Tarea 1. Grupo 2.

julio.restrepor

April 2021

El vértice de la QED es $ig_e\gamma^\mu$ y para las interacciones débiles que involucran al Z es

$$-\frac{ig_z}{2}\gamma^\mu(g_V^f - g_A^f\gamma^5)$$

Entonces podemos reunir ambas expresiones en

$$-i\gamma^\mu(\hat{g}_V^f - \hat{g}_A^f\gamma^5) \tag{1}$$

Donde para la QED[1] $\hat{g}_A = 0$ y $\hat{g}_V = -g_e = -e$ y para las EW $\hat{g}_A = g_z g_A/2$ y $\hat{g}_V = g_z g_V/2$. Para el propagador podemos poner el masivo y cuando evaluemos el caso del fotón eliminamos los términos que van con la masa. Teniendo esto en cuenta podemos escribir la amplitud de Feynman para el proceso como

$$i\mathcal{M} = [\bar{v}_{s'}(p_2)(-i\gamma^\mu(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5))u_s(p_1)][\frac{-i(g_{\mu\nu} - \theta\frac{k_\mu k_\nu}{M^2})}{k^2 - M^2}][\bar{u}_r(p_3)(-i\gamma^\nu(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5))v_{r'}(p_4)] \tag{2}$$

Donde $\theta = 0$ para QED y 1 para EW. Podemos escribir de forma más compacta como[2]

$$i\mathcal{M} = i[\bar{v}_{s'}G^\mu u_s][D_{\mu\nu}][\bar{u}_r G^\nu v_{r'}] \tag{3}$$

[1] Quitando las f ya que para electrones y muones, que es nuestro caso, valen igual.

[2] Vamos a suprimir los valores de los momentos y cuando sean necesarios los sacamos del diagrama usando los índices espinoriales.

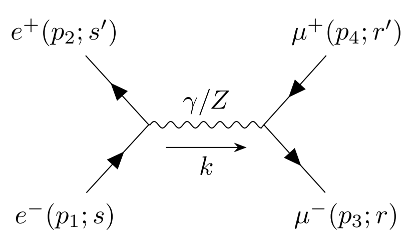

Figure 1: Caption

Donde $G^\sigma = \gamma^\sigma(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5)$. Ahora calculemos lo siguiente con S siendo cualquier espinor

$$[\bar{S}G^\mu S']^\dagger = S'^\dagger G^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger}S = S'^\dagger\gamma^0\gamma^0 G^{\mu\dagger}\gamma^0 S = \bar{S}'G^{\mu\ddagger}S$$

Y $G^{\mu\ddagger} = \gamma^0 G^{\mu\dagger}\gamma^0$. En nuestro caso tenemos que

$$G^{\mu\ddagger} = \gamma^0(\gamma^\mu(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5))^\dagger\gamma^0$$

$$= \gamma^0((\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5)\gamma^{\mu\dagger})\gamma^0$$

Como γ^5 conmuta con un par de gammas y $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$

$$G^{\mu\ddagger} = G^\mu \tag{4}$$

Entonces la amplitud de Feynman al cuadrado es

$$|\mathcal{M}|^2 = D_{\mu\nu}D_{\lambda\sigma}[\bar{v}_{s'}G^\mu u_s][\bar{u}_r G^\nu v_{r'}][\bar{u}_r G^\lambda v_{r'}]^\dagger[\bar{v}_{s'}G^\sigma u_s]^\dagger$$

$$|\mathcal{M}|^2 = D_{\mu\nu}D_{\lambda\sigma}[\bar{v}_{s'}G^\mu u_s][\bar{u}_r G^\nu v_{r'}][\bar{v}_{r'}G^\lambda u_r][\bar{u}_s G^\sigma v_{s'}] \tag{5}$$

Ahora tenemos que promediar sobre los estados iniciales y sumar sobre los estados finales entonces, expresando todo en componentes

