Teoría de Gráficas

Dr. Juliho Castillo

23 de noviembre de 2024

Teoría general de grafos

En matemáticas, la *teoría de grafos* estudia estructuras matemáticas usadas para modelar relaciones por pares entre objetos.

Teoría general de grafos

Definición de grafo

Concepto de gráfo

Un *grafo* G consiste de:

(a) Un conjunto V cuyos elementos son llamados *vértices,* puntos o nodos de G.

(b) Un conjunto E de pares (no ordenados) de distintos vertices, a los que llamaremos *aristas* de G.

Denotaremos un grafo por $G(V, E)$ cuando querramos enfatizar los componentes del mismo.

Observación 1.1.
Debido a una ambigüedad en la traducción del inglés al español, en ocasiones, a un grafo también se le conoce como *gráfica*. En este material, a veces utilizaremos *gráfica*, pero debe entenderse como un grafo.

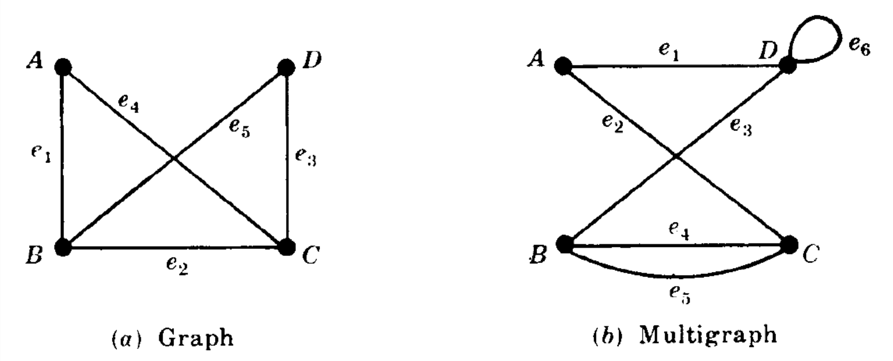


Figura 1.1: Grafos y multigrafos

Multigrafos

Consideremos la figura 1.1 (b). Las aristas e_4y e_5 son llamadas *aristas multiples* ya que conectan los mismos extremos, mientras que la arista e_6 es llamada *bucle* ya que conecta un vértice consigo mismo.

Multigrafos

Consideremos la figura 1.1 (b). Las aristas e_4y e_5 son llamadas *aristas multiples* ya que conectan los mismos extremos, mientras que la arista e_6 es llamada *bucle* ya que conecta un vértice consigo mismo.

Tales diagramas son llamados *multigrafos;* la definición formal de grafo no admite aristas multiples ni bucles.

Tales diagramas son llamados *multigrafos;* la definición formal de grafo no admite aristas multiples ni bucles.

Observación 1.2.
Sin embargo, algunos textos utilizan “grafos” para referirse a lo que nosotros llamaremos multigrafos, mientras que ocupan “grafo simple” para lo que nosotros llamaremos grafos.

Grado de un vértice

El *grado* de un vértice v es un grafo G, denotado por $\deg(v)$, es igual al número de aristas in G que contienen a v, es decir, que *inciden* en v.

Dado que cada arista incide en dos vértices diferentes, tenemos el siguiente resultado simple pero importante:

Teorema 1.1.
La suma de los grados de los vértices en un grafo G es el doble del número de aristas.

Ejemplo 1.1.
En el grafo de la figura 1.1(a), tenemos que

$$\deg(A) = 2,\ \deg(B) = 3,\ \deg(C) = 3,\ \deg(D) = 2.$$

La suma de los grados es igual a 10, que es dos veces el número de aristas.

Ejemplo 1.1.
En el grafo de la figura 1.1(a), tenemos que

$$\deg(A) = 2,\ \deg(B) = 3,\ \deg(C) = 3,\ \deg(D) = 2.$$

La suma de los grados es igual a 10, que es dos veces el número de aristas.

Definición 1.1.
Diremos que un vértice es *par* o *impar* de acuerdo a la paridad de su grado. En el ejemplo anterior, tanto A com D son vértices pares, mientras que B y C son impares.

Definición 1.1.
Diremos que un vértice es *par* o *impar* de acuerdo a la paridad de su grado. En el ejemplo anterior, tanto A com D son vértices pares, mientras que B y C son impares.

Observación 1.3.
Diremos que un vertice de grado cero está *aislado*.

Gráfos finitos y triviales

Diremos que un grafo es *finito* si tiene un número finito de vértices y un número finito de aristas.

Observe que un número finito de vértices implica un número finito de aristas; pero no lo contrario no es necesariamente cierto.

Diremos que un grafo con un único vértice, sin aristas, es *trivial*.

Gráfos finitos y triviales

Diremos que un grafo es *finito* si tiene un número finito de vértices y un número finito de aristas.

Observe que un número finito de vértices implica un número finito de aristas; pero no lo contrario no es necesariamente cierto.

Diremos que un grafo con un único vértice, sin aristas, es *trivial*.

Gráfos finitos y triviales

Diremos que un grafo es *finito* si tiene un número finito de vértices y un número finito de aristas.

Observe que un número finito de vértices implica un número finito de aristas; pero no lo contrario no es necesariamente cierto.

Diremos que un grafo con un único vértice, sin aristas, es *trivial.*

Observación 1.4.
A menos que se indique de otra manera, sólo trataremos con grafos finitos.

Teoría general de grafos

Subgrafos y grafos homeomorfos e isomorfos

Ahora, discutiremos relaciones de equivalencia entre grafos.

