

Einführung in Optimalsteuerungsprobleme für
differential-algebraische Gleichungen und
notwendige Optimalitätskriterien erster
Ordnung der Typen Fritz-John und
Karush-Kuhn-Tucker

Julius Hülsmann
Matr. 2408934
jhuelsma@math.uni-bielefeld.de

240091 Seminar / Bachelorarbeit Numerik
Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld
Erstgutachter: Prof. Dr. L'ubomír Bañas
Zweitgutachter: PD Dr. Thorsten Hüls

Abgabedatum: 28.09.2015

Inhaltsverzeichnis

1	Notation	5
1.1	Grundlegende Notation	5
1.2	Neu eingeführte Notation	6
2	Optimierung und optimale Steuerung	8
2.1	Optimierungsaufgaben	8
2.1.1	endlichdimensionale Optimierung	8
2.1.2	unendlichdimensionale Optimierung	13
2.2	Optimalsteuerungsprobleme	15
2.3	Transformation	24
3	Notwendige Optimalitätskriterien	32
3.1	Stationäre Punkte	32
3.2	Fritz-John-Bedingungen	43
3.3	Regularitätskriterien und Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen	72
4	Fazit	79
5	Anhang	80
5.1	allgemeine Definitionen und Sätze	80
5.2	Banachräume, Differenzierbarkeit	82
5.3	Separationstheoreme	88
5.4	Kegel	90

Einleitung

Diese Bachelorarbeit gibt eine Einführung in die Theorie der Optimalsteuerungsprobleme. Sie lehnt sich dabei sowohl an das erste und zweite Kapitel der Quelle [8], als auch an die ersten drei Kapitel des Buches [5] an.

An dem auch als optimale Steuerung bezeichneten Aufgabengebiet wird seit den 50er Jahren des 20. Jahrhunderts geforscht (vgl. [7], Seite 2). Auch wenn bei der Entstehung ursprünglich militärische Zielsetzungen im Vordergrund standen, findet die Theorie der Optimalsteuerungsprobleme darüber hinaus Anwendung in zivilen Ingenieurwissenschaften (vgl. [7], Seite 2).

Als Optimalsteuerungsproblem wird die Aufgabenstellung bezeichnet, eine Funktion z zu finden, welche ein gegebenes Funktional $J(z)$ maximiert oder minimiert, und die gleichzeitig darüber hinausgehende Bedingungen erfüllt. Die Optimalsteuerungsprobleme entwickelten sich aus Optimierungsaufgaben. Anders als bei der optimalen Steuerung wird hier nach einem Skalar und nicht nach einer Funktion optimiert.

Optimierungsaufgaben ohne Nebenbedingungen werden bereits im Schulunterricht behandelt. Im ersten Semester des Mathematikstudiums wird für differenzierbare Funktionen gelehrt, dass der Gradient an einem lokalen Optimum Null annehmen muss (vgl. [3]). Solche Kriterien, die an einem lokalen Optimum erfüllt sein müssen, werden notwendige Optimalitätskriterien genannt. Sie werden in dieser Bachelorarbeit auch für allgemeine Optimierungsaufgaben und Optimalsteuerungsprobleme hergeleitet. Das Hauptresultat liegt auf dem Beweis der Gültigkeit der Fritz-John und Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen als notwendige Optimalitätskriterien für Optimierungsaufgaben. Um beide Kriterien auch für Optimalsteuerungsprobleme verwenden zu können, transformiere ich letztere in unendlichdimensionale Optimierungsaufgaben auf geeigneten Banachräumen.

Das Finden notwendiger Optimalitätskriterien ist hilfreich für die Erstellung numerischer Verfahren zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen. Auf den gewonnenen Erkenntnissen aufbauend können dann aus der Numerik bereits bekannte Verfahren adaptiert werden, um sie auf Optimalsteuerungsprobleme anwenden zu können. Mit der numerischen Lösung von Optimalsteuerungsproblemen werde ich mich in dieser Arbeit nicht beschäftigen. Weiterführende Informationen können in der Quelle [8] nachgelesen werden.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Nachdem im **ersten Kapitel** eine Übersicht über die verwendete Notation angegeben ist, werden im **zweiten Kapitel** Optimalsteuerungsprobleme und Optimierungsaufgaben definiert. Erstere enthalten als Beschränkungen an die gesuchte Lösung z unter anderem das Kriterium, dass die Lösungsfunktion ein dynamisches Gleichungssystem

erfüllt. Dies kann ein System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen sein, allerdings auch differential-algebraische Gleichungen beinhalten, die erst noch zu definieren sind. Ich werde als dynamische Systeme sogenannte gewöhnliche semi-explizite differential-algebraische Gleichungen betrachten. Allgemeiner ist es möglich, an deren Stelle partielle differential-algebraische Gleichungen zu behandeln. Anschließend werde ich das Optimalsteuerungsproblem in eine unendlichdimensionale Optimierungsaufgabe transformieren.

