PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DEMATEMATICAS
Análisis Numérico
eherrera@javeriana.edu.co

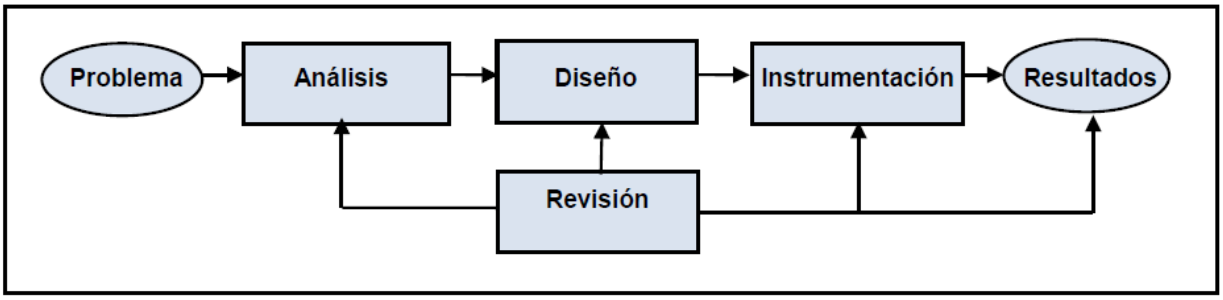
Introducción

Teniendo en cuenta que los métodos numéricos obtienen resultados aproximados, se debe desarrollar criterios para especificar qué tan precisos son los resultados obtenidos. Es por esto, que los errores de redondeo y el uso de cifras significativas tiene mucha importancia en la identificación de exactitud y precisión

Los errores asociados con los cálculos y medidas se pueden caracterizar observando su precisión y exactitud. La precisión se refiere a 1) el número de cifras significativas que representa una cantidad o 2) la extensión en las lecturas repetidas de un instrumento que mide alguna propiedad física. La exactitud se refiere a la aproximación de un número o de una medida al valor verdadero que se supone representa. La inexactitud (conocida también como sesgo) se define también como un alejamiento sistemático de la verdad y la precisión por otro lado se refiere a la magnitud del esparcimiento.

Es por esto, que los métodos números deben ser lo suficientemente exactos o sin sesgo para que cumplan los requisitos de solución de un problema particular. También debe ser lo suficientemente preciso para el diseño en la ingeniería. Usaremos el término de error para representar la inexactitud y la precisión de las predicciones.

También hay que considerar donde están las fuentes de error en la modelación, en la siguiente figura se encuentran los pasos generales en la modelación



1.2 Fuentes de error en la resolución de un problema numérico

En el **Análisis** pueden introducirse errores debido a suposiciones inadecuadas, simplificaciones y omisiones al construir el modelo matemático. Estos errores se denominan errores inherentes.

En el **Diseño** se pueden introducir errores en los métodos numéricos utilizados los cuales se construyen mediante fórmulas y procedimientos simplificados para obtener respuestas aproximadas. También se pueden introducir errores al usar algoritmos iterativos. Estos errores se denominan errores de truncamiento.

En la **Instrumentación** se pueden introducir errores en la representación finita de los números reales en los dispositivos de almacenamiento y en los resultados de las operaciones aritméticas. Este tipo de error se denomina error de redondeo. También se pueden introducir errores de redondeo al usar datos imprecisos.

Los errores son independientes y su efecto puede acumularse. En el caso del error de redondeo el efecto puede incrementarse si los valores que se obtienen son usados en forma consecutiva en una secuencia de cálculos.

Debido a que los métodos numéricos en general permiten obtener únicamente aproximaciones para la respuesta de un problema, es necesario definir alguna medida para cuantificar el error en el resultado obtenido. Normalmente no es posible determinar exactamente este valor por lo que al menos debe establecerse algún criterio para estimarlo o acotarlo. Esta información es útil para conocer la precisión de los resultados calculados.

Introducción a la teoría del Error

Los errores numéricos se generan con el uso de aproximaciones para representar las operaciones y cantidades matemáticas, en la generación de cálculos dados en los algoritmos. Esto incluye errores de truncamiento que resultan de representar aproximadamente un procedimiento matemático exacto, y los errores de redondeo, que resultan de presentar aproximadamente números exactos.

Error de Truncamiento:

Representa la diferencia entre una formulación matemática exacta de un problema y la aproximación dada por un método numérico.

