EYP1113 - Probabilidad y Estadística

Capítulo 2: Fundamentos de los Modelos de Probabilidad

Ana María Araneda   Ricardo Aravena   Ricardo Olea

Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Primer Semestre 2012

Probability Concepts in Engineering

Alfredo H-S. Ang† and Wilson H. Tang‡

† University of Illinois at Urbana-Champaing and University of California, Irvine

‡ Hong Kong University of Science & Technology

Contenido I

Eventos y Probabilidad

Características de Problemas Relacionados con Probabilidades

Para todo fenómeno (o experimento) se define un conjunto especifico de resultados llamado

“Espacio de Resultados Posibles”

Un evento de interés esta compuesto por uno o más resultados de este espacio.

La probabilidad de un evento es una medida numérica de la ocurrencia de éste, con respecto a los otros resultados posibles

Eventos y Probabilidad

Características de Problemas Relacionados con Probabilidades

Ejemplo 2.1 Suponga que dispone de 3 máquinas, las cuales pueden estar en una de dos condiciones luego de 6 meses de operación:

O : Operativa.
X : No operativo.

Las diferentes combinaciones son (8):

$O\ O\ O$	Las tres están operativas
$O\ O\ X$	Las dos primeras están operativa, la última no!
$O\ X\ O$	
$X\ O\ O$	Las dos ultimas están operativa, la primera no!
$O\ X\ X$	
$X\ O\ X$	
$X\ X\ O$	Sólo la última esta operativa
$X\ X\ X$	No hay ninguna operativa

Eventos y Probabilidad

Características de Problemas Relacionados con Probabilidades

Ejemplo 2.1

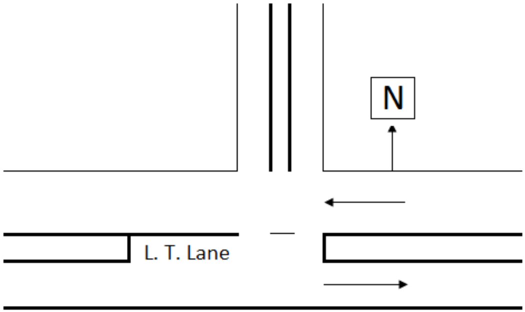
Si asumimos que cada estado (Operativo vs No operativo) es igualmente probable ($1/2$ cada uno), entonces cada uno de los 8 resultados descritos tienen que tener la misma probabilidad de ocurrencia.

El evento "existe sólo una máquina operativa" tiene una probabilidad de ocurrencia igual a $3/8$.

Eventos y Probabilidad

Características de Problemas Relacionados con Probabilidades

Ejemplo 2.2 En el diseño de un carril de giro a la izquierda para el tráfico en dirección este en una intersección de carreteras (ver figura), la probabilidad que 5 ó más vehículos esperen para girar a la izquierda en un instante es necesaria para determinar la longitud del carril.



Eventos y Probabilidad

Características de Problemas Relacionados con Probabilidades

Ejemplo 2.2 Suponga que durante una semana se registraron 60 períodos de tiempo en hora punta y se registró el número de vehículos que esperaban turno para girar a la izquierda.

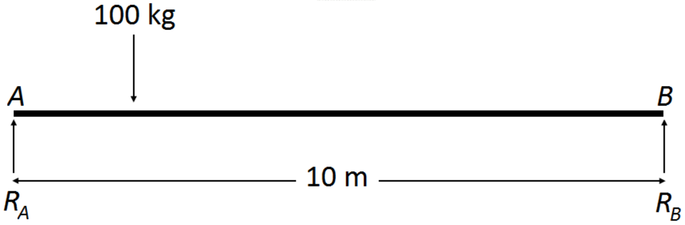
N° de Autos	N° de Observaciones	Frecuencia Relativa
0	4	0,07
1	16	0,27
2	20	0,33
3	14	0,23
4	3	0,05
5	2	0,03
6	1	0,02
7	0	0,00
8	0	0,00

En el 95% de los períodos observado el número de vehículo esperado girar a la izquierda fue inferior a 5.

