# Principal Component Analysis vs Factor Analysis

MA2003B - Application of Multivariate Methods in Data Science

MA2003B Course Team

Instituto Tecnológico de Costa Rica

2025-09-29

# Introducción al Análisis de Componentes Principales y Análisis Factorial

## ¿Por qué Reducción de Dimensionalidad?

La reducción de dimensionalidad es una técnica fundamental en el análisis multivariado que busca:

- Manejar datos de alta dimensionalidad de manera efectiva
- Reducir la complejidad computacional
- Eliminar ruido y redundancia
- Mejorar la interpretabilidad de los modelos
- Permitir la visualización de datos

## Dos Enfoques Principales

- **Análisis de Componentes Principales (PCA)**: Enfoque basado en datos, maximización de varianza
- **Análisis Factorial (FA)**: Enfoque basado en modelo, identificación de constructos latentes

# Análisis de Componentes Principales (PCA)

## ¿Qué es PCA?

El PCA es una técnica de reducción de dimensionalidad que transforma variables correlacionadas en componentes principales no correlacionadas, maximizando la varianza a lo largo de cada nuevo eje y ordenando los componentes por varianza explicada.

## Fundamento Matemático

Dado una matriz de datos $\boldsymbol{X}$ con $n$ observaciones y $p$ variables:

1. Centrar los datos: $\boldsymbol{X}_{\text{centered}} = \boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}$
2. Calcular la matriz de covarianza: $\boldsymbol{S} = \left(\frac{1}{n-1}\right)\boldsymbol{X}_{\text{centered}}^T\boldsymbol{X}_{\text{centered}}$
3. Encontrar valores propios $\lambda_i$ y vectores propios $\boldsymbol{v}_i$ de $\boldsymbol{S}$
4. Componentes principales: $\mathbf{PC}_i = \boldsymbol{X}_{\text{centered}}\boldsymbol{v}_i$

## Ejemplo de PCA

```
import numpy as np
from sklearn.decomposition import PCA

# Matriz de datos simple 3x2
X = np.array([[5, 3],
              [3, 1],
              [1, 3]])

# Aplicar PCA
```

```
pca = PCA()
X_transformed = pca.fit_transform(X)

# Resultados
eigenvalues = pca.explained_variance_
variance_ratio = pca.explained_variance_ratio_

print(f"Valores propios: {eigenvalues}")
print(f"PC1 explica {variance_ratio[0]:.1%} de la varianza")
```

## Resultados Clave

- PC1 explica la mayor varianza (valor propio más alto)
- Los componentes están incorrelacionados por construcción
- Los datos originales pueden reconstruirse a partir de los componentes

## Criterios de Retención de Componentes

- **Criterio de Kaiser**: Conservar componentes con $\lambda_i > 1$
- **Gráfico de sedimentación (scree plot)**: Buscar el "codo" en el gráfico de valores propios
- **Varianza acumulada**: Retener suficientes componentes para varianza deseada (ej. 80%)
- **Análisis paralelo**: Comparar con valores propios de datos aleatorios

# Análisis Factorial

## ¿Qué es el Análisis Factorial?

El análisis factorial asume que las variables observadas son combinaciones lineales de factores comunes (constructos latentes compartidos) y factores únicos (varianza específica de cada variable).

## El Modelo Factorial Común

Para cada variable observada $x_j$:

$x_j = \mu_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ji} f_i + \varepsilon_j$

Donde:

- $\lambda_{ji}$: Carga factorial (correlación entre $x_j$ y $f_i$)
- $f_i$: Factor común (variable latente)
- $\varepsilon_j$: Factor único (término de error)

## Ejemplo de Análisis Factorial

```
import numpy as np
from factor_analyzer import FactorAnalyzer

# Matriz de correlación
R = np.array([[1.00, 0.60, 0.48],
              [0.60, 1.00, 0.72],
              [0.48, 0.72, 1.00]])
```

```python
# Realizar Análisis Factorial
fa = FactorAnalyzer(n_factors=1, rotation=None)
fa.fit(R)

# Resultados
loadings = fa.loadings_
communalities = fa.get_communalities()
uniqueness = fa.get_uniquenesses()

print(f"Cargas factoriales:\\n{loadings}")
print(f"Comunalidades: {communalities}")
print(f"Unicidades: {uniqueness}")
```

## Conceptos Clave

- **Cargas**: Correlaciones entre variables y factores
- **Comunalidades**: Varianza explicada por factores comunes
- **Unicidades**: Varianza específica de cada variable