Subgrafos

Consideremos un grafo $G(V,E)$. Diremos que otro grafo $H(V',E')$ es un *subgrafo* de G si los vértices y aristas de H están contenidos en los vértices y aristas de G, es decir,

$$V' \subset V, \; E' \subset E.$$

En particular:

(a) Un subgrafo $H(V', E')$ de $G(V, E)$ es llamado subgrafo *inducido* por sus vértices V' si el conjunto de aristas E' contiene todas las aristas en G cuyo extremos pertenecen a los vértices en H.

(b) Si v es un vértice en G, entonces $G - v$ es el subgrafo de G ontenido al borrar v de G y todas las aristas en G que inciden en v.

(c) Si e es una arista en G, entonces $G - e$ es el subgrafo de G obtenido borrando la arista e en G.

En particular:

(a) Un subgrafo $H(V', E')$ de $G(V, E)$ es llamado subgrafo *inducido* por sus vértices V' si el conjunto de aristas E' contiene todas las aristas en G cuyo extremos pertenecen a los vértices en H.
(b) Si v es un vértice en G, entonces $G - v$ es el subgrafo de G ontenido al borrar v de G y todas las aristas en G que inciden en v.
(c) Si e es una arista en G, entonces $G - e$ es el subgrafo de G obtenido borrando la arista e en G.

En particular:

(a) Un subgrafo $H(V', E')$ de $G(V, E)$ es llamado subgrafo *inducido* por sus vértices V' si el conjunto de aristas E' contiene todas las aristas en G cuyo extremos pertenecen a los vértices en H.
(b) Si v es un vértice en G, entonces $G - v$ es el subgrafo de G ontenido al borrar v de G y todas las aristas en G que inciden en v.
(c) Si e es una arista en G, entonces $G - e$ es el subgrafo de G obtenido borrando la arista e en G.

Grafos isomorfos

Dos grafos $G(V, E)$ y $G^*(V^*, E^*)$ son llamados *isomorfos* si existe una función biyectiva $f : V \to V^*$ tal que: $\{u, v\}$ es una arista de G si y solo si $\{f(u), f(v)\}$ es una arista de G^*.

La idea es que estos grafos son equivalentes, aún cuando sus representaciones pueden lucir muy diferentes.

Grafos isomorfos

Dos grafos $G(V, E)$ y $G^*(V^*, E^*)$ son llamados *isomorfos* si existe una función biyectiva $f : V \to V^*$ tal que: $\{u, v\}$ es una arista de G si y solo si $\{f(u), f(v)\}$ es una arista de G^*.

La idea es que estos grafos son equivalentes, aún cuando sus representaciones pueden lucir muy diferentes.

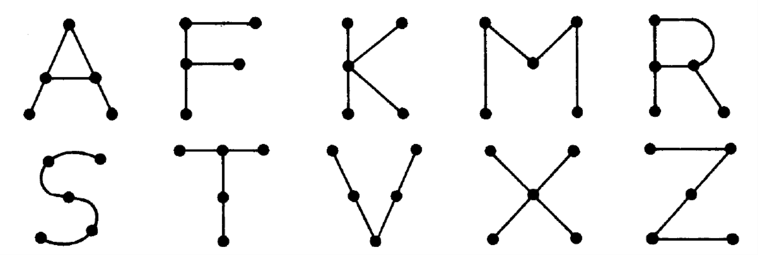


Figura 1.2: Grafos isomorfos.

Grafos homeomorfos

Dado un grafo G, podemos obtener un nuevo grafo dividiendo una arista de G con vértices adicionales.

Dos grafos G y G^* son llamados *homeomorfos* si pueden obtenerse de gráficas isomorfas a través de este método.

Grafos homeomorfos

Dado un grafo G, podemos obtener un nuevo grafo dividiendo una arista de G con vértices adicionales.

Dos grafos G y G^* son llamados *homeomorfos* si pueden obtenerse de gráficas isomorfas a través de este método.

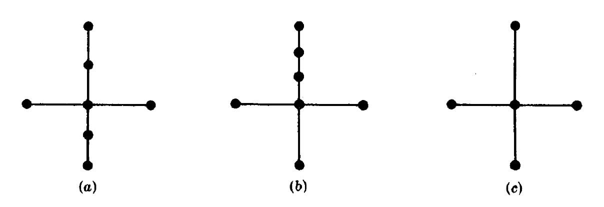


Figura 1.3: Grafos homomorfos

Los grafos (a) y (b) son homeomorfos, ya que se pueden obtener añadiendo vértices al grafo (c).

Teoría general de grafos

Caminos y conexidad

Un *camino* en un (multi)grafo G consiste en una sucesión alternante de vértices y arista de la forma

$$v_0, e_1, v_1, ..., e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$$

donde cada arista e_i contiene los vértices v_{i-1} y v_i.

Observación 1.5.
Observe que en grafo, podemos simplificar la notación para un camino, indicando sólo los vértices que recorre:

$$v_0, v_1, ..., v_n.$$

Diremos que el camino es *cerrado* si $v_n = v_0$. En otro caso, diremos que el camino conecta v_0 con v_n.

Un *camino simple* es aquel en el cual todos los vértices son distintos. Mientras que un camino en el que todas las aristas son distintas se llama *paseo*.

Diremos que el camino es *cerrado* si $v_n = v_0$. En otro caso, diremos que el camino conecta v_0 con v_n.

Un *camino simple* es aquel en el cual todos los vértices son distintos. Mientras que un camino en el que todas las aristas son distintas se llama *paseo*.

Diremos que el camino es *cerrado* si $v_n = v_0$. En otro caso, diremos que el camino conecta v_0 con v_n.

Un *camino simple* es aquel en el cual todos los vértices son distintos. Mientras que un camino en el que todas las aristas son distintas se llama *paseo*.