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4}\sum_s\sum_{s'}\sum_r\sum_{r'}|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4}D_{\mu\nu}D_{\lambda\sigma}G^\mu_{\alpha\beta}G^\nu_{\gamma\kappa}G^\lambda_{\epsilon\rho}G^\sigma_{\delta\theta}\sum_s\sum_{s'}\sum_r\sum_{r'}[\bar{v}^\alpha_{s'}u^\beta_s][\bar{u}^\gamma_r v^\kappa_{r'}][\bar{v}^\epsilon_{r'}u^\rho_r][\bar{u}^\delta_s v^\theta_{s'}]$$

$$\frac{1}{4}D_{\mu\nu}D_{\lambda\sigma}G^\mu_{\alpha\beta}G^\nu_{\gamma\kappa}G^\lambda_{\epsilon\rho}G^\sigma_{\delta\theta}\sum_s u^\beta_s\bar{u}^\delta_s\sum_{s'}v^\theta_{s'}\bar{v}^\alpha_{s'}\sum_r u^\rho_r\bar{u}^\gamma_r\sum_{r'}v^\kappa_{r'}\bar{v}^\epsilon_{r'}$$

Vamos a despreciar la masa del electrón

$$\frac{1}{4}D_{\mu\nu}D_{\lambda\sigma}G^\mu_{\alpha\beta}G^\nu_{\gamma\kappa}G^\lambda_{\epsilon\rho}G^\sigma_{\delta\theta}(\not{p}_1)^{\beta\delta}(\not{p}_2)^{\theta\alpha}(\not{p}_3 + m_\mu)^{\rho\gamma}(\not{p}_4 - m_\mu)^{\kappa\epsilon}$$

Tenemos dos secuencias de índices que están totalmente contraídos, la primera es $\beta\delta\,\delta\theta\,\theta\alpha\,\alpha\beta$ y la segunda es $\rho\gamma\,\gamma\kappa\,\kappa\epsilon\,\epsilon\rho$ y por tanto equivalen a trazas. Finalmente tenemos que

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4}D_{\mu\nu}D_{\lambda\sigma}Tr[\not{p}_1 G^\sigma\not{p}_2 G^\mu]\,Tr[(\not{p}_3 + m_\mu)G^\nu(\not{p}_4 - m_\mu)G^\lambda] \tag{6}$$

Para la primera traza usemos el hecho de la matriz γ^5 conmuta con dos gammas entonces

$$\not{p}_1 G^\sigma\not{p}_2 G^\mu = \not{p}_1\gamma^\sigma(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5)\not{p}_2\gamma^\mu(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5)$$

$$= \not{p}_1\gamma^\sigma\not{p}_2\gamma^\mu(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5)^2 = \not{p}_1\gamma^\sigma\not{p}_2\gamma^\mu(\hat{g}_V^2 + \hat{g}_A^2 - 2\hat{g}_A\hat{g}_V\gamma^5)$$

$$= \not{p}_1\gamma^\sigma\not{p}_2\gamma^\mu(g_+ - g\gamma^5)$$

Con $g_+ = \hat{g}_V^2 + \hat{g}_A^2$ y $g = 2\hat{g}_A\hat{g}_V$. En la segunda traza los términos con 2 G y un γ se anulan ya que involucran productos de 3 γ o de 3 γ y un γ^5. Por otro lado $G^\mu G^\nu = \gamma^\mu(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5)\gamma^\nu(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5) = \gamma^\mu\gamma^\nu(\hat{g}_V + \hat{g}_A\gamma^5)(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5)$ $\gamma^\mu\gamma^\nu g_-$ donde $g_- = \hat{g}_V^2 - \hat{g}_A^2$. De esta forma tenemos

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4}D_{\mu\nu}D_{\lambda\sigma}Tr[\not{p}_1\gamma^\sigma\not{p}_2\gamma^\mu(g_+ - g\gamma^5)]\,Tr[\not{p}_3\gamma^\nu\not{p}_4\gamma^\lambda(g_+ - g\gamma^5) - m_\mu^2\gamma^\nu\gamma^\lambda g_-] \tag{7}$$

