

# 2A Actividad: Análisis de sistemas dinámicos

---

- Maestría en Sistemas Inteligentes Embebidos
- Materia: Métodos Matemáticos
- Unidad: Cálculo
- Docente: Dr. Juliho Castillo Colmenares
- Puntaje: 15

## Objetivo

---

Analizar sistemas dinámicos lineales de forma cualitativa y cuantitativa

## Instrucciones

---

- Consulta [Kelley, 2013], capítulos 3, secciones 1 a 4.
- Redacta tus respuestas en formato Markdown.
- Puedes utilizar Python o SageMath para resolver los problemas.
- En este caso, utiliza una libreta Jupyter para redactar tu solución.
- Si la respuesta carece de justificación, no se considerará correcta.
- Exporta y entrega tu trabajo en formato PDF.

## Problemas

---

### Problema 1.

- Para cada sistema, determina si es hamiltoniano.
- Si es hamiltoniano, construye la función hamiltoniana paso a paso y verifica que sea tu construcción sea correcta.
- En otro caso, explica porque el sistema no podría ser hamiltoniano.

#### Inciso 1.1 (1.5 puntos)

$$\begin{aligned}x' &= e^y - 2x \\ y' &= 2y - 2x\end{aligned}\tag{1}$$

#### Inciso 1.2 (1.5 puntos)

$$\begin{aligned}x' &= x + y \\ y' &= -x + y\end{aligned}\tag{2}$$

### Problema 2

- Dibuja los diagramas del plano fase para cada uno de los siguientes sistemas.
- Determina los puntos críticos y clasifícalos.

**Inciso 2.1 (2.5 puntos)**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3)$$

**Inciso 2.2 (2.5 puntos)**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4)$$

**Inciso 2.3 (2.5 puntos)**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 10 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (5)$$

**Inciso 2.4 (2.5 puntos)**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (6)$$

**Problema 3 (2 puntos)**

Encuentra las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  de manera que

$$V(x, y) := \alpha x^2 + \beta y^2 \quad (7)$$

defina una función de Liapunov para el sistema

$$\begin{aligned} x' &= -x - 5y \\ y' &= 3x - y^3 \end{aligned} \quad (8)$$

**Problemas adicionales****Problema 4****Inciso 4.1 (2 puntos extras)**

Encuentra una función de Liapunov para el sistema

$$\begin{aligned} x' &= -x - y^2 \\ y' &= -\frac{1}{2}y + 2xy \end{aligned} \quad (9)$$

**Inciso 4.2 (1 punto extra)**

Identifica una familia de conjuntos positivamente invariantes

**Problema 5**

Aplica el teorema de invarianza de LaSalle a cada uno de lo siguientes sistemas y determina que puntos son atraídos hacia el origen

**Inciso 5.1 (1.5 puntos extras)**

$$\begin{aligned} x' &= -2x - 2xy \\ y' &= 2x^2 - y \end{aligned} \quad (10)$$

**Inciso 5.2 (1.5 puntos extras)**

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -x + y^5 - 2y\end{aligned}\tag{11}$$

## **Bibliografía**

---

1. Fuhrer, C., Solem, J. E., Verdier, O. (2021). Scientific Computing with Python - Second Edition: High-Performance Scientific Computing with NumPy, SciPy, and Pandas. India: Packt Publishing.
2. Hirsch, M. W., Smale, S., Devaney, R. L. (2004). Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos. Germany: Elsevier Science.
3. Johansson, R. (2018). Numerical Python: Scientific Computing and Data Science Applications with Numpy, SciPy and Matplotlib. Germany: Apress.
4. Kelley, W. G., Peterson, A. C. (2010). The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative. United States: Springer New York.
5. Stewart, J. (2016). Calculus: Early Transcendentals. United States: Cengage Learning.