La *longitud* de un camino es igual a número de aristas en la sucesión que lo define.

La *longitud* de un camino es igual a número de aristas en la sucesión que lo define.

Un *ciclo* es un camino cerrado de *longitud* al menos 3, en el que todos los vértices son distintos, excepto el inicial v_0 y el final v_n.

Un ciclo de longitud k es llamado *$k-$ciclo.*

Un *ciclo* es un camino cerrado de *longitud* al menos 3, en el que todos los vértices son distintos, excepto el inicial v_0 y el final v_n.

Un ciclo de longitud k es llamado *$k-$ciclo*.

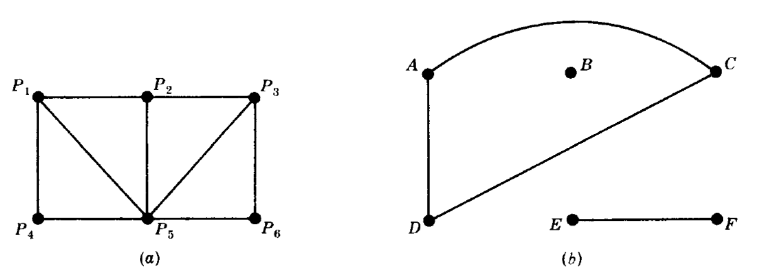
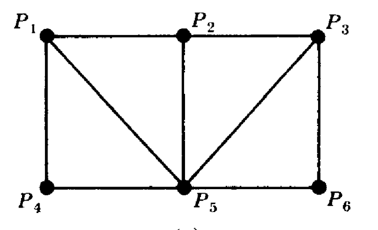


Figura 1.4: Conexidad en grafos

Ejemplo 1.2.

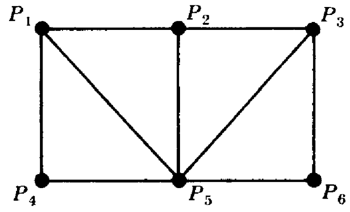
Consideremos el grafo 1.4(a). Considere las siguientes sucesiones

$$\alpha = (P_4, P_1, P_2, P_5, P_1, P_2, P_3, P_6),$$
$$\beta = (P_4, P_1, P_5, P_2, P_6)$$
$$\gamma = (P_4, P_1, P_5, P_2, P_3, P_5, P_6)$$
$$\delta = (P_4, P_1, P_5, P_3, P_6).$$



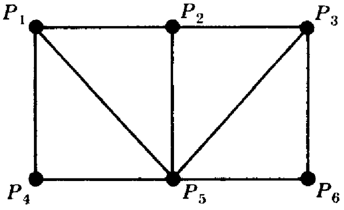
(a)

α es un camino de P_4 a P_6, pero no es un paseo.



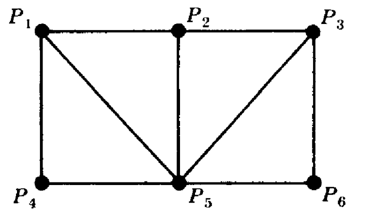
(a)

β no es un camino, ya que no existe alguna arista $\{P_2, P_6\}$.



(a)

γ es un paseo, pero no es un camino simple.



(a)

δ es un camino simple de P_4 a P_6, pero no es el camino más corto, es decir, con el meno número de aristas. ¿Cuál es el camino más corto?

Eliminando aristas innecesarias, no es difícil ver que cualquier camino de u a v puede ser reemplazado por un camino simple.

Formalmente:

Teorema 1.2.
Existe un camino del vértice u a v si y solo si existe un camino simple de u a v.

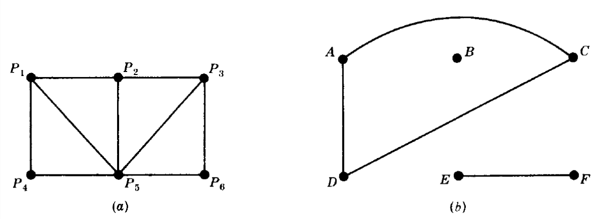
Eliminando aristas innecesarias, no es difícil ver que cualquier camino de u a v puede ser reemplazado por un camino simple.

Formalmente:

Teorema 1.2.
Existe un camino del vértice u a v si y solo si existe un camino simple de u a v.

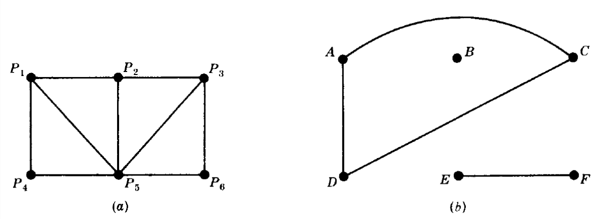
Conexidad y componentes conexas

Un grafo G es conexo si existe un camino entre cualesquiera dos vértices. Por ejemplo, el grafo 1.4(a) es conexo, pero no así el grafo 1.4(b).



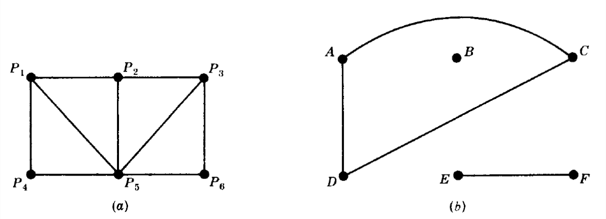
Conexidad y componentes conexas

Un grafo G es conexo si existe un camino entre cualesquiera dos vértices. Por ejemplo, el grafo 1.4(a) es conexo, pero no así el grafo 1.4(b).



