Tarea 1. Grupo 2.

julio.restrepor

April 2021

El vértice de la QED es $ig_e\gamma^\mu$ y para las interacciones débiles que involucran al Z es

$$-\frac{ig_z}{2}\gamma^\mu(g_V^f - g_A^f\gamma^5)$$

Entonces podemos reunir ambas expresiones en

$$-i\gamma^\mu(\hat{g}_V^f - \hat{g}_A^f\gamma^5) \tag{1}$$

Donde para la QED[1] $\hat{g}_A = 0$ y $\hat{g}_V = -g_e = -e$ y para las EW $\hat{g}_A = g_z g_A/2$ y $\hat{g}_V = g_z g_V/2$. Para el propagador podemos poner el masivo y cuando evaluemos el caso del fotón eliminamos los términos que van con la masa. Teniendo esto en cuenta podemos escribir la amplitud de Feynman para el proceso como

$$i\mathcal{M} = [\bar{v}_{s'}(p_2)(-i\gamma^\mu(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5))u_s(p_1)][\frac{-i(g_{\mu\nu} - \theta\frac{k_\mu k_\nu}{M^2})}{k^2 - M^2}][\bar{u}_r(p_3)(-i\gamma^\nu(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5))v_{r'}(p_4)] \tag{2}$$

Donde $\theta = 0$ para QED y 1 para EW. Ahora notemos que por conservación en el vértice $k = p_1 + p_2$ entonces $\bar{v}_{s'}(p_2)\gamma^\mu k_\mu = \bar{v}_{s'}(p_2)\not{k} = \bar{v}_{s'}(p_2)(\not{p}_1 + \not{p}_2)$. Y de la ecuación de Dirac tenemos que $\bar{v}(p)\not{p} = -mv(p)$ entonces la contracción de los k_μ da un término proporcional a la masa del electrón que en este cálculo podemos despreciar y por tanto no considerar ese segundo término en el propagador.

[1] Quitando las f ya que para electrones y muones, que es nuestro caso, valen igual.

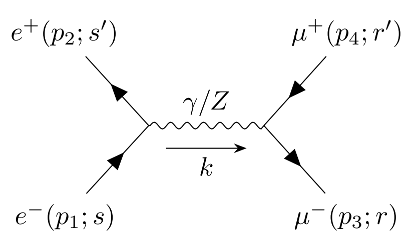

Figure 1: Caption

Podemos escribir la amplitud de forma más compacta como[2]

$$i\mathcal{M} = \frac{i}{k^2 - M^2}[\bar{v}_{s'} G^\mu u_s][\bar{u}_r G_\mu v_{r'}] \tag{3}$$

Donde $G^\sigma = \gamma^\sigma(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5)$. Ahora calculemos lo siguiente con S siendo cualquier espinor

$$[\bar{S}G^\mu S']^\dagger = S'^\dagger G^{\mu\dagger}\gamma^{0\dagger}S = S'^\dagger\gamma^0\gamma^0 G^{\mu\dagger}\gamma^0 S = \bar{S}' G^{\mu\ddagger} S$$

Y $G^{\mu\ddagger} = \gamma^0 G^{\mu\dagger}\gamma^0$. En nuestro caso tenemos que

$$G^{\mu\ddagger} = \gamma^0(\gamma^\mu(\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5))^\dagger\gamma^0$$

$$= \gamma^0((\hat{g}_V - \hat{g}_A\gamma^5)\gamma^{\mu\dagger})\gamma^0$$

Como γ^5 conmuta con un par de gammas y $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$

$$G^{\mu\ddagger} = G^\mu \tag{4}$$

Entonces la amplitud de Feynman al cuadrado es

$$\mid \mathcal{M} \mid^2 = \frac{1}{(k^2 - M^2)^2}[\bar{v}_{s'} G^\mu u_s][\bar{u}_r G_\mu v_{r'}][\bar{u}_r G^\nu v_{r'}]^\dagger[\bar{v}_{s'} G_\nu u_s]^\dagger$$

$$\mid \mathcal{M} \mid^2 = \frac{1}{(k^2 - M^2)^2}[\bar{v}_{s'} G^\mu u_s][\bar{u}_r G_\mu v_{r'}][\bar{v}_{r'} G^\nu u_r][\bar{u}_s G_\nu v_{s'}] \tag{5}$$