Eventos y Probabilidad

Características de Problemas Relacionados con Probabilidades

Ejemplo 2.3 Considere una viga apoyada en los puntos A y B. Si se ejerce una carga de 100 kg en un punto cualquiera a lo largo de la viga, la resistencia en el punto A, R_A, puede tomar valores entre 0 y 100 kg dependiendo la posición en que se ejerce la carga.



Eventos y Probabilidad

Características de Problemas Relacionados con Probabilidades

Ejemplo 2.3

Si por ejemplo, nos interesara el eventos en que la resistencia en el punto A se encuentre entre $(10 \leq R_A \leq 20)$ y el punto donde se ejerza la carga es escogido al azar, entonces la probabilidad del evento de interés será proporcional al área donde la carga implica el evento.

$$P(10 \leq R_A \leq 20) = \frac{1}{10}$$

Eventos y Probabilidad

Estimación de Probabilidades

El cálculo de probabilidad de un evento, esta basado en la asignación de medidas de probabilidad de todos los resultados posibles.

La asignación puede estar basado en condiciones dadas, en evidencia empírica o en juicios subjetivos.

Eventos y Probabilidad

Estimación de Probabilidades

Probabilidad Clásica

La probabilidad clásica es la proporción de veces que ocurrirá un suceso, suponiendo que todos los resultados contenidos en el espacio de resultados posibles tiene la misma probabilidad de ocurrir.

Eventos y Probabilidad

Estimación de Probabilidades

Probabilidad Frecuentista

La probabilidad de un suceso A se aproxima por el límite de la frecuencia relativa de ocurrencias de un suceso A a partir de un gran número de pruebas n.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n},$$

donde n_A es el número de veces que se obtiene el suceso A y n el número total de pruebas.

Eventos y Probabilidad

Estimación de Probabilidades

Probabilidad Subjetiva

La probabilidad subjetiva expresa el grado en que una persona cree que ocurrirá un suceso. Estas probabilidades subjetivas se utilizan en algunos procedimientos empresariales de toma de decisiones.

Elementos de Teoría de Conjuntos

Definiciones Importantes

Consideremos un fenómeno aleatorio

- **Espacio muestral**: Conjunto de todos los resultados posibles.
- **Punto muestral**: Un resultado particular.
- **Evento**: Subconjunto de resultados posibles.

El espacio muestral puede ser discreto o continuo. El caso discreto corresponde a un espacio muestral compuesto por un conjunto contable (numerable) de puntos muestrales, mientras que el caso continuo corresponde a un espacio muestral compuesto de un continuo de puntos muestrales.

Elementos de Teoría de Conjuntos

Definiciones Importantes

Evento Imposible: Denotado por ϕ es un evento sin puntos muestrales.

Evento Certeza: Denotado por S u Ω, es un evento que contiene a todos los puntos muestrales.

Evento Complemento: Denotado por $\overline{E}$, contiene todos los puntos muestrales de S que no están contenidos en un evento E.

Unión de Eventos: Para dos eventos E_1 y E_2, su union forma un nuevo evento que contiene los puntos muestrales de E_1 y los contenidos en E_2 que no se encuentran en E_1.

Intersección de Eventos: Para dos eventos E_1 y E_2, su intersección forma un nuevo evento que contiene los puntos muestrales contenidos en E_1 y en E_2 a la vez.

Elementos de Teoría de Conjuntos

Definiciones Importantes

Eventos Mutuamente Excluyentes (Disjuntos): Son eventos que no tienen puntos muestrales en común, es decir, su intersección es vacía.

Eventos Colectivamente Exhaustivos: Son eventos que unidos conforman el espacio muestral.

Elementos de Teoría de Conjuntos

Operaciones Matemáticas de Conjuntos

Hemos visto que dos o más conjuntos (eventos) pueden combinarse solamente de dos maneras: Unión o Intersección. Estas dos operaciones, más el proceso de complemento de un evento constituyen las operaciones básicas que involucran a eventos.

La notación que adoptaremos para designar conjuntos y sus operaciones básicas son las siguientes:

$\cup$: Unión.

$\cap$: Intersección.

$\supset$: Contiene.

$\subset$: Pertenece o se encuentra en.

