(2*t)]
);
```

(%o8) $\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2\,t} \end{pmatrix}$

(%i9)
```
P.%o8.Q;
```

(%o9) $\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{e^{2\,t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} & e^{2\,t} \end{pmatrix}$

Es decir,

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{e^{2\,t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} & e^{2\,t} \end{bmatrix}$$

Las condiciones inciales se pueden escribir en forma vectorial como

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

y por tanto, nuestra solución sera

$$\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{e^{2\,t}}{3} - \frac{e^{-t}}{3} & e^{2\,t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Realizamos los cálculos en `WxMaxima` de la siguiente manera. Primero introducimos el vector como si fuera una matriz de dos reglos y una columnas

```
(%i10)  matrix(
         [0],
         [3]
        );
```

(%o10) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

y posteriormente hacemos la multiplicación, recordando que `WxMaxima` le asigno la etiqueta `%o9` a nuestra matriz e^{tA}, y la etiqueta `%o10` a nuestro vector de condiciones inciales.

```
(%i11)  %o9.%o10;
```

(%o11) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3\,e^{2\,t} \end{pmatrix}$

Por tanto, la solucion a nuestro sistema de ecuaciones diferenciales es

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Proyecto final

Resuelva los siguientes sistema de ecuaciones diferenciales, como se hizo en el ejemplo anterior. Debe plantear de manera correcta todos los pasos, indicar los cálculos que hizo en `WxMaxima` y escribiendo de manera clara sus conclusiones. El proyecto puede ser elaborado por equipos de a lo más tres personas, y debe ser entregado en computadora el día del examen final.[1]

1.
$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}$$

[1] Para copiar el cógido que introduzca en `WxMaxima`, seleccione con el botón izquierdo de su ratón, el lado izquierdo del código, de manera que cambie a color azul como en la figura **??** y posteriormente presione el botón derecho, y seleccione la opción copiar.

con condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

2.
$$x' = Ax$$

con
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

y condiciones iniciales
$$x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3.
$$x' = Ax$$

con
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

y condiciones iniciales
$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ b \end{bmatrix}.$$

6.2 *Solución de Sistemas Lineales*

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas $u(x)$ y $v(x)$:

$$u' + u - v = 0 \tag{6.10}$$
$$v' - u + v = 2 \tag{6.11}$$
$$u(0) = 1 \tag{6.12}$$
$$v(0) = 2 \tag{6.13}$$

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas $y(x)$ y $z(x)$:

$$y' + z = x \tag{6.14}$$
$$z' + 4y = 0 \tag{6.15}$$
$$y(0) = 1 \tag{6.16}$$
$$z(0) = -1 \tag{6.17}$$

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas $w(x)$, $y(x)$ y $z(x)$:

$$w' + y = \sin x \tag{6.18}$$
$$y' - z = e^x \tag{6.19}$$
$$z' + w + y = 1 \tag{6.20}$$

$$w(0) = 0,\ y(0) = 1,\ z(0) = 1 \tag{6.21}$$

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas $y(x)$ y $z(x)$:

$$y'' + z + y = 0 \tag{6.22}$$
$$z' + y' = 0 \tag{6.23}$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ z(0) = 1 \tag{6.24}$$

Resuelva el siguiente sistema para las funciones incógnitas $y(x)$ y $z(x)$:

$$z'' + y' = \cos x \tag{6.25}$$
$$y'' - z = \sin x \tag{6.26}$$

$$z(0) = -1,\ z'(0) = -1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \tag{6.27}$$

7 Bibliografía