Foto-mosaicos y optimización para el arte (Opt-Art)

Julio César Espinosa

Verano 2021

1. Introducción

Históricamente, la optimización matemática ha sido una disciplina altamente recurrida para la solución de problemas en varias áreas del conocimiento y la práctica (economía, informática, industria, logística, etc.). Sin embargo, fuera de la amplia esfera de problemas técnicos o puramente científicos abordables por la optimización hay una de serie planteamientos resolvibles que concilian la optimización, particularmente del tipo lineal, con problemas de carácter estético más vinculados con ramas como el arte o la composición fotográfica. La presente tesina abordará el problema de reproducir o replicar con buena similaridad una imagen mediante el empleo, ya sea de trazos continuos a lo largo de un cuadro, o mediante imágenes diversas que, posicionadas estratégicamente, lograrán construir un producto que, a ojo humano, tendrá una forma fácilmente asociable con la imagen objetivo. Siendo ambos problemas de optimización lineal entera: el primero, una aplicación del problema del agente viajero (TSP por sus siglas en inglés); y el segundo, un problema lineal con variables de decisión en tres dimensiones (siendo éstas asociadas a renglón, columna y tipo de imagen).

2. La programación lineal

La programación lineal es un área de la programación matemática y la optimización dedicado a minimizar o maximizar una función lineal sobre múltiples variables (multivariada) de tal manera que dichas variables se expresen mediante un sistema de restricciones también lineales en forma de igualdades o desigualdades. La expresión estándar de un problema lineal es la siguiente

$$\min_{x_i} \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{1a}$$

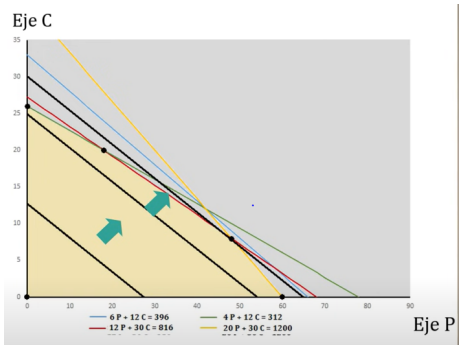
$$\text{s.a. } Ax \leq b \tag{1b}$$

$$x \geq 0 \tag{1c}$$

Las restricciones mencionadas, expresadas matricialmente arriba, generan un espacio geométrico cerrado, más específicamente un poliedro convexo, y de contornos lineales, al cual se les denomina región de factibilidad.

La disciplina y teoría de la programación lineal se manifiesta en problemas que lo que buscan es maximizar un beneficio o minimizar un costo bajo circunstancias que restringen la usabilidad de recursos. Dicho beneficio o costo depende de las cantidades de dichos recursos. Algunos de sus primeros usos se remontan a la Segunda Guerra Mundial en la búsqueda de planificar gastos y recursos para reducir costos del enemigo y aumentar las pérdidas del enemigo. Otros usos, empleados a lo largo del siglo XXI consisten en problemas de flujos de redes en informática y de mercancías en comercio; así como economía y gestiones de inventario, portafolios financieros y suministro de alimentos.

Los programas lineales fácilmente se pueden garantizar que son resolvibles en la medida de que la región factible sea no vacía y acotada en la dirección del gradiente de la función objetivo. Gráficamente la solución se puede represetar como el contacto de un poliedro convexo con las curvas de valor de una función objetivo cóncava. Sin embargo, al no haber convexidad estricta de la región factible ni concavidad estricta de la función, no se puede garantizar la unicidad de las soluciones; es más, para programas lineales no discretos puede haber hasta una infinidad de soluciones. Lo que sí se puede asegurar es que cuando menos un vértice de la región factible es una solución óptima. La siguiente gráfica da un ejemplo de un programa lineal en el espacio 2-dimensional donde las curvas de valor van desplazándose hasta tocar el vértice óptimo. Esta solución gráfica tiene una noción que extiende su alcance y validez a más dimensiones y una amplia variedad de restricciones lineales.



(1) Ejemplo bi-dimensional de la resolución gráfica un problema lineal

Las variaciones de esta clase de problemas extendidas a más dimensiones pueden resolverse mediante el método Simplex, que incorpora variables de holgura para convertir las desigualdades

en igualdades y ejecuta operaciones lineales simples sobre la función objetivo y las restricciones para encontrar el óptimo de un problema lineal. Este método irá conduciendo a quien lo resuelve de vértice en vertice hacia mejores soluciones cada vez hasta dar con el(los) óptimo(s).

Cuando se añade la integralidad de las variables a un programa lineal, el problema de abordar las propiedades geométricas del problema no entero (o relajado) directamente para resolución se vuelve más complejo, dado que pueden haber casos donde, si las soluciones del problema no íntegro son truncadas a enteros sin salirnos del área factible, se está aún lejos del óptimo entero, por lo que hay explorar distintas zonas de la región factible mediante algoritmos como el de ramificación y acotamiento.

El algoritmo de ramificación y acotamiento parte inicialmente de la resolución del problema lineal sin restricciones de enterez (también llamado problema relajado) y, dada esta primera solución, o primer óptimo, va incorporando dos restricciones sobre alguna variable no entera (no importa mucho cuál): una restricción con el valor de esta variable por encima del 'techo' del primer óptimo y otra por debajo del 'piso' del mismo, eligiéndose de ahí aquella restricción con la mejor solución; en caso de que esta última solución sea entera, se detiene la ejecución de los pasos dando con un óptimo, de otra forma, se procede con la elección de una nueva variable no entera a ramificar. Dada la solución más reciente el algoritmo reproduce y evalua las ramificaciones de distintas variables fraccionales hasta dar con una solución con todas sus variables enteras.

3. TSP: Agente viajero

La teoría de grafos estudia las propiedades y relaciones de un grafo que es un par (V, E) con V un conjunto de vértices y E conjunto de aristas que los une. Siendo la arista modelada, ya sea como un par dirigido, donde el orden de los vértices importa (digrafo), o bien, no dirigido. Existen problemas de optimización planteados sobre esquemas de grafos que pueden ser resueltos por la vía de la programación lineal, siendo el problema del agente viajero (*Traveling Salesman Problem*, TSP) uno de los más interesantes y populares. Este problema se esboza partiendo de un individuo (agente) que desea visitar una cantidad n_* de ciudades partiendo de una ciudad origen y finalizando el recorrido en dicha ciudad con el objetivo de minimizar la distancia total recorrida. Existe un único conjunto de parámetros necesario para definir el problema: la distancia que hay entre cada par de ciudades existente; para ello defínase $c_{i,j}$ como el valor cuantitativo de dicha la distancia que hay entre las ciudades (o vértices) (i, j) para cada par $(i, j) \in \{1, \ldots, n_*\}^2$. Explicado este problema, podemos desarrollar una intuitiva formulación matemática mediante la programación

lineal entera siguiente.

$$\min_{x_{i,j}} \sum_{i=1}^{n_*} \sum_{j=1}^{n_*} c_{i,j} x_{i,j} \tag{2a}$$

$$\text{s.a.} \sum_{i=1}^{n_*} x_{i,j} = 1 \quad \forall j \in \{1, \ldots, n_*\} \tag{2b}$$

$$\sum_{j=1}^{n_*} x_{i,j} = 1 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n_*\} \tag{2c}$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{i,j} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subset \{1, \ldots, n_*\} \tag{2d}$$

Donde S es el conjunto potencia generado con $\{1, \ldots, n_*\}$. El problema lineal esbozado arriba se conforma por componentes. Para entenderlo, defínase antes el conjunto de variables de decisión como $\{x_{i,j} | (i,j) \in \{1, \ldots, n_*\}^2\}$ con dos asignaciones de valor posibles: 0 y 1. 1 representa que el agente realizó un recorrido directo partiendo de la ciudad i hacia la ciudad j con una distancia correspondiente de $c_{i,j}$; 0, por el contrario, representa el caso opuesto: no se viaja de i a j. En términos técnicos, hablamos de que el agente viajero ocupó (o no) el dígrafo dirigido (i,j).