Recordemos que $Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$, que $Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^5] = -4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ y que $Tr[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma = 4(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma})$. De esta manera

$$Tr[\not{p}_1\gamma^\sigma\not{p}_2\gamma^\mu(g_+ - g\gamma^5)] = 4p^1_\alpha p^2_\beta(g_+(g^{\alpha\sigma}g^{\beta\mu} + g^{\alpha\mu}g^{\sigma\beta} - g^{\alpha\beta}g^{\sigma\mu}) + ig\epsilon^{\alpha\sigma\beta\mu})$$

$$= 4(g_+(p^{1\sigma}p^{2\mu} + p^{1\mu}p^{2\sigma} - p_1\cdot p_2 g^{\sigma\mu}) + igp^1_\alpha p^2_\beta\epsilon^{\alpha\sigma\beta\mu}) \tag{8}$$

$$Tr[\not{p}_3\gamma^\nu\not{p}_4\gamma^\lambda(g_+ - g\gamma^5) - m_\mu^2\gamma^\nu\gamma^\lambda g_-] = 4p^3_\alpha p^4_\beta(g_+(g^{\alpha\nu}g^{\beta\lambda} + g^{\alpha\lambda}g^{\nu\beta} - g^{\alpha\beta}g^{\nu\lambda}) + ig\epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda}) - 4m_\mu^2 g_- g^{\nu\lambda}$$

$$= 4(g_+(p^{3\nu}p^{4\lambda} + p^{3\lambda}p^{4\nu} - p_3\cdot p_4 g^{\nu\lambda}) + igp^3_\alpha p^4_\beta\epsilon^{\alpha\nu\beta\lambda}) - 4m_\mu^2 g_- g^{\nu\lambda} \tag{9}$$

Usando (7), (8) y (9) y definiedo $T_{\mu\nu\lambda\sigma} = D_{\mu\nu}D_{\lambda\sigma}$ pero sin los denominadores de D podemos escribir

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4(k^2 - M^2)^2}T_{\mu\nu\lambda\sigma}(S_1 + A_1)^{\sigma\mu}(S_2 + A_2)^{\nu\lambda}$$

Donde los S son las partes simétricas y los A las antisimétricas. Ahora $T_{\mu\nu\lambda\sigma}$ es simétrico bajo $\mu \leftrightarrow \nu$, bajo $\lambda \leftrightarrow \sigma$, bajo $\mu \leftrightarrow \lambda$ $\nu \leftrightarrow \sigma$ de modo que

$$T_{\mu\nu\lambda\sigma}S^{\mu\sigma} = T_{\sigma\nu\lambda\mu}S^{\mu\sigma} = T_{\lambda\mu\sigma\nu}S^{\mu\sigma} = T_{\mu\lambda\nu\sigma}S^{\mu\sigma}$$

Y por tanto la contracción de T con un término simétrico es simétrico en el par de índices libres y entonces los términos cruzados de A con A se anulan al ser una contracción de un término simétrico con un antisimétrico. Nos queda entonces

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4(k^2 - M^2)^2}T_{\mu\nu\lambda\sigma}(S_1^{\sigma\mu}S_2^{\nu\lambda} + A_1^{\sigma\mu}A_2^{\nu\lambda}) \tag{10}$$

El primer término es

$$g_{\mu\nu}g_{\sigma\lambda}S_1^{\sigma\mu}S_2^{\nu\lambda} = S_1^{\mu\nu}S^2_{\mu\nu}$$

$$= 16g_+(p^1_\mu p^2_\nu + p^1_\nu p^2_\mu - p_1 \cdot p_2 g_{\mu\nu})(g_+(p_3^\nu p_4^\mu + p_3^\mu p_4^\nu - p_3 \cdot p_4 g^{\mu\nu}) - m_\mu^2 g_- g^{\mu\nu})$$

$$= 16g_+^2(2p_3{\cdot}p_2\, p_1{\cdot}p_4{+}2p_4{\cdot}p_2\, p_1{\cdot}p_3{-}4p_1{\cdot}p_2\, p_3{\cdot}p_4{+}4p_1{\cdot}p_2\, p_3{\cdot}p_4){-}16g_+g_-m_\mu^2({-}2p_1{\cdot}p_2)$$

$$T_1 = 32g_+[g_+(p_3 \cdot p_2\, p_1 \cdot p_4 + p_4 \cdot p_2\, p_1 \cdot p_3) + g_- m_\mu^2 p_1 \cdot p_2] \tag{11}$$