Im **dritten Kapitel** werden die bereits erwähnten Karush-Kuhn-Tucker und Fritz-John-Bedingungen für unendlichdimensionale Optimierungsaufgaben hergeleitet. Zur Veranschaulichung der – im Allgemeinen endlichdimensionalen – Optimierungsaufgaben werde ich im letzten Kapitel Beispiele und Interpretationen für den endlichdimensionalen Fall anführen. Die Grundlage zu dem Themenbereich der endlichdimensionalen Optimierung liefern die ersten drei Kapitel des Buches [5]. Abschließend gehe ich dann auf sogenannte Regularitätskriterien ein.

Die in dieser Bachelorarbeit verwendeten Grafiken wurden allesamt von mir, teilweise mithilfe des Software-Pakets SCILAB erstellt. Die Beispiele und Beweise von Sätzen, die nicht vollständig von mir stammen sondern an bestimmte Quellen angelehnt sind, sind als solche gekennzeichnet. Die Beispiele und Beweise aller nicht gekennzeichneten Sätze sind ausschließlich von mir erstellt.

1 Notation

In diesem Abschnitt wird sowohl die der Bachelorarbeit zu Grunde liegende Notation zusammengefasst, als auch ein Überblick über die neu eingeführte Notation gegeben. Da aus diesem Grund die im Laufe der Arbeit definierten Begriffe und Definitionen vorweg gegriffen werden, ist der Abschnitt *Neu eingeführte Notation* als Nachschlagemöglichkeit vorgesehen.

1.1 Grundlegende Notation

Das in dieser Arbeit sehr häufig verwendete Nullelement eines Vektorraums Z wird zwecks Unterscheidung der verschiedenen Räume als 0_Z bezeichnet. Um eine bessere Lesbarkeit zu erzielen, wird das Element $0_{\mathbb{R}}$ mit 0 abgekürzt. Die euklidische Norm des Vektorraums \mathbb{R}^n wird mit $\|\cdot\|_2$ gekennzeichnet. Die Menge $\mathbb{R}^{\geq 0}$ ist definiert als $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Im Falle eines durch ein Element $z \in Z$ charakterisierten endlichdimensionalen Banachraumes wird dessen Dimension mit $n_z := \dim(Z)$ angegeben. Falls es sich bei z allerdings um ein Element eines (unendlichdimensionalen) Funktionenraumes handelt, bezeichnet n_z die Dimension des Bildraumes. Also ist in einem solchen Falle die Funktion z definiert als $z : X \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$. Für eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ der reellen Zahlen wird die Ableitung für eine solche Funktion z bezüglich t mit $\dot{z}(t) := \frac{\partial z}{\partial t}(t)$ angegeben. Das Bild einer Abbildung z bezeichne ich mit $\text{im}(z(\cdot))$.

Für ein Element z eines Banachraums Z verwende ich die Notation $B_\epsilon(z)$ als Charakterisierung der abgeschlossenen Umgebung um den Punkt z mit Abstand ϵ innerhalb des Raumes Z bezüglich der verwendeten Norm $\|\cdot\|_Z$ auf Z . $B_\epsilon(z)$ ist wie folgt definiert:

$$B_\epsilon(z) := \{x \in Z \mid \|x - z\|_Z \leq \epsilon\}.$$

Neben der abgeschlossenen Umgebung wird auch die analog zu $B_\epsilon(z)$ definierte offene Umgebung $U_\epsilon(z)$ verwendet:

$$U_\epsilon(z) := \{x \in Z \mid \|x - z\|_Z < \epsilon\}.$$

Für eine beliebige Teilmenge A eines Banachraums X bezeichnet $\mathbb{1}_A$ die Indikatorfunktion. Sie ist wie folgt definiert:

$$\mathbb{1}_A : X \rightarrow \{0, 1\}, \quad \mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Ich definiere $\text{int}(A)$ als die Menge aller inneren Punkte¹ einer Menge A in einem Banachraum X . Die Menge der Randpunkte² einer Menge A eines Banachraums X wird als Rand von A bezeichnet und abgekürzt mit δA . Für den Abschluss einer Menge A benutze ich die Notation $\text{cl}(A)$. Die um ein Element $x \in X$ verschobene Menge A bezeichnen wir mit $A - x$. Sie ist wie folgt definiert:

$$A - x := \{a - x \mid a \in A\}.$$

Für einen Banachraum X bezeichne ich mit X^* dessen Dualraum³.

