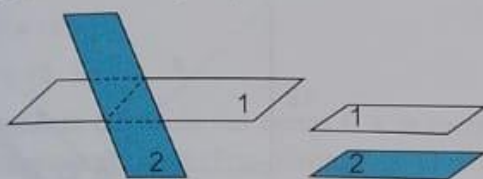


GEOMETRÍA DEL ESPACIO: ESPACIOS RECTA Y PLANOS

La Geometría del Espacio se basa en los PLANOS. Un plano es por ejemplo esta hoja, o el lado de un cubo; es decir, una superficie bidimensional que se puede mover en el espacio. Puesto que es la base en que se apoya esta sección, detallaremos algunas características de los planos.

Ser Paralelos:

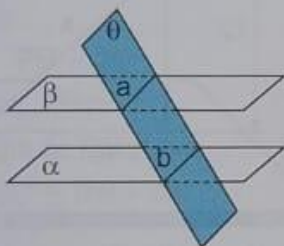
Cuando no tienen ningún punto en común.



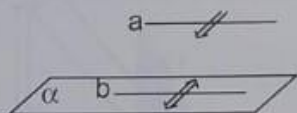
Cortándose y paralelos

Teoremas Importantes

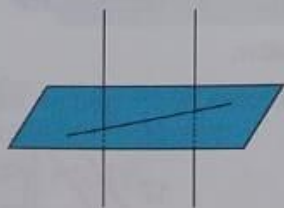
- a) "Las intersecciones a y b de dos planos paralelos α y β con un tercer plano γ son rectas paralelas".



- b) "Si dos rectas a y b son paralelas, todo plano α que pase por una de las dos rectas es paralelo a la otra recta".



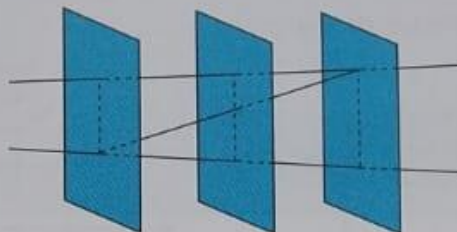
- c) "Si un plano α corta a una de 2 rectas a y b paralelas, corta también a la otra".



- d) "Si una recta corta a uno de dos planos paralelos, corta también al otro".

- e) "Si se cortan dos rectas por un sistema de planos paralelos entonces, los segmentos correspondientes son proporcionales".

Imagen I



$$\text{Entonces: } \frac{AM}{CN} = \frac{MB}{ND}$$

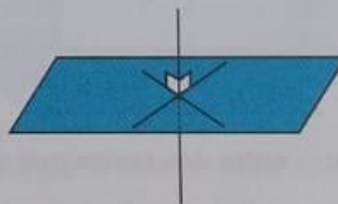
- f) "Si una recta es perpendicular a un plano α , cualquier plano β (y todos los planos paralelos a β) que pase por la recta es perpendicular a α ".

Distancia entre 2 puntos

Viene a ser la longitud del segmento que une dichos puntos.

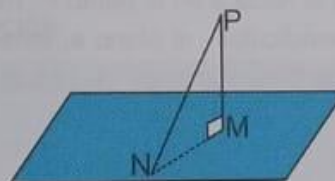
- g) **Recta Perpendicular a un Plano**

Se dice que una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por la intersección. Al punto de intersección se le llama Pie de la perpendicular (punto P).



- h) **Distancia de un punto P a un plano α :**

Es el segmento de perpendicular trazada del punto al plano; se llama así por ser MENOR que cualquier otro segmento que une el punto con cualquier otro punto del plano.



- i) **Paralelismo y Perpendicularidad**

Si de dos rectas paralelas a y b, una de ellas (a) es perpendicular a un plano, la otra (b) también es perpendicular al plano.

