UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
CAMPUS SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA (DCT)

Exercício de Teoria dos Grafos

UC: **Teoria dos Grafos**

Aluno: **Thauany Moedano**

RA: **92486**

Professor: **Dr. Reginaldo Massanobu Kuroshu.**

Entrega: **16/08/2016**

Resumo

Resolução de exercícios (2) de Teoria dos Grafos

Exercício 1. Mostre que se G é simples então $m \leq (n2) = \frac{n(n-1)}{2}$. Determine quando a igualdade é satisfeita.

Se G é simples, não possui laços nem arestas paralelas. Um grafo completo tem o máximo de arestas que um grafo simples pode ter pois cada vértice se liga com todos os outros uma única vez. Isso significa que se o grafo tem N vértices, cada vértice tem grau n-1 (o total de vértices menos ele mesmo). Utilizando a fórmula vista em aula, sabemos que o somatório do grau dos vértices é duas vezes o número de arestas. Em um grafo completo podemos reescrever o somatório como $n.(n-1)$ pois você soma os "(n-1)"graus n vezes. Se $n(n-1) = 2m$ (m = número de arestas) logo $m = \frac{n(n-1)}{2}$. Como qualquer outro grafo simples tem menos arestas que o grafo completo, seu número de arestas sempre será menor que esse valor.

Exercício 2. Mostre que em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

Podemos provar por indução.

Base: O caso base é quando um grafo não possui arestas. Logo todos os vértices tem grau zero (par).

Hipótese indutiva: Suponha um grafo com m arestas e um número par de vértices com grau ímpar. Queremos mostrar que em um grafo com m+1 arestas isso também acontece.

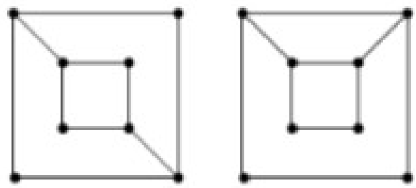
Prova: Seja dois vértices v e w. Suponha que no grafo de m arestas seja adicionado uma aresta conectando esses dois vértices. Vamos analisar as seguintes situações antes da nova conexão:

- v tem grau par e w tem grau ímpar
- v tem grau impar e w tem grau impar
- v tem grau par e w tem grau par

No primeiro caso, ao fazer a conexão, v passar a ter grau ímpar e w grau par. Como em m arestas pela hipótese indutiva, o grafo tem um número par de vértices e basicamente apenas inverteu os papéis de v e w, o número de vértices com grau ímpar não se alterou.

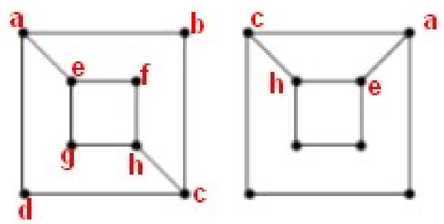
No segundo caso, dois vértices de grau par viram ímpar. Como pela hipótese indutiva tem um número ímpar de vértices com grau par, esse número agora é subtraido de 2, resultando em um número ímpar. Analogamente acontece para o terceiro caso, em que se ganha dois vértices com grau ímpar, acrescendo o resultado em 2 que também dá um número ímpar.

Exercício 3. Os grafos abaixo são isomorfos? Justifique



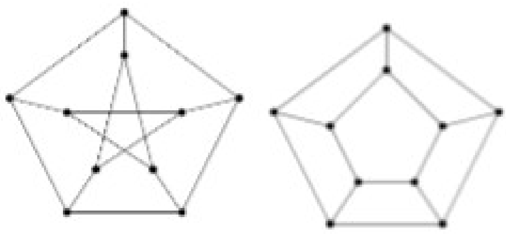
Pela definição dois grafos são isomorfos se existirem bijeções V(G) $->$ E(G) $->$ E(H) e também para as funções que ligam as arestas.

Ambos os grafos possuem 8 vértices e 10 arestas. Mas não é possui fazer uma bijeção entre as funções.

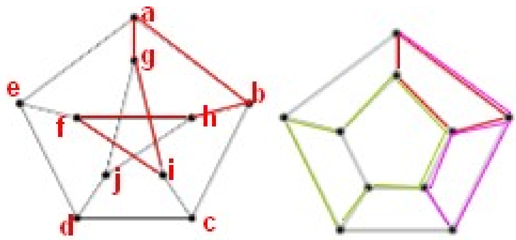


Conforme na figura, os vértices "a", "e", "c"e "h"tem grau três. Apesar de na segunda figura também existirem quatro vértices de grau três que formam um ciclo somente com vértices de grau três, que não existe na primeira figura. Logo não é possível fazer as bijeções das funções de incidência.