Así, la primera expresión ec. (2a) es la función objetivo: el recorrido total para arribar a las n_* ciudades. (2b) exige que de cada ciudad se parta hacia una única ciudad; (2c), análogo a (2b), requiere que a cada ciudad se arribe desde un único punto de partida. La factibilidad del *tour* generado por el agente se termina de construir en el conjunto de ecuaciones (2d), ya que sin éste podrían haber *tours* donde a cada ciudad se llega una única vez y cada ciudad parte hacia un único destino, pero dos o más subconjuntos resultado de la partición de $\{1, \ldots, n_*\}$ generan cada uno un recorrido o *tour* cerrado. Supongamos que se generó una solución optimal con las restricciones (2b) y (2c) cumplidas, pero que constara de tres *subtours*: T_1, T_2, T_3 con $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \{1, \ldots, n_*\}$. Poniéndonos imaginativos, esto querría decir que el agente terminó de recorrer T_1, al terminar pasó a recorrer T_2 sin haber algún digrafo que enlazara de algún punto de T_1 a un punto de T_2 (¿entonces se teletransportó?), finalmente siguió haciendo lo propio de T_2 a T_3. Claramente esto realmente no tiene sentido; además, se viola el supuesto de que el agente parte de un punto y termina en el mismo tras recorrer todas las ciudades. La restricción (2d) elimina la posibilidad de lo que llamaremos *subtours*. Sin embargo, al tratarse de una restricción que explora a cada uno de los 2^{n_*} posibles subconjuntos generables con $\{1, \ldots, n_*\}$, es una restricción con una elevada complejidad computacional asociada que debe simplificarse con adecuadas restricciones alternativas (véanse restricciones de Miller, Tucker & Zemlin, 1960). Si a eso le sumamos que el programa lineal tiene como conjunto factible los $n_*!$ posibles ordenamientos de $\{1, ,,,, n_*\}$, podemos entender que

se diga que los programas que lo resuelven trabajan bajo los llamados “algoritmos de optimización combinatoria”.

3.1. Arte con el agente viajero, o arte con línea continua

En la introducción se hace referencia a dos maneras de replicar imágenes con optimización lineal que se desarrollarán en el presente estudio. La primer versión es vía el TSP: parte del supuesto de que se cuenta con una imagen en blanco y negro con una gama de *greyscales* (o escala de grises). Asociamos una mayor *greyscale* a una mayor luminosidad o blancura. Así pues, procedemos de la siguiente manera

- Particionamos la imagen en grupos de pixeles. Cada grupo constará de rectángulos con k pixeles a lo largo por h pixeles a lo ancho. Derivamos de la imagen m submatrices-renglón de grupos o rectángulos y n submatrices-columna de éstos, de tal manera que la matriz grande cuenta con dimensiones $\mu' \times \nu'$ con $\mu' = k\ m$ y $\nu' = h\ n$; asímismo, obtenemos una escala de grises para cada pixel en el rango discreto de 0 a 255.

- Obtenemos la *greyscale* promedio de cada rectángulo y fijamos un parámetro que ponderará el nivel de detalle que deseamos para la imagen a reproducir: $\gamma \in [4, 9] \cap \mathbb{N}$. De tal manera, para el rectángulo $(i, j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ la *greyscale* del pixel promedio será de ψ_{ij}, con valores entre 0 y 255. De tal forma constrúyase

$$g_{ij} = \lfloor \gamma - \gamma\psi_{ij}/255 \rfloor \in [0, \gamma] \tag{3}$$

  Esta será una escala de oscuridad del rectángulo.

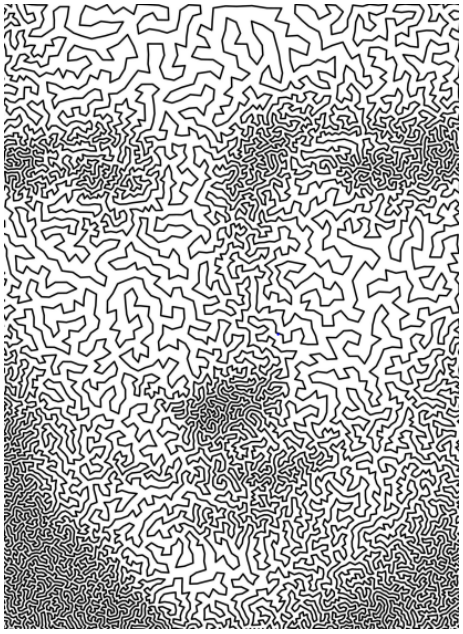
- Dividimos la imagen en $m \times n$ rectángulos, en cada uno situamos uniformemente g_{ij} ciudades. El conjunto total de ciudades construidas será de cardinalidad τ, definida como

$$\tau = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \tag{4}$$

  Computamos las distancias (o “costos”) entre las τ distintas coordenadas en una matriz $C = [c]_{ij}$ de $\tau \times \tau$; resolvemos el TSP sobre estas distancias. Siendo que ahora el planteamiento se esboza sobre τ ciudadesk podemos entender que ahora la n_* introducida en la subsección anterior tiene un valor en el problema del arte con línea continua $n_* = \tau$.

0. En adelante se emplearan indistintamente ’*greyscales*’ o ’escala de grises’

0. Este rango de $[4, 9]$ no tiene otra justificación más allá de la visual, i.e. se define a la luz de los resultados usando esos números; por el contrario valores superiores a 9 podrían generar imágenes sobre-saturadas de puntos



(1) Rostro de la Monalisa reproducido por Robert Bosch usando el problema del agente viajero

4. Foto mosaicos

En el área del *marketing* han pululado técnicas de *advertising* que consisten en reproducir con elevada similaridad una imagen de interés conformada por un conjunto de imágenes o grupos de pixeles. Similar al ejercicio del TSP aplicado al cuadro de la Monalisa podríamos asignar una intensidad lumínica a cada celda del mismo (o cualquier otro) rectángulo, reescalando el parámetro ψ_{ij} al intervalo $[0, 1]$ mediante $\beta_{ij} = \psi_{ij}/255$. Así, de manera similar al punto (1), supóngase que contamos con un conjunto $F = \{1, \ldots, cf\}$ de rectángulos (con $cardinalidad(F) = cf$), cada rectángulo representando a, digamos, una fotografía. Cada imagen o figura de tipo $f \in F$ cuenta con una intensidad lumínica con valor b_f. Además, supóngase que se cuenta con a lo menos un rectángulo con la fotografía f impresa, pero podemos tener más: u_f es la cantidad de rectángulos de tipo f disponible para su uso. De tal manera contamos con un total de $\sum u_f = U \geq m\ n$ fichas disponibles. La formulación con programación lineal del problema de los fotomosaicos es la siguiente.

$$\min_{x_{fij}} \sum_{f \in F} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (b_f - \beta_{ij})^2 x_{fij} \tag{5a}$$

$$\text{s.a.} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{fij} \leq u_f \quad \forall f \in F \tag{5b}$$

$$\sum_{f \in F} x_{fij} = 1 \quad \forall (i, j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \tag{5c}$$

La expresión ec. (5a) minimiza la suma de diferencias cuadráticas—o bien, de los cuadrados de las distancias euclideanas en $\mathbb{R}^1$ — entre las luminosidades del área subyacente sobre la cual se coloca la ficha f en la posición (i, j) (Possani). La función de costos $c_{i,j}$ del problema viajero ahora tiene un análogo tridimensional: $c_{fij} = (b_f - \beta_{ij})^2$. (5b) garantiza que se no se excedan las dotaciones disponibles de cada figura. La restricción (5c) se asegura que haya exactamente una foto en la posición (i, j). Cabe destacar que, si bien este problema es de programción lineal entera (los valores factibles son solo 0 y 1), el mismo se puede plantear como un problema con variables de decisión continuas, dando lugar a un resultado optimal entero y factible. Esto es una noticia buena en la medida de que añadir la propiedad de "entero" o "enterez" implica en la solución restricciones asociadas con una complejidad computacional y de planteamiento no siempre tan triviales. En otras palabras, la restricción de enterez dificulta el cálculo de soluciones.