El segundo término es

$$\theta^2 \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda k_\sigma}{M^4} S_1^{\sigma\mu} S_2^{\nu\lambda}$$

Miremos solamente el término S_1

$$k^\mu k^\nu (p^1_\mu p^2_\nu + p^1_\nu p^2_\mu - p_1 \cdot p_2 g_{\mu\nu})$$

Al pasarnos al sistema de centro de masa y despreciando la masa del electrón tenemos que $k = p_1{+}p_2$ entonces $k{\cdot}p_1 = (p_1{+}p_2){\cdot}p_1 = m_e^2{+}p_1{\cdot}p_2 = p_1{\cdot}p_2 = k{\cdot}p_2$ y $k^2 = 2p_1 \cdot p_2$ lo cual hace que el término anterior se anule y entonces

$$T_2 = 0 \tag{12}$$

El tercer término

$$-\frac{\theta}{M^2}\left(g_{\mu\nu}k_\lambda k_\sigma + g_{\lambda\sigma}k_\mu k_\nu\right) S_1^{\mu\sigma} S_2^{\nu\lambda} = -2\frac{\theta}{M^2} g_{\mu\nu}k_\lambda k_\sigma S_1^{\mu\sigma} S_2^{\nu\lambda}$$

$$= -32\frac{\theta g_+}{M^2} g_{\mu\nu}k_\lambda k_\sigma (p_1^\mu p_2^\sigma {+} p_1^\sigma p_2^\mu {-} p_1{\cdot}p_2 g^{\mu\sigma})(g_+(p_3^\nu p_4^\lambda {+} p_3^\lambda p_4^\nu {-} p_3{\cdot}p_4 g^{\lambda\nu}) {-} m_\mu^2 g_- g^{\lambda\nu})$$

$$= -32\frac{\theta g_+}{M^2}(p^1_\nu k{\cdot}p_2 {+} k{\cdot}p_1 p^2_\nu {-} p_1{\cdot}p_2 k_\nu)(g_+(p_3^\nu k{\cdot}p_4 {+} k{\cdot}p_3 p_4^\nu {-} p_3{\cdot}p_4 k^\nu) {-} m_\mu^2 g_- k^\nu)$$

$$= -32\frac{\theta g_+^2}{M^2}(p_1{\cdot}p_3 k{\cdot}p_2 k{\cdot}p_4 {+} p_1{\cdot}p_4 k{\cdot}p_2 k{\cdot}p_3 {+} p_2{\cdot}p_3 k{\cdot}p_1 k{\cdot}p_4 {+} p_2{\cdot}p_4 k{\cdot}p_3 k{\cdot}p_1 {-} 2p_4{\cdot}p_3 k{\cdot}p_1 k{\cdot}p_2 {-} 2p_1{\cdot}p_2 k{\cdot}p_3 k{\cdot}p_4$$

$$+k^2 p_2 \cdot p_1 p_3 \cdot p_4) + 32\frac{\theta g_+}{M^2} m_\mu^2 g_-(2k \cdot p_2 k \cdot p_1 - k^2 p_1 \cdot p_2)$$

El término que va con g_- se anula de la misma forma que en el segundo término T_2 al pasarnos al sistema de centro de masa. Ahí también tenemos que $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ y $\vec{p}_4 = -\vec{p}_3$ y además $E = E'$ por tanto $p_1 \cdot p_3 = E^2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 =$