## Rotación Factorial

| Método | Descripción | Asunción | Caso de Uso |
|---|---|---|---|
| Varimax | Rotación ortogonal | Factores no correlacionados | Estructura simple |
| Promax | Rotación oblicua | Factores pueden correlacionarse | Modelos realistas |
| Quartimax | Simplificar variables | Equilibrar factores | Uso general |
| Oblimin | Rotación oblicua | Correlación flexible | Datos complejos |

## ¿Por qué Rotar?

- Mejorar la interpretabilidad de las cargas factoriales
- Lograr “estructura simple” (variables que cargan altamente en pocos factores)
- Diferentes rotaciones pueden revelar diferentes interpretaciones sustantivas

# Comparación: PCA vs Análisis Factorial

## Diferencias Principales

| Aspecto | PCA | Análisis Factorial |
|---|---|---|
| Objetivo | Maximización de varianza | Identificación de constructos latentes |
| Modelo | Basado en datos | Basado en teoría |
| Componentes/Factores | Toda la varianza | Solo varianza común |
| Rotación | No típicamente usada | Esencial para interpretación |
| Asunciones | Mínimas | Normalidad multivariada |

| Aspecto | PCA | Análisis Factorial |
|---|---|---|
| Estimación | Descomposición en valores propios | Máxima verosimilitud/FAF |
| Salida | Componentes principales | Cargas factoriales |

## ¿Cuándo Usar Cada Método?

### Usar PCA cuando:

- La reducción de datos es el objetivo principal
- No existe un modelo teórico
- Toda la varianza es de interés
- La predicción es el objetivo
- Se necesita visualización de datos

### Usar Análisis Factorial cuando:

- Se buscan identificar constructos latentes
- El análisis es guiado por teoría
- Se desarrolla modelo de medición
- Se busca entender relaciones entre variables
- Se realiza validación/desarrollo de escalas

# Flujo de Análisis Completo

```
import numpy as np
from sklearn.decomposition import PCA
from sklearn.preprocessing import StandardScaler
from factor_analyzer import FactorAnalyzer
from factor_analyzer.factor_analyzer import calculate_kmo,
calculate_bartlett_sphericity

# 1. Cargar y preparar datos
X = np.random.randn(100, 5)  # Tus datos aquí

# 2. Estandarizar
scaler = StandardScaler()
X_scaled = scaler.fit_transform(X)

# 3. Verificar idoneidad para AF
kmo_all, kmo_model = calculate_kmo(X_scaled)
chi_square_value, p_value = calculate_bartlett_sphericity(X_scaled)

print(f"KMO: {kmo_model:.3f} (>0.6 es bueno)")
print(f"Prueba de Bartlett p-valor: {p_value:.3f} (<0.05 es bueno)")

# 4. Determinar número de factores
pca = PCA()
pca.fit(X_scaled)
```

```
eigenvalues = pca.explained_variance_
n_factors = sum(eigenvalues > 1)  # Criterio de Kaiser

# 5. Realizar Análisis Factorial
fa = FactorAnalyzer(n_factors=n_factors, rotation='varimax')
fa.fit(X_scaled)

# 6. Comparar resultados
loadings = fa.loadings_
communalities = fa.get_communalities()
variance_explained = fa.get_factor_variance()
```

# Aplicaciones y Mejores Prácticas

## Aplicaciones en el Mundo Real

### Finanzas

- Factores de riesgo en mercados bursátiles
- Optimización de portafolios
- Modelos de calificación crediticia

### Salud

- Encuestas de satisfacción del paciente
- Agrupamiento de síntomas
- Medidas de calidad de vida

### Mercadotecnia

- Segmentación de clientes
- Estudios de percepción de marca
- Análisis de atributos de producto

### Ciencias Sociales

- Evaluación de personalidad
- Medición de actitudes
- Pruebas educativas

## Mejores Prácticas

### Preparación de Datos

- Asegurar tamaño de muestra adecuado (5-10 observaciones por variable)
- Verificar normalidad multivariada
- Manejar datos faltantes apropiadamente
- Considerar estandarización de variables

### Selección de Modelo

- Usar pruebas KMO y Bartlett para idoneidad del AF
- Comparar múltiples criterios de retención de factores
- Considerar tanto rotaciones ortogonales como oblicuas
- Validar resultados con validación cruzada

### Interpretación

- Enfocarse en el significado sustantivo de los factores
- Usar cargas factoriales > 0.3 para interpretación
- Considerar correlaciones entre factores en rotaciones oblicuas
- Validar con criterios externos cuando sea posible

# Conclusión

## Puntos Clave

- **PCA** y **Análisis Factorial** sirven propósitos diferentes pero complementarios
- Elegir método basado en objetivos de investigación y características de los datos
- Siempre validar asunciones e interpretar resultados sustantivamente
- El software moderno facilita la implementación

