Tarea 1. Grupo 2.

julio.restrepor

April 2021

El vértice de la QED es $ig_e\gamma^\mu$ y para las interacciones débiles que involucran al Z es

$$-\frac{ig_z}{2}\gamma^\mu(g_V^f - g_A^f\gamma^5)$$

Entonces podemos reunir ambas expresiones en

$$-i\gamma^\mu(\hat{g}_V^f - \hat{g}_A^f\gamma^5) \tag{1}$$

Donde para la QED[1] $\hat{g}_A = 0$ y $\hat{g}_V = -g_e = -e$ y para las EW $\hat{g}_A = g_z g_A/2$ y $\hat{g}_V = g_z g_V/2$. Para el propagador podemos poner el masivo y cuando evaluemos el caso del fotón eliminamos los términos que van con la masa. Teniendo esto en cuenta podemos escribir la amplitud de Feynman para el proceso como

$$i\mathcal{M} = [\bar{v}_{s'}(p_2)(-i\gamma^\mu(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5))u_s(p_1)][\frac{-i(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2})}{k^2 - M^2}][\bar{u}_r(p_3)(-i\gamma^\nu(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5))v_{r'}(p_4)] \tag{2}$$

Que podemos escribir de forma más compacta como[2]

$$i\mathcal{M} = i[\bar{v}_{s'}G^\mu u_s][D_{\mu\nu}][\bar{u}_r G^\nu v_{r'}] \tag{3}$$

Donde $G^\sigma = \gamma^\sigma(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5)$. Ahora calculemos lo siguiente con S siendo cualquier espinor

$$[\bar{S}G^\mu S']^\dagger = S'^\dagger G^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger}S = S'^\dagger\gamma^0\gamma^0 G^{\mu\dagger}\gamma^0 S = \bar{S}'G^{\mu\ddagger}S$$

Y $G^{\mu\ddagger} = \gamma^0 G^{\mu\dagger}\gamma^0$. En nuestro caso tenemos que

$$G^{\mu\ddagger} = \gamma^0(\gamma^\mu(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5))^\dagger\gamma^0$$

$$= \gamma^0((\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5)\gamma^{\mu\dagger})\gamma^0$$

Como γ^5 conmuta con un par de gammas y $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$

[1] Quitando las f ya que para electrones y muones, que es nuestro caso, valen igual.

[2] Vamos a suprimir los valores de los momentos y cuando sean necesarios los sacamos del diagrama usando los índices espinoriales.

$$G^{\mu\ddagger} = G^{\mu} \tag{4}$$

Entonces la amplitud de Feynman al cuadrado es

$$\mid \mathcal{M} \mid^2 = D_{\mu\nu} D_{\lambda\sigma} [\bar{v}_{s'} G^{\mu} u_s][\bar{u}_r G^{\nu} v_{r'}][\bar{u}_r G^{\lambda} v_{r'}]^{\dagger} [\bar{v}_{s'} G^{\sigma} u_s]^{\dagger}$$

$$\mid \mathcal{M} \mid^2 = D_{\mu\nu} D_{\lambda\sigma} [\bar{v}_{s'} G^{\mu} u_s][\bar{u}_r G^{\nu} v_{r'}][\bar{v}_{r'} G^{\lambda} u_r][\bar{u}_s G^{\sigma} v_{s'}] \tag{5}$$

Ahora tenemos que promediar sobre los estados iniciales y sumar sobre los estados finales entonces, expresando todo en componentes

$$\frac{1}{4} \sum_s \sum_{s'} \sum_r \sum_{r'} \mid \mathcal{M} \mid^2 = \frac{1}{4} D_{\mu\nu} D_{\lambda\sigma} G^{\mu}_{\alpha\beta} G^{\nu}_{\gamma\kappa} G^{\lambda}_{\epsilon\rho} G^{\sigma}_{\delta\theta} \sum_s \sum_{s'} \sum_r \sum_{r'} [\bar{v}^{\alpha}_{s'} u^{\beta}_s][\bar{u}^{\gamma}_r v^{\kappa}_{r'}][\bar{v}^{\epsilon}_{r'} u^{\rho}_r][\bar{u}^{\delta}_s v^{\theta}_{s'}]$$

$$\frac{1}{4} D_{\mu\nu} D_{\lambda\sigma} G^{\mu}_{\alpha\beta} G^{\nu}_{\gamma\kappa} G^{\lambda}_{\epsilon\rho} G^{\sigma}_{\delta\theta} \sum_s u^{\beta}_s \bar{u}^{\delta}_s \sum_{s'} v^{\theta}_{s'} \bar{v}^{\alpha}_{s'} \sum_r u^{\rho}_r \bar{u}^{\gamma}_r \sum_{r'} v^{\kappa}_{r'} \bar{v}^{\epsilon}_{r'}$$