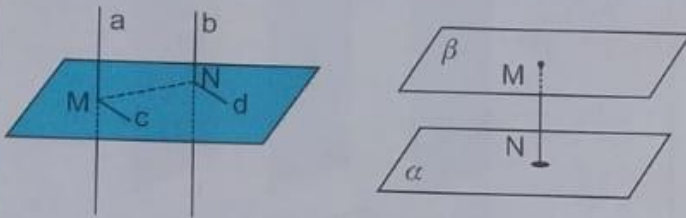
Recíprocamente, dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas.

Dados dos planos paralelos, si una recta es perpendicular a uno de ellos, entonces también es perpendicular al otro.

j) **Distancia entre dos planos α y β paralelos**

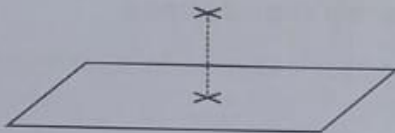
Es el segmento perpendicular comprendido entre los 2 planos. O también, es la distancia de un punto cualquiera M de uno de ellos al otro.

Perpendiculares

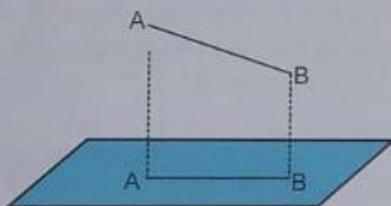


k) **Proyección de un punto A sobre un plano α**

La proyección de un punto A sobre un plano es el pie A' de la perpendicular trazada desde el punto al plano.

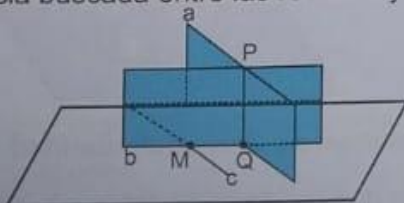


La proyección de una línea sobre un plano α es el conjunto formado por las proyecciones de todos los puntos de la línea.

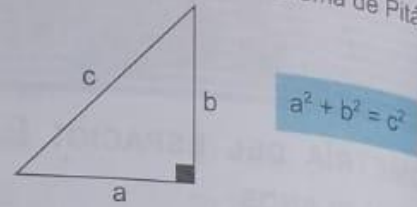


l) **Distancia entre dos rectas que se cruzan**

Es el segmento perpendicular común comprendido entre ambas rectas. Para trazar esta distancia, sean a y b las dos rectas alabeadas. Por un punto M de una de ellas (b) se traza la recta c paralela a la otra (a), la cual determina con b el plano α . Se traza ahora al plano b, perpendicular al plano b, el cual corta a la recta a en el punto P. Trazando desde P la perpendicular al plano α , tenemos que es la distancia buscada entre las rectas a y b.



Para desarrollar este capítulo de una manera óptima es necesario recordar el Teorema de Pitágoras:



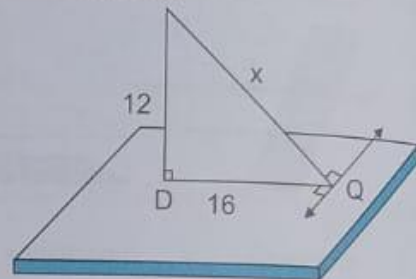
Esto nos ayudará mucho en el momento de hallar distancias.



Ejercicios Resueltos

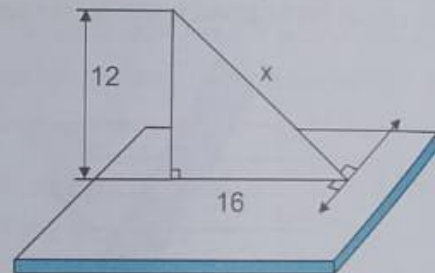
En los siguientes ejercicios hallar el valor de x:

01. Halle el valor de x.



Resolución:

