Elección Discreta

Tarea 1

Fecha de entrega: viernes 14 de febrero via Teams antes de clase (11:59 pm).

1. (*Simulando elecciones*)

   En las siguientes preguntas asuma que hay tres tipos de consumidores s_1, s_2, s_3, de cada uno 50 (o sea 150 consumidores en total), $|B| = 4$, y que se sabe $v(x_j, s_n) = 3 + 2\log(y_n - p_j)$ donde y_n es el ingreso observado del consumidor de tipo n, $y_n \in \{500, 4000, 10000\}$, y p_j el precio de la alternativa j, $p_j = 100 * j$, $j = 1, \ldots, 4$. Además, asuma que la utilidad no observada es i.i.d. Gumbel

   (a) Escriba pseudo-código y código que simule cada consumidor directamente, generando una realizacion de la utilidad no observada. Esto es, la utilidad del consumidor n por consumir la alternativa j es $v_{jn} + \epsilon_{jn}$ donde ϵ_{jn} es una realizacion de la v.a. distribuida Gumbel con parámetros $\mu = 0, \beta = 1$. La alternativa elegida por el consumidor es aquella que le da mayor utilidad total (observada mas no observada).

   A esto le llamamos episodio. Simule 10000 episodios de elección, re muestreando los valores de la utilidad no observada para cada episodio. Note que en cada episodio, para cada consumidor necesita muestrear cuatro valores para la parte no observada de la utilidad. Calcule la demanda de cada alternativa en cada episodio. Grafique la distribución de la demanda de cada alternativa y encuentre su promedio y desviación estandar.

   (b) Escriba pseudo-código y código que simule las elecciones de los 150 consumidores, asumiendo ahora que cada elección es una realizacion de una variable aleatoria multinomial con las probabilidades dadas por el logit condicional (por qué es el supuesto correcto?).

   Repita esto 10000 episodios. Para cada episodio, calcule la demanda de cada alternativa. Grafique la distribución de la demanda de cada alternativa y encuentre su promedio y desviación estandar a través de todos los episodios.

   (c) Discuta las simulitudes y diferencias entre (a) y (b).

2. (*Agregación*) Suponga $s_n \in S \subset \mathbb{R}^m$, $|S| < \infty$, esto es, hay un número finito de tipos de consumidores (acorde a sus características observadas), y en la población hay un número M_n de consumidores de tipo n. Entonces el número total de consumidores es $M_1 + M_2 + \cdots + M_{|S|}$. Ademas, suponga $|B|$ es el número de alternativas (obviamente finito, exhaustivo y excluyente), y cada alternativa puede ser producida mágicamente (oferta ilimitada).

   Asuma que la probabilidad de que un consumidor con caracteristicas observadas s_n elija (consuma) la alternativa x_j cuando enfrenta el conjunto de alternativas B es $P(x_j|s_n, B) = p_{nj} > 0$ para todo n, j.

   (a) Encuentre una expresión analítica para la demanda esperada de cada alternativa.

   (b) Usando esta expresión, calcule la demanda esperada de cada alternativa en el ejercicio 2. Interprete.

3. (*Elasticidades*) Suponga que $P(x_j|s_n, A) = \frac{e^{v(x_j,s_n)}}{\sum_{k\in A} e^{v(x_k,s_n)}}$, que $x_j \in \mathbb{R}^\ell$, $s_n \in \mathbb{R}^m$, $\ell, m \in \mathbb{N}$, $v : \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$. Asuma que v es tan diferenciable como sea necesario. Note que $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{j\ell}) = (x_{jr})_{r=1}^{\ell}$ es un el vector de caracteristicas de un producto.

(a) (Sustitución cruzada) Considere $i \neq j$, $x_i, x_j \in A$. Muestre que

$$\frac{\partial P(x_i|s_n, A)}{\partial x_{jr}} = -\text{Prob}(x_i|s_n, A)\text{Prob}(x_j|s_n, A)\frac{\partial v(x_j, s_n)}{\partial x_{jr}}$$

Interprete este resultado en términos económicos.

(b) (Sustitución propia) Considere $x_i \in A$. Muestre que:

(c) Muestre que:

$$\sum_{i \in A} \frac{\partial P(x_i|s_n, A)}{\partial x_{jr}} = 0.$$

Interprete este resultado en términos económicos.