Ahora, vale la pena analizar el cómo se ha de construir un fotomosaico usando el principio de optimización lineal arriba planeado, pero ahora en lugar de optimizar la asignación de *grayscales*, hacerlo mediante la asignación de imagenes a color. Para ello, vale la pena cuestionarse cómo se representa una imagen a color. En los niveles primarios de educación es común mostrar empíricamente (con acuarelas, digamos) cómo los colores se producen mezclando rojo, amarillo y azul, a esto se le llama en el modelo RYB, también conocido como un modelo de tipo sustractivo. Un modelo sustractivo parte del principio de que "el color de un objeto depende de las partes del espectro electromagnético que son reflejadas por él, o dicho de otro modo, de las partes del espectro que no absorbe", el modelo RYB de esta clase es el más antiguo registrado. La manera en que el ojo humano intepreta un objeto específico depende no necesariamente de la luz que el objeto en sí emane, sino de las longitudes de onda que deja de absorber. Por el contrario, en la representación de un objeto por una pantalla se depende de la emisión de la luz por la misma, de ahí que se ha de emplear un modelo opuesto, i.e., el de la síntesis aditiva del color. Una ventaja que tiene la misma es que el color digital de un pixel procesado por un dispositivo puede ser representado como una adición los valores numéricos de cada componente que se van incorporando en un espacio 3-dimensional. El modelo aditivo consensuadamente más dominante en la informática y la fotografía es el que parte de los colores primarios rojo, verde y azul (RGB). Cabe mencionar que, así como en las escalas de grises, en las imágenes a color cada componente puede representarse convencionalmente en escalas continuas entre 0 y 1 o discretas de 256 valores. Una extensión del principio de la solución de fotomosaicos sería minimizar la suma de los cuadrados de la distancias euclideanas, pero esta vez ya no en en $\mathbb{R}^1$, sino en $\mathbb{R}^3$. Para ello, la fórmula enunciada en (5a) puede modificarse incorporando tres componentes: la primera dimensión, r (que antes existía, sin embargo se obviaba la indexación porque el pixel se representaba en una única dimensión), la segunda, g y, finalmente, b.

Dicho esto, podemos ocupar los conceptos definidos inicialmente en esta sección, pasando así de β_{ij} y b_f a β_{ij}^A y b_f^A donde el superíndice A refiere a "aditivo", $\beta_{ij}^A = (\beta_{ijr}, \beta_{ijr}, \beta_{ijg})$ es el color del pixel y $b_f^A = (b_{fr}, b_{fr}, b_{fg})$ es el color del pixel "promedio" (si se puede decir así, y en efecto se puede comprobar que semejante pixel existe) en la ficha f. Habiendo definido esto, generamos el problema lineal siguiente

$$\min_{x_{fij}} \sum_{f\in F} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [(b_{fr} - \beta_{ijr})^2 + (b_{fg} - \beta_{ijg})^2 + (b_{fb} - \beta_{ijb})^2] x_{fij} \tag{6a}$$

$$\text{s.a.} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{fij} \leq u_f \quad \forall f \in F \tag{6b}$$

$$\sum_{f\in F} x_{fij} = 1 \quad \forall (i,j) \in \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\} \tag{6c}$$

Podemos simplificar el coeficiente $(b_{fr}-\beta_{ijr})^2+(b_{fg}-\beta_{ijg})^2+(b_{fb}-\beta_{ijb})^2$ como $d^2(b_f^A, \beta_{ij}^A)$ con d la norma euclideana en $\mathbb{R}^3$. Vale la pena observar que, si bien la fórmula se ve más compleja debido a la manera en que se desarrolla el coeficiente de costo, en realidad el problema matemáticamente visto es en escencia idéntico con dos salvedades: primera, que el cálculo de los costos es más largo; segunda, que encontrar fichas que cubran de manera razonablemente similar el total del espectro de colores que hay en la imagen grande a representar ya no es tan sencillo, debido a que se cuenta con tres dimensiones. Así, por ejemplo, si antes se deseaba tener 10 imágenes con escalas de grises promedio homogéneamente distribuídas sobre la escala $[0, 1]$ ahora se necesitarían $10^3 = 1000$ imágenes con escalas distintas para cumplir con una tarea análoga, por lo tanto la cardinalidad del conjunto de fichas F debe de aumentar considerablemente si se desea generar una representación legible. Dichas estas salvedades, el problema matemático es esencialmente idéntico y solo debe su diferencia a la implementación computacional inherente al mencionado aumento en la cardinalidad del conjunto de fichas a colocar.

5. Implementación

5.1. Partición de la matriz en submatrices

Una imagen en escala de grises se entiende como un despliegue visual en el que cada unidad básica mostrada en la pantalla —mejor conocida como pixel— se ve representada por una cifra que cuantifica la cantidad de luz (o información de intensidad lumínica) con que cuenta. Representando la mínima unidad al negro y, la máxima, al blanco. La escala tiende a volverse discreta, ya que contar con un continuo estándar de 0 a 1 (o 0 % a 100 %) representaría un reto computacional y

de almacenaje considerable. Algunas imágenes en escala de grises tempranas cuantificaban hasta 16 valores, lo cual implicaba un almacenaje de 4 bits por pixel; en la medida de que la rama de la fotografía digital evolucionó, aumentó hasta 256 intensidades, implicando un peso de 8 bits por pixel. Si bien actualmente hay adicionales variaciones con mayor o menor número de valores (también discretos), los cuales se eligen en función de la aplicación de la imagen, un estándar recurrentemente usado es el de 256 escalas. Por eso, y en aras de seguir convenciones, se usará esta escala discreta, o bien, dependiendo del caso, la escala continua de 0 a 1. Para pasar de la escala $[0, 1]$ a la escala $\{0, \ldots, 255\}$ hacemos $e_{255} = round(255e_1)$; para pasar en sentido inverso se usará $e_1 = \frac{1}{255}e_{255}$.

En este apartado se describirá cómo se procede para formular y computar los dos enfoques para reproducir imágenes: el de TSP y el de los fotomosaicos, explicados brevemente en la sección 3 . Para iniciar los ejercicios decidí usar una imagen de la red social Twitter, la cual se anexa a continuación. La librería de R encargada de procesar y graficar las imágenes de tipo png tiene como nombre "png". La función $readPNG(.)$ se encarga de leer el archivo-imagen objetivo y sintetizarlo en un objeto numérico estructurado en un arreglo 3-dimensional con dimensiones para sus pixeles de renglón (μ) $\times$ columna (ν) $\times 3$. De los elementos extrapolados del primer componente de la dimensión tres, $readPNG(.)[, , 1]$, se extrae una matriz $\mu \times \nu$, la cual consta de valores constituyendo la escala de grises de la imagen en el intervalo continuo de 0 a 1. Para graficar dicha imagen en el cuadrante del plano cartesiano $x - y$ (delimitado al rango $[0, 1]$ para ambas dimensiones) se usará la función $image(.)$. Esta función despliega la figura interpretando al renglón como la coordenada x y a la columna como la coordenada y. Sin embargo, esta es una interpretación distinta a la asignación que interpreta a los renglones como el largo (es decir, el eje y) y a las columnas como el ancho (es decir, el eje x) propia del output de $readPNG(.)[, , 1]$. De tal manera, si se computa la escala de grises de este output mediante $image(.)$ se tendría como resultado la imagen rotada 90^{o} en sentido contrario a las manecillas del reloj (hacia la izquierda), como se muestra en la siguiente imagen.