## Próximos Pasos

- Practicar con conjuntos de datos reales
- Comparar PCA y AF en los mismos datos
- Explorar técnicas avanzadas (AF confirmatorio, modelado de ecuaciones estructurales)
- Aplicar a sus propias preguntas de investigación

# Referencias

## Referencias Principales


- **Fabrigar, L. R., & Wegener, D. T.** (2011). Exploratory Factor Analysis. Oxford University Press.
- **Hair, J. F., et al.** (2019). Multivariate Data Analysis. Cengage Learning.
- **Jolliffe, I. T.** (2002). Principal Component Analysis. Springer.
- **Tabachnick, B. G., & Fidell, L. S.** (2013). Using Multivariate Statistics. Pearson.


## Recursos de Software

- Python: `scikit-learn`, `factor-analyzer`, `statsmodels`
- R: `psych`, `FactoMineR`, `lavaan`
- SPSS: Módulo de Análisis Factorial
- SAS: PROC FACTOR

## Recursos en Línea

- Grupo de Consultoría Estadística UCLA
- Canal de YouTube StatQuest
- Artículos de Towards Data Science

## Introduction to Dimensionality Reduction

## Why Dimensionality Reduction?

- Handle high-dimensional data effectively
- Reduce computational complexity
- Remove noise and redundancy
- Improve model interpretability
- Enable data visualization

### Two Main Approaches

- **Principal Component Analysis (PCA)**: Data-driven, variance maximization
- **Factor Analysis (FA)**: Model-based, latent variable identification

## Principal Component Analysis (PCA)

## Principal Component Analysis (PCA)

# What is PCA?

PCA is a dimensionality reduction technique that:

- Transforms correlated variables into uncorrelated principal components
- Maximizes variance along each new axis
- Orders components by explained variance

## Mathematical Foundation

Given data matrix $\boldsymbol{X}$ with $n$ observations and $p$ variables:

1. Center the data: $\boldsymbol{X}_{\text{centered}} = \boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}}$
2. Compute covariance matrix: $\boldsymbol{S} = \left(\frac{1}{n-1}\right)\boldsymbol{X}_{\text{centered}}^T\boldsymbol{X}_{\text{centered}}$
3. Find eigenvalues $\lambda_i$ and eigenvectors $\boldsymbol{v}_i$ of $\boldsymbol{S}$
4. Principal components: $\mathbf{PC}_i = \boldsymbol{X}_{\text{centered}}\boldsymbol{v}_i$

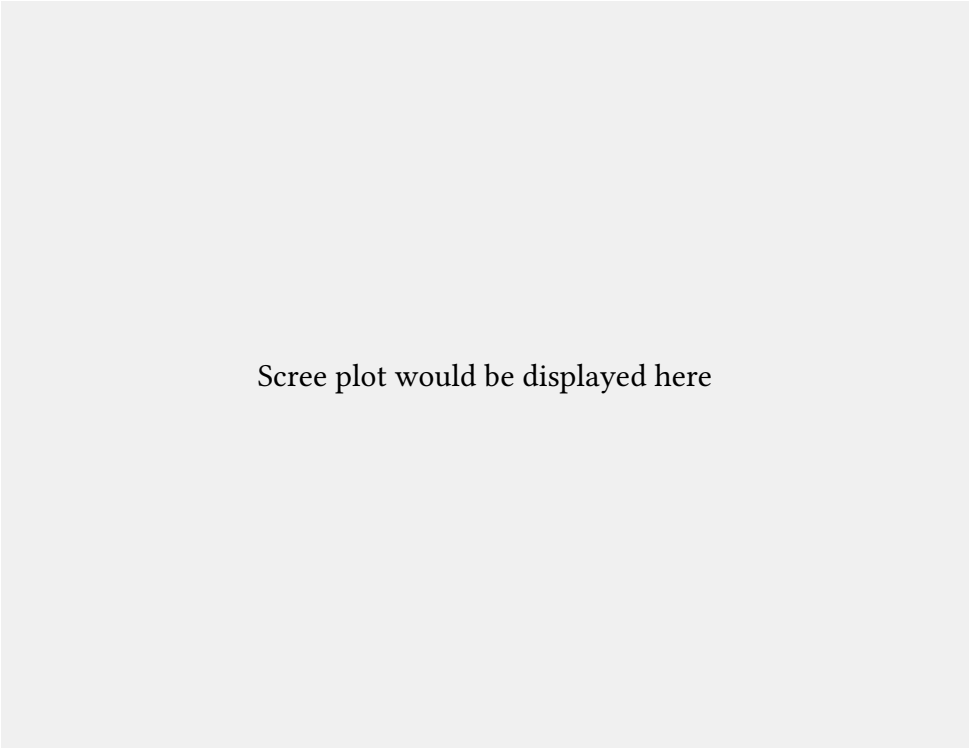
# PCA Example

```python
import numpy as np
from sklearn.decomposition import PCA

# Simple 3x2 data matrix
X = np.array([[5, 3],
              [3, 1],
              [1, 3]])

# Apply PCA
pca = PCA()
X_transformed = pca.fit_transform(X)

# Results
eigenvalues = pca.explained_variance_
variance_ratio = pca.explained_variance_ratio_

print(f"Eigenvalues: {eigenvalues}")
print(f"PC1 explains {variance_ratio[0]:.1%} of variance")
```