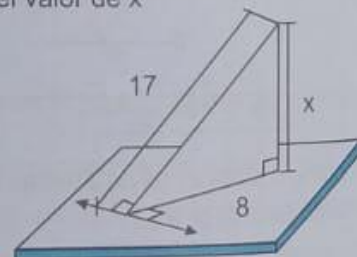
Por el teorema de Pitágoras:



$$x^2 = (12)^2 + (16)^2 = 144 + 256$$

$$x^2 = 400 \rightarrow x = 20$$

02. Halle el valor de x



Resolución:

Por el teorema de Pitágoras, según la figura:



Resolución:

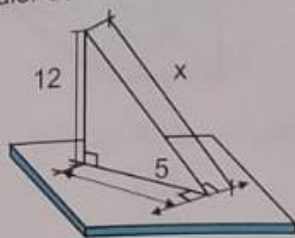
Por el teorema de Pitágoras, según la figura

$$x^2 = (17)^2 - (8)^2 = 289 - 64$$

$$x^2 = 225$$

$$x^2 = 15$$

03. Halle el valor de x

**Resolución:**

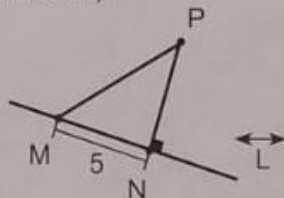
Según la figura, aplicando el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = (12)^2 + (5)^2 = 144 + 25$$

$$x^2 = 169$$

$$x = 13$$

04. Hallar la distancia del punto P a la recta L, si la distancia del punto P al punto M es 13 cm. (M pertenece a la recta L).

**Resolución:**

Según dato: $\overline{PM} = 25$

Por encontrar: $\overline{PN} = x$

Por el teorema de Pitágoras:

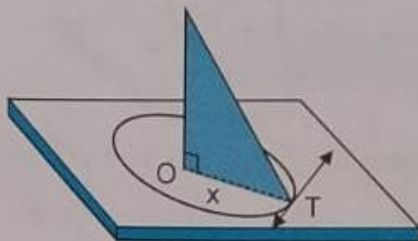
$$x^2 = (13)^2 - (5)^2 = 169 - 25$$

$$x^2 = 144$$

$$x = 12$$

Luego: $\overline{PN} = 12$

05. $PT = 25$; $PO = 24$, halle el valor de x .

**Resolución:**

Por el teorema de Pitágoras:

$$(PT)^2 = (OP)^2 + (OT)^2$$

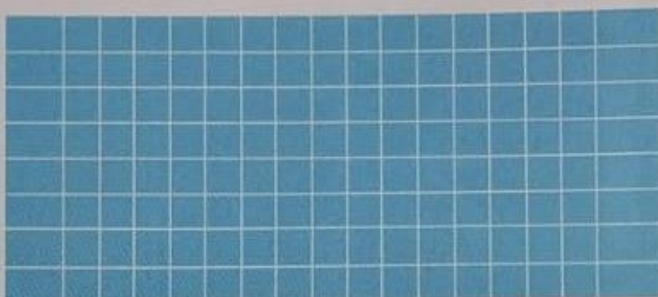
$$(25)^2 = (24)^2 + (x)^2$$

$$625 = 756 + x^2$$

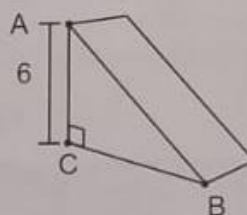
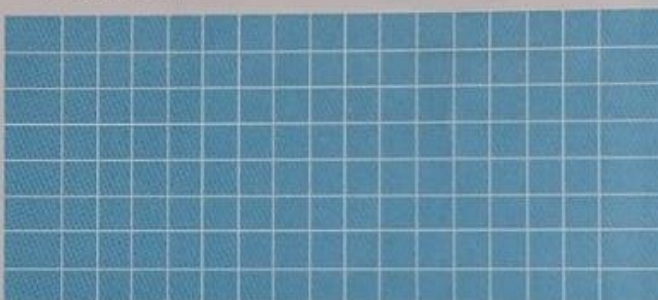
$$x^2 = 49 \rightarrow x = 7$$

