# Tarea 1. Grupo 2.

julio.restrepor

April 2021

El proceso a considerar es $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. La parte de la lagrangiana del modelo estándar luego de la ruptura espontánea de la simetría y de donde puesde ocurrir este proceso escrita en la base de Dirac es

$$\mathcal{L} = \sum_f i\bar{\psi}_f \not{\partial}\psi_f - eQ\bar{\psi}_f \not{A}\psi_f + \frac{g_z}{2}\bar{\psi}_f\gamma^\mu(g_V - g_A\gamma^5)\psi_f Z_\mu$$

Ahora, vamos a cambiarnos de la representación de Dirac a la representación de Weyl. En esta base las matrices gamma tienen la forma

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma^\mu} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

De la forma de $\gamma^5$ es fácil ver que los proyectores de quiralidad $(I_4 \pm \gamma^5)/2$ toman una forma muy simple

$$\bar{\psi}_L = \frac{1}{2}(I_4 - \gamma^5)\psi = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces en esta base podemos identificar las dos componentes superiores del espinor con la parte izquierda y las dos inferiores con la derecha al ser autoestados de los operadores de quiralidad. Tenemos además que

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 = (\psi_L^*, \psi_R^*)\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} = (\psi_R^*, \psi_L^*)$$

$$g_V - g_A\gamma^5 = \begin{pmatrix} g_V + g_A & 0 \\ 0 & g_V - g_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_L & 0 \\ 0 & C_R \end{pmatrix}$$

Con esto podemos reescribir la lagrangiana en la base de Weyl como[1]

$$\mathcal{L} = \sum_f i(\psi_L^f)^*\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L^f + i(\psi_R^f)^*\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R^f + e(\psi_L^f)^*\bar{\sigma}^\mu A_\mu\psi_L^f f + e(\psi_R^f)^*\sigma^\mu A_\mu\psi_R^f$$
$$+ \frac{g_z C_L}{2}(\psi_L^f)^*\bar{\sigma}^\mu\psi_L^f Z_\mu + \frac{g_z C_R}{2}(\psi_R^f)^*\sigma^\mu\psi_R^f Z_\mu$$

[1] $Q_e = -1 = Q_\mu$

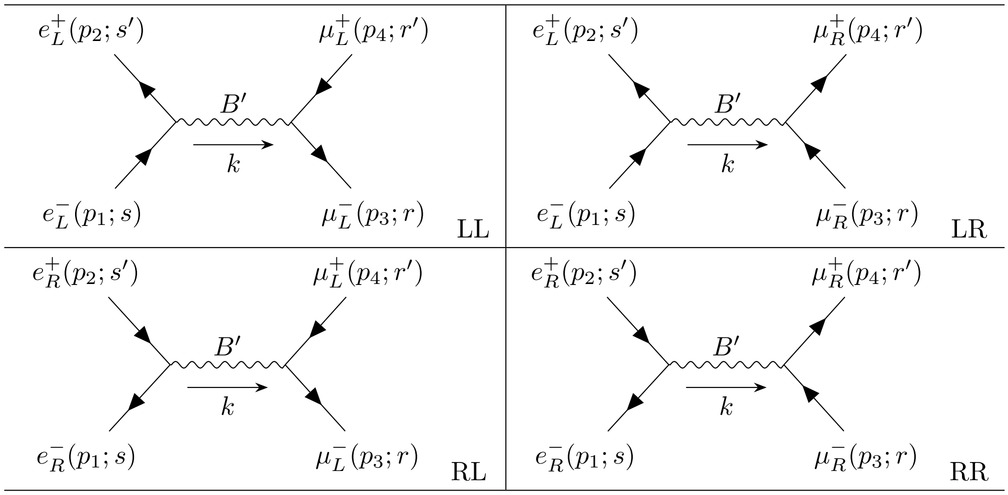


Figure 1: Diagramas de Feynman para el proceso $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ en la base de Weyl

Podemos condensar la lagrangiana de interacción usando un $\hat{C}_L$ y $\hat{C}_R$ más genéricos que luego podemos reemplazar al final del cálculo para el caso de QED o la débil. Llamaremos $B'$ al bosón en esta interacción auxiliar que puede ser o un fotón o un Z.