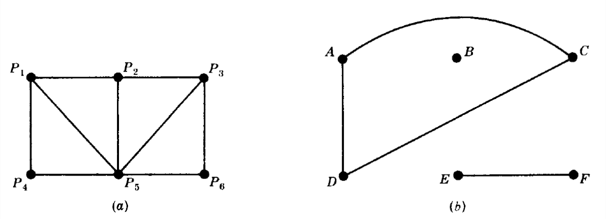
Consideremos un grafo G. Un subgrafo conexo H de G es llamado *componente conexa* de G si H no está contenido de manera propia en cualquier otro grafo conexo de G.

Por ejemplo, el grafo 1.4(b) tiene tres componentes conexas.



Consideremos un grafo G. Un subgrafo conexo H de G es llamado *componente conexa* de G si H no está contenido de manera propia en cualquier otro grafo conexo de G.

Por ejemplo, el grafo 1.4(b) tiene tres componentes conexas.



Observación 1.6.
Formalmente, permitiendo que un vértice u esté conectado consigo mismo, la relación

$$u \texttt{ está conectado con } v$$

es una relación de equivalencia en el conjunto de vértices del grafo G, y las clases de equivalencia de esta relación son las componentes conexas de G.

Observación 1.6.
Formalmente, permitiendo que un vértice u esté conectado consigo mismo, la relación

$$u \ \texttt{está conectado con} \ v$$

es una relación de equivalencia en el conjunto de vértices del grafo G, y las clases de equivalencia de esta relación son las componentes conexas de G.

Distancia y diametro

Consideremos un grafo conexo G. La distancia entre dos vértices u y v en G, denotada por $d(u, v)$, es la longitud del camino más corto entre u y v. Eñ diametro de G, escrito $diam(G)$, es la distancia máxima entre cualesquiera dos puntos en G.

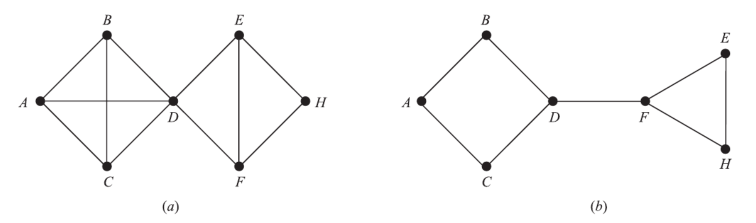


Figura 1.5: Distancia y diametro

Por ejemplo, en el grafo 1.5(a), el diamtero es 3, mientras que en el (b), el diametro es 4.

Puntos de corte y puentes

Sea G un grafo conexo. Un vértice v en G es llamado *punto de corte* si $G - v$ es disconexo. Una arista e en G es llamada *puente* si $G - e$ es disconexo.

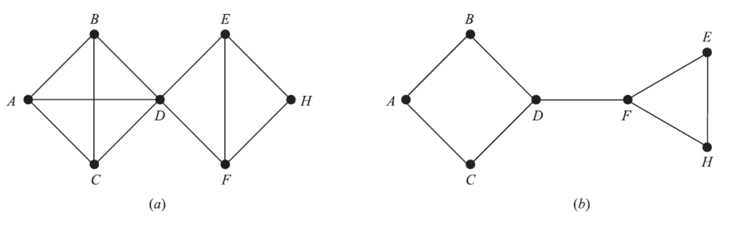


Figura 1.6: Puntos de corte y puentes

Teoría general de grafos

Grafos transitables y eulerianos

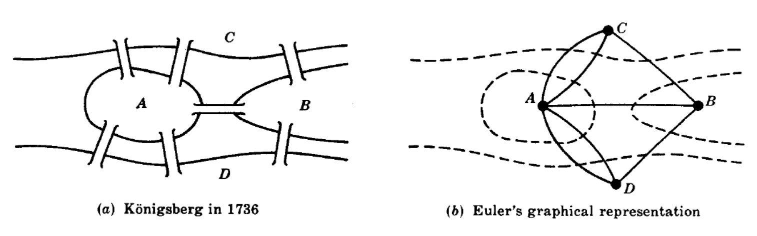


Figura 1.7: Puentes de Königsberg y su representación

Un multigrafo es llamado *transitable* si existe un *paseo* (un camino dónde todos las aristas son diferentes), que incluye *todos los vértices y todas las aristas.*

Tal paseo será llamado *paseo transitable*.

Observación 1.7.
De manera equivalente, un paseo transitable es un camino en el que todos los vértices se transitan *al menos* una vez, pero las aristas *exactamente* una vez.

Un multigrafo es llamado *transitable* si existe un *paseo* (un camino dónde todos las aristas son diferentes), que incluye *todos los vértices y todas las aristas.*

Tal paseo será llamado *paseo transitable*.

Observación 1.7.
De manera equivalente, un paseo transitable es un camino en el que todos los vértices se transitan *al menos* una vez, pero las aristas *exactamente* una vez.

Proposición 1.1.
Cualquier grafo conexo y finito con exactamente dos vértices impares es transitable. Un paseo transitable puede comenzar en alguno de los vértices impares y terminar en el otro vértice impar.

Un grafo G es llamado *grafo Euleriano* si existe un *paseo transitable cerrado*.

A tal paseo le llamaremos *paseo Euleriano.*

Teorema 1.3 (Euler).
Un grafo conexo y finito es Euleriano si y solo si cada vértice tiene grado par.

Un grafo G es llamado *grafo Euleriano* si existe un *paseo transitable cerrado*.

A tal paseo le llamaremos *paseo Euleriano.*

Teorema 1.3 (Euler).
Un grafo conexo y finito es Euleriano si y solo si cada vértice tiene grado par.

Un grafo G es llamado *grafo Euleriano* si existe un *paseo transitable cerrado*.