06. Marca con V o F según corresponda.

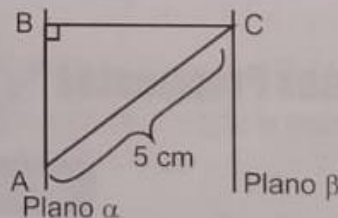
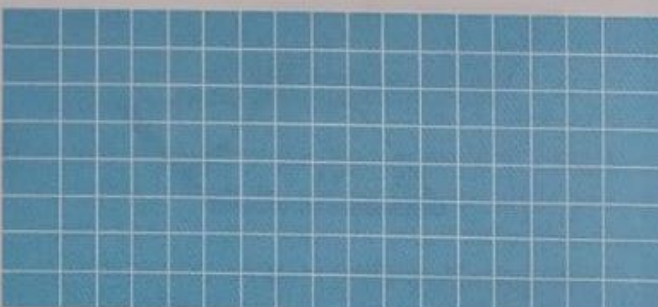
- Si 2 rectas no se cortan entonces son paralelas ()
- Si una recta es perpendicular a 2 rectas, estas rectas son paralelas entre si ()
- La intersección de 3 planos es un punto ()
- Si una recta es perpendicular a 3 rectas dadas, éstas 3 deben ser paralelas. ()

Resolución:

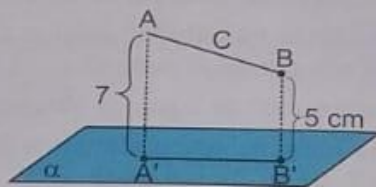
07. Se desea colocar una rampa que una los puntos A y B para facilitar un trabajo. Hallar la longitud de la rampa si la distancia entre C y B es 8 metros.

**Resolución:**

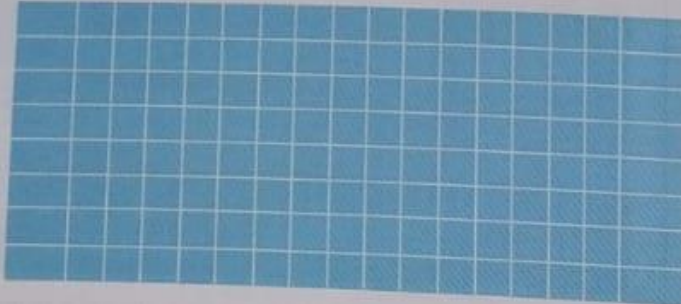
08. Hallar la máxima distancia entre dos planos paralelos si se sabe que el área del triángulo ABC es 6 cm^2 .

**Resolución:**

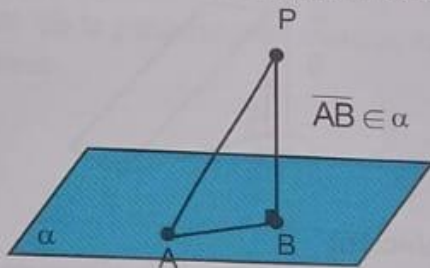
09. Hallar la longitud de la proyección de si el área del trapecio que se forma es 60 cm^2 .



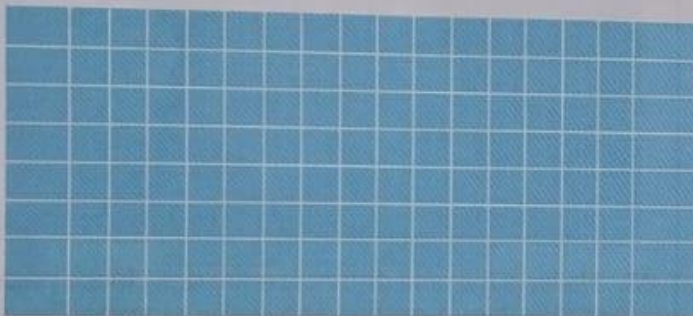
Resolución:



10. Hallar la distancia del punto P al plano α si $PA = 13 \text{ cm}$, y \overline{AB} tiene una longitud igual al lado de un triángulo equilátero de $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$ de área.