$$\mathcal{L}_{int} = \sum_f \hat{C}_L(\psi_L^f)^* \bar{\sigma}^\mu \psi_L^f B'_\mu + \hat{C}_R(\psi_R^f)^* \sigma^\mu \psi_R^f B'_\mu$$

De esta manera tenemos los 4 diagramas de Feynman que se muestran en la figura (1)

$$i\mathcal{M}_{LL} = y^\dagger(p_2, s')(i\hat{C}_L\bar{\sigma}^\mu)x(p_1, s)[D_{\mu\nu}]x^\dagger(p_3, r)(i\hat{C}_L\bar{\sigma}^\nu)y(p_4, r')$$

Para el propagador podemos escoger el gauge en el que $\xi = 1$ o podemos ver que como $k = p_1 + p_2$ entonces $k_\mu\bar{\sigma}^\mu x = (p_1 + p_2)_\mu\bar{\sigma}^\mu x$ y estos términos son proporcionales a la masa del electrón la cual podemos despreciar en este ejercicio ya que es muy pequeña comparada con la masa del muón y aún más con la escala del Z. De cualquier forma podemos ignorar el segundo término en el propagador y quedarnos solo con la parte que va con $g_{\mu\nu}$ entonces tenemos [2]

$$i\mathcal{M}_{LL} = \frac{i\hat{C}_L^2}{k^2 - M^2}[y_{s'}^\dagger\bar{\sigma}^\mu x_s][x_r^\dagger\bar{\sigma}_\mu y_{r'}] \tag{1}$$

$$i\mathcal{M}_{LR} = \frac{i\hat{C}_L\hat{C}_R}{k^2 - M^2}[y_{s'}^\dagger\bar{\sigma}^\mu x_s][y_r\sigma_\mu x_{r'}^\dagger] \tag{2}$$

[2]Vamos a suprimir los valores de los momentos y cuando sean necesarios los sacamos del diagrama usando los índices espinoriales.

$$i\mathcal{M}_{RR} = \frac{i\hat{C}_R^2}{k^2 - M^2}[x_{s'}\sigma^\mu y_s^\dagger][y_r\sigma_\mu x_{r'}^\dagger] \tag{3}$$

$$i\mathcal{M}_{RL} = \frac{i\hat{C}_L\hat{C}_R}{k^2 - M^2}[x_{s'}\sigma^\mu y_s^\dagger][x_r^\dagger\bar{\sigma}_\mu y_{r'}] \tag{4}$$

Entonces

$$i\mathcal{M} = \frac{i}{k^2 - M^2}\Big(\hat{C}_L^2[y_{s'}^\dagger\bar{\sigma}^\mu x_s][x_r^\dagger\bar{\sigma}_\mu y_{r'}] + \hat{C}_L\hat{C}_R[y_{s'}^\dagger\bar{\sigma}^\mu x_s][y_r\sigma_\mu x_{r'}^\dagger] + \hat{C}_R^2[x_{s'}\sigma^\mu y_s^\dagger][y_r\sigma_\mu x_{r'}^\dagger] + \hat{C}_L\hat{C}_R[x_{s'}\sigma^\mu y_s^\dagger][x_r^\dagger\bar{\sigma}_\mu y_{r'}]\Big) \tag{5}$$

$$-i\mathcal{M}^\dagger = \frac{-i}{k^2 - M^2}\Big(\hat{C}_L^2[x_r^\dagger\bar{\sigma}_\nu y_{r'}]^\dagger[y_{s'}^\dagger\bar{\sigma}^\nu x_s]^\dagger + \hat{C}_L\hat{C}_R[y_r\sigma_\nu x_{r'}^\dagger]^\dagger[y_{s'}^\dagger\bar{\sigma}^\nu x_s]^\dagger + \hat{C}_R^2[y_r\sigma_\nu x_{r'}^\dagger]^\dagger[x_{s'}\sigma^\nu y_s^\dagger]^\dagger + \hat{C}_L\hat{C}_R[x_r^\dagger\bar{\sigma}_\nu y_{r'}]^\dagger[x_{s'}\sigma^\nu y_s^\dagger]^\dagger\Big) \tag{6}$$