$\overline{E}$: Complemento de E.

Elementos de Teoría de Conjuntos

Operaciones Matemáticas de Conjuntos

Las reglas matemáticas que rigen sobre las operaciones de conjuntos son las siguientes:

- **Igualdad de Conjuntos**: Dos conjuntos son iguales si y sólo si ambos conjuntos contienen exactamente los mismos puntos muestrales. Un caso básico es el siguiente

$$A \cup \phi = A$$

donde ϕ representa un conjunto vacío.

También se tiene que

$$A \cap \phi = \phi$$

Por lo tanto

$$A \cup A = A \quad \text{y} \quad A \cap A = A$$

Con respecto al espacio muestral S

$$A \cup S = S \quad \text{y} \quad A \cap S = A$$

Elementos de Teoría de Conjuntos

Operaciones Matemáticas de Conjuntos

- **Conjunto complemento**: Con respecto a un evento E y su complemento $\overline{E}$, se observa que

$$E \cup \overline{E} = S \quad \text{y} \quad E \cap \overline{E} = \phi$$

Finalmente

$$\overline{\overline{E}} = E$$

- **Ley Conmutativa**: La unión e intersección de conjuntos son conmutativas, es decir, para dos conjuntos A y B se cumple que

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Elementos de Teoría de Conjuntos

Operaciones Matemáticas de Conjuntos

- **Ley Asociativa**: La unión e intersección de conjuntos es asociativa, es decir, para tres conjuntos A, B y C se cumple que

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- **Ley Distributiva**: La unión e intersección de conjuntos es distributiva, es decir, para tres conjuntos A, B y C se cumple que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

Elementos de Teoría de Conjuntos

Operaciones Matemáticas de Conjuntos

- **Ley de De Morgan**: Esta ley relaciona conjuntos y sus complementos. Para dos conjuntos (eventos), E_1 y E_2, la ley de De Morgan dice que

$$\overline{(E_1 \cup E_2)} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2$$

Por inducción se puede generalizar para n eventos

$$\overline{(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n)} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \cdots \cap \overline{E}_n \tag{1}$$

Aplicando (1) a los complementos $\overline{E}_1$, $\overline{E}_2$,..., $\overline{E}_n$ se tiene que

$$\begin{aligned} \overline{(\overline{E}_1 \cup \overline{E}_2 \cup \cdots \cup \overline{E}_n)} &= \overline{\overline{E}}_1 \cap \overline{\overline{E}}_2 \cap \cdots \cap \overline{\overline{E}}_n \\ &= E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n \end{aligned} \tag{2}$$

Elementos de Teoría de Conjuntos

Operaciones Matemáticas de Conjuntos

- **Ley de De Morgan**: Aplicando complemento a ambos lados de la igualdad (2) se tiene que la ley de De Morgan también nos indica que

$$\overline{(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n)} = \overline{E}_1 \cup \overline{E}_2 \cup \cdots \cup \overline{E}_n$$

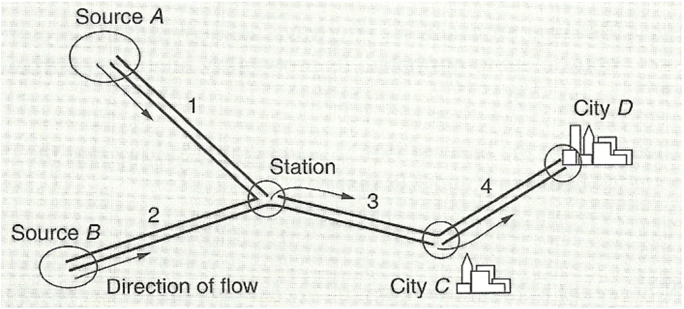
Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\overline{A \cup (B \cap C)} &= \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)} = \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\
\overline{(A \cup B) \cap C} &= \overline{(A \cup B)} \cup \overline{C} = (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{C} \\
[\overline{(A \cap B)} \cup C] \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) &= \overline{(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C)} \\
&= \overline{(A \cap B \cap \overline{C})} \cap \overline{(A \cap C)}
\end{aligned}$$

Elementos de Teoría de Conjuntos

Operaciones Matemáticas de Conjuntos

Ejemplo 2.12 Determine los eventos: "no hay corte en C" y "no hay corte en D". Utilizando la ley de De Morgan obtenga una nueva expresión.