$E^2 - \vec{p}_2 \cdot \vec{p}_4 = p_2 \cdot p_4$ y similarmente se encuentra que $p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3$ y recordando que $k \cdot p_1 = k \cdot p_2$ y $k \cdot p_3 = k \cdot p_4$ tenemos que

$$T_3 = -32\frac{\theta g_+^2}{M^2}(2p_1 \cdot p_3 k \cdot p_2 k \cdot p_4 + 2p_1 \cdot p_4 k \cdot p_2 k \cdot p_3 - 2p_4 \cdot p_3 k \cdot p_1 k \cdot p_2 - 2p_1 \cdot p_2 k \cdot p_3 k \cdot p_4 + k^2 p_2 \cdot p_1 p_3 \cdot p_4) \tag{13}$$

Ahora, el término con 4 k es completamente simétrico y por tanto se anula al contraerlo con las dos partes antisimétricas así que el siguiente término es

$$\left(g_{\mu\nu}g_{\lambda\sigma} - \theta g_{\mu\nu}\frac{k_\lambda k_\sigma}{M^2} - \theta g_{\lambda\sigma}\frac{k_\mu k_\nu}{M^2}\right) A_1^{\mu\sigma} A_2^{\nu\lambda} = A_{\mu\nu}^1 A_2^{\mu\nu} - \theta\frac{k^\lambda k_\sigma}{M^2} A_1^{\mu\sigma} A_{\mu\lambda}^2 - \theta\frac{k^\mu k_\nu}{M^2} A_{\mu\lambda}^1 A_2^{\nu\lambda}$$

$$T_4 = A_{\mu\nu}^1 A_2^{\mu\nu} - 2\theta\frac{k^\lambda k_\sigma}{M^2} A_1^{\mu\sigma} A_{\mu\lambda}^2 \tag{14}$$

El primer término es

$$A_{\mu\nu}^1 A_2^{\mu\nu} = (4igp_1^\alpha p_2^\beta \epsilon_{\alpha\nu\beta\mu})(4igp_\rho^3 p_\kappa^4 \epsilon^{\rho\nu\kappa\mu}) = -16g^2 p_1^\alpha p_2^\beta p_\rho^3 p_\kappa^4 \epsilon^{\rho\kappa\nu\mu}\epsilon_{\alpha\beta\nu\mu}$$

$$T_{41} = -16g^2 p_1^\alpha p_2^\beta p_\rho^3 p_\kappa^4(-2(g_\alpha^\rho g_\beta^\kappa - g_\beta^\rho g_\alpha^\kappa)) = 32g^2(p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 - p_1 \cdot p_4 p_2 \cdot p_3) = 32g^2[(p_1 \cdot p_3)^2 - (p_1 \cdot p_4)^2] \tag{15}$$

El segundo es

$$32\theta g^2\frac{k^\lambda k_\sigma}{M^2} p_1^\alpha p_2^\beta p_\rho^3 p_\kappa^4 \epsilon^{\rho\sigma\kappa\mu}\epsilon_{\alpha\lambda\beta\mu} =$$

$$-32\theta g^2\frac{k^\lambda k_\sigma}{M^2} p_1^\alpha p_2^\beta p_\rho^3 p_\kappa^4 (g_\alpha^\rho g_\lambda^\sigma g_\beta^\kappa + g_\beta^\rho g_\alpha^\sigma g_\lambda^\kappa + g_\lambda^\rho g_\beta^\sigma g_\alpha^\kappa - g_\lambda^\rho g_\alpha^\sigma g_\beta^\kappa - g_\beta^\rho g_\lambda^\sigma g_\alpha^\kappa - g_\alpha^\rho g_\beta^\sigma g_\lambda^\kappa)$$

$$= -\frac{32\theta g^2}{M^2}(k^2 p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3 p_1 \cdot k k \cdot p_4 + k \cdot p_3 k \cdot p_2 p_1 \cdot p_4 - p_3 \cdot k p_1 \cdot k p_2 \cdot p_4 - k^2 p_2 \cdot p_3 p_1 \cdot p_4 - p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot k p_4 \cdot k)$$

$$T_{42} = -\frac{32\theta g^2}{M^2}(k^2(p_1 \cdot p_3)^2 + p_2 \cdot p_3 p_1 \cdot k k \cdot p_4 + k \cdot p_3 k \cdot p_2 p_1 \cdot p_4 - p_3 \cdot k p_1 \cdot k p_2 \cdot p_4 - k^2(p_2 \cdot p_3)^2 - p_1 \cdot p_3 p_2 \cdot k p_4 \cdot k) \tag{16}$$