La noción de error de truncamiento se refiere normalmente a los errores que se producen cuando una expresión matemática complicada se reemplaza por una fórmula más simple. Un ejemplo de donde el error de truncamiento es usado es el teorema de Taylor.

Error de Redondeo

Se debe a que una máquina sólo puede representar cantidades con un número finito de dígitos

Error Absoluto

Es la diferencia entre el valor de la medida y el valor tomado como exacto.

$$\varepsilon = |x - \tilde{x}|$$

Donde $\tilde{x}$ representa la aproximación.

Hay que considerar el orden de magnitud del valor que se está probando. Por ejemplo, un error de un centímetro es mucho más significativo si se está midiendo sobre un campo más pequeño (remache) que en una dimensión más grande por ejemplo, un puente. Una manera de medir las magnitudes de las cantidades que se están evaluando es normalizar el error respecto al valor verdadero.

No obstante, uno de los retos en el análisis numéricos es el de determinar estimaciones del error en ausencia de conocimiento de los valores verdaderos. El error se calcula como la diferencia entre la aproximación previa y la actual:

$$E_i = |\widetilde{x_i} - \widetilde{x_{i-1}}|$$

Por lo tanto, el error relativo porcentual está dado por:

$$e_i = |\widetilde{x_i} - \widetilde{x_{i-1}}|/|\widetilde{x_i}|$$

Si se cumple la relación anterior, entonces se considera que el resultado obtenido está dentro del nivel aceptable, es decir, aun error previamente fijado. El anterior error se conoce como error normalizado porcentual (si se multiplica por 100%)

Error normalizado porcentual

En situaciones reales a veces es difícil contar con el valor verdadero para dichos casos. Una alternativa es normalizar el error, usando la mejor estimación posible al valor verdadero.

$$\frac{Aprox.Actual - Aprox.Previa}{Aprox.Actual} * 100$$

Error relativo:

Es el cociente entre el error absoluto y el valor exacto. Si se multiplica por 100 se obtiene el tanto por ciento (%) de error y no tiene unidades. Existen dos maneras de representarlos:

Punto flotante: es un método para representar números reales con orden de magnitud del valor a representar, moviéndolo a el punto decimal por medio de un exponente hacia la posición de la primera cifra significativa del valor

Punto fijo: Los números se representan con un número fijo de cifras decimales.

Punto flotante: Los números se representan con un número fijo de dígitos significativos

Cifras significativas: Las cifras significativas de una medida están formadas por los dígitos que se conocen **no afectados por el error**, más una última cifra sometida al error de la medida. Además, las cifras significativas de un número son las que aportan alguna información. Representan el uso de una o más escalas de incertidumbre en determinadas aproximaciones. Por ejemplo, se dice que 4,7 tiene dos cifras significativas, mientras que 4,07 tiene tres

Ejemplo: El resultado de una medida es 3,72 m, entonces serán significativas las cifras 3, 7 y 2. Los dígitos 3 y 7 son cifras exactas y que el dígito 2 puede ser erróneo. O sea, el aparato de medida puede medir hasta las centésimas de metro (centímetros), aquí es donde está el error del aparato y de la medida. Por tanto, en física y en química "los resultados deben tener tantas cifras significativas o menos que los datos de procedencia". Es decir, que en un aparato si el error lo tuviese en los centímetros no tendría sentido la escala hasta los milímetros.

Ejemplo: No es lo mismo 3,70 m que 3,7 m. En el primer caso queremos decir que se ha precisado hasta los centímetros mientras que en el segundo caso sólo hasta los decímetros. Suele ser un mejor indicador de la precisión, es más independiente de la escala usada, y esto es una propiedad más que deseable.

En las mediciones científicas es usualmente el error relativo el que resulta relevante.

Teorema de Taylor

Sea $f \in C^n[a,b]$, $f^{(n+1)}$ existe en [a, b] y sea $x_0 \in [a,b]$ entonces, para cada $x \in [a,b]$ existe $\xi(x)$ entre x_0 y x tal que:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Para

x_0=0

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Luego $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor y $R_n(x)$ es el término de residuo o error de truncamiento. Es decir, es el error que se comete al usar una suma truncada (finita)