Ahora tenemos que promediar sobre los estados iniciales y sumar sobre los estados finales entonces, expresando todo en componentes

$$\overline{\mid \mathcal{M} \mid^2} = \frac{1}{4}\sum_s\sum_{s'}\sum_r\sum_{r'} \mid \mathcal{M} \mid^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{(k^2 - M^2)^2} G^\mu_{\alpha\beta} G^{\gamma\kappa}_\mu G^\nu_{\epsilon\rho} G^{\delta\theta}_\nu \sum_s\sum_{s'}\sum_r\sum_{r'}[\bar{v}^\alpha_{s'} u^\beta_s][\bar{u}^\gamma_r v^\kappa_{r'}][\bar{v}^\epsilon_{r'} u^\rho_r][\bar{u}^\delta_s v^\theta_{s'}]$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{(k^2 - M^2)^2} G^\mu_{\alpha\beta} G^{\gamma\kappa}_\mu G^\nu_{\epsilon\rho} G^{\delta\theta}_\nu \sum_s u^\beta_s \bar{u}^\delta_s \sum_{s'} v^\theta_{s'}\bar{v}^\alpha_{s'} \sum_r u^\rho_r \bar{u}^\gamma_r \sum_{r'} v^\kappa_{r'}\bar{v}^\epsilon_{r'}$$

Vamos a despreciar la masa del electrón

$$= \frac{1}{4(k^2 - M^2)^2} G^\mu_{\alpha\beta} G^{\gamma\kappa}_\mu G^\nu_{\epsilon\rho} G^{\delta\theta}_\nu (\not{p}_1)^{\beta\delta}(\not{p}_2)^{\theta\alpha}(\not{p}_3 + m_\mu)^{\rho\gamma}(\not{p}_4 - m_\mu)^{\kappa\epsilon}$$

Tenemos dos secuencias de índices que están totalmente contraídos, la primera es $\beta\delta\,\delta\theta\,\theta\alpha\,\alpha\beta$ y la segunda es $\rho\gamma\,\gamma\kappa\,\kappa\epsilon\,\epsilon\rho$ y por tanto equivalen a trazas. Finalmente tenemos que

[2] Vamos a suprimir los valores de los momentos y cuando sean necesarios los sacamos del diagrama usando los índices espinoriales.

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4(k^2-M^2)^2} Tr[\not{p}_1 G_\nu \not{p}_2 G^\mu]\, Tr[(\not{p}_3 + m_\mu) G_\mu (\not{p}_4 - m_\mu) G^\nu] \tag{6}$$

Para la primera traza usemos el hecho de la matriz γ^5 conmuta con dos gammas entonces

$$\not{p}_1 G_\nu \not{p}_2 G^\mu = \not{p}_1 \gamma_\nu (\hat{g}_V - \hat{g}_A \gamma^5) \not{p}_2 \gamma^\mu (\hat{g}_V - \hat{g}_A \gamma^5)$$

$$= \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\mu (\hat{g}_V - \hat{g}_A \gamma^5)^2 = \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\mu (\hat{g}_V^2 + \hat{g}_A^2 - 2\hat{g}_A \hat{g}_V \gamma^5)$$

$$= \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\mu (g_+ - g\gamma^5)$$

Con $g_+ = \hat{g}_V^2 + \hat{g}_A^2$ y $g = 2\hat{g}_A \hat{g}_V$. En la segunda traza los términos con 2 G y un γ se anulan ya que involucran productos de 3 γ o de 3 γ y un γ^5. Por otro lado $G^\mu G^\nu = \gamma^\mu (\hat{g}_V - \hat{g}_A \gamma^5) \gamma^\nu (\hat{g}_V - \hat{g}_A \gamma^5) = \gamma^\mu \gamma^\nu (\hat{g}_V + \hat{g}_A \gamma^5)(\hat{g}_V - \hat{g}_A \gamma^5)$ $\gamma^\mu \gamma^\nu g_-$ donde $g_- = \hat{g}_V^2 - \hat{g}_A^2$. De esta forma tenemos

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4(k^2-M^2)^2} Tr[\not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\mu (g_+ - g\gamma^5)]\, Tr[\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma^\nu (g_+ - g\gamma^5) - m_\mu^2 \gamma_\mu \gamma^\nu g_-] \tag{7}$$