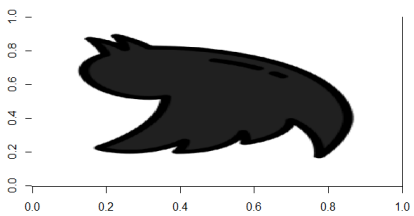


Figura 3: Despliegue image(.), matriz original

Para solventar este problema se usará una versión auxiliar de la matriz original, rotándola 90^{o}

0. mostrar número de sección

en sentido de las manecillas del reloj. El resultado se despliega a continuación.

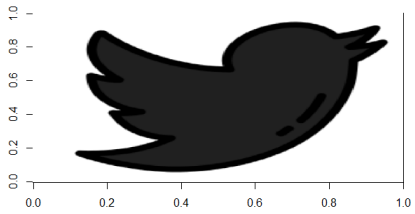


Figura 4: Despliegue image(.), matriz rotada 90 a la derecha

El siguiente paso consiste en usar las dimensiones de pixeles, m y n, para delimitar el tamaño de la matriz tal que se permita generar una partición de la misma en submatrices que sea factible, es decir, que sean submatrices de dimensiones idénticas y que, posicionadas estratégicamente, generen la matriz grande (o matriz total). Para ello se requiere que la cantidad de renglones de la nueva matriz acotada sea 0 módulo m y, la cantidad de columnas, 0 módulo n. Si bien puede haber más de una combinación renglón $\times$ columna consistente con las propiedades mencionadas, para nuestra regla de recortar la matriz mayor se escogerá una nueva dimensión $\mu' \times \nu'$ que corresponda al máximo valor factible que no exceda $\mu \times \nu$.

$$DIM = \{(\mu', \nu') = (max(a), max(b)) | 0 = amod(m), 0 = bmod(n), a \in [0, \mu] \cap \mathbb{N}, b \in [0, \nu] \cap \mathbb{N}\} \quad (7)$$

Es trivial notar que se requiere que $m \leq \mu$ y $n \leq \nu$. El acotamiento arriba expresado se realiza de la manera más simétrica posible. Esto es, si $\mu' < \mu$, se recortarán $\epsilon = \lfloor \frac{1}{2}(\mu - \mu') \rfloor$ renglones por arriba y $\delta = (\mu - \mu') - \epsilon$ renglones por abajo . Así, se tendrá $\epsilon - \delta \in \{0, 1\}$ (0 si $\frac{1}{2}(\mu - \mu')$ es par, 1 e.o.c), lo cual quiere decir que, en el peor caso, se recortará un pixel más por un lado que por otro. Análogamente, si $\nu' < \nu$, se recortarán $\rho = \lfloor \frac{1}{2}(\nu - \nu') \rfloor$ columnas por la izquierda y $\sigma = (\nu - \nu') - \rho$ por la derecha (siendo también la diferencia de, a lo mucho, uno). El siguiente paso consiste en convertir la matriz de la escala $[0, 1]$ a la escala $\{0, \ldots, 255\}$. Luego, se procede a fraccionar la matriz en un conjunto de m n submatrices mediante la función $matsplitter(,)$ de R, la cual recibe como entradas la matriz a fraccionar, la cantidad de renglones por submatriz, $k = \mu'/m$ y la cantidad de columnas, $h = \nu'/n$. $matsplitter(.)$ entregará una lista de $m \times n$ elementos. Los elementos 1 a n de la lista consistirán en las primeras n submatrices superiores de la matriz, los elementos $n + 1$ a $2n$ consistirán en las segundas n submatrices superiores. Así sucesivamente, hasta llegar a las n submatrices inferiores, ennumeradas $n\ m - n + 1$ a $m\ n$. En el supuesto de que cada submatriz representara un único valor numérico (o arreglo 1×1) dentro de una matriz $m \times n$; entendemos que este tipo de ordenamiento es de clase *rowwise* (o por renglón),

ya que se va llenando renglón por renglón, empezando por los renglones de arriba y continuando hacia abajo. Cada renglón se llena de izquierda a derecha. El otro tipo común de ordenamiento es *columnwise*, o por columna. Conociendo esto, podemos calcular la luminosidad promedio de cada elemento del output de $matsplitter(.)$. Dicho conjunto de luminosidades puede sintetizarse en un vector de dimensión $m\ n$.

5.2. Arte con el agente viajero

Tras haber seguido los pasos de la sub-sección **??** lo siguiente consiste en convertir la escala del conjunto $\{0, \ldots, 255\}$ a la escala $\{0, \ldots, \gamma\}$, empleando la ecuación, ec. (3) desglosada en la sub-sección 3.1 de la presente tesina. Así pues, obtenemos un vector de dimensión $m\ n$, llámese g. Para el primer ejercicio, asígnese $\gamma = 7$. Bajo esta γ, las escalas primera a treintaiseisava de luminosidad coinciden con la escala 7 en oscuridad (o siete "ciudades"). Las siguientes luminosidades (por orden) corresponden a seis ciudades; sucesivamente, hasta llegar a la escala 255, que corresponde a cero ciudades. Es obvio que situar más puntos, o ubicar más aristas que conecten éstos en un rectángulo generará una mayor oscuridad en el mismo, de ahí que se considere a γ como una escala de oscuridad. Lo siguiente consta en ubicar las ciudades en el plano $x - y$, haciendo un loop a través de las $m\ n$ matrices.

1. La asignación del k-ésimo elemento de la lista $\{1, \ldots, m\ n\}$ a una coordenada de matriz (i, j) se rige por el siguiente pseudocódigo, el cual tiene como base el tipo de arreglo *rowwise*.

   $mod2 = kmod(n)$

   $si\ mod2 = 0$

   $entonces\ i = mod2$

   $e.o.c.$

   $i = mod2$

   $j = \frac{(k-i)}{n} + 1$

2. Una vez que tenemos la asignación $k \mapsto (i, j)$, $(i(k), j(k))$, el siguiente paso es plasmar los puntos que asemejarán a la imagen objetivo sobre el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ en el plano $x - y$. Para ello, vale la pena considerar que el extremo superior izquierdo de la imagen corresponde al elemento $(1, 1)$ de la matriz y a la coordenada $(0, 1)$ del plano $x - y$. Partiendo de aquí, deducimos la posición del extremo superior izquierdo de la coordenada genérica (i, j) de la matriz. La coordenada x corresponde al pixel con la columna j, representando un paso de $\frac{(j-1)}{n}$ a la derecha de $x = 0$. La coordenada y, con el renglón i, corresponde su ubicación en el eje y a un paso de $\frac{(i-1)}{m}$ unidades abajo de $y = 1$. Bajo esta formulación,

0. Arreglo por columna, o *columnwise* donde se llenan las columnas de izquierda a derecha, cada columna se llena de arriba a abajo

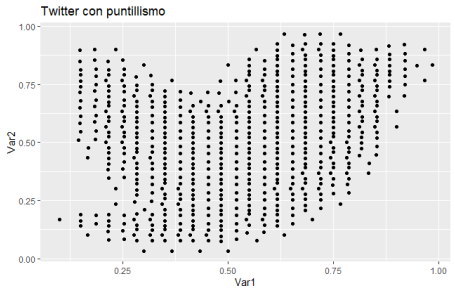
derivamos que cada rectángulo (asociado a una submatriz) tendrá un ancho $\frac{1}{n}$ y un largo de $\frac{1}{m}$. Bajo este planteamiento se puede demostrar que para todo par de coordenadas de matriz de tipo $\{(i,j),(i+1,j)\}$ o $\{(i,j),(i,j+1)\}$ existirá una relación de adyacencia entre sus correspondientes rectángulos. Además, las esquinas de la figura que envuelve a este conjunto de m n rectángulos serán las coordenadas $\{(0,1),(1,1),(0,0),(1,0)\}$. Con esto, garantizamos que los rectángulos mencionados conforman una partición del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$

