UNL FICH Universidad Nacional del Litoral

Mecánica Computacional

Docentes:
Dr. Norberto Marcelo Nigro[1]
MSc. Gerardo Franck[2]
Ing. Diego Sklar[3]

[1]nnigro@intec.unl.edu.ar - [2]gerardofranck@yahoo.com.ar - [3]diegosklar@gmail.com

GUIA DE TRABAJOS PRACTICOS Nº 1

MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Ejercicio 1

Dada la siguiente fórmula que aproxima la derivada primera:

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i = au_{i-3} + bu_{i-2} + cu_{i-1} + du_i + eu_{i+1}$$

donde se supone un paso de malla h uniforme.

a) Determinar el valor de las constantes a, b, c, d y e.
b) Determinar la precisión *p* de la aproximación (orden h^p).

Ejercicio 2

Considere el problema de conducción de calor 1D:

$$\boldsymbol{\frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{k}\Delta \mathrm{T} + c(T - T_{amb}) + Q = 0 \qquad 0 < x < L}$$

donde k es la conductividad del medio, T la temperatura, Q una fuente de calor interna, c una constante de pérdida de calor al medio ambiente y T_{amb} la temperatura del medio ambiente. Las condiciones de contorno en los extremos pueden ser:

$$\boldsymbol{T = \overline{T}, \quad Dirichlet}$$

$$\boldsymbol{q.\hat{n} = -k\frac{\partial T}{\partial n} = \overline{q}, \qquad Neumann - Flujo\ impuesto}$$

$$\boldsymbol{q.\hat{n} = -k\frac{\partial T}{\partial n} = h(T - T_\infty), \qquad Robin - Convecci\acute{o}n}$$

Considerar el caso estacionario, con c = 1, k = 1, T_{amb} = 0, $Q = 1 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, condición Neumann $\bar{q}$ = 10 en x = 0 y $\bar{q}$ = 0 en x = 1. Escribir un programa para resolver el problema anterior por el método de diferencias finitas usando una malla uniforme de paso h = 1/N, donde N es el número de segmentos. Mostrar como se reduce el error con respecto a la solución analítica al aumentar el número de intervalos N.

Ejercicio 3

El problema de conducción del calor en un recinto rectangular (2D) en coordenadas cartesianas de dimensiones Lx = 3 y Ly = 1, es gobernado por la siguiente ecuación:

$$k\left(\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial y^2}\right) = Q$$

Como condición de borde se considera una temperatura impuesta a un valor nulo en todos los contornos. Asumir que la conductividad térmica es unitaria y la fuente de calor queda expresada como $Q(x,y) = 2(x^2 + y^2)$. Utilizar un esquema en diferencias de segundo orden, con un espaciamiento homogéneo usando un Δx = 0.5 y Δy = 0.25.

a) Obtener la solución y graficarla.
b) Analizar cómo cambia la solución si en lugar de fijar la temperatura del contorno al valor nulo la fijamos a otro valor, por ejemplo, $\bar{T}$ = 100.
c) Resuelva el problema anterior pero ahora utilice las siguientes condiciones de contorno:
   - Temperatura impuesta ($\bar{T}$ = 100) en los contornos superior, izquierdo y derecho
   - Flujo de calor nulo (adiabático) en el contorno inferior.

Ejercicio 4

Dado el siguiente problema de conducción de calor estacionario:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi - 10x(x+1) = 0$$
$$\varphi(0) = 1; \quad \varphi(1) = 0$$

Obtener la solución para una malla no uniforme descripta a continuación:
{ (0, 0.05) - (0.05, 0.15) - (0.15, 0.35) - (0.35, 0.5) - (0.5, 0.75) - (0.75, 1) }

Ejercicio 5

Dado el siguiente problema de conducción de calor no estacionario:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 100(x+y)$$

$$u(0,y,t) = u(2,y,t) = u(x,1,t) = 10$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \; en \; y = 0$$
$$u(0,x,y) = 0$$

Obtener la solución $u(x,y,t)$ mediante el método de diferencias finitas con aproximaciones de segundo orden, utilizando para la discretización temporal los métodos forward Euler (explícito), backward Euler (implícito) y Crank-Nicholson.