Los términos que tengan $x_s y_s$, $x_{s'} y_{s'}$ o sus hermíticos conjugados o ambos van a sacar términos con la masa del electrón que podemos despreciar en este cálculo ya que es muy pequeña comparada con la escala del muón o del $Z$, de esta forma sobreviven los términos $11, 12, 21, 22, 33, 34, 43, 44$ correspondientes a los cuadrados de cada una de las amplitudes en (1),(2),(3) y (4).

$$|\mathcal{M}_{LL}|^2 = \frac{\hat{C}_L{}^4}{(k^2 - M^2)^2}[y_{s'}^\dagger\bar{\sigma}^\mu x_s][x_r^\dagger\bar{\sigma}_\mu y_{r'}][x_r^\dagger\bar{\sigma}_\nu y_{r'}]^\dagger[y_{s'}^\dagger\bar{\sigma}^\nu x_s]^\dagger$$

$$= \frac{\hat{C}_L{}^4}{(k^2 - M^2)^2}[y_{s'}^\dagger\bar{\sigma}^\mu x_s][x_r^\dagger\bar{\sigma}_\mu y_{r'}][y_{r'}^\dagger\bar{\sigma}_\nu x_r][x_s^\dagger\bar{\sigma}^\nu y_{s'}]$$

Ahora vamos a promediar sobre los estados iniciales y sumar sobre los finales

$$\overline{|\mathcal{M}_{LL}|^2} = \frac{1}{4}\frac{\hat{C}_L{}^4}{(k^2 - M^2)^2}(\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}\beta}(\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{\rho}\sigma}(\bar{\sigma}^\nu)_{\dot{\kappa}\lambda}(\bar{\sigma}_\nu)_{\dot{\delta}\epsilon}\sum_s\sum_{s'}\sum_r\sum_{r'}[y_{s'}^{\dot{\alpha}\dagger}x_s^\beta][x_r^{\dot{\rho}\dagger}y_{r'}^\sigma][y_{r'}^{\dot{\kappa}\dagger}x_r^\lambda][x_s^{\dot{\delta}\dagger}y_{s'}^\epsilon]$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\hat{C}_L{}^4}{(k^2 - M^2)^2}(\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}\beta}(\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{\rho}\sigma}(\bar{\sigma}^\nu)_{\dot{\kappa}\lambda}(\bar{\sigma}_\nu)_{\dot{\delta}\epsilon}\sum_s x_s^{\dot{\delta}\dagger}x_s^\beta\sum_{s'}y_{s'}^\epsilon y_{s'}^{\dot{\alpha}\dagger}\sum_r x_r^{\dot{\rho}\dagger}x_r^\lambda\sum_{r'}y_{r'}^\sigma y_{r'}^{\dot{\kappa}\dagger}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\hat{C}_L{}^4}{(k^2 - M^2)^2}(\bar{\sigma}^\mu)_{\dot{\alpha}\beta}(\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{\rho}\sigma}(\bar{\sigma}^\nu)_{\dot{\kappa}\lambda}(\bar{\sigma}_\nu)_{\dot{\delta}\epsilon}(p_1\cdot\sigma^{\beta\dot{\delta}})(p_2\cdot\sigma^{\epsilon\dot{\alpha}})(p_3\cdot\sigma^{\lambda\dot{\rho}})(p_4\cdot\sigma^{\sigma\dot{\kappa}})$$

Tenemos dos secuencias de índices que se contraen completamente que son $\beta\dot{\delta}$ $\dot{\delta}\epsilon$ $\epsilon\dot{\alpha}$ $\dot{\alpha}\beta$ y $\lambda\dot{\rho}$ $\dot{\rho}\sigma$ $\sigma\dot{\kappa}$ $\dot{\kappa}\lambda$ entonces

$$\overline{|\ \mathcal{M}_{LL}\ |^2} = \frac{1}{4}\frac{\hat{C_L}^4}{(k^2-M^2)^2}Tr[(p_1\cdot\sigma)\bar{\sigma}_\nu(p_2\cdot\sigma)\bar{\sigma}^\mu]Tr[(p_3\cdot\sigma)\bar{\sigma}_\mu(p_4\cdot\sigma)\bar{\sigma}^\nu] \tag{7}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\hat{C_L}^4}{(k^2-M^2)^2}p^1_\lambda p^2_\sigma p^\alpha_3 p^\beta_4 Tr[\sigma^\lambda\bar{\sigma}^\nu\sigma^\sigma\bar{\sigma}^\mu]Tr[\sigma_\alpha\bar{\sigma}_\mu\sigma_\beta\bar{\sigma}_\nu]$$