3. El siguiente paso es usar el valor entero $g_k = g[k]$ para colocar esa cantidad de ciudades en el rectángulo asociado a la coordenda $(i(k), j(k))$. Una alternativa inmediata es colocarlas aleatoriamente, lo cual muy probablemente permitiría reproducir la imagen con buena similaridad. Sin embargo, se propuso hacer una asignación de coordenadas más razonada que obedece a la idea de hacer una buena distribución de las ciudades a lo largo y ancho de su correspondiente rectángulo. Con una "buena" distribución se busca dar a entender que se quiere evitar una excesiva concentración de las ciudades en una zona del rectángulo, dejando a otras zonas muy blancas (o sin ciudades). La idea propuesta, pues, es generar un *grid* de coordenadas $\{x_0, x_1, \ldots, x_{10}\}$ donde x_0 y x_{10} corresponden a los extremos izquierdo y derecho del rectángulo y $x_{l+1} - x_l = q \forall l \in \{0,\ldots,9\}$ $(q = \frac{1}{10n})$; otro grid para las coordendas y: $\{y_0, y_1, \ldots, y_{10}\}$, con $y_{p+1} - y_p = r \forall p \in \{0,\ldots,9\}$ ($r = \frac{1}{10m}$) con y_0 y y_{10} extremos superior e inferior. Con esto, ya habremos construido el *grid* 2-dimensional $G = \{(x_i, y_i) | (i,j) \in \{0,\ldots,10\}^2\}$ que consiste en 121 coordenadas. Sobre este conjunto de coordenadas aplicar un *k-means* con g_k centroides. Una buena asignación de ciudades que cumple la condiciones deseadas (y previamente descritas) es aquella que asocia un centroide a una ciudad. Se procede a guardar esta asignación de ciudades y añadirlas a la selección correspondiente a submatrices anteriores (si es que hay anteriores).

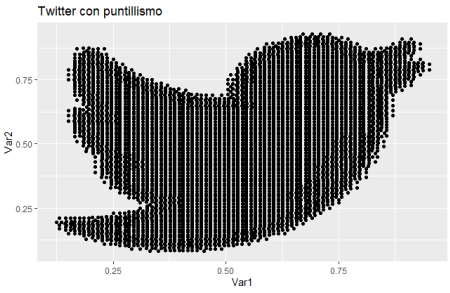
Al iterar este proceso las m n veces, se obtienen las $\sum_{k=1}^{m\ n} g_k = \tau$ ciudades objetivo y podemos resolver el TSP sobre éstas. Los resultados de escribir todas las ciudades como puntos bajo los ejercicios con 15×15 rectángulos y (608 ciudades) y con 50×50 (5807 ciudades) se desglosan a continuación.

Existe un tipo de archivo cuya extensión es ".tsp". Éste se basa en el conjunto de ciudades sobre el que se ha de resolver una instancia del problema lineal. Dicha solución puede procederse mediante distintos métodos o heurísticas y puede realizarse mediante distintos *softwares*, algunos de los cuales son R, Python, Java y Concorde. En aras de practicidad, y en vista de que hasta el momento la construcción de los rectángulos y las ciudades se ha llevado a cabo con R, se usará este lenguaje para manipular tanto objetos como archivos de tipo TSP. Para este efecto se usará la librería homónima cuya función, $ETSP(.)$ debe su nombre a *Euclidean TSP* y convierte el *data*

0. esta es una expresión equivalente a la ecuación ec.(4) , pero en la versión que mapea $(i,j) \to k(i,j)$



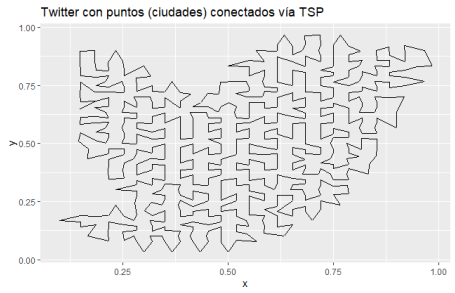
(1) 15×15 rectángulos o 608 ciudades



(2) 50×50 rectángulos o 5807 ciudades

Figura 5: Gráfica de los puntos sobre el cuadrante $x - y$

frame de 2 columnas (una por coordenada) y τ renglones (uno por ciudades) en un problema del agente viajero. El *Euclidean* obedece a que, en otros potenciales ejercicios del agente viajero, las coordenadas podrían ser de otra métrica sobre un espacio normado o incluso, coordenadas terrestres. La función encargada de resolver un etsp es $solveTSP(.)$. Si bien se le puede ingresar el método o algoritmo a emplear como entrada de la función, el que se usa por *default* es el algoritmo de inserción arbitraria con refinamiento de tipo *two opt*. El tipo de datos del *output* es doble: uno es de la clase *tour* y otro es entero. La versión como entero consiste en el orden de las ciudades que se anidan para construir el *tour*. Con ello se puede graficar la solución con ayuda de $ggplot(.)$. Los resultados con 15×15 y 50×50 son los siguientes.



(1) 15×15 rectángulos o 608 ciudades; solución vía TSP

(2) 50×50 rectángulos o 5807 ciudades; solución vía TSP

Figura 6: Gráfica de las líneas uniendo a los puntos de manera eficiente sobre el cuadrante $x - y$

5.3. Fotomosaicos

Posteriormente a reproducir los pasos descritos en la subsección 5.1, se procede a convertir la escala del conjunto $\{0, \ldots, 255\}$ a $[0, 1]$ dividiendo entre 255 (ver primer párrafo de la subsección referida). Llámese h al vector resultante de extraer estas escalas promedio de las submatrices ordenadas con base en el esquema *rowwise*. Supóngase que las dimensiones de las imágenes que compondrán el fotomosaico son cuadradas, de valor $pi \times pi$. Entonces, generaremos tres arreglos importantes: uno de parámetros de costos, dos de escalas de grises. El primero será uno numérico 3-dimensional de tipo $cf \times m \times n$, llámese $Arr3$, con $Arr3[f, i, j] = c_{fij}$, donde el lado derecho

es el mismo ponderador de costos de la expresión (5a) . Uno de los arreglos con *greyscales* será de dimensión $m \times n$, tendrá por nombre mp, por "matriz perfecta" el cual es un eufemismo por tratarse de la mejor representación factible de una imagen con las dimensiones que se le entregan; el otro, será un arreglo de $(m\ pi) \times (n\ pi)$ y será MF, por "matriz final". Además, se contará con una dotación de $\sum_{f=1}^{cf} u_f$ imágenes de solo cf tipos, cada uno denotado mediante Mg_f por las iniciales de "matriz de *grayscales*" de la imagen tipo f. A continuación se describe el bucle a través de $m\ n$ iteraciones que es la base para llenar los arreglos mencionados.

1. Tomamos el número de iteración, k, y le asignamos su correspondiente coordenada matricial, $(i(k), j(k))$ deducida por el esquema *rowwise* (previamente descrito, ver pseudo-algoritmo del primer paso del *loop* en la sección 5.2)

2. Obtener la escala $[0, 1]$ de luminosidad del elemento (i, j), h_k; es decir, el valor promedio de la correspondiente submatriz.

3. Obtener la diferencia cuadrática de las luminosidades; es decir, la que hay entre h_k y cada elemento del vector de luminosidades promedio de las $|F|$ figuras disponibles, llámese $lumP$. Esto es hacer $c_{ij} = [(h_k - lumP_f)^2]_{f \in F} \in [0, 1]^{cf}$. Asignar el valor de este vector a los elementos $Arr3[i, j,]$ del arreglo $Arr3$.

4. Asignar el valor h_k al elemento $mp[i, j]$ de la matriz perfecta.

Posteriormente, hay que construir un vector que cuantifique las dotaciones disponibles de las cf figuras. Para ello, nos valemos de dos parámetros: uno, hd, de 'holgura', que nos dirá qué tantas más de las fichas estrictamente necesarias tendremos. Si $hd = 0{,}1$, tendremos aproximadamente 10 % más de las fichas exactamente suficientes.

