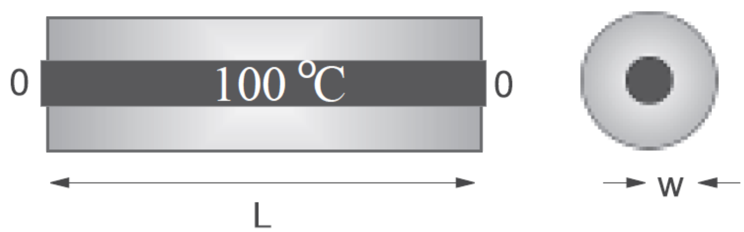
Física numérica

Tarea #5

Instrucciones: Resuelva cada uno de los siguientes problemas. No olvide incluir el código de Python desarrollado en cada caso.

1. **Estudiando la evolución de la temperatura en una barra.**

   (a) Considere una barra cilíndrica de aluminio de longitud $L = 1\ m$ y un grosor w colocada a lo largo del eje x. Dicha barra se encuentra aislada térmicamente a lo largo de su longitud, pero no en sus extremos. Inicialmente la barra se encuentra a una temperatura uniforme de $T_0 = 100°C$, y los extremos se encuentran en contacto con una barra de hielo a $0°C$. El calor fluye únicamente a través de los extremos no aislados.

   ¿Cuál es la ecuación que modela este proceso? ¿Qué tipo de ecuación es?¿Puede resolverla analíticamente?¿qué métodos de solución conoce para este tipo de ecuaciones? ¿Hay condiciones de frontera asociadas?

   (b) ¿Cómo podría resolver numéricamente el problema?¿Tiene algún algoritmo que podría ayudarle?

   (c) Ya que tenga un programa que le ayude a resolver numéricamente el problema, varie los pasos en el tiempo y en el espacio en sus cálculos para obtener soluciones que sean estables y varien suavemente tanto en tiempo como en espacio.

   (d) Pruebe qué pasa cuando la condición de estabilidad de Neumann/Courant no se satisface.

   (e) Revise que sus resultados concuerden con las condiciones de frontera establecidas.

   (f) ¿Alcanza su solución el equilibrio?¿Es estable?

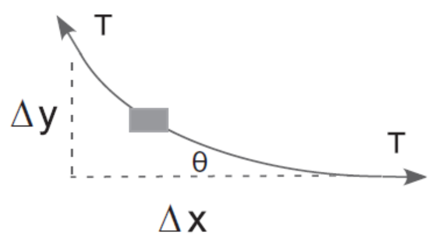
(g) Compare la solución numérica con las solución analítica. Conviene realizar una gráfica 3D de la temperatura vs posición vs tiempo e incluir la isotermas (contornos de temperatura constante).

(h) ¿Qué pasa si el alumnio es sustituido por un mal conductor térmico como madera?

2. **La vibración de una cuerda.** Este problema pretende estudiar las ocscilaciones de una cuerda. Considere una cuerda de longitud L y densidad $\rho\left(x\right)$ por unidad de longitud, atada en ambos extremos y bajo una tensión $T\left(x\right)$. Suponga que el desplazamiento relativo de la cuerda respecto a su posición de equilibrio $\frac{y(x,t)}{L}$ es pequeño y que la pendiente de la cuerda $\frac{\partial y}{\partial x}$ tambien es pequeña.

   (a) Considere una sección infinitesimal de la cuerda, como se muestra en la figura, note que la diferencia en las componentes de las tensiones en x y $x+\Delta x$ tiene por resultado una fuerza restauradora. Demuestre que al aplicar las leyes de Newton a esta sección obtenemos la ecuación de onda

$$\frac{dT\left(x\right)}{dx}\frac{\partial y\left(x,t\right)}{\partial x}+T\left(x\right)\frac{\partial^2 y\left(x,t\right)}{\partial x^2}=\rho\left(x\right)\frac{\partial^2 y\left(x,t\right)}{\partial t^2}.$$



   (b) ¿Qué condiciones son necesarias para obtener la ecuación de onda estándar

$$\frac{\partial^2 y\left(x,t\right)}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y\left(x,t\right)}{\partial t^2},\quad c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}?$$

   (c) ¿Qué condiciones deben cumplirse para obtener una única solución a esta EDP de segundo orden?

   (d) Utilice una malla de pasos de longitud Δt en el tiempo y Δx en el espacio para obtener una solución numérica

$$y\left(x,t\right)=y\left(i\Delta x,j\Delta t\right)=y_{i,j}.$$

(e) Exprese las segundas derivadas de la EDP en términos de diferencias finitas, demuestre que esto resulta en la ecuación de onda en diferencias:

$$\frac{y_{i,j+1} + y_{i,j-1} - 2y_{i,j}}{c^2 \left(\Delta t\right)^2} = \frac{y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2y_{i,j}}{\left(\Delta x\right)^2}.$$

(f) Demuestre que el algoritmo anterior puede escribirse como

$$y_{i,j+1} = 2y_{i,j} - y_{i,j-1} + \frac{c^2}{c'^2}\left[y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - 2y_{i,j}\right],$$

donde $c' = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ es la velocidad de la malla, es decir, la razón numérica de los parámetros.

(g) ¿Cómo entran las condiciones iniciales y las condiciones de frontera?

(h) La condición de Courant para la estabilidad de la solución es que

$$\frac{c}{c'} \leq 1.$$

¿qué significa en términos de los pasos?

(i) Escriba un programa que implemente la fórmula anterior, grafíque el movimiento de la cuerda, o mejor aún, produzca una animación.

(j) Cambie los pasos del tiempo y el espacio en su simulación para que algunas veces satisfaga la condición de Courant y otras no. Describa qué pasa en cada caso.