$$= \frac{1}{4}\frac{4\hat{C_L}^4}{(k^2-M^2)^2}p^1_\lambda p^2_\sigma p^\alpha_3 p^\beta_4(g^{\lambda\nu}g^{\sigma\mu}+g^{\lambda\mu}g^{\nu\sigma}-g^{\lambda\sigma}g^{\mu\nu}+i\epsilon^{\lambda\nu\sigma\mu})(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}+g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}-g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}+i\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu})$$

Ahora, la combinación de los 3 términos tipo $gg$ es simétrica en $\mu\nu$ y el $\epsilon$ es antisimétrico en esos índices por lo tanto términos con un sólo $\epsilon$ se anulan.

$$= \frac{\hat{C_L}^4}{(k^2-M^2)^2}p^1_\lambda p^2_\sigma p^\alpha_3 p^\beta_4 \left((g^{\lambda\nu}g^{\sigma\mu}+g^{\lambda\mu}g^{\nu\sigma}-g^{\lambda\sigma}g^{\mu\nu})(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}+g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}-g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu})-\epsilon^{\lambda\nu\sigma\mu}\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}\right)$$

$$= \frac{\hat{C_L}^4}{(k^2-M^2)^2}p^1_\lambda p^2_\sigma p^\alpha_3 p^\beta_4 \left((g^{\lambda\nu}g^{\sigma\mu}+g^{\lambda\mu}g^{\nu\sigma}-g^{\lambda\sigma}g^{\mu\nu})(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}+g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta}-g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu})-\epsilon^{\lambda\nu\sigma\mu}\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}\right)$$

$$= \frac{\hat{C_L}^4}{(k^2-M^2)^2}p^1_\lambda p^2_\sigma p^\alpha_3 p^\beta_4 \left(2g^\lambda_\beta g^\sigma_\alpha+2g^\lambda_\alpha g^\sigma_\beta-2g_{\alpha\beta}g^{\lambda\nu}g^\sigma_\nu-2g^{\lambda\sigma}g_{\alpha\mu}g^\mu_\beta+4g_{\alpha\beta}g^{\lambda\sigma}+2(g^\sigma_\alpha g^\lambda_\beta-g^\sigma_\beta g^\lambda_\alpha)\right)$$

$$= \frac{\hat{C_L}^4}{(k^2-M^2)^2}p^1_\lambda p^2_\sigma p^\alpha_3 p^\beta_4 \left(4g^\lambda_\beta g^\sigma_\alpha-2g_{\alpha\beta}g^{\lambda\nu}g^\sigma_\nu-2g^{\lambda\sigma}g_{\alpha\mu}g^\mu_\beta+4g_{\alpha\beta}g^{\lambda\sigma}\right)$$

$$= \frac{\hat{C_L}^4}{(k^2-M^2)^2}(4p_1\cdot p_4p_2\cdot p_3-4p_3\cdot p_4p_1\cdot p_2+4p_3\cdot p_4p_1\cdot p_2)$$

$$\overline{|\ \mathcal{M}_{LL}\ |^2} = \frac{4\hat{C_L}^4}{(k^2-M^2)^2}p_1\cdot p_4p_2\cdot p_3 \tag{8}$$

Note que lo único que diferencia al vértice izquierdo del derecho es la constante de acople y si va con $\sigma$ o $\bar{\sigma}$ y note que por cada $\sigma$ o $\bar{\sigma}$ en la amplitud aparece una $\bar{\sigma}$ o $\sigma$ respectivamente en las sumas de espín lo cual lo único que afecta es el orden de las matrices $\sigma$ y $\bar{\sigma}$ dentro de la traza. Para el caso RR intercambiamos la naturaleza de las $\sigma$

$$\overline{\mid \mathcal{M}_{RR} \mid^2} = \frac{1}{4}\frac{\hat{C_4}^4}{(k^2-M^2)^2} p^1_\lambda p^2_\sigma p^\alpha_3 p^\beta_4 Tr[\bar{\sigma}^\lambda \sigma^\nu \bar{\sigma}^\sigma \sigma^\mu] Tr[\bar{\sigma}_\alpha \sigma_\mu \bar{\sigma}_\beta \sigma_\nu]$$