4. (*IIA es MUY restrictiva*)[1] Considere el conjunto de alternativas $B = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

(a) Liste los posibles conjuntos de alternativas $A \neq \emptyset$, $A \subseteq B$. Asuma exhaustividad y exclusividad en cada situacion de elección A. Cuántos parámetros libres tiene el sistema $\{\text{Prob}(\cdot|A)\}_{A \subseteq B}$?.

Nota: Por parámetros entiéndase probabilidades $\text{Prob}(\cdot|A)$.Un parámetro NO es libre si se puede escribir en función de otros parámetros "primitivos". Por ejemplo, en $p + q = 1$, $p, q \in \mathbb{R}$, solo hay un parámetro libre.

(b) Asuma además $\{\text{Prob}(\cdot|B)\}$ satisface IIA. Cuántos parámetros libres tiene ahora el sistema $\{\text{Prob}(\cdot|A)\}_{A \subseteq B}$?

(c) Compare sus respuestas a los incisos anteriores. En qué sentido es IIA MUY restrictiva?

[1] Basado en Dagsvik (2000).

2. (*Agregación*) Suponga $s_n \in S \subset \mathbb{R}^m$, $|S| < \infty$, esto es, hay un número finito de tipos de consumidores (acorde a sus características observadas), y en la población hay un número M_n de consumidores de tipo n. Entonces el número total de consumidores es $M_1 + M_2 + \cdots + M_{|S|}$. Ademas, suponga $|B|$ es el número de alternativas (obviamente finito, exhaustivo y excluyente), y cada alternativa puede ser producida mágicamente (oferta ilimitada).

   Asuma que la probabilidad de que un consumidor con caracteristicas observadas s_n elija (consuma) la alternativa x_j cuando enfrenta el conjunto de alternativas B es $P(x_j|s_n, B) = p_{nj} > 0$ para todo n, j.

   (a) Encuentre una expresión analítica para la demanda esperada de cada alternativa.

   (b) Usando esta expresión, calcule la demanda esperada de cada alternativa en el ejercicio 2. Interprete.

a) Demanda esperada de la alternativa x_j.

Sabemos que para los M_n consumidores del tipo n, la probabilidad de escoger la alternativa j es $p_{nj} > 0$. Luego entonces, sea Y_{nj} la cantidad demandada de la alternativa j por la subpoblación n.

Es fácil ver que $Y_{nj} \sim Bin(M_n, p_{nj})$. Luego,

$$E_{\mathbb{P}}[Y_{nj}] = M_n p_{nj}$$

Para finalizar, sea $Y_j = \sum_n Y_{nj}$ la cantidad demandada total del bien j.

$$E_{\mathbb{P}}(Y_j) = \sum^{n} E_{\mathbb{P}}(Y_{nj}) = \sum^{n} M_n p_{nj}$$

3. (*Elasticidades*) Suponga que $P(x_j|s_n, A) = \frac{e^{v(x_j,s_n)}}{\sum_{k\in A} e^{v(x_k,s_n)}}$, que $x_j \in \mathbb{R}^\ell$, $s_n \in \mathbb{R}^m$, $\ell, m \in \mathbb{N}$, $v : \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$. Asuma que v es tan diferenciable como sea necesario. Note que $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{j\ell}) = (x_{jr})_{r=1}^{\ell}$ es un el vector de caracteristicas de un producto.

(a) (Sustitución cruzada) Considere $i \neq j$, $x_i, x_j \in A$. Muestre que

$$\frac{\partial P(x_i|s_n, A)}{\partial x_{jr}} = -\text{Prob}(x_i|s_n, A)\text{Prob}(x_j|s_n, A)\frac{\partial v(x_j, s_n)}{\partial x_{jr}}$$

Interprete este resultado en términos económicos.