Como el valor ξ no se conoce y así $f^{(n+1)}(\xi)$ tampoco, pero se puede acotar, es decir encontrar alguna función tal que

$$\left| f^{(n+1)}(\xi) \right| \leq M_n$$

Por lo tanto:

$$\left|R_n(x)\right| = \frac{M_n x^{n+1}}{(n+1)!}$$

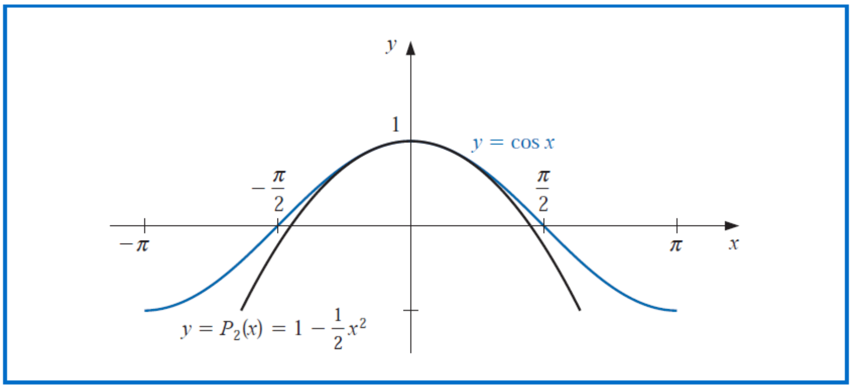
Con lo cual podemos fijar un máximo error y así determinar el n y así obtener una buena aproximación.

Ejemplo

Aproximar el segundo y tercer polinomio de Taylor para $f(x) = cosx$ alrededor del valor $x_0 = 0$ y evaluar aproximadamente $\cos(0.01)$

Hallar la aproximación de $e^{0.5}$ Con cinco cifras significativas

$$\begin{aligned}\cos x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(\xi(x))}{3!}x^3\\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \sin \xi(x),\end{aligned}$$



Ahora, para $x = 0.01$se tiene:

$$\cos 0.01 = 1 - \frac{1}{2}(0.01)^2 + \frac{1}{6}(0.01)^3 \sin \xi(0.01) = 0.99995 + \frac{10^{-6}}{6} \sin \xi(0.01)$$

Donde el error de truncamiento es:

$$\frac{10^{-6}}{6} \sin \xi(0.01) = 0.1\overline{6} \times 10^{-6} \sin \xi(0.01),$$

$$|\cos(0.01) - 0.99995| = 0.1\overline{6} \times 10^{-6} |\sin \xi(0.01)| \leq 0.1\overline{6} \times 10^{-6}$$

Luego la aproximación coincide con los primeros cinco dígitos

$$0.9999483 < 0.99995 - 1.\overline{6} \times 10^{-6} \leq \cos 0.01$$
$$\leq 0.99995 + 1.\overline{6} \times 10^{-6} < 0.9999517$$

El límite de error es mucho mayor que el error real. Esto se debe en parte a la limitación deficiente que usamos para | Sin ξ (x) |. Se puede demostrar que para todos los valores de x, tenemos:

$$|\operatorname{Sin} x| \leq |x|$$

Dado que 0 ≤ ξ <0,01, podríamos haber utilizado el hecho de que | Sin ξ (x) | ≤ 0,01 en el Error fórmula, produciendo la cota 0,16 × 10-8.

Ejemplo

Dada la serie de Taylor de $f(x) = e^{x}$ con centro en cero, hallar la aproximación para el valor: $e^{0.5}$ (con cinco cifras significativas)

Solución:

Lo primero que hallamos es el criterio de error, el cual asegura que el resultado sea correcto con al menos cinco cifras significativas; donde n=5:

$$\varepsilon_s = (0.5 * 10^{2-5})\% = 0.0005\%$$

Es decir se evaluara la serie de Taylor hasta que el error normalizado se menor que 0,0005%.

Realizando el desarrollo de la serie de Taylor obtenemos:

$$f(x) = e^{x} = +1x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Donde la primera aproximación es $e^{0.5} \approx 1$

Segunda aproximación es

$$e^{0.5} \approx 1 + 0.5 = 1.5$$

Tercera aproximación es

$$e^{0.5} \approx 1 + 0.5 + \frac{(0.5)^2}{2} = 1.625$$

En la siguiente tabla se colocaran los resultados; buscando que el error normalizado porcentual sea menor que la tolerancia; también colocaremos el error relativo porcentual partiendo del hecho que el valor real de $e^{0.5} \approx 1.648721\ldots$