Y el único cambio entonces en el signo de los $\epsilon$ sin embargo el producto de ambos sigue siendo el mismo y por lo tanto

$$\overline{\mid \mathcal{M}_{RR} \mid^2} = \overline{\mid \mathcal{M}_{LL} \mid^2} = \frac{4\hat{C_R}^4}{(k^2-M^2)^2} p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3 \tag{9}$$

Para el LR

$$\overline{\mid \mathcal{M}_{LR} \mid^2} = \frac{\hat{C_L}^2 \hat{C_R}^2}{4(k^2-M^2)^2} p^1_\lambda p^2_\sigma p^\alpha_3 p^\beta_4 Tr[\sigma^\lambda \bar{\sigma}^\nu \sigma^\sigma \bar{\sigma}^\mu] Tr[\bar{\sigma}_\alpha \sigma_\mu \bar{\sigma}_\beta \sigma_\nu] \tag{10}$$

Ahora el producto de los $\epsilon$ cambia de signo y el término que sobrevive es con $\alpha$ y $\beta$ intercambiados lo cual intercambia $p_3$ y $p_4$

$$\overline{\mid \mathcal{M}_{LR} \mid^2} = \frac{4\hat{C_L}^2 \hat{C_R}^2}{(k^2-M^2)^2} p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 \tag{11}$$

Ahora para el $RL$ es lo mismo que $LR$ ya que solo cambia cual traza tiene un signo en el $\epsilon$ y cual el opuesto.

$$\overline{\mid \mathcal{M}_{RL} \mid^2} = \overline{\mid \mathcal{M}_{LR} \mid^2} = \frac{4\hat{C_L}^2 \hat{C_R}^2}{(k^2-M^2)^2} p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 \tag{12}$$

El siguiente término es

$$(i\mathcal{M}_{LL})(-i\mathcal{M}^\dagger_{LR}) = \frac{\hat{C_L}^3 \hat{C_R}}{(k^2-M^2)^2} [y^\dagger_{s'} \bar{\sigma}^\mu x_s][x^\dagger_r \bar{\sigma}_\mu y_{r'}][y_r \sigma_\nu x^\dagger_{r'}]^\dagger [y^\dagger_{s'} \bar{\sigma}^\nu x_s]^\dagger$$

$$= \frac{\hat{C_L}^3 \hat{C_R}}{(k^2-M^2)^2} [y^\dagger_{s'} \bar{\sigma}^\mu x_s][x^\dagger_r \bar{\sigma}_\mu y_{r'}][x_{r'} \sigma_\nu y^\dagger_r][x^\dagger_s \bar{\sigma}^\nu y_{s'}]$$

La parte de los electrones, o sea los términos con $s$ y $s'$ dan las trazas que ya hemos calculado, veamos la parte de los muones

$$[x^\dagger_r \bar{\sigma}_\mu y_{r'}][x_{r'} \sigma_\nu y^\dagger_r] = (\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{\alpha}\beta} (\sigma_\nu)_{\rho\dot{\sigma}} \sum_{r,r'} x^{\dagger\dot{\alpha}}_r y^\beta_{r'} y^{\dagger\dot{\sigma}}_r x^\rho_{r'} = (\bar{\sigma}_\mu)_{\dot{\alpha}\beta} (\sigma_\nu)_{\rho\dot{\sigma}} (-m_\mu)_{\beta\rho} (m_\mu)_{\dot{\sigma}\dot{\alpha}}$$

$$= -m^2_\mu Tr[\bar{\sigma}_\mu \sigma_\nu]$$

$$\overline{\mathcal{M}_{LL}\mathcal{M}_{LR}^{\dagger}} = -m_{\mu}^2 \frac{\hat{C_L}^3 \hat{C_R}}{(k^2-M^2)^2} g_{\mu\nu} p_{\lambda}^1 p_{\sigma}^2 (g^{\lambda\nu} g^{\sigma\mu} + g^{\lambda\mu} g^{\nu\sigma} - g^{\lambda\sigma} g^{\mu\nu} + i\epsilon^{\lambda\nu\sigma\mu})$$