1.2 Neu eingeführte Notation

In dieser Bachelorarbeit werden sowohl der Allgemeine Fall als auch Spezialfälle behandelt. Um die verschiedenen neu definierten Begriffe einander zuordnen zu können und gleichzeitig zu kennzeichnen, um welchen Fall es sich handelt, verwende ich zur Unterscheidung im Speziellen Klein- und im Allgemeinen Großbuchstaben.

Dies schlägt sich insbesondere in der Unterscheidung zwischen endlichdimensionaler und unendlichdimensionaler **Optimierung**⁴ nieder. Die Bezeichnungen der neu eingeführten Begrifflichkeiten wird hier für den allgemeinen Fall angegeben: Die *Zielfunktion* wird mit dem Buchstaben J bezeichnet, die *zulässige Menge* mit Σ . *Ungleichheitsrestriktionen* bezeichne ich im Folgenden mit G und *Gleichheitsrestriktionen* mit dem Buchstaben H . Der Banachraum, aus dem von den Funktionen J , G und H abgebildet wird, wird mit Z bezeichnet. Elemente aus Z bezeichne ich mit z . Falls z ein zulässiges Element ist, wird es mit \bar{z} bezeichnet. Lokale Optima werden als \hat{z} angegeben.

Als Verallgemeinerung der gewöhnlichen Differentialgleichung⁵ bezeichne ich die **differential-algebraische Gleichung**⁶ *in impliziter Form* mit F . In der *semi-expliziten Form* bezeichnet f die *differentielle*- und a die *algebraische* Gleichung. Die Buchstaben x und y werden für *differentielle*- beziehungsweise die *algebraische* Variable verwendet. u kennzeichnet die Steuerungsvariable.

Aufgrund des Zusammenhanges zwischen der Zielfunktionen zwischen der

¹Für die Definition des Begriffes „innerer Punkt“ siehe Definition 5.1 im Anhang.

²Die Definition des Begriffes „Randpunkt“ befindet sich unter Definition 5.2 im Anhang.

³Siehe Definition 5.10 im Anhang.

⁴engl. optimization problem, OP.

⁵engl. ordinary differential equation, ODE.

⁶engl. differential algebraic equation, DAE.

unendlichdimensionalen Optimierungs- und der des **Optimalsteuerungsproblems**⁷ wird bei letzterem die Zielfunktion auch mit J bezeichnet. Die gemischten Status- und Steuerungsbeschränkungen werden mit c , die reinen Statusbeschränkungen mit s bezeichnet.

⁷engl. optimal control problem, OCP.

2 Optimierung und optimale Steuerung

In diesem Kapitel führe ich zunächst in die allgemeine Problemstellung der Optimierungs- und der auch als optimale Steuerung bezeichneten Optimalsteuerungsprobleme ein. Für die Definition letzterer ist es notwendig, als Verallgemeinerung der gewöhnlichen Differentialgleichung die differential-algebraische Gleichung zu definieren.

2.1 Optimierungsaufgaben

Ich gehe in diesem Kapitel sowohl auf endlichdimensionale, als auch auf unendlichdimensionale Optimierungsaufgaben ein. Dies geschieht zur späteren Veranschaulichung der – für den allgemeinen Fall bewiesenen – Theoreme.

2.1.1 endlichdimensionale Optimierung

Bereits in der Schule wird die Aufgabenstellung behandelt, ein gewisses Funktional $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zu optimieren, also zu maximieren oder zu minimieren (vgl. [4]). Am Anfang des Mathematikstudiums wird diese Problemstellung auf Funktionale der Form $j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ erweitert (vgl. [3]). Als nächsten Schritt der Verallgemeinerung umschließt der Begriff **allgemeine endlichdimensionale Optimierungsaufgabe** die Optimierung von auf einer beliebigen Teilmenge eines endlichdimensionalen Banachraums definierten Funktionen. Da endlichdimensionale Banachräume mit dem \mathbb{R}^n identifiziert werden können (vgl. [11], Seite 7), lautet die Definition dieser Aufgabenstellung wie folgt:

Definition 2.1 (endlichdimensionale Optimierungsaufgabe⁸).