Iteración	Aproximación	$\varepsilon_r(\%)$		$\varepsilon_n(\%)$		$\varepsilon_a(\%)$		
1		1		39.3				0.648721…
2		1.5		9.2		33.3		0.14872
3		1.626		1.44		7.69		0.023725…
4		1.645833333	0.175		1.27		0.00289166…	
5		1.648437500	0.172		0.158		0.0002875	
6		1.648697917	0.00145	0.0158				

Problema: Suponga que un dispositivo solo puede almacenar únicamente los cuatro primeros dígitos decimales de cada número real, y trunca los restantes (esto es redondeo inferior). Calcule el error de redondeo si se quiere almacenar el número 536.78. Tenga en cuenta lo siguiente:

En general, si **n** es la cantidad de enteros del número normalizado con potencias de 10, y **m** es la cantidad de cifras decimales que se pueden almacenar en el dispositivo, entonces si se truncan los decimales sin ajustar la cifra anterior, el error de redondeo absoluto está acotado por:

$$|E| < 1 * 10^{n-m}$$

Mientras que el error relativo:

$$|e| < \frac{\max(|E|)}{\min(|X|)} = \frac{1 * 10^{n-m}}{0.1 * 10^{n}} = 10 * 10^{-m} \text{ (Solo depende del almacenamiento)}$$

Problema: Calcule la propagación del error dado por las operaciones aritméticas, para el siguiente caso

La velocidad de una partícula es constante e igual a **4 m/s**, medida con un error de **0.1 m/s** durante un tiempo de recorrido de **5 seg**. medido con error de **0.1 seg**. Determine el error absoluto y el error relativo en el valor de la distancia recorrida.

$v = 4$, $E_v = 0.1$	(velocidad)
$t = 5$, $E_t = 0.1$	(tiempo)
$d = vt$	(distancia recorrida)

Problema. Se necesita un recipiente rectangular, sin tapa, de un litro de capacidad. Para construirlo se debe usar una lámina rectangular de **32** cm de largo y **24** cm de ancho. El procedimiento será recortar un cuadrado idéntico en cada una de las cuatro esquinas y doblar los bordes de la lámina para formar el recipiente.

Determine la medida del lado del cuadrado que se debe recortar en cada esquina para que el recipiente tenga la capacidad requerida.

1. ¿Cual etapa del proceso de resolución de un problema numérico requiere más atención?

2. ¿Qué conocimientos son necesarios para formular un modelo matemático?

3. En el ejemplo de la caja ¿Cual sería la desventaja de intentar obtener experimentalmente la solución mediante prueba y error en lugar de analizar el modelo matemático?

4. ¿Que es más crítico: el error de truncamiento o el error de redondeo?

5. ¿Cuál es la ventaja de instrumentar computacionalmente un método numérico?

Métodos Numéricos

Métodos Cerrados

Se ocupa de métodos que aprovechan el hecho de que una función cambia de signo en la vecindad de una raíz. A estas técnicas se les llama *métodos cerrados*, o de *intervalos*, porque se necesita de dos valores iniciales para la raíz. Como su nombre lo indica, dichos valores iniciales deben "encerrar", o estar a ambos lados de la raíz. Los métodos particulares descritos aquí emplean diferentes estrategias para reducir sistemáticamente el tamaño del intervalo y así converger a la respuesta correcta

2.1 Métodos iterativos

Los métodos iterativos son procedimientos para acercarse a la respuesta mediante aproximaciones sucesivas. Estos métodos incluyen fórmulas que tienen la propiedad de producir un resultado más cercano a la respuesta a partir de un valor inicial estimado. El resultado obtenido se puede usar nuevamente como valor anterior para continuar mejorando la respuesta.

Se deben considerar algunos aspectos tales como la elección del valor inicial, la propiedad de convergencia de la fórmula y el criterio para terminar las iteraciones.

Estos métodos son auto-correctivos. La precisión de la respuesta está dada por la distancia entre el último valor calculado y la respuesta esperada. Esto constituye el error de truncamiento.

Problema: Implemente en cualquier lenguaje el siguiente algoritmo que sirve para calcular la raíz cuadrada. Aplíquelo para evaluar la raíz cuadrada de 7, analice su precisión, convergencia y validez

Algoritmo

```
Algoritmo: Raíz cuadrada
Entra:      n     Dato
            E     Error permitido
            x     Valor inicial
Sale:       y     Respuesta calculada con error E
```

$$y \leftarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{n}{x}\right)$$

```
Repetir mientras  |x - y|  >  E
        x ← y
```

$$y \leftarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{n}{x}\right)$$

```
Fin
```