PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DEMATEMATICAS
**Análisis Numérico**
**eherrera@javeriana.edu.co**

# Preliminares de Cálculo

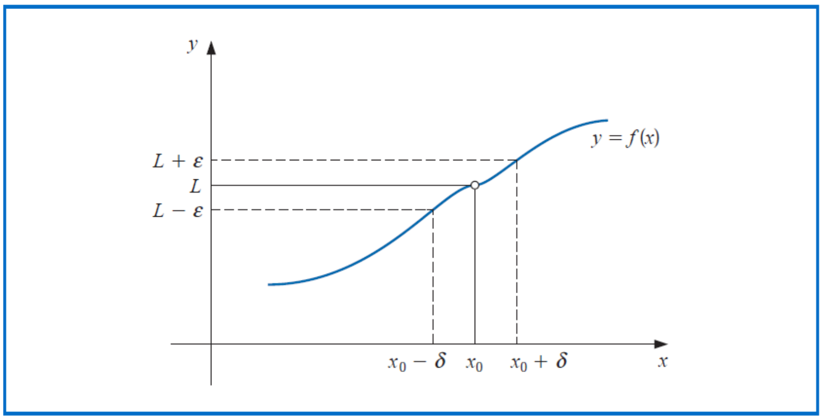
## Definición 1.1

### Límite de una Función

Sea $f$ una función de valor real$\mathbb{R}$ definida en un conjunto $D \subset \mathbb{R}$ que tiene limite $L$ en $x_0$ lo cual se denota como

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - x_0| < \delta$




## Ejemplo

Sea $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ una función definida en $\mathbb{R} - \{2\}$ luego $\lim_{x \to 2} f(x) = 12$. Es decir, acercándose a $x \to 2$ este puede ser por la derecha o izquierda

a. Cuando $x \to 2^+$ se tiene:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2.0001 | 2.001 | 2.01 | 2.1 |
| 12.0006 | 12.0060 | 12.0601 | 12.61 |

b. Cuando $x \to 2^-$ se tiene:

| x | 1.9 | 1.99 | 1.999 | 1.9999 |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | 11.41 | 11.9401 | 11.9940 | 11.9994 |

| $\|x - x_0\|$ | $\|f(x) - L\|$ |
|---|---|
| **\|1.9-2\|=\|2.1-2\|=0.1** | **\|11.41-12\|=0.59** |
| **\|1.99-2\|=\|2.01-2\|=0.01** | **\|11.99401-12\|=0.00599** |
| **\|1.999-2\|=\|2.001-2\|=0.001** | **\|11.9940-12\|=0.006** |
| **\|1.9999-2\|=\|2.0001-2\|=0.0001** | **\|11.9994-12\|=0.0006** |

### Definición 1.2

**Continuidad en un punto**

Sea $f$ una función de valor real$\mathbb{R}$, definida en un conjunto $D \subset \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in D$. Entonces, $f$ es continua en $x_0$ si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Además, si $f(x)$ es continua para todo $x_0 \in D$ entonces, es continua en todo su dominio

### Definición 1.3

**Convergencia de una sucesión**

Sea $\{x_n\}_1^\infty$ una sucesión infinita en $\mathbb{R}$ o en$\mathbb{C}$; $\{x_n\}_1^\infty$ tiene limite $x$ si $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon) \epsilon \mathbb{Z}^+$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ siempre $n > N(\varepsilon)$. Lo anterior se denota como,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x$$

### Teorema 1.1

Sea $f$ una función de valor real $\mathbb{R}$, definida en un conjunto $D \subset \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in D$. Entonces, se tienen las siguientes equivalencias:

1. $f$ es continua en $x_0$
2. Si $\{x_n\}_1^\infty$ una sucesión infinita en $D \subset \mathbb{R}$ que converge a $x_0$ entonces, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$