Matemática de la Probabilidad

Hasta el momento hemos supuesto que una medida no negativo, llamada probabilidad, está asociado a cada evento en particular del espacio muestral.

Implícitamente, hemos asumido que dicha medida de probabilidad poseen ciertas propiedades y sigue ciertas normas de operación.

Formalmente estas propiedades y reglas son desarrolladas en la teoría matemática de probabilidad, la cual tiene como base de ciertos supuestos (axiomas) que no están sujetos a demostración.

Matemática de la Probabilidad

Los axiomas son los siguientes:

- **Axioma 1**: Para cada evento E contenido en un espacio muestral S se tiene que
$$P(E) \geq 0$$
- **Axioma 2**: La probabilidad del evento certeza S es
$$P(S) = 1$$
- **Axioma 3**: Para dos eventos E_1 y E_2 mutuamente excluyentes (disjuntos),
$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Matemática de la Probabilidad

Ley Aditiva

Sea un evento E y su complemento $\overline{E}$. Por ser eventos disjuntos se tiene que

$$P(E \cup \overline{E}) = P(E) + P(\overline{E})$$

Además como $(E \cup \overline{E}) = S$, se tiene que

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Para dos eventos cualquiera E_1 y E_2 la ley aditiva dice que

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \tag{3}$$

Matemática de la Probabilidad

Ley Aditiva

Ejemplo 2.13 Un contratista está iniciando dos nuevos proyectos, pero existe incerteza sobre la fecha de termino de ambos al final del primer año. El estado de un proyecto al final del primer año se puede clasificar como:

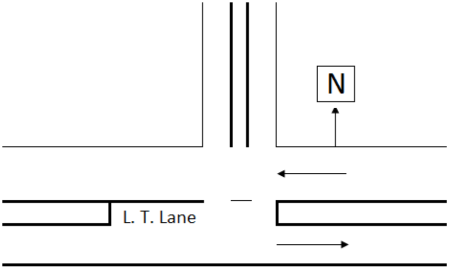
$$\begin{aligned} A &= \text{Concluido Definitivamente.} \\ B &= \text{Conclusión Cuestionable.} \\ C &= \text{Incompleto.} \end{aligned}$$

1. Determine el espacio muestral del estado de conclusión de ambos proyectos.
2. Asumiendo que cualquier estado de conclusión de ambos proyectos es igualmente probable. ¿Cuál es la probabilidad que al menos un trabajo este concluido definitivamente al finalizar el primer año?

Matemática de la Probabilidad

Ley Aditiva

Ejemplo 2.14 Volvamos al problema de la pista de viraje.



Defina los siguientes eventos:

E_1 = Más de dos vehículos aguardan turno para virar.

E_2 = A lo más cuatro vehículos aguardan su turno.

Matemática de la Probabilidad

Ley Aditiva

Ejemplo 2.14 Usando la tabla de frecuencias relativas, obtenga las siguientes probabilidades:

1. $P(E_1)$.
2. $P(E_2)$.
3. $P(E_1 \cap E_2)$.
4. $P(E_1 \cup E_2)$.

Matemática de la Probabilidad

Ley Aditiva

La ecuación (3) aplicada a la unión de tres eventos E_1, E_2 y E_3 es la siguiente:

$$\begin{aligned}
P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= P[(E_1 \cup E_2) \cup E_3] \\
&= P(E_1 \cup E_2) + P(E_3) - P[(E_1 \cup E_2) \cap E_3] \\
&= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) + P(E_3) - P[(E_1 \cap E_3) \cup (E_2 \cap E_3)] \\
&= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) \\
&\quad + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)
\end{aligned}$$

Para n eventos cualquiera, por De Morgan se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) &= 1 - P(\overline{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n}) \\
&= 1 - P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \cap \cdots \cap \overline{E}_n)
\end{aligned}$$

En el caso de $E_1,\ldots,E_n$ sean eventos mutuamente excluyentes

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Matemática de la Probabilidad

Cálculo de Probabilidades: Métodos de Conteo (**Rice Sec 1.4**)

Cuando los espacios muestrales son finitos, basta con asignar probabilidades a cada uno de los resultados posibles para luego obtener las probabilidad de un suceso simplemente sumando las probabilidades de ocurrencia de cada resultado básico que lo componen.

$$S = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$$

con $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, \ldots, N$.