## Key Results

- PC1 explains most variance (higher eigenvalue)
- Components are uncorrelated by construction
- Original data can be reconstructed from components

# Component Retention in PCA




### Retention Criteria

- **Kaiser criterion**: Keep components with $\lambda_i > 1$
- **Scree plot**: Look for "elbow" in eigenvalue plot
- **Cumulative variance**: Retain enough components for desired variance (e.g., 80%)
- **Parallel analysis**: Compare with random data eigenvalues

## Factor Analysis

## Factor Analysis

# What is Factor Analysis?

Factor Analysis assumes observed variables are linear combinations of:

- **Common factors**: Shared underlying constructs
- **Unique factors**: Variable-specific variance

## The Common Factor Model

For each observed variable $x_j$:

$$x_j = \mu_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ji} f_i + \varepsilon_j$$

Where:

- $\lambda_{ji}$: Factor loading (correlation between $x_j$ and $f_i$)
- $f_i$: Common factor (latent variable)
- $\varepsilon_j$: Unique factor (error term)

# Factor Analysis Example

```
import numpy as np
from factor_analyzer import FactorAnalyzer

# Correlation matrix
R = np.array([[1.00, 0.60, 0.48],
              [0.60, 1.00, 0.72],
              [0.48, 0.72, 1.00]])

# Perform Factor Analysis
fa = FactorAnalyzer(n_factors=1, rotation=None)
fa.fit(R)

# Results
loadings = fa.loadings_
communalities = fa.get_communalities()
uniqueness = fa.get_uniquenesses()

print(f"Factor loadings:\\n{loadings}")
print(f"Communalities: {communalities}")
print(f"Uniqueness: {uniqueness}")
```

## Key Concepts

- **Loadings**: Correlations between variables and factors
- **Communalities**: Variance explained by common factors
- **Uniqueness**: Variable-specific variance

# Factor Rotation

| Method | Description | Assumption | Use Case |
|---|---|---|---|
| Varimax | Orthogonal rotation | Factors uncorrelated | Simple structure |
| Promax | Oblique rotation | Factors may correlate | Realistic models |
| Quartimax | Simplify variables | Balance factors | General use |
| Oblimin | Oblique rotation | Flexible correlation | Complex data |

### Why Rotate?

- Improve interpretability of factor loadings
- Achieve “simple structure” (variables load highly on few factors)
- Different rotations may reveal different substantive interpretations

## PCA vs Factor Analysis

## PCA vs Factor Analysis

## Key Differences

| Aspect | PCA | Factor Analysis |
|---|---|---|
| Goal | Variance maximization | Latent construct identification |
| Model | Data-driven | Theory-driven |
| Components/Factors | All variance | Common variance only |
| Rotation | Not typically used | Essential for interpretation |
| Assumptions | Minimal | Multivariate normality |
| Estimation | Eigenvalue decomposition | Maximum likelihood/PAF |
| Output | Principal components | Factor loadings |

## When to Use Each Method

### Use PCA when:

- Data reduction is primary goal
- No theoretical model exists
- All variance is of interest
- Prediction is the objective
- Data visualization needed

### Use Factor Analysis when:

- Identifying latent constructs
- Theory-driven analysis
- Measurement model development
- Understanding variable relationships
- Scale development/validation