Recordemos que $Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu}$, que $Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^5] = -4i\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ y que $Tr[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma = 4(g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma})$. De esta manera

$$Tr[\not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_2 \gamma^\mu (g_+ - g\gamma^5)] = 4p^1_\alpha p^2_\beta (g_+ (g^\alpha_\nu g^{\beta\mu} + g^{\alpha\mu} g^\beta_\nu - g^{\alpha\beta} g^\mu_\nu) - ig\epsilon^{\alpha\beta\mu}_\nu)$$

$$= 4(g_+ (p^1_\nu p^{2\mu} + p^{1\mu} p^2_\nu - p_1 \cdot p_2 g^\mu_\nu) - igp^1_\alpha p^2_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu}_\nu) \tag{8}$$

$$Tr[\not{p}_3 \gamma_\mu \not{p}_4 \gamma^\nu (g_+ - g\gamma^5) - m_\mu^2 \gamma_\mu \gamma^\nu g_-] = 4p^3_\alpha p^4_\beta (g_+ (g^\alpha_\mu g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^\beta_\mu - g^{\alpha\beta} g^\nu_\mu) - ig\epsilon^{\alpha\beta\nu}_\mu) - 4m_\mu^2 g_- g^\nu_\mu$$

$$= 4(g_+ (p^3_\mu p^{4\nu} + p^{3\nu} p^4_\mu - p_3 \cdot p_4 g^\nu_\mu) - igp^3_\alpha p^4_\beta \epsilon^{\alpha\beta\nu}_\mu) - 4m_\mu^2 g_- g^\nu_\mu \tag{9}$$

Usando (7), (8) y (9) podemos escribir

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4(k^2-M^2)^2} (S_1 + A_1)^\mu_\nu (S_2 + A_2)^\nu_\mu$$

Donde los S son las partes simétricas y los A las antisimétricas. La contracción de término simétrico con antisimétrico se anula entonces

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{4(k^2-M^2)^2} (S_1^{\nu\mu} S^2_{\mu\nu} + A^1_{\nu\mu} A_2^{\mu\nu}) \tag{10}$$

El primer término es

$$S_1^{\mu\nu}S^2_{\mu\nu} = 16g_+(p^1_\mu p^2_\nu + p^1_\nu p^2_\mu - p_1\cdot p_2 g_{\mu\nu})(g_+(p_3^\nu p_4^\mu + p_3^\mu p_4^\nu - p_3\cdot p_4 g^{\mu\nu}) - m_\mu^2 g_- g^{\mu\nu})$$

$$= 16g_+^2(2p_3\cdot p_2\, p_1\cdot p_4 + 2p_4\cdot p_2\, p_1\cdot p_3 - 4p_1\cdot p_2\, p_3\cdot p_4 + 4p_1\cdot p_2\, p_3\cdot p_4) - 16g_+g_-m_\mu^2(-2p_1\cdot p_2)$$

$$T_1 = 32g_+[g_+(p_3\cdot p_2\, p_1\cdot p_4 + p_4\cdot p_2\, p_1\cdot p_3) + g_-m_\mu^2 p_1\cdot p_2] \tag{11}$$

El segundo término es

$$A^1_{\mu\nu}A_2^{\mu\nu} = (4igp_1^\alpha p_2^\beta \epsilon_{\alpha\nu\beta\mu})(4igp^3_\rho p^4_\kappa \epsilon^{\rho\nu\kappa\mu}) = -16g^2 p_1^\alpha p_2^\beta p^3_\rho p^4_\kappa \epsilon^{\rho\kappa\nu\mu}\epsilon_{\alpha\beta\nu\mu}$$

$$T_2 = -16g^2 p_1^\alpha p_2^\beta p^3_\rho p^4_\kappa(-2(g^\rho_\alpha g^\kappa_\beta - g^\rho_\beta g^\kappa_\alpha)) = 32g^2(p_1\cdot p_3 p_2\cdot p_4 - p_1\cdot p_4 p_2\cdot p_3) = 32g^2[(p_1\cdot p_3)^2 - (p_1\cdot p_4)^2] \tag{12}$$

En el sistema de centro de masa y despreciando la masa del electrón tenemos que $p_1\cdot p_2 = E^2 + \vec{P}^2 = 2E^2$ y que $p_1\cdot p_3 = E^2 + EPcos(\phi)$ donde P es la magnitud del momento final $\sqrt{E^2 - m_\mu^2}$. También tenemos que $p_1\cdot p_4 = E^2 - EPcos(\phi)$ y $k^2 = 2(p_1\cdot p_2) = 4E^2$. Entonces la ecuación (11) queda así

$$T_1 = 32g_+[g_+((E^2 - EPcos(\phi))^2 + (E^2 + EPcos(\phi))^2) + 2g_-m_\mu^2E^2]$$

$$= 32g_+[g_+((E^2 - EPcos(\phi))^2 + (E^2 + EPcos(\phi))^2) + 2g_-m_\mu^2E^2]$$

$$T_1 = 64E^2g_+[g_+((E^2 + (E^2 - m_\mu^2)cos^2(\phi)) + g_-m_\mu^2] \tag{13}$$

$$T_2 = 32g^2[(E^2 + EPcos(\phi))^2 - (E^2 - EPcos(\phi))^2]$$

$$T_2 = 128g^2E^3\sqrt{E^2 - m_\mu^2}cos(\phi) \tag{14}$$

Entonces, factorizando un E^4

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{16E^4}{(k^2 - M^2)^2}\left(g_+^2 + g_+^2cos^2(\phi)\left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + g_+g_-\frac{m_\mu^2}{E^2} + 2g^2\sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}cos(\phi)\right)$$