A tal paseo le llamaremos *paseo Euleriano.*

Teorema 1.3 (Euler).
Un grafo conexo y finito es Euleriano si y solo si cada vértice tiene grado par.

Grafos hamiltonianos

En la definición de grafos Eulerianos se enfatizó pasar por todas las aristas.

Ahora, nos enfocaremos en visitar todos los vértices.

Grafos hamiltonianos

En la definición de grafos Eulerianos se enfatizó pasar por todas las aristas.

Ahora, nos enfocaremos en visitar todos los vértices.

Un *circuito Hamiltoniano* es un grafo G es un camino cerrado que visita cada vértice en G *exactamente* una vez.

Si G admite un circuito Hamiltoniano, entonces G es llamado un *grafo Hamiltoniano.*

Un *circuito Hamiltoniano* es un grafo G es un camino cerrado que visita cada vértice en G *exactamente* una vez.

Si G admite un circuito Hamiltoniano, entonces G es llamado un *grafo Hamiltoniano.*

Observación 1.8.
En la definición de circuito Hamiltoniano, cuando decimos que el camino *visita* cada vértice exactamente una vez significa que, aunque el vértice inicial tiene que ser el mismo que el final, todos los demás vértices intermedios deben ser distintos.

Observación 1.9.
Un paseo Euleriano atraviesa cada una de las aristas exactamente una vez, pero los vértices se pueden repetir, mientras que un circuito Hamiltoniano visita cada uno de los vértices exactamente una vez, pero las aristas pueden repetirse.

Teorema 1.4.
Sea G un grafo conexo con n vértices. Entonces G es Hamiltoniano si $n \geq 3$ y $n \leq \deg(v)$ para cada vértice v en G.

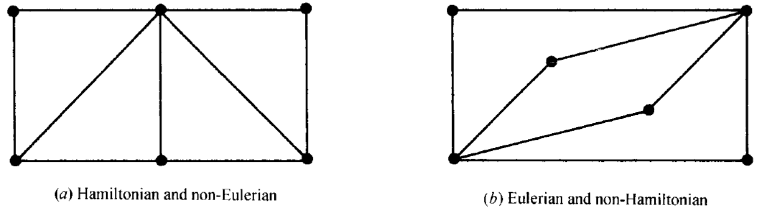


Figura 1.8: Circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

Teoría general de grafos

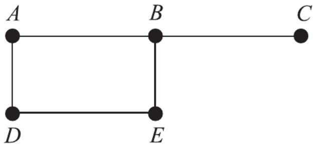
Matriz de adyacencia

Supongamos que G es un gráfo con m vértices y que estos han sido ordenados:

$$v_1, v_2, ..., v_m.$$

Entonces, la *matriz de adyacencia* $A = (a_{i,j})$ del grafo G es la matriz de dimensión $m \times m$ definida por:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & v_i \texttt{ es adyacente a } v_j \\ 0 & \texttt{en otro caso} \end{cases}$$



(a)

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

(b)

Figura 1.9: Matriz de adyacencia

Digrafos

Los *grafos dirigidos* o *digrafos* son grafos en los que las aristas tienen una dirección.

Digrafos

Grafos dirigidos

Un grafo dirigido $G = G(V, E)$ consiste de:

1. Un conjunto $V = V(G)$ cuyos elementos son llamados *vértices*;
2. un conjunto $E = E(G)$ de *pares ordenados* ordenados de vértices llamados *arcos* o *aristas dirigidas.*

Supongamos que $e = (u, v)$ es un arco en el digrafo G. Entonces, la siguiente terminología es usada:

- e comienza en v y termina en v;
- u es el origen o punto inicial de e, mientras que v es el destino o punto final de e.
- v es un sucesor de u;
- u es adyacente a v y v es adyacente desde u.

Si $u = v$, e es llamado un *bucle.*

Supongamos que $e = (u, v)$ es un arco en el digrafo G. Entonces, la siguiente terminología es usada:

- e comienza en v y termina en v;
- u es el origen o punto inicial de e, mientras que v es el destino o punto final de e.
- v es un sucesor de u;
- u es adyacente a v y v es adyacente desde u.

Si $u = v$, e es llamado un *bucle.*

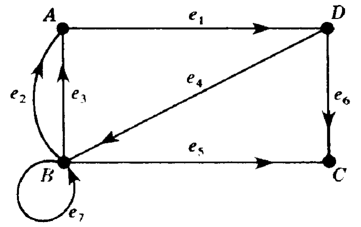
Si las aristas o los vértices de un digrafo están etiquetas con algún tipo de dato, diremos que es un *digrafo etiquetado.*

De manera similar a un grafo, un digrafo será finito si el conjunto de vértices y el de aristas es finito.

Si las aristas o los vértices de un digrafo están etiquetas con algún tipo de dato, diremos que es un *digrafo etiquetado.*

De manera similar a un grafo, un digrafo será finito si el conjunto de vértices y el de aristas es finito.

Ejemplo 2.1.
Consideremos el siguiente digrafo.



Las aristas e_2 y e_3 son llamados *paralelos,* ya que ambos comienzan en B y terminan en A. La arista e_7 es un *bucle.*

Ejemplo 2.2.

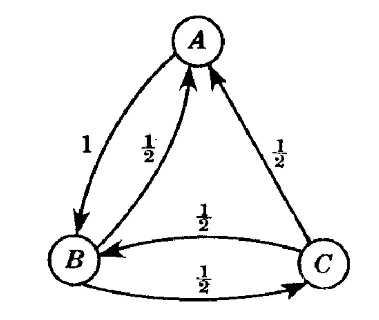


Figura 2.1: Proceso estocástico

Digrafos

Matriz de adyacencia

Ahora, sólo consideraremos *digrafos simples* $G(V, E)$, es decir, sin aristas paralelas. Entonces E es simplemente una relación en V.