Para el caso de Probabilidad Clásica se tiene que para un suceso A:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S}$$

Matemática de la Probabilidad

Cálculo de Probabilidades: Métodos de Conteo (**Rice Sec 1.4**)

Principio de la Multiplicación

Si un experimento está compuesto de k experimentos con tamaños muestrales n_1,...,n_k, entonces

$$\# S = n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

Matemática de la Probabilidad

Cálculo de Probabilidades: Métodos de Conteo (**Rice Sec 1.4**)

Permutación

Consideremos un conjunto de objetos

$$C = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

y queremos seleccionar una muestra de r objetos. ¿De cuántas maneras lo podemos hacer?

- Muestreo Con Reemplazo: n^r.
- Muestreo Sin Reemplazo: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$.

Matemática de la Probabilidad

Cálculo de Probabilidades: Métodos de Conteo (**Rice Sec 1.4**)

Combinación

Consideremos un Muestreo Sin Reemplazo. Si nos interesa una muestra sin importar el orden de ingreso, la cantidad de muestras distintas de tamaño r son

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

Estos "números" se conocen como coeficientes binomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

Matemática de la Probabilidad

Cálculo de Probabilidades: Métodos de Conteo (**Rice Sec 1.4**)

Ordenamiento Multinomial

Queremos asignar n objetos a k grupos distintos de tamaños $n_1,\ldots,n_k$, con $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. El número de grupos distintos con las características dadas son

$$\binom{n}{n_1\, n_2\, \cdots\, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!}$$

Matemática de la Probabilidad

Cálculo de Probabilidades: Métodos de Conteo (**Rice Sec 1.4**)

Ordenamiento Multinomial

Estos "números" se conocen como ordenamientos multinomiales y tienen la siguiente propiedad

$$(x_1+\cdots+x_k)^n = \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \cdots \sum_{n_k=0}^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}} \frac{n!}{n_1! \times \cdots \times n_k!} x_1^{n_1} \times \cdots \times x_k^{n_k}$$

Matemática de la Probabilidad

Cálculo de Probabilidades: Métodos de Conteo

Ejercicio 1

¿Cuál es la probabilidad que al menos dos alumnos celebren su cumpleaños el mismo día?

Matemática de la Probabilidad

Cálculo de Probabilidades: Métodos de Conteo

Ejercicio 2

Para celebración del Bicentenario de Chile el año pasado usted ofreció su casa a amigos y familiares para pasar uno de los cuatro días feriados. Ese día como anfitrión tenía pensado ofrecer una empanada de entrada y por esa razón cuando los invitó aprovecho de preguntar por sus preferencias. De los $2\,n$ invitados (incluyéndolo a usted), a manifestaron preferencia por la tradicional empanada de pino, otros b prefieren una empanada tipo napolitana y el resto les daba lo mismo.

Suponga que el día de la reunión usted encarga n empanadas de pino y n empanadas napolitanas, pero cuando llega a su casa se da cuenta que la forma en que cerraron las empanadas fue la misma para ambos tipo y solo hay forma de saber de que son probándolas. Si a y b son menores que n, ¿Cuál es la probabilidad que la preferencias de todas las personas sean respetadas?

Matemática de la Probabilidad

Cálculo de Probabilidades: Métodos de Conteo

Ejercicio 3

En el primer piso de un edifico corporativo, el cual tiene $n+1$ pisos, se encuentran m personas $(m < n)$ esperando que baje el ascensor que los llevará a sus respectivos trabajos.

Si en el ascensor ingresan sin problema las m personas y estás se bajan en un piso en particular con igual probabilidad sin importar lo que hagan el resto de los pasajeros. Calcule la probabilidad que solo dos pasajeros se bajen en un mismo piso y el resto en uno.