La parte con $\epsilon$ se anula ya que es antisimétrico en $\mu$ y $\nu$ y $g$ es simétrico

$$= -m_{\mu}^2 \frac{\hat{C_L}^3 \hat{C_R}}{(k^2-M^2)^2} (-2p_1 \cdot p_2)$$

$$\overline{\mathcal{M}_{LL}\mathcal{M}_{LR}^{\dagger}} = 2m_{\mu}^2 \frac{\hat{C_L}^3 \hat{C_R}}{(k^2-M^2)^2} (p_1 \cdot p_2) \tag{13}$$

Cómo la expresión es real

$$\overline{\mathcal{M}_{LR}\mathcal{M}_{LL}^{\dagger}} = \overline{\mathcal{M}_{LL}\mathcal{M}_{LR}^{\dagger}} = 2m_{\mu}^2 \frac{\hat{C_L}^3 \hat{C_R}}{(k^2-M^2)^2} (p_1 \cdot p_2) \tag{14}$$

Y como el $RR$ sólo cambia el signo del $\epsilon$ y este término se anuló

$$\overline{\mathcal{M}_{RR}\mathcal{M}_{LR}^{\dagger}} = \overline{\mathcal{M}_{RR}\mathcal{M}_{LR}^{\dagger}} = 2m_{\mu}^2 \frac{\hat{C_R}^3 \hat{C_L}}{(k^2-M^2)^2} (p_1 \cdot p_2) \tag{15}$$

En el sistema de centro de masa despreciando la masa del electrón tenemos que $p_1 \cdot p_2 = E^2 + \vec{P}^2 = 2E^2 = p_3 \cdot p_4$, $k^2 = 2(p_1 \cdot p_2) = 4E^2$ y que $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ y $\vec{p}_4 = -\vec{p}_3$ y además $E = E'$ por tanto $p_1 \cdot p_3 = E^2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 = E^2 - \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_4 = p_2 \cdot p_4$ y similarmente se encuentra que $p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3$. Además $s = (E+E)^2 = 4E^2 = k^2$. Definiendo $g_1 = \hat{C}_R^4 + \hat{C}_L^4$, $g_2 = \hat{C_L}^2 \hat{C_R}^2$, $g_3 = \hat{C_L}^3 \hat{C}_R$, $g_4 = \hat{C_R}^3 \hat{C}_L$. y reuniendo los términos

$$\overline{|\ \mathcal{M}\ |^2} = \frac{1}{(4E^2-M^2)^2} (4g_1(p_1 \cdot p_4)^2 + 8g_2(p_1 \cdot p_3)^2 + 4g_3 m_{\mu}^2 p_1 \cdot p_2 + 4g_4 m_{\mu}^2 p_1 \cdot p_2) \tag{16}$$

$$= \frac{1}{(s-M^2)^2} (4g_1(p_1 \cdot p_4)^2 + 8g_2(p_1 \cdot p_3)^2 + 8m_{\mu}^2 E^2 (g_3 + g_4))$$

Ahora $|\ \vec{p}_1\ | = E$ y $|\ \vec{p}_3\ | = \sqrt{E^2 - m_{\mu}^2} = |\ \vec{p}_4\ |$ y como $\vec{p}_3 = -\vec{p}_4$ entonces tenemos $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 = E\sqrt{E^2 - m_{\mu}^2} cos(\theta) = -\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_4$ entonces

$$= \frac{4}{(s-M^2)^2} (g_1(E^2 - E\sqrt{E^2 - m_{\mu}^2} cos(\theta))^2 + 2g_2(E^2 + E\sqrt{E^2 - m_{\mu}^2} cos(\theta))^2 + 2m_{\mu}^2 E^2 (g_3 + g_4))$$

$$\overline{|\ \mathcal{M}\ |^2} = \frac{s^2}{4(s-M^2)^2} \left( g_1 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4m_{\mu}^2}{s}} cos(\theta) \right)^2 + 2g_2 \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4m_{\mu}^2}{s}} cos(\theta) \right)^2 + 8\frac{m_{\mu}^2}{s} (g_3 + g_4) \right) \tag{17}$$

