Foto-mosaicos y optimización para el arte (Opt-Art)

Julio César Espinosa

Verano 2021

1. Introducción

Históricamente, la optimización matemática ha sido una disciplina altamente recurrida para la solución de problemas en varias áreas del conocimiento (economía, informática, industria, logística, etc.) y en distintos grados de complejidad. Sin embargo, fuera de la amplia esfera de problemas técnicos o puramente científicos abordables por la optimización hay una serie planteamientos resolvibles que coincilian la optimización, particularmente del tipo lineal, con problemas de carácter estético más vinculados con ramas como el arte o la composición fotográfica. La presente tesis abordará el problema de reproducir o replicar con buena similaridad una imagen mediante el empleo, ya sea de trazos continuos a lo largo de un cuadro, o mediante imágenes diversas que, posicionadas estratégicamente lograrán construir un producto que, a ojo humano, tendrá una forma fácilmente asociable con la imagen objetivo. Siendo ambos problemas de optimización lineal entera: el primero, una aplicación de problema del agente viajero (TSP por sus siglas en inglés); y el segundo, un problema lineal con variables de decisión en tres dimensiones.

2. TSP: Agente viajero

La teoría de grafos estudia las propiedades y relaciones de un grafo que es un par (V, E) con V un conjunto de vértices y E conjunto de aristas que los une. Siendo la arista modelada, ya sea como un par dirigido, donde el orden de los vértices importa (digrafo), o bien, no dirigido. Existen problemas de optimización planteados sobre esquemas de grafos que pueden ser resueltos por la vía de la programación lineal, siendo el problema del aente viajero uno de los más interesantes y populares. Este problema se esboza partiendo de un individuo (agente) que desea visitar una cantidad n_* de ciudades partiendo de una ciudad origen y finalizando el recorrido en dicha ciudad pero con el objetivo de minimizar la distancia total recorrida. Existe un único conjunto de parámetros necesario para definir el problema: la distancia que hay entre cada par de ciudades existente; para ello defínase $c_{i,j}$ como el valor cuantitativo de dicha la distancia que hay entre las ciudades (o vértices) (i,j) para cada par $(i,j) \in \{1,...,n_*\}^n_*$. Explicado este problema, podemos desarrollar una intuitiva formulación matemática mediante la programación lineal entera siguiente.

$$
\begin{aligned}
\min_{x_{i,j}} \quad & \sum_{i=1}^{n_*}\sum_{j=1}^{n_*} c_{i,j}x_{i,j} \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^{n_*} x_{i,j} = 1 \qquad \forall j \in \{1,...,n_*\} \\
& \sum_{j=1}^{n_*} x_{i,j} = 1 \qquad \forall i \in \{1,...,n_*\} \\
& \sum_{i \in S}\sum_{j \in S} x_{i,j} \leq |S| - 1 \qquad \forall S \subset \{1,...,n_*\}
\end{aligned}
$$

Donde S es el conjunto potencia generado con $\{1,...,n\}$. El problema lineal esbozado arriba se conforma por componentes. Para entenderlo, defínase antes el conjunto de variables de decisión como $\{x_{i,j}|(i,j) \in \{1,...,n_*\}^2\}$ con dos asignaciones de valor posibles: 0 y 1. 1 representa que el agente realizó un recorrido directo partiendo de la ciudad i hacia la ciudad j con una distancia correspondiente de $c_{i,j}$; 0, por el contrario, representa el caso opuesto. En términos técnicos, el agente viajero ocupó el dígrafo dirigido (i,j).

Así, la primera expresión (1) es la función objetivo: el recorrido total para arribar a las n_* ciudades. (2) exige que de cada ciudad se parta hacia una única ciudad; (3), análogo a (2), requiere que a cada ciudad se arribe desde un único punto de partida. La factibilidad del tour generado por el agente se termina de construir en el conjunto (4) ya que sin éste podrían haber tours donde a cada ciudad se llega una única vez y cada ciudad parte hacia un único destino pero dos o más subconjuntos resultado de la partición de $\{1,...,n_*\}$ generen cada uno un grafo o tour cerrado. Supongamos que se generó una solución optimal con las restricciones (2) y (3) cumplidas pero que constara de tres subtours: T_1, T_2, T_3 con $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \{1,...,n_*\}$. Poniéndonos imaginativos, esto querría decir que el agente terminó de recorrer T_1, al terminar 'se teletransportó' a T_2 sin recorrer distancia alguna, finalmente siguió haciendo lo propio de T_2 a T_3. Claramente esto no tiene sentido en el plano real; además, se viola el supuesto de que el agente parte de un punto y termina en el mismo. La restricción (4) elimina la posibilidad de subtours. Sin embargo, al tratarse de una restricción que explora a cada uno de los 2^{n_*} posibles subconjuntos generables con $\{1,...,n_*\}$, es una restricción con una elevada complejidad computacional asociada que debe simplificarse con adecuadas restricciones alternativas (véanse restricciones de Miller, Tucker & Zemlin, 1960). Si a eso le sumamos que el programa lineal tiene como conjunto factible los $n_*!$ posibles ordenamientos de $\{1,...,n_*\}$, podemos entender que se diga que los programas que lo resuelven trabajan bajo los llamados 'algoritmos de optimización combinatoria'.