Si deséaramos que las disponibilidades de cada ficha fueran uniformes, tendríamos $\lceil \frac{m\ n(1-hd)}{cf} \rceil$ imágenes de cada tipo. Sin embargo, para darle mayor variabilidad a estas disponibilidades introducimos vd, un parámetro de variabilidad que nos permitirá tener una dotación de la ficha f extraída aleatoriamente de entre todos los enteros en $u_f \in \{\lceil \frac{m\ n(1-hd)}{cf}(1 - vd) \rceil, \ldots, \lceil \frac{m\ n(1+hd)}{cf}(1 + vd) \rceil\}$. A mayor $vd \in [0, 1]$, mayor será la varianza del vector u de disponibilidades.

Con los pasos 1 a 4 del *loop* y la construcción de u que le es posteriormente descrita se habrán generado los parámetros necesarios para definir el modelo. El siguiente paso radica en reestructurar la información plasmada en el arreglo $Arr3$ en un *data frame*, $df3$ que consiste en los campos: t, i, j, f, ce y cuya forma genérica se muestra a continuación.

t	f	i	j	costo (ce)
1	1	1	1	A[1,1,1]
2	1	1	2	A[1,1,2]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	1	1	n	A[1,1,n]
n+1	1	2	1	A[1,2,1]
n+2	1	2	2	A[1,2,2]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2n	1	2	n	A[1,2,n]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(m-1)n+1	1	m	1	A[1,m,1]
(m-1)n+2	1	m	2	A[1,m,2]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
mn	1	m	n	A[1,m,n]
mn+1	2	1	1	A[2,1,1]
mn+2	2	1	2	A[2,1,2]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
mn+n	2	1	n	A[2,1,n]
mn+n+1	2	2	1	A[2,2,1]
mn+n+2	2	2	2	A[2,2,2]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
mn+2n	2	2	n	A[2,2,n]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
mn+(m-1)n+1	2	m	1	A[2,m,1]
mn+(m-1)n+2	2	m	2	A[2,m,2]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2mn	2	m	n	A[2,m,n]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(cf-1)mn+1	cf	1	1	A[cf,1,1]
(cf-1)mn+2	cf	1	2	A[cf,1,2]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(cf-1)mn+n	cf	1	n	A[cf,1,n]
(cf-1)mn+n+1	cf	2	1	A[cf,2,1]
(cf-1)mn+n+2	cf	2	2	A[cf,2,2]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(cf-1)mn+2n	cf	2	n	A[cf,2,n]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(cf-1)mn+(m-1)n+1	cf	m	1	A[cf,m,1]
(cf-1)mn+(m-1)n+2	cf	m	2	A[cf,m,2]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m n cf	cf	m	n	A[cf,m,n]

Como se muestra, el ordenamiento de $df3$ sigue la jerarquía f, i, j. Con ayuda de esta tabla, podemos definir el modelo en un objeto de clase "lp", auxiliándonos en el módulo *lpSolve* del lenguaje *R*. Dicho objeto se basa en (a) un vector de pesos, ce, (b) una instrucción de optimización, io: "minimiza" o "maximiza", (c) una matriz RM de restricciones con dimensiones $re \times (m\ n\ f)$ que representa a las re restricciones existentes sobre las variables (d) un vector de lados derechos, $rh \in \mathbb{R}^{re}$ con el valor contra el cual será contrastada la combinación lineal de x, $RM[row,] \cdot x$, (e)

un vector de carácteres, $sign$, con el cual la restricción t-ésima será $RM[row,] \cdot x$ "$sign[t]''$ rh_t, con $sign \in \{\text{“}<'', \text{“}\leq'', \text{“}>'', \text{“}\geq'', \text{“}='' \}$.

La estructura descrita redefine el problema, para este caso, pasando de uno sobre variables de decisión indexadas sobre tres componentes x_{fij} a su análogo 1-dimensional, x_t. El ejercicio requiere de una reasignación $(f,i,j) \mapsto t(f,i,j)$ definida por $t = (f-1)\ (m\ n) + m(i-1) + j$ que representa el orden de los renglones que sigue $df3$. Ahora, defínanse en R los parámetros requeridos en el párrafo anterior

(a) $ce = df3[\text{“}costo'']$

(b) $io = \text{“}min''$

(c) Restricciones $RM \in \mathbb{R}^{re \times m\ n\ cf}$ con $re = cf + m\ n$, los primeros cf renglones representando a las restricciones de disponibilidad de las fichas que hay, y las restricciones restantes representando el correcto llenado de cada celda genérica (i,j). La matriz consta únicamente de valores 0 y 1. Los 1's se asignan facilmente conociendo, con la ayuda de la asginación $t(.)$ qué posiciones corresponden a cada f para el primer conjunto de restricciones; similarmente, para el segundo conjunto de restricciones basta reconocer qué posiciones le corresponden a cada celda (i,j).

(d) $rh_f = u_f\ \forall f \in \{1,\ldots,cf\}$

$rh_t = 1\ \forall f \in \{cf+1,\ldots,cf+m\ n\}$

(e) $sign_f = \text{“}\leq''\ \ \forall f \in \{1,\ldots,cf\}$

$sign_t = \text{“}=''\ \ \forall f \in \{cf+1,\ldots,cf+m\ n\}$

Si bien el problema no fue restringido a enterez, el resultado es entero y consta únicamente de 0's y 1's. Si extraemos únicamente los valores $T = \{t | x_t = 1\}$ en una tabla $dfSel$ con campos t, f, i, j y obtenemos la imagen de función inversa de $t(.)$ sobre T, se valida que las $m\ n$ combinaciones (i,j) son cubiertas exactamente una única vez cada una y que cada figura en F se ocupa en una cantidad de ocasiones que no excede su correspondiente límite definido en u. Habiendo supuesto que la dimensión de las cf figuras es de $pi \times pi$ y sea $MG_f \in \mathbb{R}^{pi \times pi}$ la matriz de *greyscales* de la figura f, entonces procedemos a llenar el fotomosaico mediante el siguiente *loop*: a través de $m\ n$ iteraciones hacer lo siguiente.

1. Extraemos el κ-ésimo vector-renglón.$S_\kappa = dfSel[\kappa,]$. Así, obtenemos $S_\kappa[\text{“}t''] = t$, $S_\kappa[\text{“}i''] = i(t)$, $S_\kappa[\text{“}j''] = j(t)$, $S_\kappa[\text{“}f''] = f(t)$, con el renglón, la columna y la figura inferidas de la función inversa de $t(,)$

2. Definimos el extremo superior izquierdo de la imagen $f(t)$ sobre la matriz final, $MF[rI, cI]$. Sígase que $rI(t) = (i(t) - 1)pi + 1$ y $cI(t) = (j(t) - 1)pi + 1$

3. Luego, se asigna el valor de $MF_{f(t)}$ a la submatriz con el extremo superior izquierdo en (rI, cI); esto es, $MF[\{rI, \ldots, rI + pi - 1\}, \{cI, \ldots, cI + pi - 1\}] = MG_f$

Se puede validar que este procedimiento llena por completo y con valores factibles a la matriz MF.

El siguiente paso es ejecutar los pasos descritos hasta este punto de la subsección usando una gama de imágenes cuadradas y buscando emular el logo de Twitter. Para ello, se generó un código de R que lee todos los archivos png de una subcarpeta y extrae sus dimensiones (pixeles). Posteriormente, elige la mínima dimensión (de entre columnas y renglones) del conjunto de imágenes, acota a todas las imágenes de manera que cumplan con esta dimensión a lo largo y ancho y guarda su luminosidad promedio. Además, define un intervalo de luminosidad, $i = 1/cf$, con $cf \in \mathbb{N}$ sobre el cual se seleccionará la imagen. Esto es, si $i = 0.05$ entonces las figuras se clasificarán en $cf = 20$ categorías, a saber, $\{[0, 0.05), [0.05, 0.10), [0.10, 0.15), ..., [0.90, 0.95), [0.95, 1]\}$. Para el primer ejercicio extraemos las imágenes de un conjunto de 60 fotos de una cuenta de Instagram. Al computar su luminosidad se encuentra que las 20 categorías no son todas cubiertas, estando las imágenes acotadas en luminosidades entre 0.30 y 0.75. Para hacer que la cantidad de categorías cubiertas sea de 20 entonces se oscurecen o iluminan tantas más imágenes como categorías falten por cubrir. El resultado de hacer la selección de 20 imágenes, ordenadas por luminosidad de menor a mayor, se muestra a continuación.