(b) (Sustitución propia) Considere $x_i \in A$. Muestre que:

(c) Muestre que:

$$\sum_{i \in A} \frac{\partial P(x_i|s_n, A)}{\partial x_{jr}} = 0.$$

a) $$\frac{\partial}{\partial x_{jr}} P(x_i|s_n, A) = \frac{\partial}{\partial x_{jr}} \frac{e^{V(x_i, s_n)}}{\sum_{k\in A} e^{V(x_k, s_n)}}$$

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$$= \left(\frac{1}{\sum_{k\in A} e^{V(x_k, s_n)}}\right)^2 \left[\left(\sum_{k\in A} e^{V(x_k, s_n)}\right) e^{V(x_i, s_n)} \frac{\partial}{\partial x_{jr}} V(x_i, s_n) - e^{V(x_i, s_n)} \left(\sum_{k\in A} \frac{\partial}{\partial x_{jr}} e^{V(x_k, s_n)}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\sum_{k\in A} e^{V(x_k, s_n)}}\right)^2 \left[-e^{V(x_i, s_n)} \left(\sum_{k\in A} e^{V(x_k, s_n)} \frac{\partial}{\partial x_{jr}} V(x_k, s_n)\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\sum_{k\in A} e^{V(x_k, s_n)}}\right)^2 \left[-e^{V(x_i, s_n)} e^{V(x_j, s_n)} \frac{\partial}{\partial x_{jr}} V(x_j, s_n)\right]$$

$$= - P(X_i | S_n, A)\, P(X_j | S_n, A) \frac{\partial}{\partial X_{jr}} V(X_j, S_n)$$

Interpretación

$\frac{\partial}{\partial X_{jr}} V(X_j, S_n)$ refleja el cambio en utilidab (observada) al aumentar (o disminuir) una unidad de la característica r a la característica j. Ésto afecta en signo contrario a la probabilidad de elegir la alternativa i, ponderado por las probabilidades que sucedan dichas alternativas

c) Sabemos que

$$\sum_{i \in A} P(X_i | S_n; A) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial X_{jr}} \sum_{i \in A} P(X_i | S_n; A) = \frac{\partial}{\partial X_{jr}} 1 = 0$$

La suma de los cambios en las probabilidades de elección cuando una característica de cierta alternativa cambia debe de ser 0.

4. (*IIA es MUY restrictiva*)[1] Considere el conjunto de alternativas $B = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

(a) Liste los posibles conjuntos de alternativas $A \neq \emptyset$, $A \subseteq B$. Asuma exhaustividad y exclusividad en cada situacion de elección A. Cuántos parámetros libres tiene el sistema $\{\text{Prob}(\cdot|A)\}_{A\subseteq B}$?.

Nota: Por parámetros entiéndase probabilidades $\text{Prob}(\cdot|A)$.Un parámetro NO es libre si se puede escribir en función de otros parámetros "primitivos". Por ejemplo, en $p + q = 1, p, q \in \mathbb{R}$, solo hay un parámetro libre.

(b) Asuma además $\{\text{Prob}(\cdot|B)\}$ satisface IIA. Cuántos parámetros libres tiene ahora el sistema $\{\text{Prob}(\cdot|A)\}_{A\subseteq B}$?

(c) Compare sus respuestas a los incisos anteriores. En qué sentido es IIA MUY restrictiva?

a) Dado $A \subseteq B$, es claro notar que $\sum_{j\in A} P(j|A) = 1$, lo que hace que haya $|A|-1$ parámetros libres. Luego entonces,

$$\text{Total de parámetros libres} = \sum_{n=1}^{|B|} \binom{|B|}{n}(n-1) = \sum_{n=2}^{|B|} \binom{|B|}{n}(n-1)$$

Cuando $|B| = 4$, la expresión queda

$$= 6\cdot 1 + 4\cdot 2 + 1\cdot 3$$

$$= 17 \text{ parámetros libres}$$

b) Sabemos que si $\{P(\cdot|B\}$ satisface IIA,

$$P(i|A) = \frac{P(i|B)}{\sum_{j\in A} P(j|B)} \quad \forall\, i\in A,\ \forall A\subseteq B.$$

Por lo que $P(i|A)$ es función de $\{P(j|B),\, j\in B\}$ cuya cardinalidad

es la misma que B. Además no olvidemos que,

$$\sum_{j\in B} P(j|B) = 1,$$

por lo que, al igual que en a), Solo hay $|B|-1$ parámetros libres.

Por lo tanto, el sistema completo sólo tiene $|B|-1$ parámetros libres.

Cuando $|B|=4$, IIA hace que solo haya 3 parámetros libres

c) Hay una gran diferencia entre los parámetros libres de a) y de b). IIA si es muy restrictivo.