Matemática de la Probabilidad

Cálculo de Probabilidades: Métodos de Conteo

Ejercicio 4

Usted se encuentra en una fiesta con n invitados más y después de varias copas escoge a uno al azar para contarle un chisme.

Este es tan potente que el receptor se ve en la necesidad de contarlo y después de unos minutos en meditarlo escoge al azar a uno de los invitados para contarle la "última".

El problema es que en la meditación el receptor olvida quién se lo ha contado.

Si el chisme comienza a transmitirse de la misma manera entre los invitados, encuentre la probabilidad que el chisme se transmita exactamente r veces sin que deje ser novedad.

Matemática de la Probabilidad

Cálculo de Probabilidades: Métodos de Conteo

Ejercicio 5

Dos amigos Nicolás y Fernando decidieron este semestre inscribir Tenis como curso deportivos con la idea de entrenar juntos, pero les acaban de avisar que los 90 alumnos aceptados serán distribuidos aleatoriamente en tres secciones de 30 alumnos cada una.

¿Cuál es la probabilidad que los dos amigos queden en la misma sección y puedan entrenar juntos durante el semestre tal como lo tenían planificado si es que ya fueron aceptados en el deportivo?

Matemática de la Probabilidad

Probabilidad Condicional

Cuando la ocurrencia de un evento (o no ocurrencia) depende de otro evento, es relevante ver la probabilidad como una probabilidad condicional.

Se define la probabilidad que un evento E_1 ocurra bajo el supuesto que otro evento E_2 ocurre con certeza a

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \tag{4}$$

En general, la probabilidad de un evento E ya está condicionada se condiciona a la ocurrencia del evento certeza S:

$$P(E \mid S) = \frac{P(E \cap S)}{P(S)} = P(E)$$

Matemática de la Probabilidad

Probabilidad Condicional

Consideremos las probabilidades de un evento E_1 y su complemento $\overline{E}_1$ condicionados a la ocurrencia previa de un evento E_2.

$$P(E_1 \,|\, E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \quad \text{y} \quad P(\overline{E}_1 \,|\, E_2) = \frac{P(\overline{E}_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

Si las sumamos tenemos que

$$\begin{aligned} P(E_1 \,|\, E_2) + P(\overline{E}_1 \,|\, E_2) &= \frac{1}{P(E_2)} \left\{ P(E_1 \cap E_2) + P(\overline{E}_1 \cap E_2) \right\} \\ &= \frac{1}{P(E_2)} \left\{ P[(E_1 \cap E_2) \cup (\overline{E}_1 \cap E_2)] \right\} \\ &= \frac{1}{P(E_2)} \left\{ P[(E_1 \cup \overline{E}_1) \cap E_2] \right\} \end{aligned}$$

Matemática de la Probabilidad

Probabilidad Condicional

$$
\begin{aligned}
P(E_1 \,|\, E_2) + P(\overline{E}_1 \,|\, E_2) &= \frac{1}{P(E_2)} \left\{ P(S \cap E_2) \right\} \\
&= \frac{1}{P(E_2)} \cdot P(E_2) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

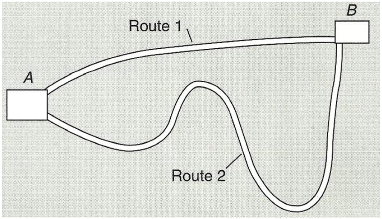
Por lo tanto,

$$
P(\overline{E}_1 \,|\, E_2) = 1 - P(E_1 \,|\, E_2)
$$

Matemática de la Probabilidad

Probabilidad Condicional

Ejemplo 2.17 Existen dos rutas entre las ciudades A y B. Definamos los siguientes eventos:



$$E_1 = \text{Ruta 1 abierta.}$$

$$E_2 = \text{Ruta 2 abierta.}$$

Las probabilidades asociadas son:

$$P(E_1) = 0,75; \quad P(E_2) = 0,50; \quad P(E_1 \cap E_2) = 0,40$$

Determine:

- $P(E_1 \mid E_2)$.
- $P(\overline{E}_1 \mid \overline{E}_2)$.