Gegeben sei für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine nicht leere Menge $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$, $\sigma \neq \emptyset$, auf der ein Funktional $j : \sigma \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist.

- (a) Als endlich dimensionale Minimierungs- bzw. Maximierungsaufgabe bezeichnen wir die Aufgabenstellung, für die sogenannte Zielfunktion j unter der Nebenbedingung $\bar{z} \in \sigma$ ein lokales Minimum beziehungsweise Maximum zu ermitteln. Wir bezeichnen σ als die zulässige Menge und alle Elemente $\bar{z} \in \sigma$ als zulässige Punkte der Aufgabe.
- (b) Als endlich dimensionale Optimierungsaufgabe (engl. *optimization problem*, *OP*) bezeichnen wir sowohl endlichdimensionale Maximierungs- als auch Minimierungsaufgaben.

⁸Diese Definition orientiert sich an [5], Problemstellung 1.1 und [8], Problem 2.3.4.

(c) Im Falle $\sigma = \mathbb{R}^n$ spricht man von einer unrestringierten, andernfalls von einer restringierten Aufgabe.

Wir werden im Folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit dem Begriff Optimierungsaufgabe die Problemstellung bezeichnen, die Zielfunktion j bezüglich der zulässigen Menge σ zu minimieren. Aufgrund der Symmetrie der beiden Aufgabenstellungen sind die gewonnenen Resultate trotzdem für Maximierungsaufgaben anwendbar. Das ist wie folgt ersichtlich: Ein zulässiger Punkt $\bar{z} \in \sigma$ ist genau dann ein Maximum der Zielfunktion j , wenn er ein Minimum der Zielfunktion $-j$ für dieselbe zulässige Menge ist.

Aufgrund der Einschränkung des Definitionsbereiches muss neben der zu Grunde liegenden Aufgabenstellung auch der Begriff des lokalen Minimums neu definiert werden. Für ein unrestringiertes Problem ist ein lokales Minimum an der Stelle \hat{z} dadurch definiert, dass für ein genügend kleines $\epsilon > 0$ eine offene Umgebung $U_\epsilon(\hat{z})$ existiert, sodass $j(z) \geq j(\hat{z})$ für alle $z \in U_\epsilon(\hat{z})$ (vgl. [5], Seite 2). Diese Definition muss allein schon deshalb angepasst werden, weil die Funktion j nur auf der Menge σ definiert ist. Wenn allerdings der betrachtete zulässige Punkt \hat{z} kein innerer Punkt der zulässigen Menge ist, enthält jede offene Umgebung $U_\epsilon(\hat{z})$ Punkte, die außerhalb des Definitionsbereiches liegen. Trotzdem könnte an so einer Stelle ein lokales Minimum des restringierten Problems vorliegen.

Definition 2.2 (lokales Maximum⁹).

Ein zulässiger Punkt $\hat{z} \in \sigma$ wird als lokales Minimum des OP 2.1 bezeichnet, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass für alle $\bar{z} \in U_\epsilon(\hat{z}) \cap \sigma$ gilt $j(\bar{z}) \geq j(\hat{z})$.

Die Einschränkung des Definitionsbereiches auf die zulässige Menge σ im restringierten Falle führt dazu, dass das bereits für stetig differenzierbare Funktionale bekannte notwendige Optimalitätskriterium $\nabla j(\hat{z}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ (vgl. [3]) nicht verwendet werden kann, da es bei Punkten \hat{z} des Randes $\delta\sigma$ fehlschlägt. Dass bei restringierten Problemen lokale Minima \hat{z} existieren können, an denen im unrestringierten Fall kein lokales Minimum vorliegt, wird Beispiel 2.3 zeigen. Aus diesem Grunde sind neue Kriterien und zu diesem Zwecke eine formale Beschreibung der lokalen zulässigen Umgebung von Nöten. Diesem Themengebiet werden wir uns in Kapitel 3 zuwenden.