# Complete Analysis Workflow

```python
import numpy as np
from sklearn.decomposition import PCA
from sklearn.preprocessing import StandardScaler
from factor_analyzer import FactorAnalyzer
from factor_analyzer.factor_analyzer import calculate_kmo,
calculate_bartlett_sphericity

# 1. Load and prepare data
X = np.random.randn(100, 5)  # Your data here

# 2. Standardize
scaler = StandardScaler()
X_scaled = scaler.fit_transform(X)

# 3. Check suitability for FA
kmo_all, kmo_model = calculate_kmo(X_scaled)
chi_square_value, p_value = calculate_bartlett_sphericity(X_scaled)

print(f"KMO: {kmo_model:.3f} (>0.6 is good)")
print(f"Bartlett's test p-value: {p_value:.3f} (<0.05 is good)")

# 4. Determine number of factors
pca = PCA()
pca.fit(X_scaled)
eigenvalues = pca.explained_variance_
n_factors = sum(eigenvalues > 1)  # Kaiser criterion

# 5. Perform Factor Analysis
fa = FactorAnalyzer(n_factors=n_factors, rotation='varimax')
fa.fit(X_scaled)

# 6. Compare results
loadings = fa.loadings_
communalities = fa.get_communalities()
variance_explained = fa.get_factor_variance()
```

## When to Use Each Method

### Use PCA when:

- Data reduction is primary goal
- No theoretical model exists
- All variance is of interest
- Prediction is the objective
- Data visualization needed

### Use Factor Analysis when:

- Identifying latent constructs
- Theory-driven analysis
- Measurement model development
- Understanding variable relationships
- Scale development/validation

## Complete Analysis Workflow

```
import numpy as np
from sklearn.decomposition import PCA
from sklearn.preprocessing import StandardScaler
from factor_analyzer import FactorAnalyzer
from factor_analyzer.factor_analyzer import calculate_kmo,
calculate_bartlett_sphericity

# 1. Load and prepare data
X = np.random.randn(100, 5)  # Your data here

# 2. Standardize
scaler = StandardScaler()
X_scaled = scaler.fit_transform(X)

# 3. Check suitability for FA
kmo_all, kmo_model = calculate_kmo(X_scaled)
chi_square_value, p_value = calculate_bartlett_sphericity(X_scaled)

print(f"KMO: {kmo_model:.3f} (>0.6 is good)")
print(f"Bartlett's test p-value: {p_value:.3f} (<0.05 is good)")

# 4. Determine number of factors
pca = PCA()
pca.fit(X_scaled)
eigenvalues = pca.explained_variance_
n_factors = sum(eigenvalues > 1)  # Kaiser criterion

# 5. Perform Factor Analysis
fa = FactorAnalyzer(n_factors=n_factors, rotation='varimax')
fa.fit(X_scaled)

# 6. Compare results
loadings = fa.loadings_
communalities = fa.get_communalities()
variance_explained = fa.get_factor_variance()
```

# Applications and Examples

## Real-World Applications

### Finance

- Stock market risk factors
- Portfolio optimization
- Credit scoring models

### Healthcare

- Patient satisfaction surveys
- Symptom clustering
- Quality of life measures

### Marketing

- Customer segmentation
- Brand perception studies
- Product attribute analysis

### Social Science

- Personality assessment
- Attitude measurement
- Educational testing

# Best Practices

## Data Preparation

- Ensure adequate sample size (5-10 observations per variable)
- Check for multivariate normality
- Handle missing data appropriately
- Consider variable standardization

## Model Selection

- Use KMO and Bartlett's test for FA suitability
- Compare multiple factor retention criteria
- Consider both orthogonal and oblique rotations
- Validate results with cross-validation

## Interpretation

- Focus on substantive meaning of factors
- Use factor loadings > 0.3 for interpretation
- Consider factor correlations in oblique rotations
- Validate with external criteria when possible

# Conclusion

# Key Takeaways

- **PCA** and **Factor Analysis** serve different but complementary purposes
- Choose method based on research objectives and data characteristics
- Always validate assumptions and interpret results substantively
- Modern software makes implementation straightforward

### Next Steps

- Practice with real datasets
- Compare PCA and FA on same data
- Explore advanced techniques (confirmatory FA, structural equation modeling)
- Apply to your own research questions

# Questions?

# References

# Key References


- **Fabrigar, L. R., & Wegener, D. T.** (2011). Exploratory Factor Analysis. Oxford University Press.
- **Hair, J. F., et al.** (2019). Multivariate Data Analysis. Cengage Learning.
- **Jolliffe, I. T.** (2002). Principal Component Analysis. Springer.
- **Tabachnick, B. G., & Fidell, L. S.** (2013). Using Multivariate Statistics. Pearson.


## Software Resources

- Python: `scikit-learn`, `factor-analyzer`, `statsmodels`
- R: `psych`, `FactoMineR`, `lavaan`
- SPSS: Factor Analysis module
- SAS: PROC FACTOR

## Online Resources

- UCLA Statistical Consulting Group
- StatQuest YouTube channel
- Towards Data Science articles