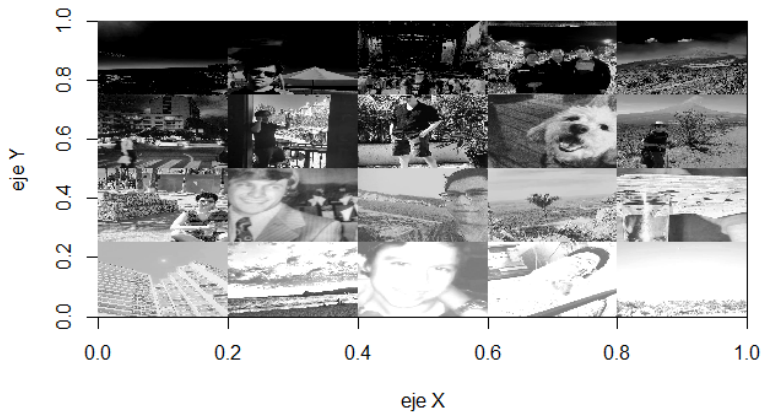
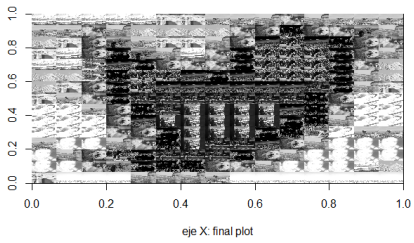
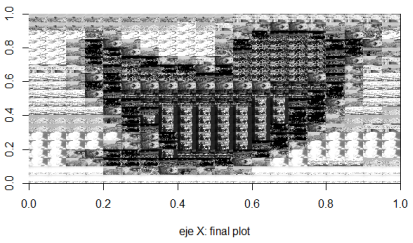


Figura 7: Catálogo de imágenes seleccionadas para el fotomosaico

Habiendo seleccionado las imagenes, se procede a reproducir el ejercicio de los fotomosaicos. Al hacerlo con $dp = 0.3$ y $vp = 0.3$, podemos desplegar la imagen resultante con dimensiones 15×15 y 20×20



(1) Fotomosaico: 20 tipos de figuras, 15×15 mosaicos



(2) Fotomosaico: 20 tipos de figuras, 20×20 mosaicos

Figura 8: Soluciones gráficas al problema de los fotomosaicos con $dp = 0.3$ y $vp = 0.3$; dimensiones 15×15 y 20×20

Para instancias con los parámetros indicados, el problema de 20×20 fue el más complejo de computar para el desplegado de la imagen mediante $image(.)$. En dimensiones más grandes, la función arrojaba errores por sobrepasarse el máximo peso de input (matriz) computable. Sin embargo, una función similar, que acepta parámetros de la misma clase, $display(.)$ de la librería $EBImage$, logró desplegar el resultado del ejercicio de 25×25, tal como se muestra a continuación.

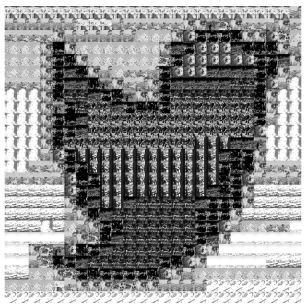
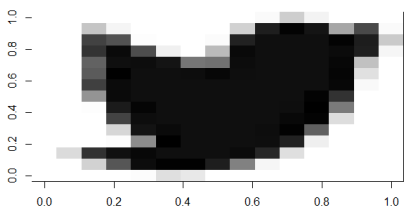
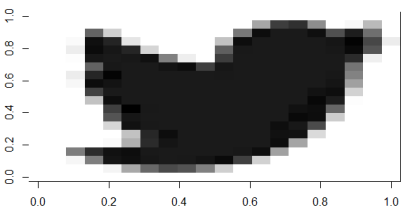


Figura 9: Soluciones gráficas al problema de los fotomosaicos con $dp = 0.3$ y $vp = 0.3$; dimensiones 25×25

Claramente el resultado ha mostrado ser, visualmente, eficiente. La matriz mp sirve como referencia para ver cómo se vería la imagen si se deseara desplegar la mejor representación posible de la imagen original contando exactamente con dimensiones de pixel $m \times n$. El resultado se muestra a continuación.



(1) Matriz perfecta, dimensiones 15×15



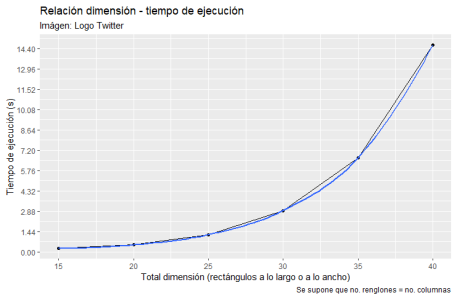
(2) Matriz perfecta, dimensiones 20×20

Figura 10: Matrices perfectas basadas en luminosidades promedio de submatrices

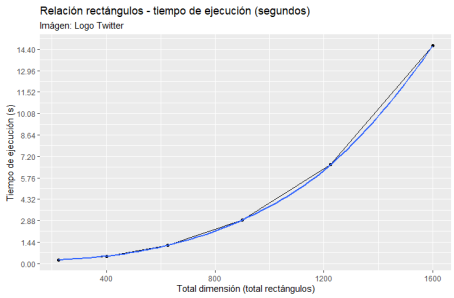
Procedemos a evaluar la complejidad computacional del algoritmo de resolución del programa

lineal. Para ello, registramos el tiempo que lleva resolver una determinada imagen conforme se agregan más dimensiones o rectángulos y, por consecuente, más ciudades.

Las siguientes gráficas y tablas reflejan la relación que tiene la dimensión (suponiendo que hay tantos rectángulos a lo largo como a lo ancho) con el tiempo de cómputo requerido para generar la imagen de Twitter; también, la que hay entre el total de rectángulos (la dimensión al cuadrado) y el tiempo.



(1) Dimensión vs tiempo

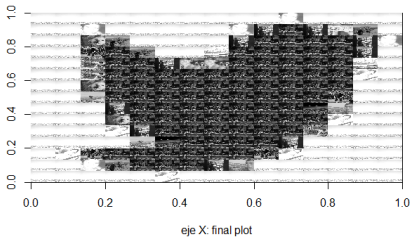


(2) Rectángulos vs tiempo

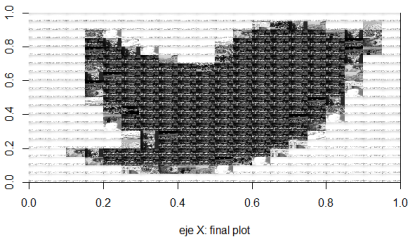
Renglones (= Columnas)	Total mosaicos	Tiempo de ejecución (s)	Variables	restricciones
15	225	0.25	4500	245
20	400	0.50	8000	420
25	625	1.22	12500	645
30	900	2.93	18000	920
35	1225	6.65	24500	1245
40	1600	14.65	32000	1620