De manera inversa, si R es una relación en V, entonces $G(V, R)$ es un digrafo simple.

En unidades anteriores, ya hemos construido digrafos asociados a relaciones de orden parcial, llamados diagramas de Hasse.

Ahora, sólo consideraremos *digrafos simples* $G(V, E)$, es decir, sin aristas paralelas. Entonces E es simplemente una relación en V.

De manera inversa, si R es una relación en V, entonces $G(V, R)$ es un digrafo simple.

En unidades anteriores, ya hemos construido digrafos asociados a relaciones de orden parcial, llamados diagramas de Hasse.

Ahora, sólo consideraremos *digrafos simples* $G(V, E)$, es decir, sin aristas paralelas. Entonces E es simplemente una relación en V.

De manera inversa, si R es una relación en V, entonces $G(V, R)$ es un digrafo simple.

En unidades anteriores, ya hemos construido digrafos asociados a relaciones de orden parcial, llamados diagramas de Hasse.

Supongamos que G es un digrafo simple con m vértices, y supongamos que los vértices de G han sido ordenados y son llamados $v_1, v_2, ..., v_m$.

Entonces la *matrix de adyacencia* $A = (a_{i,j})$ de G es la una matriz de dimensión $m \times m$ definida de la siguiente manera

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \exists e \in E : e = (v_i, v_j) \\ 0 & \texttt{en otro caso} \end{cases}$$

Supongamos que G es un digrafo simple con m vértices, y supongamos que los vértices de G han sido ordenados y son llamados $v_1, v_2, ..., v_m$.

Entonces la *matrix de adyacencia* $A = (a_{i,j})$ de G es la una matriz de dimensión $m \times m$ definida de la siguiente manera

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \exists e \in E : e = (v_i, v_j) \\ 0 & \texttt{en otro caso} \end{cases}$$

Observación 2.1.
Las matrices de adyacencia de un mismo grafo dependen del orden en que se enumeren los vértices. Sin embargo, dos matrices de adyacencia de un mismo grafo están relacionadas por operaciones elementales: cambiar el orden de columnas y renglones.

Observación 2.1.
Las matrices de adyacencia de un mismo grafo dependen del orden en que se enumeren los vértices. Sin embargo, dos matrices de adyacencia de un mismo grafo están relacionadas por operaciones elementales: cambiar el orden de columnas y renglones.

Ejemplo 2.3.
Sea G el siguiente digrafo

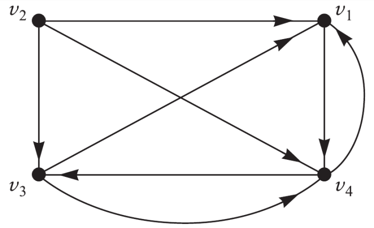


Figura 2.2: Construya su matriz de adyacencia del digrado anterior.

La matriz identidad $I_m = (I_{i,j})$ de dimensión $m \times m$ se define como

$$I_{i,j} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

es decir, es matriz cuadrangular con $1's$ en la *diagonal principal*, y ceros en cualquier otra entrada.

La matriz identidad $I_m = (I_{i,j})$ de dimensión $m \times m$ se define como

$$I_{i,j} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

es decir, es matriz cuadrangular con $1's$ en la *diagonal principal*, y ceros en cualquier otra entrada.

Ejemplo 2.4.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La propiedad principal de una matriz identidad I_m es que es nuestra respecto a la multiplicación de matrices, es decir, para cualquier otra matriz $A \in M_n$:

$$AI_n = I_nA = A.$$

La propiedad principal de una matriz identidad I_m es que es nuestra respecto a la multiplicación de matrices, es decir, para cualquier otra matriz $A \in M_n$:

$$AI_n = I_nA = A.$$

La potencia $n-$ésima de una matriz $A \in M_n$ se define de manera recursiva como

$$A^n = \begin{cases} I_n & n = 0 \\ AA^{n-1} & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Es decir,

$$A^0 = I, A^1 = A, A^2 = AA, ...$$

La potencia $n-$ésima de una matriz $A \in M_n$ se define de manera recursiva como

$$A^n = \begin{cases} I_n & n = 0 \\ AA^{n-1} & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Es decir,

$$A^0 = I, A^1 = A, A^2 = AA, \ldots$$

Definamos $a_k(i,j)$ como la entrada en la posición i,j de A^k.

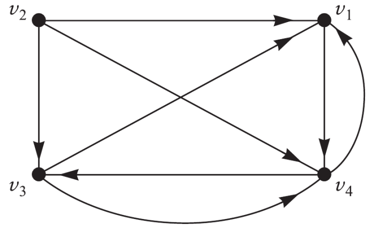
Proposición 2.1.
Sea A la matriz de adyacencia de un grafo G. Entonces $a_k(i,j)$ es igual al número de caminos de longitud k que van de v_i a v_j.

Definamos $a_k(i,j)$ como la entrada en la posición i,j de A^k.

Proposición 2.1.
Sea A la matriz de adyacencia de un grafo G. Entonces $a_k(i,j)$ es igual al número de caminos de longitud k que van de v_i a v_j.

Ejemplo

Consideremos nuevamente el grafo



Recordemos que su matriz de adyacencia es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{AD}$$

Entonces

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Observe que $a_2(4,1) = 1$, de manera que existe un solo camino de longitud 2 de v_4 a v_1. De manera similar, como $a_3(2,3) = 2$, entonces existen dos caminos de longitud 3 de v_2 a v_3.