Matemática de la Probabilidad

Probabilidad Condicional

Independencia estadística

Dos eventos E_1 y E_2 se dice que son estadísticamente independientes si la ocurrencia de un evento no depende de la ocurrencia o no ocurrencia del otro.

Es decir,

$$P(E_1 \mid E_2) = P(E_1) \quad \text{ó} \quad P(E_2 \mid E_1) = P(E_2)$$

Matemática de la Probabilidad

Ley Multiplicativa

A partir de la ecuación (4) se deduce que si E_1 y E_2 con eventos posibles entonces

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \,|\, E_2) \cdot P(E_2)$$

ó

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2 \,|\, E_1) \cdot P(E_1)$$

Si E_1 y E_2 fuesen eventos estadísticamente independientes entonces

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

Matemática de la Probabilidad

Ley Multiplicativa

Para tres eventos E_1, E_2 y E_3 la ley multiplicativa implica las siguientes igualdades

$$
\begin{aligned}
P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) &= P(E_3 \,|\, E_1 \cap E_2) \cdot P(E_2 \,|\, E_1) \cdot P(E_1) \\
&= P(E_3 \,|\, E_1 \cap E_2) \cdot P(E_1 \,|\, E_2) \cdot P(E_2) \\
&= P(E_2 \,|\, E_1 \cap E_3) \cdot P(E_3 \,|\, E_1) \cdot P(E_1) \\
&= P(E_2 \,|\, E_1 \cap E_3) \cdot P(E_1 \,|\, E_3) \cdot P(E_3) \\
&= P(E_1 \,|\, E_2 \cap E_3) \cdot P(E_3 \,|\, E_2) \cdot P(E_2) \\
&= P(E_1 \,|\, E_2 \cap E_3) \cdot P(E_2 \,|\, E_3) \cdot P(E_3)
\end{aligned}
$$

Matemática de la Probabilidad

Ley Multiplicativa

Consideremos ahora los eventos E_1, E_2, ..., E_n.

Estos eventos se dicen mutuamente independientes si y solo si, cualquier sub-colección de eventos de ellos $E_{i\,1}$, $E_{i\,2}$, ..., $E_{i\,m}$ cumple con la siguiente condición (**Rice, pág 22**)

$$P(E_{i\,1} \cap E_{i\,2} \cap \cdots \cap E_{i\,m}) = P(E_{i\,1}) \times P(E_{i\,2}) \times \cdots \times P(E_{i\,m})$$

Matemática de la Probabilidad

Ley Multiplicativa

Ejercicio

Considere el lanzamiento de una moneda honesta dos veces y defina los siguientes eventos:

A: Obtener cara en el primer lanzamiento

B: Obtener cara en el segundo lanzamiento

C: Obtener solamente una cara.

Muestre que los eventos A, B y C son independientes a pares, pero no mutuamente independientes.

Matemática de la Probabilidad

Ley Multiplicativa

Ejercicio

Mostrar que si E_1 y E_2 son eventos estadísticamente independientes, entonces $\overline{E}_1$ y $\overline{E}_2$ también lo son.

Ejercicio

Mostrar que si E_1 y E_2 son eventos estadísticamente independientes dado un evento A, entonces

$$P(E_1 \cap E_2 \,|\, A) = P(E_1 \,|\, A) \cdot P(E_2 \,|\, A)$$

Ejercicio

Mostrar que para dos eventos cualquiera E_1 y E_2 se tiene que

$$P(E_1 \cup E_2 \,|\, A) = P(E_1 \,|\, A) + P(E_2 \,|\, A) - P(E_1 \cap E_2 \,|\, A)$$

Matemática de la Probabilidad

Ley Multiplicativa

Ejemplo 2.22 Una ciudad posee dos plantas generadoras a y b.

En las horas peak de consumo, ambas plantas son necesarias.

Si alguna falla, entonces habrá apagones en algunos sectores de la ciudad.

Definamos los siguientes eventos:

$A =$ falla en la planta a.

$B =$ falla en la planta b.