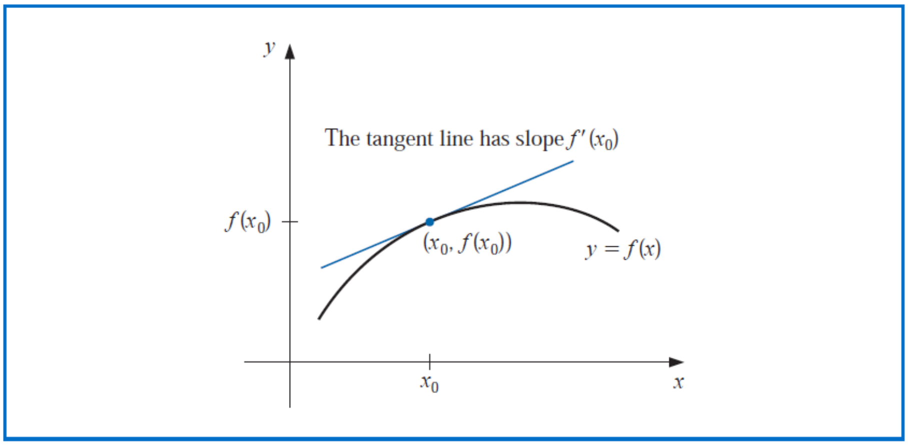
Por lo tanto, para los métodos numéricos aplicados a funciones se tendrán funciones continuas

### Definición 1.3

**Derivada de una Función**

Sea $f$ una función definida en un inetrvalo abierto $I$ que contiene a $x_0$. La función es derivable en $x_0$ si el límite existe y está dado por:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$




### Teorema 1.2

Si $f$ es derivable en $x_0$ entonces, es derivable en $x_0$

$C^n(X)$: es el conjunto de todas las funciones que tienen $n$ derivadas continua en $X$

$C^\infty(X)$: es el conjunto de todas las funciones que tienen  derivadas de todos los órdenes en continua en $X$