Exercício 4. Os grafos abaixo são isomorfos? Justifique.



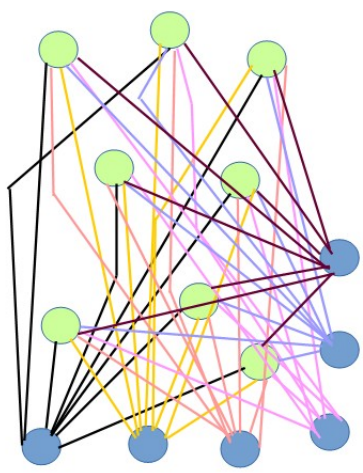
Ambos os grafos possuem o mesmo número de vértices e de arestas. Basta verificar as bijeções.



Nomeando os vértices podemos verificar que existe um ciclo de tamanho 6 formado pelos vértices a-g-i-f-h-b. Como a figura acima sugere não é possivel formar um ciclo de tamanho 6 no segundo grafo. Portanto esses grafos não são isomorfos.

Exercício 5. Em um encontro entre um grupo de brasileiros e 15 argentinos, cada brasileiro cumprimentou exatamente 6 argentinos e cada argentino cumprimentou exatamente 8 brasileiros. Quantos brasileiros havia no encontro?

Se cada brasileiro cumprimenta 6 argentinos e cada argentino cumprimenta 8 brasileiros, isso significa que cada vértice que representa um brasileiro em um grafo tem grau 6 e cada vértice representante de um argentino no grafo tem grau 8, conforme tenta mostrar a figura a seguir:



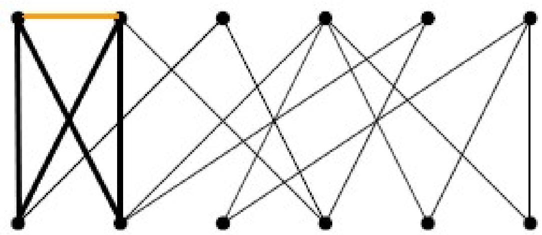
Portanto, seguindo a lógica da imagem, se 8 brasileiros atendem um grupo de 6 argentinos, 16 brasileiros atendem um grupo de 12 e fazendo a proporção 4 para 3, 18 brasileiros atendem um grupo de 15 argentinos.

Portanto havia 18 brasileiros no encontro.

Exercício 6. Mostre que um ciclo é bipartido se e somente se seu comprimento é par.

Ida: Todo caminho em um grafo bipartido alterna um vértice em um conjunto X e um vértice em um conjunto Y. Considerando que exista um vértice em qualquer um dos dois conjuntos que feche um ciclo. Para voltar a esse vértice é preciso ir a outra partição e voltar. Portanto, isso resulta em um número par de vezes.

Volta: Suponha um grafo que todo ciclo seja de comprimento par. Podemos colocar num conjunto X um determinado vértice V e todos os vértices que estão a uma distância par deste vértice. Os outros vértices foram o conjunto Y. Nestas condições formaríamos um grafo bipartido. Se adicionarmos uma aresta que liga dois vértices de um mesmo conjunto, o ciclo seria de comprimento ímpar mas o grafo não seria mais bipartido. Logo, não pode existir mais nenhuma aresta entre os vértices que estão em X para o grafo ser bipartido, como exemplifica a figura a seguir.



Exercício 7. Mostrque que em qualquer grupo de duas ou mais pessoas sempre existem duas pessoas que possuem o mesmo número de amigos no grupo.

Basta mostrarmos quem em um dado grafo simples com pelo menos dois vértices conectados sempre há dois vértices com o mesmo grau. Podemos utilizar o princípio da casa dos pombos para resolver este problema. Como o grafo é simples, o grau pode variar de 0 a (n-1). Mas se existe um vértice de grau zero, não existe um vértice de grau n-1 (e vice-versa). Logo, se decartamos o zero, teremos a possibilidade de preencher os graus de 1 a n-1 para N vértices. Obrigatoriamente, um vértice deverá ter o grau repetido. Analogamento acontece se excluirmos o grau (n-1).