Vamos a despreciar la masa del electrón

$$\frac{1}{4} D_{\mu\nu} D_{\lambda\sigma} G^{\mu}_{\alpha\beta} G^{\nu}_{\gamma\kappa} G^{\lambda}_{\epsilon\rho} G^{\sigma}_{\delta\theta} (\not{p}_1)^{\beta\delta} (\not{p}_2)^{\theta\alpha} (\not{p}_3 + m_{\mu})^{\rho\gamma} (\not{p}_4 - m_{\mu})^{\kappa\epsilon}$$

Tenemos dos secuencias de índices que están totalmente contraídos, la primera es $\beta\delta\,\delta\theta\,\theta\alpha\,\alpha\beta$ y la segunda es $\rho\gamma\,\gamma\kappa\,\kappa\epsilon\,\epsilon\rho$ y por tanto equivalen a trazas. Finalmente tenemos que

$$\mid \mathcal{M} \mid^2 = \frac{1}{4} D_{\mu\nu} D_{\lambda\sigma} Tr[\not{p}_1 G^{\sigma} \not{p}_2 G^{\mu}]\, Tr[(\not{p}_3 + m_{\mu}) G^{\nu} (\not{p}_4 - m_{\mu}) G^{\lambda}] \tag{6}$$

Para la primera traza usemos el hecho de la matriz γ^5 conmuta con dos gammas entonces

$$\not{p}_1 G^{\sigma} \not{p}_2 G^{\mu} = \not{p}_1 \gamma^{\sigma} (\hat{g}_V - \hat{g}_A \gamma^5) \not{p}_2 \gamma^{\mu} (\hat{g}_V - \hat{g}_A \gamma^5)$$

$$= \not{p}_1 \gamma^{\sigma} \not{p}_2 \gamma^{\mu} (\hat{g}_V - \hat{g}_A \gamma^5)^2 = \not{p}_1 \gamma^{\sigma} \not{p}_2 \gamma^{\mu} (\hat{g}_V^2 + \hat{g}_A^2 - 2\hat{g}_A \hat{g}_V \gamma^5)$$

$$= \not{p}_1 \gamma^{\sigma} \not{p}_2 \gamma^{\mu} (g_+ - g\gamma^5)$$

Con $g_+ = \hat{g}_V^2 + \hat{g}_A^2$ y $g = 2\hat{g}_A \hat{g}_V$. En la segunda traza los términos con 2 G y un γ se anulan ya que involucran productos de 3 γ o de 3 γ y un γ^5. Por otro lado $G^{\mu} G^{\nu} = \gamma^{\mu} (\hat{g}_V - \hat{g}_A \gamma^5) \gamma^{\nu} (\hat{g}_V - \hat{g}_A \gamma^5) = \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} (\hat{g}_V + \hat{g}_A \gamma^5)(\hat{g}_V - \hat{g}_A \gamma^5)$ $\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} g_-$ donde $g_- = \hat{g}_V^2 - \hat{g}_A^2$. De esta forma tenemos

$$\mid \mathcal{M} \mid^2 = \frac{1}{4} D_{\mu\nu} D_{\lambda\sigma} Tr[\not{p}_1 \gamma^{\sigma} \not{p}_2 \gamma^{\mu} (g_+ - g\gamma^5)]\, Tr[\not{p}_3 \gamma^{\nu} \not{p}_4 \gamma^{\lambda} (g_+ - g\gamma^5) - m_{\mu}^2 \gamma^{\nu} \gamma^{\lambda} g_-] \tag{7}$$

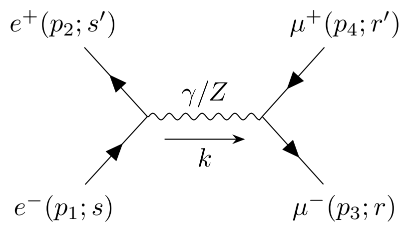

Figure 1: Caption