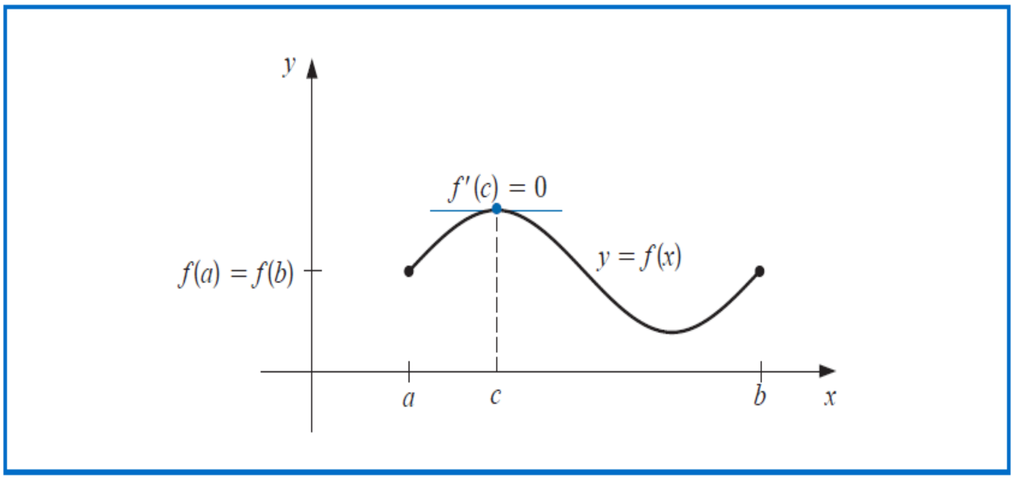
### Teorema 1.3

**Teorema de Rolle**

Sea $f$ una función que cumple

a. $f$ es continua en $[a, b]$
b. $f$ es derivable en $(a, b)$

Si $f(a) = f(b)$ entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$



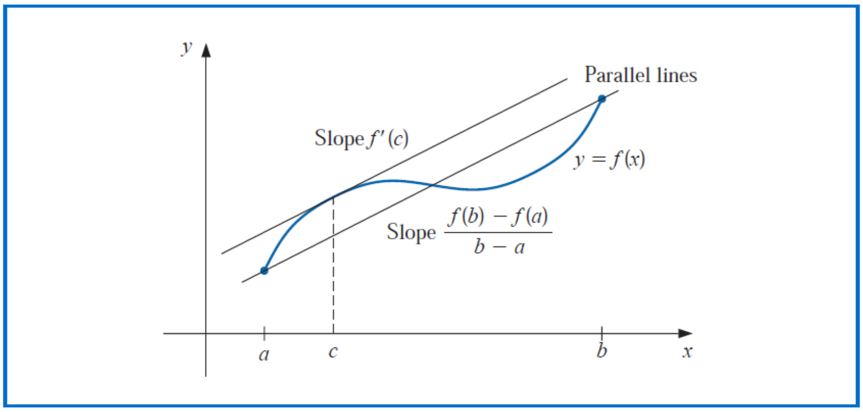
**Teorema 1.4**

**Teorema del Valor Medio**

Sea $f$ una función que cumple

a. $f$ es continua en $[a, b]$
b. $f$ es derivable en $(a, b)$

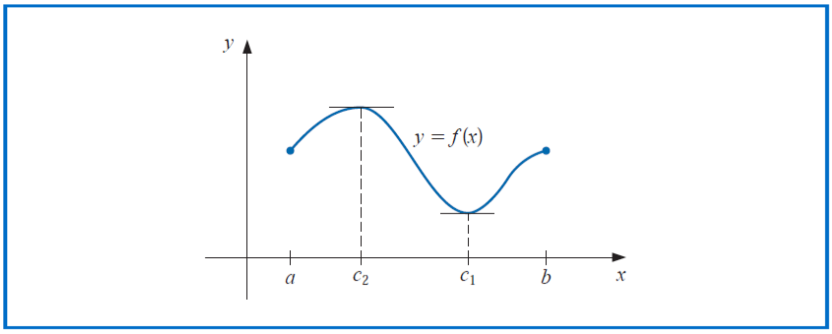
Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$




**Teorema 1.4**

**Teorema de Valores Extremos**

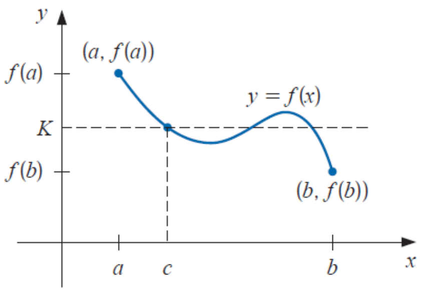
Sea $f$ es continua en $[a, b]$ entonces, existen $c_1, c_2 \in [a, b]$ tales que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ $\forall x \in [a, b]$. Además, si $f$ es derivable en $(a, b)$, entonces $c_1, c_2$ aparecen en los extremos de $[a, b]$ o donde $f'$ se anula




**Teorema 1.5**

**Valor Intermedio**

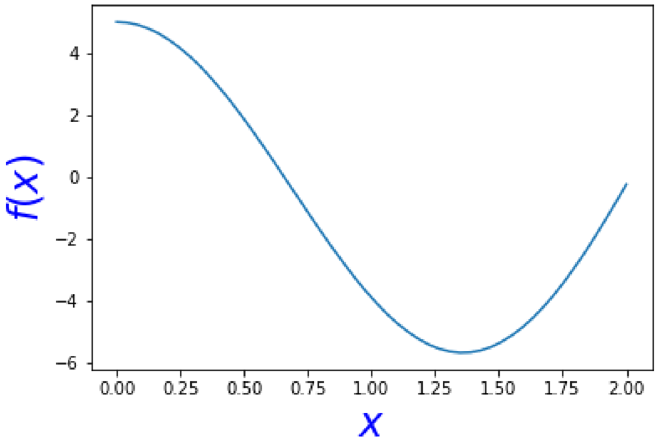
Sea $f$ es continua en $[a, b]$ y sea $k$ cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$ entonces, $\exists\ c \in (a, b)$ tal que $f(c) = K$




**Ejemplo**

Sea y=5cos (2x)-2xsin (2x) en el intervalo [1,2] como se ve en la Figura

¿Es $f$ una función continua y derivable en todo su dominio?




Teniendo en cuenta que $f$ cumple ser continúa en [1,2] y derivable en (1,2) vamos a obtener la derivada de la función $f$

$$f'(x) = -12\sin(2x) - 4xcos(2x)$$

Luego si $f'(x) = 0$ se tiene que $x$ =1.358229874 y la imagen de este valor

$f$(1.358229874 )= −5.675301338. Además, $f$(1)=5 cos (2) −2 sin (2)≈−3.899329036 y $f$(1)=5 cos(4)−4 sin (4)≈−0.241008123. En éste caso el máximo está en $x$=1 y el mínmo en $x$ ≈1.358229874

```python

Autor Eddy Herrera Daza
"""
import scipy as sp
import matplotlib.pyplot as plt

x = sp.linspace(1, 2)
y=5*sp.cos(2*x)-2*x*sp.sin(2*x)
plt.figure()
plt.plot(x,y)
plt.ylabel(r"$f(x)$", fontsize = 24, color = 'blue')
plt.xlabel(r"$x$", fontsize = 24, color = 'blue')
plt.savefig('Figura1.png')
plt.show()
#La derivada de laa función
import sys
import mpmath
from sympy import *
from sympy import Derivative, diff, simplify

fx = 5*sp.cos(2*x)-2*x*sp.sin(2*x)
dx = Derivative(fx, x).doit()
dx
simplify(dx)
from sympy.solvers import solve
solve(dx, x)
```