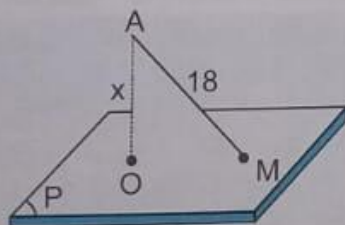
Resolución:



Problemas Propuestos

LÍDER NIVEL I

01. En los siguientes ejercicios, halle el valor de X.



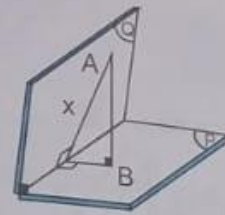
Ángulo entre \overline{AM} y P : 60°

- A) $8\sqrt{3}$
D) $10\sqrt{3}$

B) $9\sqrt{3}$

- C) $10\sqrt{3}$
E) $12\sqrt{3}$

02. $\overline{AB} = 24$



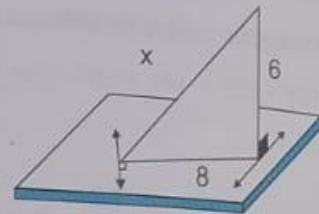
Medida del Diedro ente P y Q: 30°

- A) 48
D) 10

B) 24

- C) 32
E) 20

03.

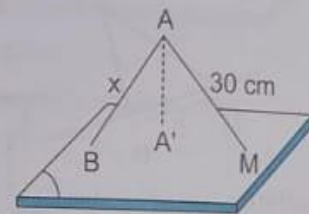


- A) 6
D) 9

B) 7

- C) 8
E) 10

04.



\angle entre \overline{AB} y P = 60°

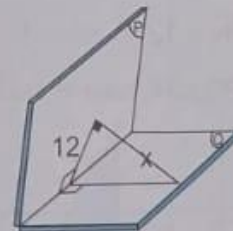
\angle entre \overline{AM} y P = 53°

- A) $14\sqrt{3}$
D) $10\sqrt{3}$

B) $18\sqrt{3}$

- C) $16\sqrt{3}$
E) $8\sqrt{3}$

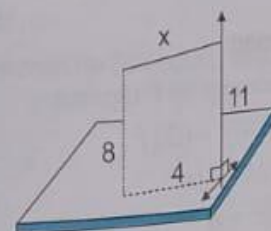
05.



Medida del \angle diedro entre P y Q: 37°

- A) 9
B) 8
C) 7
D) 3
E) 4

06.



A) 3

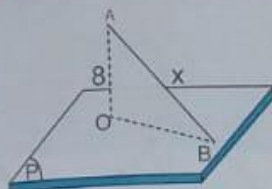
B) 14

C) 4

D) 5

E) 6

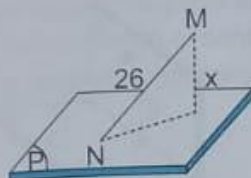
07.



Proyección de \overline{AB} sobre P: 16

- A) $4\sqrt{5}$ B) $8\sqrt{5}$ C) $16\sqrt{5}$
D) $40\sqrt{5}$ E) $24\sqrt{5}$

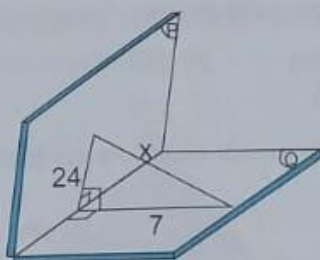
08.



Proyección de \overline{MN} SOBRE: 10

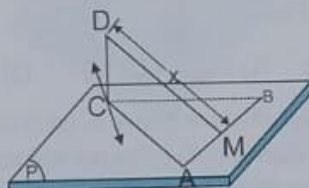
- A) 20 B) 22 C) 23 D) 24 E) 26

09.