Observación 2.2.
Si definimos

$$B_r = \sum_{i=1}^{r} A^i,$$

entonces la entrada i, j de esta matriz nos indicará el número de caminos de longitud a lo más r de v_i a v_j.

En nuestro ejemplo, considerando A dado por (AD), tenemos que

$$B_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 7 & 11 \\ 7 & 0 & 4 & 7 \\ 7 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

¿Existe alguna manera de llegar al vertice v_2 desde el vértice v_1, sin importar la longitud del camino?

En nuestro ejemplo, considerando A dado por (AD), tenemos que

$$B_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 7 & 11 \\ 7 & 0 & 4 & 7 \\ 7 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

¿Existe alguna manera de llegar al vertice v_2 desde el vértice v_1, sin importar la longitud del camino?

Digrafos

Matriz de accesibilidad

Sea $G = G(V, E)$ un grafo simple dirigido con m vértices $v_1, ..., v_m$. La *matriz de accesibilidad* de G es la matriz $m-$cuadrangular $P = (p_{ij})$ definida de la siguiente manera:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \texttt{existe un camino de } v_i \texttt{ a } v_j \\ 0 & \texttt{en otro caso} \end{cases}$$

Proposición 2.2.
Sea A la matriz de adyacencia de un grafo G con m vértices. Entonces la matriz de accesibilidad y

$$B_m = \sum_{i=1}^{m} A^i \tag{2.2}$$

tienen exactamente las mismas entradas no nulas.

Definición 2.1.
Un digrafo es *fuertemente conexo* si para cualquier par de vértices u, v existe al menos un camino de u a v y otro de v a u.

Proposición 2.3.
Sea $A \in M_m$ *la matriz de adyacencia de un grafo* G.
Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. G *es fuertemente conexo;*
2. *la matriz de accesibilidad* P *no tiene entradas nulas;*
3. *la matriz* B_m*, dada por* (2.2)*, no tiene entradas nulas.*

Ejemplo 2.5.

Para encontrar la matriz de accesibilidad asociada a la matriz de adyacencia A, dada por (AD), basta sustitur las entradas no nulas en la matriz B_4, dada por (2.1), por $1's$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Apéndice: Matrices

Las matrices son arreglos rectangulares de número que nos ayudan a codificar información. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

puede ser útil para codificar los coeficientes del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y = b_2 \end{cases}$$

En general, una matriz tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \tag{A}$$

Los subíndices de cada elemento $a_{i,j}$ denotan la posición del mismo: i es el número del *renglón* (contando de arriba a abajo), mientras que j es el número de la columna (contanto de izquierda a derecha).

En general, una matriz tiene la forma

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \tag{A}$$

Los subíndices de cada elemento $a_{i,j}$ denotan la posición del mismo: i es el número del *renglón* (contando de arriba a abajo), mientras que j es el número de la columna (contanto de izquierda a derecha).

Podemos extraer renglones y columnas de la matriz (A): El $i-$ésimo renglón es

$$R_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix}$$

mientras que la $j-$ésima columna será

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{j,1} \\ \vdots \\ a_{j,m} \end{pmatrix}$$

Podemos extraer renglones y columnas de la matriz (A): El $i-$ésimo renglón es

$$R_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix}$$

mientras que la $j-$ésima columna será

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{j,1} \\ \vdots \\ a_{j,m} \end{pmatrix}$$

Diremos que la matriz (A) tiene dimensión $m \times n$.

Si existe un conjunto de números F, tal que todos los elementos $a_{i,j}$ de la matriz pertenecen a dicho conjunto, diremos que la matriz tiene coeficientes en F.

Diremos que la matriz (A) tiene dimensión $m \times n$.

Si existe un conjunto de números F, tal que todos los elementos $a_{i,j}$ de la matriz pertenecen a dicho conjunto, diremos que la matriz tiene coeficientes en F.

Diremos que la matriz (A) tiene dimensión $m \times n$.

Si existe un conjunto de números F, tal que todos los elementos $a_{i,j}$ de la matriz pertenecen a dicho conjunto, diremos que la matriz tiene coeficientes en F.

Observación 3.1.
Para que las operaciones entre matrices estén bien definidas, es necesario que la suma, resta y multiplicación entre entre elementos de F también este bien definida. Por esto generalmente F se elige como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$.

La colección de todas las matrices de dimensión $m \times n$ con coeficientes en F se denotará por

$$M_{m,n}(F).$$

Definición 3.1.
Las matrices de dimensión $m \times 1$ se conocen como *vectores columna,* mientras que las de dimensión $1 \times n$ se conocen como *vectores renglón.*

La colección $M_{m,1}(F)$ de todos los vectores columna con coeficientes comunmente se denota por F^m. Mientras que la colección $M_{1,n}(F)$ de todos los vectores columna con coeficientes comunmente se denota por F^{n*}.

Definición 3.1.
Las matrices de dimensión $m \times 1$ se conocen como *vectores columna*, mientras que las de dimensión $1 \times n$ se conocen como *vectores renglón*.

La colección $M_{m,1}(F)$ de todos los vectores columna con coeficientes comunmente se denota por F^m. Mientras que la colección $M_{1,n}(F)$ de todos los vectores columna con coeficientes comunmente se denota por F^{n*}.

Definición 3.1.
Las matrices de dimensión $m \times 1$ se conocen como *vectores columna,* mientras que las de dimensión $1 \times n$ se conocen como *vectores renglón.*

La colección $M_{m,1}(F)$ de todos los vectores columna con coeficientes comunmente se denota por F^m. Mientras que la colección $M_{1,n}(F)$ de todos los vectores columna con coeficientes comunmente se denota por F^{n*}.

Apéndice: Matrices

Operaciones elementales

Por brevedad, la matriz (A) se denota por $A = [a_{i,j}]$.