## Teorema de Taylor

Como buscamos desarrollar numéricamente, las Series de Taylor no son de ayuda, ya que no podemos realizar “sumas” infinitas, para esto tenemos que aproximarlas, es decir tenemos que troncar las Series de Taylor

Sea $f \in C^n[a,b]$, $f^{(n+1)}$ existe en [a, b] y sea $x_0 \in [a,b]$ entonces, para cada $x \in [a,b]$ existe $\xi(x)$ entre $x_0$ y $x$ tal que:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Para $x_0$=0

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$P_n(x)$ es el polinomio de Taylor y $R_n(x)$ es el termino de residuo o error de truncamiento. Es decir, es el error que se comete al usar una suma truncada (finita)

Como el valor $\xi$ no se conoce y así $f^{(n+1)}(\xi)$ tampoco, pero se puede acotar, es decir encontrar alguna función tal que

$$\left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \leq M_n$$

Y así:
$$\left| R_n(x) \right| = \frac{M_n x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Con lo cual podemos fijar un máximo error y así determinar el $n$ donde se debe troncar la serie para obtener una buena aproximación.

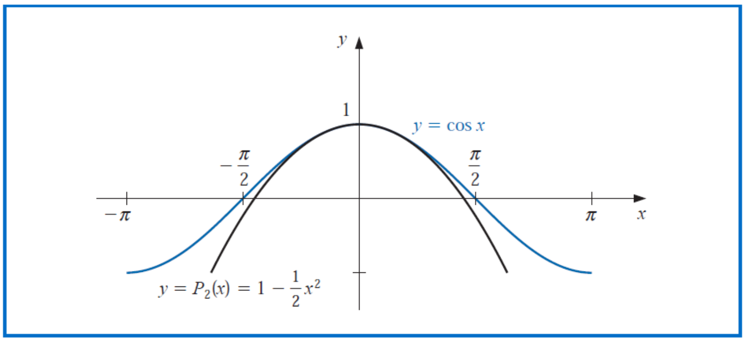
### Ejemplo

Aproximar el segundo y tercer polinomio de Taylor para $f(x) = cosx$ alrededor del valor $x_0 = 0$ y

Evaluar aproximadamente $\cos(0.01)$

Hallar la aproximación de $e^{0.5}$ Con cinco cifras significativas

$$\begin{aligned} \cos x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi(x))}{3!}x^3 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \sin \xi(x), \end{aligned}$$




Ahora, para $x = 0.01$se tiene:

$$\cos 0.01 = 1 - \frac{1}{2}(0.01)^2 + \frac{1}{6}(0.01)^3 \sin \xi(0.01) = 0.99995 + \frac{10^{-6}}{6} \sin \xi(0.01)$$

Donde el error de truncamiento es:

$$\frac{10^{-6}}{6} \sin \xi(0.01) = 0.1\overline{6} \times 10^{-6} \sin \xi(0.01),$$

$$|\cos(0.01) - 0.99995| = 0.1\overline{6} \times 10^{-6} |\sin \xi(0.01)| \leq 0.1\overline{6} \times 10^{-6}$$

Luego la aproximación coincide con los primeros cinco dígitos

$$0.9999483 < 0.99995 - 1.\overline{6} \times 10^{-6} \leq \cos 0.01$$
$$\leq 0.99995 + 1.\overline{6} \times 10^{-6} < 0.9999517$$

El límite de error es mucho mayor que el error real. Esto se debe en parte a la limitación deficiente que usamos para | Sin ξ (x) |. Se puede demostrar que para todos los valores de x, tenemos:

| Sin x | ≤ | x |. Dado que 0 ≤ ξ <0,01, podríamos haber utilizado el hecho de que | Sin ξ (x) | ≤ 0,01 en el Error fórmula, produciendo la cota 0,16 × 10-8.

**Ejemplo**

Dada la serie de Taylor de $f(x) = e^x$ con centro en cero, hallar la aproximación de $e^{0.5}$ Con cinco cifras significativas.