En el sistema de centro de masa y despreciando la masa del electrón tenemos que $p_1 \cdot p_2 = E^2 + \vec{P}^2 = 2E^2$ y que $p_1 \cdot p_3 = E^2 + EPcos(\phi)$ donde P es la magnitud del momento final $\sqrt{E^2 - m_\mu^2}$. También tenemos que $p_1 \cdot p_4 = E^2 - EPcos(\phi)$ y $k^2 = 2(p_1 \cdot p_4) = 4E^2$. Entonces la ecuación (11) queda así

$$T_1 = 32g_+[g_+((E^2 - EPcos(\phi))^2 + (E^2 + EPcos(\phi))^2) + 2g_- m_\mu^2 E^2]$$

$$= 32g_+[g_+((E^2 - EPcos(\phi))^2 + (E^2 + EPcos(\phi))^2) + 2g_- m_\mu^2 E^2]$$

$$T_1 = 64E^2 g_+[g_+((E^2 + (E^2 - m_\mu^2)cos^2(\phi)) + g_- m_\mu^2] \tag{17}$$

Recordemos que $k \cdot p_2 = p_1 \cdot p_2 + m_e^2 = p_1 \cdot p_2 = k \cdot p_1$ y también que $p_4 \cdot p_3 = E^2 + P^2 = 2E^2 - m_\mu^2$ y entonces $k \cdot p_4 = p_3 \cdot p_4 + m_\mu^2 = 2E^2 = k \cdot p_3$. Ademas . La ecuación (13) queda así

$$T_3 = -32\frac{\theta g_+^2}{M^2}(8E^4(E^2+EPcos(\phi))+8E^4(E^2-EPcos(\phi))-8E^4(2E^2-m_\mu^2)-16E^6+8E^4(2E^2-m_\mu^2))$$

$$-256\frac{\theta g_+^2}{M^2}E^4(2E^2 - 2E^2 + m_\mu^2 - 2E^2 + 2E^2 - m_\mu^2)$$

$$T_3 = 0 \tag{18}$$

$$T_{41} = 32g^2[(E^2 + EPcos(\phi))^2 - (E^2 - EPcos(\phi))^2]$$

$$T_{41} = 64g^2E^2(E^2 + (E^2 - m_\mu^2)cos^2(\phi)) \tag{19}$$

Y finalmente

$$T_{42} = -\frac{32\theta g^2}{M^2}(4E^2(E^2+EPcos(\phi))^2+(E^2-EPcos(\phi))4E^4+4E^4(E^2-EPcos(\phi)-4E^4(E^2+EPcos(\phi))$$

-4E$^2(E^2 - EPcos(\phi))^2 - 4E^4(E^2 + EPcos(\phi)))$

$$= -\frac{128\theta g^2}{M^2}E^2((E^2+EPcos(\phi))^2+2E^2(E^2-EPcos(\phi))-2E^2(E^2+EPcos(\phi))-(E^2-EPcos(\phi))^2)$$

$$= -\frac{128\theta g^2}{M^2}E^2(4E^3Pcos(\phi) - 4E^3Pcos(\phi))$$

$$T_{42} = 0 \tag{20}$$

Entonces

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{16E^2}{(k^2 - M^2)^2}(g_+^2E^2+g_+^2cos^2(\phi)(E^2-m_\mu^2)+g_+g_-m_\mu^2+g^2E^2+g^2cos^2(\phi)(E^2-m_\mu^2)) \tag{21}$$

Para el caso del fotón (QED) $\hat{g}_A = 0$ entonces $g = 0$, $g_+ = g_- = \hat{g}_V^2 = g_e^2 = e^2$ y $M = 0$. Recordemos que $k^2 = 4E^2$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}_\gamma = \frac{16E^2e^4}{k^4}(E^2 + cos^2(\phi)(E^2 - m_\mu^2) + m_\mu^2)$$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}_\gamma = e^4\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)cos^2(\phi)\right) \tag{22}$$