2.1. Arte con el agente viajero

En la introducción se hace referencia a dos maneras de replicar imágenes con optimización lineal que se desarrollarán en el presente estudio. La primer versión es vía el TSP: parte del supuesto de que se cuenta con una imagen en blanco y negro con una gama de greyscales (escala de grises). Asociamos una mayor greyscale a una mayor luminosidad o blancura. Así pues, procedemos de la siguiente manera

- Particionamos la imagen en grupos de pixeles. Cada grupo constará de cuadrados con k pixeles a lo largo por k pixeles a lo ancho. Derivamos de la imagen m renglones de grupos o cuadrados y n columnas de éstos; asímismo, obtenemos una escala de grises de cada pixel.

- Obtenemos la greyscale promedio de cada cuadrado y fijamos un parámetro que ponderará el nivel de detalle que deseamos de la imagen a reproducir: $\gamma \in [4, 9] \cap \mathbb{N}$. De tal manera, para el cuadro $(i, j) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\}$ la grayscale del pixel promedio será de μ_{ij}, con valores entre 0 y 256. De tal forma constrúyase $g_{ij} = \gamma - [\gamma\mu_{ij}/256] \in [0, \gamma]$; ésta será una escala de oscuridad del cuadro.

- Dividimos la imagen en $m \times n$ cuadros, en cada cuadro situamos uniformemente g_{ij} ciudades. Computamos las distancias (o 'costos') entre las $m \times n$ distintas 'coordenadas' en una matriz $C = [c]_{ij}$ de $(m * n) \times (m * n)$; resolvemos el TSP sobre estas distancias. Siendo que ahora el planteamiento se esboza sobre $m * n$ y asociando el mismo con la expresión para el agente viajero, podemos entender que ahora $n_* = m * n$.

3. Foto mosaicos

En el área de marketing han pululado técnicas de advertising que consisten en reproducir con elevada similaridad una imagen de interés conformada por un conjunto de cuadros o grupos de pixeles. Similar al ejercicio del TSP aplicado al cuadro de la Monalisa podríamos asignar una intensidad lumínica a cada celda del mismo (o cualquier otro) cuadro, reescalando el parámetro μ_{ij} al intervalo $[0, 1]$ mediante $\beta_{ij} = \mu_{ij}/256$. Así de manera similar al punto (1), supóngase que contamos con un conjunto $|F|$ de cuadros, cada cuadro siendo, digamos, una fotografía. Cada cuadro de tipo f cuenta con una intensidad lumínica con valor b_f. Además, supongamos que contamos con a lo menos un cuadro con la fotografía f impresa, pero podemos tener más: u_f es la cantidad de cuadros de tipo f existente. De tal manera contamos con un total de $\sum u_f = U \leq m * n$ fichas disponibles. La formulación con programación lineal del problema de los fotomosaicos es la siguiente.

$$
\begin{aligned}
\min_{x_{fij}} \quad & \sum_{f\in F}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(b_f-\beta_{ij})^2 x_{fij} \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{fij} \le u_f \qquad \forall f \in F \\
& \sum_{f\in F} x_{fij} = 1 \qquad \forall (i,j) \in \{1,...,m\} \times \{1,...,n\}
\end{aligned}
$$

La restricción (1) minimiza la suma de diferencias cuadráticas entre las luminosidades del área subyacente sobre la cual se coloca la ficha f en la posición (i,j) (Possani). La función de costos $c_{i,j}$ del problema viajero ahora tiene un análogo tridimensional: $c_{fij} = (b_f - \beta_{ij})^2$. La restricción (2) se asegura que haya exactamente una foto en la posición (i,j). Cabe destacar que, si bien este problema es de programción lineal entera (los valores factibles son solo 0 y 1), el mismo se puede plantear como un problema con variables de decisión continuas dando lugar a un resultado optimal entero y factible. Esto es una noticia buena en la medida de que añadir la propiedad de 'entero' implica en la solución restricciones asociadas con una complejidad computacional y de planteamiento no siempre tan triviales.

4. Referencias

[1]