**Solución:**

Lo primero que hallamos es el criterio de error, el cual asegura que el resultado sea correcto con al menos cinco cifras significativas; donde n=5:

$$\varepsilon_s = (0.5 * 10^{2-5})\% = 0.0005\%$$

Es decir se evaluara la serie de Taylor hasta que el error normalizado se menor que 0,0005%.

Realizando el desarrollo de la serie de Taylor obtenemos:

$$f(x) = e^x = +1x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Donde la primera aproximación es $e^{0.5} \approx 1$

Segunda aproximación es

$$e^{0.5} \approx 1 + 0.5 = 1.5$$

Tercera aproximación es

$$e^{0.5} \approx 1 + 0.5 + \frac{(0.5)^2}{2} = 1.625$$

En la siguiente tabla se colocaran los resultados; buscando que el error normalizado porcentual sea menor que la tolerancia; también colocaremos el error relativo porcentual partiendo del hecho que el valor real de $e^{0.5} \approx 1.648721\ldots$

| Iteración | Aproximación | $\varepsilon_r\,(\%)$ | $\varepsilon_n\,(\%)$ | $\varepsilon_a\,(\%)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 39.3 | | 0.648721… |
| 2 | 1.5 | 9.2 | 33.3 | 0.14872 |
| 3 | 1.626 | 1.44 | 7.69 | 0.023725… |
| 4 | 1.645833333 | 0.175 | 1.27 | 0.00289166… |
| 5 | 1.648437500 | 0.172 | 0.158 | 0.0002875 |
| 6 | 1.648697917 | 0.00145 | 0.0158 | |

# Resumen y Métodos de Solución

Un *modelo matemático* se define, de manera general, como una formulación compuesta de una ecuación o ecuaciones que expresa las características esenciales de un sistema físico o de un proceso en términos matemáticos, en forma funcional. Adicional, el modelo puede considerar restricciones y condiciones iniciales y de frontera

$$[\boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{C})$$

***Y*** Vector de variables dependientes, una característica que generalmente refleja el comportamiento o estado de un sistema.
***X*** Vector de variables independientes, por ejemplo, tiempo y espacio, a través de las cuales se determina el comportamiento del sistema.
***θ*** Vector de los *parámetros* son el reflejo de las propiedades o la composición del sistema; y
***C*** El vector de constantes son influencias externas que actúan sobre el

## Modelo Clásico:

**Segunda Ley de Newton**

La razón de cambio del *momentum* con respecto al tiempo de un cuerpo, es igual a la fuerza resultante que actúa sobre él.

$$F = ma \qquad a = \frac{F}{m}$$

Donde, $F$ es la fuerza neta que actúa sobre el objeto [N] o [kg m/s$^2$]; $m$ es la masa del objeto [kg] y $a$ es su aceleración [m/s$^2$]
Esta fórmula tiene como característica fundamental que, conduce a resultados reproducibles y en consecuencia, llega a emplearse con la finalidad de predecir. Por ejemplo, dada la fuerza aplicada sobre un objeto de masa conocida, el modelo se emplea para calcular la aceleración

**Modelo II**

Supóngase que se quiere determinar la velocidad final de la caída libre de un cuerpo que se encuentra cerca de la superficie de la Tierra. Nuestro cuerpo en caída libre será el de un paracaidista

Como $a = \frac{F}{M}$ y además, $a = \frac{dv}{dt}$

Donde, $v$ es la velocidad [m/s] y $t$ es el tiempo [$s$].

Tenga en cuenta que:

i. Si la fuerza neta es positiva, el cuerpo se acelerará.
ii. Si es negativa, el cuerpo se desacelerará.
iii. Si la fuerza neta es igual a cero, la velocidad del cuerpo permanecerá constante.

Además,

$$F = \sum_{i=1}^{2} F_i = F_1 + F_2$$

Donde,

$c$ es el coeficiente de arrastre o resistencia al aire [kg/s]

$F_1 = mg$ cuando a la fuerza hacia abajo se le asigna un valor positivo.

$F_2 = -cv$ La resistencia al aire es proporcional a la velocidad y tiene dirección contraria a $F_1$

En éste modelo II cuanto mayor sea la velocidad de caída, mayor será la fuerza hacia arriba debida a la resistencia del aire. El parámetro $c$ toma en cuenta las propiedades del objeto que cae, tales como su forma o la aspereza de su superficie, que afectan la resistencia del aire. En este caso, $c$ podría ser función del tipo de traje o de la orientación usada por el paracaidista durante la caída libre.