Y como $s = 4E^2 = k$ tenemos

$$\overline{\mid \mathcal{M} \mid^2} = \frac{s^2}{(s-M^2)^2}\left(g_+^2 + g_+^2 cos^2(\phi)\left(1-\frac{4m_\mu^2}{s}\right) + 4g_+g_-\frac{m_\mu^2}{s} + 2g^2\sqrt{1-4\frac{m_\mu^2}{s}}cos(\phi)\right) \tag{15}$$

Ahora $v_{rel} = \mid \vec{p_1} \mid (1/E_1 + 1/E_2) = 2 * E/E = 2$ y $E_1 = E_2 = E_{CM}/2 = E$ y $\sqrt{s} = 2E$ entonces

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mid \vec{p_3} \mid}{64\pi^2 E_1 E_2 \sqrt{s} v_{rel}}\overline{\mid \mathcal{M} \mid^2} = \frac{\sqrt{E^2 - m_\mu^2}}{64 * 4\pi^2 E^3}\overline{\mid \mathcal{M} \mid^2} = \frac{1}{64\pi^2 s}\sqrt{1-\frac{4m_\mu^2}{s}}\overline{\mid \mathcal{M} \mid^2} \tag{16}$$

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2}\sqrt{1-\frac{4m_\mu^2}{s}}\frac{s}{\left(s-M^2\right)^2}\int_\Omega sin(\theta)d\theta d\phi \left(g_+^2 + g_+^2 cos^2(\theta)\left(1-\frac{4m_\mu^2}{s}\right) + \right.$$
$$\left. +4g_+g_-\frac{m_\mu^2}{s} + 2g^2\left(1-\frac{4m_\mu^2}{s}\right)^{1/2} cos(\theta)\right)$$

La integral de las constantes es 4π, del $cos^2(\theta)$ es $4\pi/3$ y la de $cos(\theta)$ es cero entonces

$$= \frac{1}{64\pi^2}\sqrt{1-\frac{4m_\mu^2}{s}}\frac{4\pi s}{\left(s-M^2\right)^2}\left(g_+^2 + \frac{g_+^2}{3}\left(1-\frac{4m_\mu^2}{s}\right) + 4g_+g_-\frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \tag{17}$$

$$= \frac{1}{16\pi}\sqrt{1-\frac{4m_\mu^2}{s}}\frac{s}{\left(s-M\right)^2}\left(\frac{4g_+^2}{3} + 4\frac{m_\mu^2}{3s}\left(3g_+g_- - g_+^2\right)\right) \tag{18}$$

$$\sigma = \frac{1}{3 * 4\pi}\sqrt{1-\frac{4m_\mu^2}{s}}\frac{s}{\left(s-M^2\right)^2}\left(g_+^2 + \frac{m_\mu^2}{s}\left(3g_+g_- - g_+^2\right)\right) \tag{19}$$

Para el caso del fotón (QED) $\hat{g}_A = 0$ entonces $g_+ = g_- = \hat{g}_V^2 = g_e^2 = e^2$

$$\sigma(e^-e^+ \to \gamma \to \mu^-\mu^+) = \frac{1}{3\pi}\sqrt{1-\frac{4m_\mu^2}{s}}\frac{e^4}{s}\left(1+\frac{2m_\mu^2}{s}\right)$$
$$= \frac{4\pi\alpha^2}{3s}\sqrt{1-\frac{4m_\mu^2}{s}}\left(1+\frac{2m_\mu^2}{s}\right) \tag{20}$$

Y para el bosón Z y despreciando la masa del muón ya que es muy pequeña comparada con la escala de energía del Z

$$\sigma(e^-e^+ \to Z \to \mu^-\mu^+) = \frac{1}{3 * 4\pi}\frac{s}{\left(s-M_Z^2\right)^2}g_+^2$$

Donde $g_+ = \hat{g}_V^2 + \hat{g}_A^2$, $g_- = \hat{g}_V^2 - \hat{g}_A^2$, $\hat{g}_V = g_z g_V/2$ y $\hat{g}_A = g_z g_A/2$

$$\sigma(e^- e^+ \to Z \to \mu^- \mu^+) = \frac{1}{192\pi} \frac{g_z^4 s}{\left(s - M_Z^2\right)^2} (g_V^2 + g_A^2)^2 \tag{21}$$