Ahora $v_{rel} =\mid \vec{p_1} \mid (1/E_1 + 1/E_2) = 2 * E/E = 2$ y $E_1 = E_2 = E_{CM}/2 = E$ y $\sqrt{s} = 2E$ entonces

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mid \vec{p_3} \mid}{64\pi^2 E_1 E_2 \sqrt{s} v_{rel}} \overline{\mid \mathcal{M} \mid^2} = \frac{\sqrt{E^2 - m_\mu^2}}{64 * 4\pi^2 E^3} \overline{\mid \mathcal{M} \mid^2} = \frac{1}{64\pi^2 s} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}} \overline{\mid \mathcal{M} \mid^2} \tag{18}$$

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}} \frac{s}{4\left(s - M^2\right)^2} \int_\Omega sin(\theta) d\theta d\phi \left\{ g_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}} cos(\theta)\right)^2 + \right.$$
$$\left. 2g_2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}} cos(\theta)\right)^2 + 8\frac{m_\mu^2}{s}(g_3 + g_4) \right\}$$

Las integrales sobre constantes son $4\pi$, sobre los cosenos se anula y sobre los cosenos cuadrados es $4\pi/3$

$$= \frac{1}{64\pi^2} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}} \frac{s}{4\left(s - M^2\right)^2} \left\{ g_1 \left(4\pi + \frac{4\pi}{3}\left(1 - \frac{4m_\mu^2}{s}\right)\right) + \right.$$
$$\left. 2g_2 \left(4\pi + \frac{4\pi}{3}\left(1 - \frac{4m_\mu^2}{s}\right)\right) + 32\pi\frac{m_\mu^2}{s}(g_3 + g_4) \right\} \tag{19}$$

$$= \frac{1}{64\pi} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}} \frac{s}{\left(s - M^2\right)^2} \left\{ (g_1 + 2g_2)(\frac{4}{3} - \frac{4m_\mu^2}{3s}) + 8\frac{m_\mu^2}{s}(g_3 + g_4)) \right\}$$

$$= \frac{1}{64\pi} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}} \frac{s}{\left(s - M^2\right)^2} \frac{4}{3} \left\{ g_1 + 2g_2 + 6\frac{m_\mu^2}{s}(g_3 + g_4 - \frac{g_1 + 2g_2}{6})) \right\}$$

$$\sigma = \frac{4}{192\pi} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}} \frac{s}{\left(s - M^2\right)^2} \left\{ g_1 + 2g_2 + 6\frac{m_\mu^2}{s}(g_3 + g_4 - \frac{g_1 + 2g_2}{6}) \right\} \tag{20}$$

Para el caso de la QED $\hat{C}_L = \hat{C}_R = e$ entonces $g_1 = 2e^4$, $g_2 = e^4 = g_3 = g_4$ y $M = 0$

$$\sigma = \frac{4e^4}{192\pi s} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}} \left\{ 4 + 8\frac{m_\mu^2}{s} \right\}$$
$$\sigma(e^- e^+ \to \gamma \to \mu^- \mu^+) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}} \left(1 + 2\frac{m_\mu^2}{s}\right) \tag{21}$$

Y para la electrodébil $g_1 + 2g_2 = \hat{C}_L^4 + \hat{C}_R^4 + 2\hat{C}_L^2\hat{C}_R^2 = (\hat{C}_L^2 + \hat{C}_R^2)^2$ y $\hat{C}_L = g_z C_L/2$ y $\hat{C}_R = g_z C_R/2$ donde $C_R = g_V - g_A$ y $C_L = g_V + g_A$ así que la expresión (20) queda más difícil de simplificar, sin embargo si no tenemos en cuenta la contribución de los términos que van con la masa del muón ya que la escala del $Z$ es mucho más grande que esta, en este límite entonces

$$\sigma(e^- e^+ \to Z \to \mu^- \mu^+) = \frac{1}{192\pi} \frac{g_z^4 s}{(s - M^2)^2} (g_A^2 + g_V^2)^2 \tag{22}$$