La fuerza total es la diferencia entre las fuerzas hacia abajo y las fuerzas hacia arriba. Por lo tanto, se obtiene

$$\frac{F}{m} = \frac{F_1 - F_2}{m} = \frac{dv}{dt} = \frac{mg - cv}{m} = g - \frac{cv}{m}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{cv}{m} \to \frac{dv}{dt} + v\frac{c}{m} - g = 0$$

Luego, la solución exacta de la ecuación para la velocidad del paracaidista que cae no puede obtenerse mediante solución analítica. Por ejemplo bajo las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = g - \frac{cv}{m}; con\ v(0) = 0 \end{cases}$$

La solución del problema de valor inicial, da como resultado:

$$v(t) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-(c/m)t}\right)$$

"solución exacta de la ecuación diferencial"

Adicionalmente, cuando $x \to \infty$ el paracaidista alcanza una velocidad limite o terminal

**Esta velocidad es constante porque después de un tiempo la fuerza de gravedad estará en equilibrio con la resistencia del aire. Entonces, la fuerza total es cero y cesa la aceleración.**

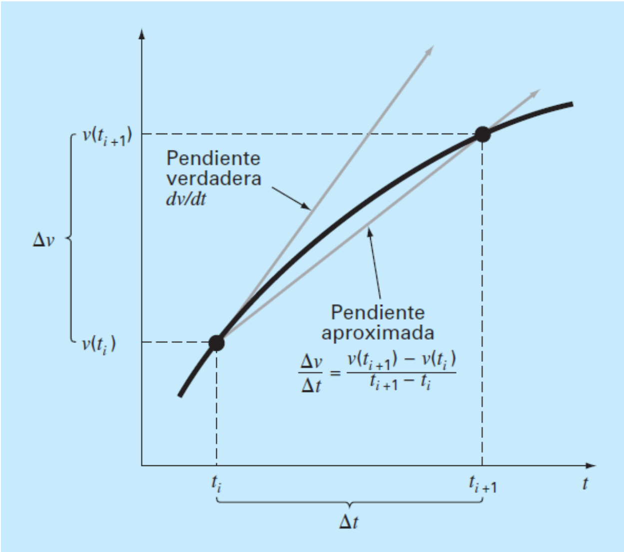
Sin embargo, al problema:

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

"aproximación en *diferencia finita dividida* de la derivada en el tiempo"

Donde los $\Delta$ son los incrementos o diferencias en la velocidad y en el tiempo, respectivamente, calculadas sobre intervalos finitos. Por lo tanto:

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$




Luego,

$$\frac{v(t_{i+1})-v(t_i)}{t_{i+1}-t_i} \cong g - \frac{cv(t_i)}{m}$$

Finalmente,

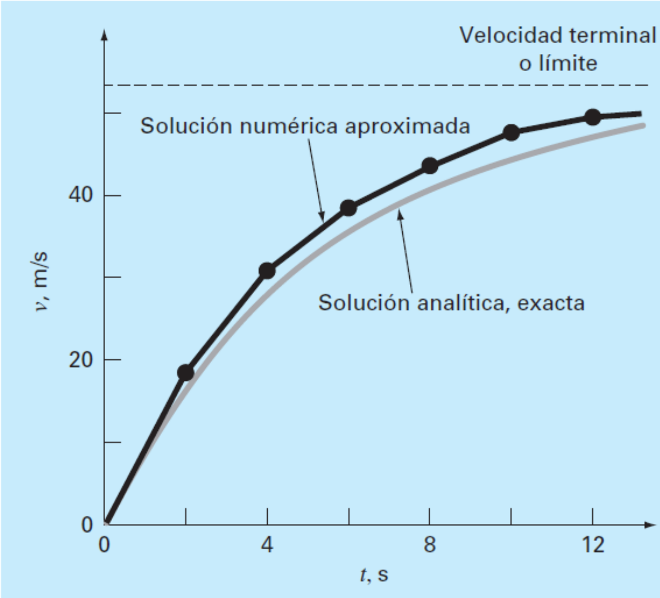
$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left(g - \frac{cv(t_i)}{m}\right)(t_{i+1} - t_i)$$

Así, la ecuación diferencial se ha transformado en una ecuación que puede utilizarse para determinar algebraicamente la velocidad en $\boldsymbol{t_{i+1}}$**,** usando la pendiente y los valores anteriores de *v* y *t*. Si se da un valor inicial para la velocidad en algún tiempo $\boldsymbol{t_i}$**,** es posible calcular con facilidad la velocidad en un tiempo posterior $\boldsymbol{t_{i+1}}$.