- A) 24 B) 32 C) 29 D) 30 E) 25

10.



$\overline{DC} = \overline{AM} = \overline{MB} = 4$;

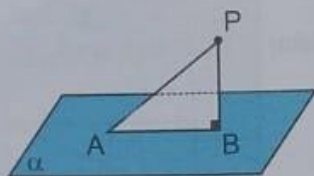
ABC: Equilátero

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

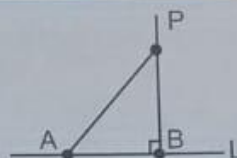
LÍDER NIVEL II

11. Hallar la distancia del punto P al plano \overline{PA} si $\overline{PA} = 130$ cm. y \overline{AB} tiene una longitud igual al lado de un cuadrado de $50\sqrt{2}$ cm. de diagonal.

- A) 120 cm.
B) 12
C) 130
D) 13
E) N.A.



12. Hallar la distancia del punto "P" a la recta L, si la distancia de P a A es 30 cm y $AB = 16$ cm.



- A) 21 cm B) 14 cm C) 15 cm
D) 12 cm E) N.A.

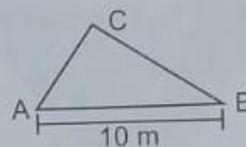
13. Un avión que va a aterrizar en una pista de un aeropuerto, inicialmente se encuentra a 1200 m de altura, si recorre 1500 m y finalmente aterriza, recorriendo sobre la pista 100 metros más. ¿Cuál es la longitud total de la pista?

- A) 1100 m B) 1400 C) 1500
D) 1200 E) 1000

14. Una tubería de 10 m de largo une 2 paredes paralelas. Si la diferencia de alturas entre ambos puntos de contacto con la pared es de 6 m. Hallar la separación entre las paredes.

- A) 6 m B) 8 C) 7 D) 5 E) N.A.

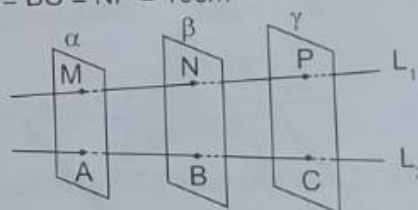
15. Hallar la distancia del punto C al segmento AB, si el triángulo ABC tiene un área de 10 m^2 .



- A) 1 m B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16. En el siguiente gráfico, determinar el valor de \overline{MN} si α, β y γ son planos paralelos entre sí, que cortan a las rectas L_1 y L_2 .

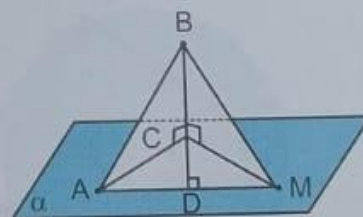
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{NP} = 10 \text{ cm}$



- A) 10 cm. B) 8 C) 12 D) 14 E) N.A.

17. En el siguiente gráfico, hallar la distancia de B a D, si $\overline{AM} = 10$ y $\overline{BC} = 3$ cm y $A_{ACM} = 20 \text{ cm}^2$.

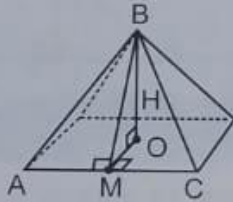
- A) 5 cm
B) 6
C) 4
D) 7
E) N.A.



18. ¿Cuál es la distancia que separa a 2 edificios, si un cable que va de la azotea de un edificio al otro mide 52 m. y uno tiene 12 pisos más que el otro (Considerar que cada piso tiene 4 m. de alto).

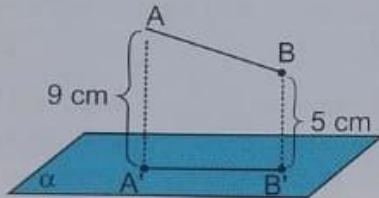
- A) 10 m B) 12 C) 20 D) 18 E) 5

19. Hallar la altura de la cara ABC de la siguiente pirámide, si $H = 24$ cm. y $\overline{OH} = 5$ cm.



A) 26 cm B) 24 C) 25 D) 23 E) N.A.