Y para el Z

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}_Z = \frac{1}{\left(1 - \frac{M_Z^2}{E^2}\right)^2}\left(g_+^2 + g_+^2 cos^2(\phi)\left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + g_+g_-\frac{m_\mu^2}{E^2} + g^2 + g^2cos^2(\phi)\left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\right) \tag{23}$$

Ahora $v_{rel} = |\vec{p_1}|(1/E_1 + 1/E_2) = 2 * E/E = 2$ y $E_1 = E_2 = E_{CM}/2 = E$ y $\sqrt{s} = 2E$ entonces

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\vec{p_3}|}{64\pi^2E_1E_2\sqrt{s}v_{rel}}\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{\sqrt{E^2 - m_\mu^2}}{64 * 4\pi^2E^3}\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{256\pi^2E^2}\sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}\overline{|\mathcal{M}|^2} \tag{24}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sigma(e^-e^+ \to \gamma \to \mu^-\mu^+) &= \frac{e^4}{256\pi^2E^2}\sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}\int_\Omega sin(\theta)d\theta d\phi\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2} + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)cos^2(\theta)\right)\\ &= \frac{\alpha^2}{16E^2}\sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}\left(4\pi\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \frac{4\pi}{3}\left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\right)\\ &= \frac{\pi\alpha^2}{3E^2}\sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}\left(1 + \frac{m_\mu^2}{2E^2}\right) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}\sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{s}}\left(1 + \frac{2m_\mu^2}{s}\right)\end{aligned} \tag{25}$$

Y

$$\begin{aligned}\sigma(e^-e^+ \to Z \to \mu^-\mu^+) = \frac{1}{256\pi^2E^2}\sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}\frac{1}{\left(1 - \frac{M_Z^2}{E^2}\right)^2}\int_\Omega sin(\theta)d\theta d\phi\left(g_+^2 + g_+^2cos^2(\theta)\left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \right.\\ \left. + g_+g_-\frac{m_\mu^2}{E^2} + g^2 + g^2cos^2(\theta)\left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\right)\end{aligned}$$

La integral de las constantes es 4π y del $cos^2(\theta)$ es $4\pi/3$ entonces

$$= \frac{1}{256\pi^2 E^2}\sqrt{1-\frac{m_\mu^2}{E^2}}\frac{4\pi}{\left(1-\frac{M_Z^2}{E^2}\right)^2}\left(g_+^2+\frac{g_+^2}{3}\left(1-\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)+\right.$$

$$\left.+g_+g_-\frac{m_\mu^2}{E^2}+g^2+\frac{g^2}{3}\left(1-\frac{m_\mu^2}{E^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{256\pi^2 E^2}\sqrt{1-\frac{m_\mu^2}{E^2}}\frac{4\pi}{\left(1-\frac{M_Z^2}{E^2}\right)^2}\left(\frac{4g_+^2}{3}+\frac{4g^2}{3}-\frac{m_\mu^2}{3E^2}\left(g_+^2+g^2-3g_+g_-\right)\right)$$

$$= \frac{1}{256\pi^2 E^2}\sqrt{1-\frac{m_\mu^2}{E^2}}\frac{4\pi}{\left(1-\frac{M_Z^2}{E^2}\right)^2}\frac{4}{3}\left(g_+^2+g^2-\frac{m_\mu^2}{4E^2}\left(g_+^2+g^2-3g_+g_-\right)\right)$$

$$\sigma(e^-e^+\to Z\to\mu^-\mu^+) = \frac{1}{256\pi^2 E^2}\sqrt{1-\frac{m_\mu^2}{E^2}}\frac{4\pi}{\left(1-\frac{M_Z^2}{E^2}\right)^2}\frac{4}{3}\left(g_+^2+g^2-\frac{m_\mu^2}{4E^2}\left(g_+^2+g^2-3g_+g_-\right)\right) \tag{26}$$

Donde ahora $\hat{g}_V = g_z g_V/2$ y $\hat{g}_A = g_z g_A/2$