Este nuevo valor de la velocidad en $\boldsymbol{t_{i+1}}$ sirve para calcular la velocidad en $\boldsymbol{t_{i+2}}$ y así sucesivamente. Es decir, a cualquier tiempo,

**Valor nuevo = valor anterior + pendiente × tamaño del paso**

Observe que esta aproximación formalmente se conoce como ***método de Euler***




```
g=9.8;
>> m=68.1;
>> cd=12.5;
>> tf=2;
>> v=g*m/cd*(1-exp(-d/m*tf))
```

| **Principio fundamental** | **Variable dependiente** | **Variable independiente** | **Parámetros** |
|---|---|---|---|
| Balance de calor | Temperatura | Tiempo y posición | Propiedades térmicas del material y geometría del sistema |
| Balance de masa | Concentración o cantidad de masa | Tiempo y posición | El comportamiento químico del material: coeficientes de transferencia de masa y geometría del sistema |
| Balance de fuerzas | Magnitud y dirección de fuerzas | Tiempo y posición | Resistencia del material, propiedades estructurales y geometría del sistema |
| Balance de energía | Cambios en los estados de energía cinética y potencial de un sistema | Tiempo y posición | Propiedades térmicas, masa del material y geometría del sistema |
| Leyes de Newton del movimiento | Aceleración, velocidad y posición | Tiempo y posición | Masa del material, geometría del sistema y parámetros disipadores, tales como fricción y rozamiento |
| Leyes de Kirchhoff | Corriente y voltaje en circuitos eléctricos | Tiempo | Propiedades eléctricas del sistema, tales como resistencia, capacitancia e inductancia |

Ahora, suponga que se tiene que determinar el coeficiente de arrastre de un paracaidista con una masa dada, para alcanzar una velocidad determinada en un periodo preestablecido. Aunque los procedimientos anteriores nos conducen a ecuaciones que relacionan a este parámetro que ofrece

una representación matemática de la interrelación entre las variables del modelo y los parámetros, no es posible obtener explícitamente el coeficiente de arrastre, debido a que la relación está en forma implícita.
Así, a menudo dichos problemas requieren la determinación de parámetros implícitos. La solución del dilema es proporcionada por los **métodos numéricos para raíces de ecuaciones**. Para resolver el problema con métodos numéricos es conveniente re expresar la ecuación

$$f(c) = \frac{gm}{c}\left(1 - e^{-\left(c/m\right)t}\right) - v(t)$$

Por lo tanto, el valor de *c* que hace ***f*(*c*) = 0** es la raíz de la ecuación. Este valor también representa el coeficiente de arrastre que resuelve el problema de diseño.

**Importante:**

Las funciones ***trascendentes*** son funciones que no son algebraicas. Comprenden las funciones trigonométricas, las funciones exponenciales, las funciones logarítmicas y otras menos familiares. Las raíces de las ecuaciones pueden ser reales o complejas. En consecuencia, los métodos numéricos estándares para encontrar raíces se encuentran en dos áreas de problemas relacionados, pero fundamentalmente distintos:
**1.** *La determinación de raíces reales de ecuaciones algebraicas y trascendentes.* Dichas técnicas se diseñaron para determinar el valor de una sola raíz real basándose en un conocimiento previo de su posición aproximada.
**2.** *La determinación de todas las raíces reales y complejas de polinomios.* Estos métodos están diseñados especialmente para polinomios; determinan sistemáticamente todas las raíces del polinomio en lugar de sólo una raíz real dada una posición aproximada.

## Métodos Cerrados

Se ocupa de métodos que aprovechan el hecho de que una función cambia de signo en la vecindad de una raíz. A estas técnicas se les llama *métodos cerrados*, o de *intervalos*, porque se necesita de dos valores iniciales para la raíz. Como su nombre lo indica, dichos valores iniciales deben “encerrar”, o estar a ambos lados de la raíz. Los métodos particulares descritos aquí emplean diferentes estrategias para reducir sistemáticamente el tamaño del intervalo y así converger a la respuesta correcta