Matemática de la Probabilidad

Ley Multiplicativa

Ejemplo 2.22

Las probabilidades con las que se cuentan son las siguientes:

$$P(A) = 0,05; \quad P(B) = 0,07; \quad P(A \cap B) = 0,01$$

Interprete y calcule las siguientes probabilidades

- $P(B \,|\, A)$.
- $P(A \,|\, B)$.
- $P(A \cup B)$.
- $P\left(A \cap \overline{B} \,\middle|\, A \cup B\right)$.
- $P\left(A \cap B \,|\, A \cup B\right)$.

Matemática de la Probabilidad

Teorema de Probabilidades Totales

Considere n eventos posibles E_1, E_2, $\ldots$, E_n colectivamente exhaustivos y mutuamente excluyentes, es decir,

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = S$$

y

$$E_i \cap E_j = \phi \quad \forall\, i \neq j$$

Entonces

$$A = A \cap S = A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap E_i),$$

con $(A \cap E_1)$,..., $(A \cap E_n)$ eventos mutuamente excluyentes .

Matemática de la Probabilidad

Teorema de Probabilidades Totales

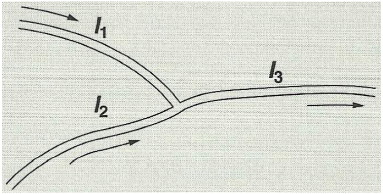
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap E_i), \quad \text{por Axioma 3} \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A \,|\, E_i) \cdot P(E_i), \quad \text{por ley multiplicativa} \end{aligned}$$

Matemática de la Probabilidad

Teorema de Probabilidades Totales

Ejemplo 2.26 La figura muestra el flujo vehicular de una carretera.



Si E_j es el evento congestión en ruta j y las probabilidades con que se cuentan son:

$$P(E_1) = 0,1; \quad P(E_2) = 0,2; \quad P(E_1 \,|\, E_2) = 0,4; \quad P(E_2 \,|\, E_1) = 0,8$$

Determine $P(E_3)$ en los siguientes casos

1. Si $P(E_3 \,|\, \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2) = 0,2.$
2. Si $P(E_3 \,|\, E_1 \cap \overline{E}_2) = P(E_3 \,|\, \overline{E}_1 \cap E_2) = 0,25$ y $P(E_3 \,|\, E_1 \cap E_2) = 0,95.$

Matemática de la Probabilidad

Teorema de Bayes

Si cada evento E_j de la partición de S y el evento A son posibles, entonces por la ley multiplicativa se tiene que

$$P(A \mid E_j) \cdot P(E_j) = P(E_j \mid A) \cdot P(A)$$

Es decir,

$$P(E_j \mid A) = \frac{P(A \mid E_j) \cdot P(E_j)}{P(A)}$$

Aplicando el teorema de probabilidades totales se tiene que

$$P(E_j \mid A) = \frac{P(A \mid E_j) \cdot P(E_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A \mid E_i) \cdot P(E_i)}$$

Este resultado se conoce como el Teorema de Bayes.

Matemática de la Probabilidad

Teorema de Bayes

Ejemplo 2.30 Para garantizar la calidad del hormigón armado como material de construcción, se recoge una muestra aleatoria de cilindros de hormigón a partir de mezclas de concreto entregados al sitio de construcción.

Registros anteriores de hormigón de la misma planta muestran que el 80% de mezclas de concreto son buenos o de calidad satisfactoria.

Para garantizar que el hormigón entregado en el sitio es de buena calidad, el ingeniero requiere que un cilindro de entre los recogidos cada día se sometan (después de 7 días de curado) a una prueba de resistencia a la mínima compresión.

Matemática de la Probabilidad

Teorema de Bayes

Ejemplo 2.30

El método de ensayo no es perfecto, su confiabilidad es sólo del 90%, es decir, la probabilidad de que un cilindro de hormigón de buena calidad pase la prueba es de 0.90, o que un cilindro de mala calidad pase la prueba es 0.10.

Definir los siguientes eventos:

$G =$ Concreto de buena calidad.

$T =$ Un cilindro de concreto pasa la prueba.

La información disponible es

$$P(G) = 0,80; \quad P(T\,|\,G) = 0,90; \quad P(T\,|\,\overline{G}) = 0,10$$

Calcule $P(G\,|\,T)$.