Una cuestión interesante de abordar es el atributo de escasez de fichas en el problema, el cual se concentra en el vector de parámetros, u. Inspeccionando visualmente la imagen original, o bien, incluso a la versión de mp de la misma, se puede observar que todos los contornos de la imagen (alrededor del pajaro) tienen la máxima luminosidad disponible. Esto incluye, naturalmente a los extremos inferior derecho y superior derecho. Sin embargo, al ver el fotomosaico en figura 8, se observa claramente que las celdas inferiores derechas tienen una luminosidad muy elevada (cercana a 1), en tanto que la luminosidad de las superiores derechas es alta, pero claramente menor. Esto ocurre porque, si bien pudiera ser deseable que todos los contornos tuvieran el máximo de luminosidad, existe una disponibilidad limitada de la ficha más blanca, así como de todas en general. Por lo tanto, se recurren a otras fichas, lo menos oscuras posibles que minimicen la suma de diferencias cuadráticas de luminosidades para cubrir el contorno del ave sin exceder los recursos existentes. Haciendo uso de los parámetros introducidos y explicados en el presente escrito, podríamos hacer el ejericio sin limitar estos recursos. Basta indicar que $hd = m\ n$, queriendo decir que, si tuviéramos dimensiones $m \times n = 15 \times 15$, entonces las fichas disponibles son $15^2 = 225$ y, si

asignamos $hd = 225$, entonces dispondremos de 22500 % más de las fichas estrictamente necesarias. Además, si $vd = 0$ las disponibilidades se distribuirán homogéneamente, con lo cual garantizamos que cada tipo de ficha tiene el potencial de llenar todo el fotomosaico con fichas de un solo tipo. Así pues, a continuación se muestra el resultado de hacer $hd = m\ n$ y $vd = 0$



(1) Fotomosaico: 20 tipos de figuras, 15×15 mosaicos

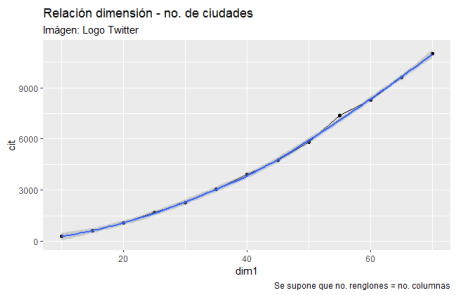


(2) Fotomosaico: 20 tipos de figuras, 20×20 mosaicos

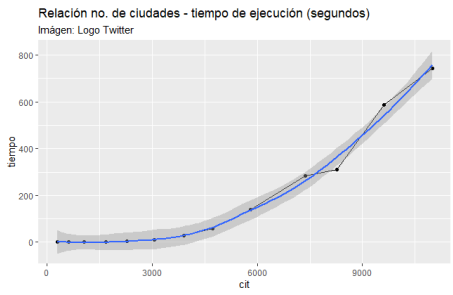
Figura 12: Soluciones gráficas al problema de los fotomosaicos con $dp = m\ n$ y $vp = 0$; dimensiones 15×15 y 20×20

Claramente, estas imágenes tienen contornos más blancos y los fotomosaicos asemejan más a los resultados de usar los valores de matriz perfecta para *greyscales*, 10. Sin embargo, la observación de que no todos los 20 tipos de fichas disponibles se están empleando, lo cual es indicador de que la imagen carece de manera importante de variedad en escalas de intensidad lumínica, nos podría hacer perder interés en esta instancia específica del problema.

Un siguiente paso interesante consiste en evaluar la potencia computacional del solver del tsp en R que se ha ocupado (módulo *tsp*, función $solve_TSP(,)$) al registrar el tiempo que lleva resolver una determinada imagen conforme se agregan más dimensiones o rectángulos y, por consecuente, más ciudades. Las siguientes gráficas reflejan la relación que tiene la dimensión (suponiendo que hay tantos rectángulos a lo largo como a lo ancho) con el número de ciudades en la imagen de Twitter; asimismo describen la relación del número de ciudades con el tiempo de solución del tsp; claramente esta relación es de una complejidad superior a la lineal.



(1) Dimensión: no. ciudades



(2) no. ciudades vs tiempo

La siguiente es la tabla asociada a la gráfica anterior. Vale la pena mencionar que la columna de restricciones supone la técnica de reducción de restricciones a los subtours de Miller-Tucker-Zemlin que asumen que son n^2 y no 2^n de estas restricciones

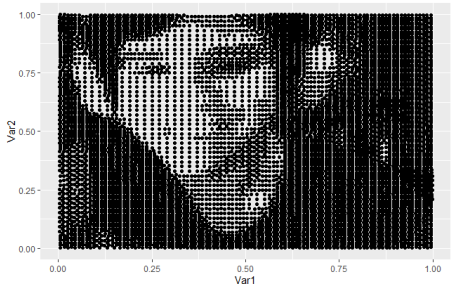
Renglones (= Columnas)	Total ciudades	Tiempo de ejecución (s)	Variables	restricciones
10	286	0.00	81796	82368
15	608	0.03	369664	370880
20	1051	0.25	1104601	1106703
25	1670	1.35	2788900	2792240
30	2284	4.65	5216656	5221224
35	3058	10.26	9351364	9357480
40	3894	28.77	15163236	15171024
45	4723	57.33	22306729	22316175
50	5807	139.93	33721249	33732863
55	7360	283.53	54169600	54184320
60	8271	310.83	68409441	68425983
65	9616	586.88	92467456	92486688
70	10987	744.08	120714169	120736143

Una cuestión que vale la pena abordar es la relativa a si el algoritmo programado es capaz de reproducir imágenes de un grado más elevado de complejidad, o se limita a ser aplicable solo a imágenes sin relieve, ni dimensión, ni variedad de colores. Para este efecto buscaré reproducir una foto mía en mi escritorio de casa, la foto tendrá por nombre "*home office*" y es la siguiente

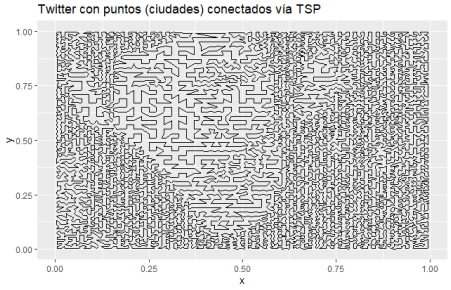
Figura 14: Catálogo de imágenes seleccionadas para el fotomosaico

Lo que sigue es reproducir la imagen. Para esto, se hizo uso de un truco: atenuar los colores más claros. Es decir, a partir de un parámetro determinado de escala de luminosidad en adelante se aclarará la escala al máximo valor posible, es decir, 1. Para esta imagen el parámetro elegido

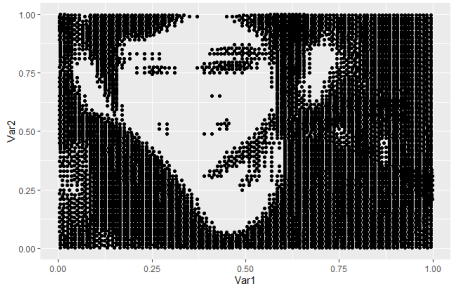
es de 0.70. Esto permitió que la imagen resultara más distinguible, sobre todo en lo que concierne a las facciones faciales: cara, ojos, boca y al implemento electrónico que se tiene sobre las orejas (audífonos). La razón de este recurso puede aclararse si se muestra el resultado de ejecutar el programa sin hacer esta modificación de la luminosidad. Ambos resultados se muestran en los dos pares de imágenes siguientes.



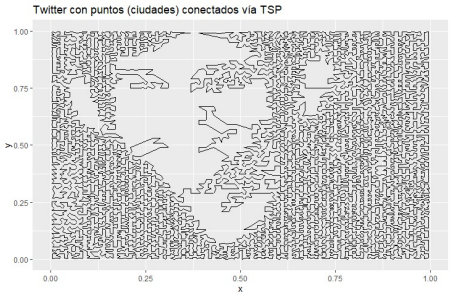
(1) Ciudades o puntillismo con imagen *home office*: 9768 ciudades



(2) TSP con imagen textithome office: 9768 ciudades



(1) Ciudades o puntillismo con imagen *home office* atenuada: 8726 ciudades



(2) TSP con imagen *home office* atenuada: 8726 ciudades

6. Referencias

[1]