20. Hallar la longitud de la proyección de \overline{AB} , si el área del trapecio que se forma es de 49 cm^2 .

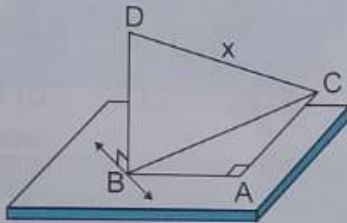


A) 7 cm B) 8 C) 14 D) 16 E) N.A.

LÍDER NIVEL III

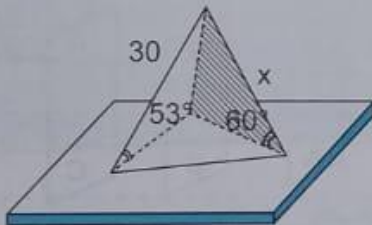
En la figura de 1 a 6 calcular el valor de "x"

21. $\overline{DC} = \overline{CA} = \overline{AB} = 5$



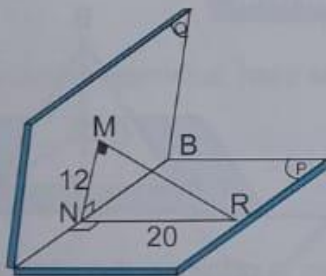
A) 6 B) 4 C) 3 D) 5 E) 8

22.



A) $16\sqrt{3}$ B) $15\sqrt{3}$ C) $10\sqrt{3}$
D) $9\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

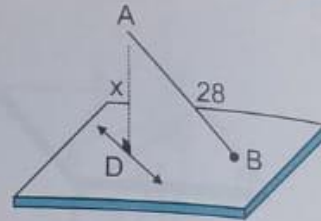
23.



medida del diedro AB = x

A) 50° B) 37° C) 53° D) 16° E) 45°

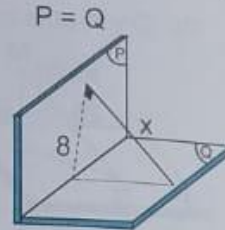
24.



\angle entre \overline{AB} y P: 30°

A) 13 B) 14 C) 15 D) 26 E) 28

25.



Ángulo entre P y Q: 37°

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

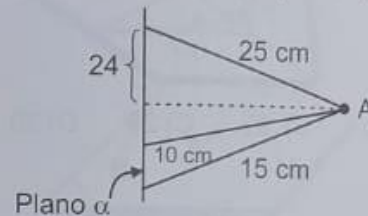
26.

De la pregunta anterior, hallar la distancia de B a A'.

A) 74 cm B) $\sqrt{74}$ C) 75
D) $\sqrt{75}$ E) Faltan Datos.

27.

Hallar la menor distancia del punto A al plano α .



A) 8 cm B) 9 C) 10 D) 7 E) 6

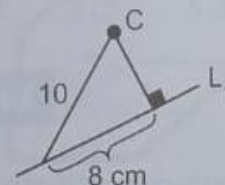
28.

Un cañón dispara balas a un muro; si el cañonero quisiera que la bala pase por encima del muro (con la justa), recorriendo sólo 50 m. ¿A qué distancia deberá colocar el cañón? El muro tiene 30 m. de alto.

A) 40 m B) 3 C) 45 D) 50 E) N.A.

29.

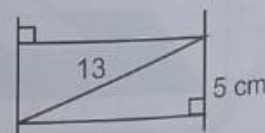
Hallar la distancia de C a L1.



A) 10 cm. B) 8 C) 6
D) 12 E) N.A.

30.

Hallar la distancia entre L_1 y L_2 si ambas son paralelas.



A) 12 cm B) 13 C) 10 D) 8 E) N.A.