En el caso de los vectores renglones y columnas, podemos omitir el subíndice fijo

$$R = [R_{1,j}] = [R_j],\ C = [C_{i,1}] = [C_i].$$

Por brevedad, la matriz (A) se denota por $A = [a_{i,j}]$.

En el caso de los vectores renglones y columnas, podemos omitir el subíndice fijo

$$R = [R_{1,j}] = [R_j],\ C = [C_{i,1}] = [C_i].$$

Si $B = [b_{i,j}]$ es otra matriz de dimensión $m \times n$, la suma se define como

$$A + B = [a_{i.j} + b_{i,j}].$$

De manera similar, la resta se define como

$$A - B = [a_{i,j} - b_{i,j}].$$

Si $B = [b_{i,j}]$ es otra matriz de dimensión $m \times n$, la suma se define como

$$A + B = [a_{i.j} + b_{i,j}].$$

De manera similar, la resta se define como

$$A - B = [a_{i,j} - b_{i,j}].$$

Ejemplo 3.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

Ejemplo 3.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

Observe que para que la *suma y resta* tenga sentido, ambas matrices deben tener exactamente las *mismas dimensiones*.

Después de ver la facilidad para definir la suma y resta, uno se ve tentado a definir la multiplicación de la misma forma. Pero tal definición es poco útil en las aplicaciones.

Por esta razón, desarrollaremos el concepto de multiplicación, a fin de poder aplicar esta operación en la resolución de problemas.

Observe que para que la *suma y resta* tenga sentido, ambas matrices deben tener exactamente las *mismas dimensiones*.

Después de ver la facilidad para definir la suma y resta, uno se ve tentado a definir la multiplicación de la misma forma. Pero tal definición es poco útil en las aplicaciones.

Por esta razón, desarrollaremos el concepto de multiplicación, a fin de poder aplicar esta operación en la resolución de problemas.

Observe que para que la *suma y resta* tenga sentido, ambas matrices deben tener exactamente las *mismas dimensiones*.

Después de ver la facilidad para definir la suma y resta, uno se ve tentado a definir la multiplicación de la misma forma. Pero tal definición es poco útil en las aplicaciones.

Por esta razón, desarrollaremos el concepto de multiplicación, a fin de poder aplicar esta operación en la resolución de problemas.

Apéndice: Matrices

Multiplicación

Definición 3.2.
Sean $R = [R_j]$ un vector renglón y $C = [C_i]$ un vector columna, ambos de longitud n. El *producto renglón-columna* se define como

$$RC = \begin{pmatrix} R_1 & \cdots & R_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} R_j C_i. \qquad \text{(RC)}$$

Definición 3.2.
Sean $R = [R_j]$ un vector renglón y $C = [C_i]$ un vector columna, ambos de longitud n. El *producto renglón-columna* se define como

$$RC = \begin{pmatrix} R_1 & \cdots & R_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} R_j C_i. \qquad \text{(RC)}$$

Ejemplo 3.2.
Considere

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Calcule RC.

Ejemplo 3.3.
Reescriba la siguiente ecuación, utilizando el *producto renglón-columna*:

$$2x - 3y + z = 0.$$

Definición 3.3.
Sea $A = [a_{i,j}] \in M_{m\times n}$ y $B = [b_{j,k}] \in M_{n\times l}$. Definimos su producto como

$$AB = \Big(R_i C_k\Big) \tag{AB}$$

donde R_i es el $i-$ésimo renglón de A y C_k es la $k-$ésima columna de B.

Observación 3.2.

- Para que esta multiplicación tenga sentido, los renglones de A y las columnas de B deberán tener la misma longitud n.
- La matriz resultante tendrá dimensión $m \times l$.
- A menos que $m = l$, el producto BA podría no estar definido.
- Aun cuando BA estuviera bien definido, el producto de matrices no es *conmutativo*, es decir, generalmente tendremos que

$$AB \neq BA.$$

Observación 3.2.

- Para que esta multiplicación tenga sentido, los renglones de A y las columnas de B deberán tener la misma longitud n.
- La matriz resultante tendrá dimensión $m \times l$.
- A menos que $m = l$, el producto BA podría no estar definido.
- Aun cuando BA estuviera bien definido, el producto de matrices no es *conmutativo*, es decir, generalmente tendremos que

$$AB \neq BA.$$

Observación 3.2.

- Para que esta multiplicación tenga sentido, los renglones de A y las columnas de B deberán tener la misma longitud n.
- La matriz resultante tendrá dimensión $m \times l$.
- A menos que $m = l$, el producto BA podría no estar definido.
- Aun cuando BA estuviera bien definido, el producto de matrices no es *conmutativo,* es decir, generalmente tendremos que

$$AB \neq BA.$$

Observación 3.2.

- Para que esta multiplicación tenga sentido, los renglones de A y las columnas de B deberán tener la misma longitud n.
- La matriz resultante tendrá dimensión $m \times l$.
- A menos que $m = l$, el producto BA podría no estar definido.
- Aun cuando BA estuviera bien definido, el producto de matrices no es *conmutativo,* es decir, generalmente tendremos que
$$AB \neq BA.$$

Ejemplo 3.4.
Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.4.
Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.5.
Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.5.
Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.6.
Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.6.
Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.7.
Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} -30 \\ 45 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.7.
Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} -30 \\ 45 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.8.
Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.8.
Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.9.
Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 19 \\ 53 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.9.
Encuentre el producto AB de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 19 \\ 53 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.10.
Rescriba el siguiente sistema de ecuación en forma matricial y encuentre su solución:

$$\begin{cases} -x - 3y = 19 \\ -7x - y = 53 \end{cases}$$