Zunächst ist es jedoch sinnvoll, eine kürzere Schreibweise für Optimierungsaufgaben anzugeben. Für die kompakte Notation der Optimierungsaufgabe haben sich die folgenden zwei Schreibweisen etabliert:

$$\min_{\bar{z} \in \sigma} j(\bar{z}) \tag{1}$$

⁹Diese Definition lehnt sich an [5], Definition 1.1 an.

und außerdem die Schreibweise

$$\min j(\bar{z}) \quad \text{u.d.N.} \quad \bar{z} \in \sigma, \quad (2)$$

wobei u.d.N. für “unter der Nebenbedingung” steht. Häufig wird die Nebenbedingung der Optimierungsaufgabe (1) indirekt mithilfe zweier Funktionen $g = (g_1, \dots, g_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $h = (h_1, \dots, h_p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ für

$$\begin{aligned} g_k : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{für alle } k = 1, \dots, m, \\ h_l : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{für alle } l = 1, \dots, p \end{aligned}$$

wie folgt angegeben:

$$\begin{aligned} \min j(\bar{z}) \quad \text{u.d.N.} \quad g_k(\bar{z}) \leq 0, \quad h_l(\bar{z}) = 0 \quad \text{für alle } k = 1, \dots, m \\ \text{und } l = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (3)$$

Die in dieser Schreibweise verwendete Funktion h wird als Gleichheits- und g als Ungleichheitsrestriktion bezeichnet. Die Menge σ ist dann definiert als

$$\begin{aligned} \sigma := \{ \bar{z} \in \mathbb{R}^n : \quad g_k(\bar{z}) \leq 0 \quad \text{für alle } k = 1, \dots, m, \\ h_l(\bar{z}) = 0 \quad \text{für alle } l = 1, \dots, p \}. \end{aligned}$$

Da insbesondere die Funktion h nicht stetig sein muss, lässt sich jede zulässige Menge σ durch zwei Funktionen g und h in der Form (3) beispielsweise durch Nutzung folgender Gleichheitsrestriktion angeben:

$$h = h_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_1 = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus \sigma}, \quad \text{für } p = 1.$$

wobei $\mathbb{1}_A$ die Indikatorfunktion für eine Menge A ist und keine Ungleichheitsrestriktion erforderlich ist, also beispielsweise durch die Setzung $g(x) = 0_{\mathbb{R}^m}$ die Bedingung $g_k(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \{1, \dots, m\}$ erfüllt ist. Also lässt sich jede zulässige Menge σ in einer Notation wie in (3) angeben. Aussagekraft erhält diese Darstellung allerdings in dem Falle, dass die Funktionen g und h genügend glatt sind. Bei der Suche notwendiger Optimalitätskriterien in Kapitel 3 werden nur OP für stetig differenzierbare Funktionen f , g und h behandelt.

Die große Bedeutung der in (3) definierten Optimierungsaufgabe ergibt sich dadurch, dass es sich um ein universelles mathematisches Modell handelt, welches auf viele reale Probleme angewendet werden kann. Die zulässige Menge enthält in jeder Komponente Parameter eines betrachteten Modells, die noch nicht festgelegt wurden und optimal gewählt werden sollen. Beispiele solcher mathematischen Modelle können in dem Buch [5] auf den Seiten 4ff. nachgelesen werden.

Nun werde ich ein Beispiel einer endlichdimensionalen Optimierungsaufgabe diskutieren, deren Lösung analytisch und ohne weiteres Vorwissen bestimmt werden kann. Die behandelte Problemstellung ist angelehnt an Beispiel 1.2 aus dem Buch [5].

Beispiel 2.3 (endlichdimensionale Optimierungsaufgabe).

Betrachte folgende Situation: Ein Unternehmen benötigt 7 Tonnen Rohmaterial zur Weiterverarbeitung. Besonders lukrativ scheinen die Angebote zweier Firmen. Die Preise der ersten Firma werden durch die Funktion

$$f_1(z_1) := 10 + z_1 - \frac{1}{10} \cdot z_1^2$$

abhängig von der bei der Firma 1 erworbenen Menge z_1 in Tonnen beschrieben. Für die zweite Firma lautet die analoge Funktion

$$f_2(z_2) := 10 + \frac{2}{10} \cdot (z_2 - 2)^2.$$

Durch einen Mix aus beiden Angeboten kann ein minimaler Preis erzielt werden. Die Optimierungsaufgabe besteht also in diesem Fall darin, die bei den beiden Firmen erworbenen Tonnen Rohmaterial so zu bestimmen, dass die dafür getätigten Kosten möglichst gering sind. Die Gesamtkosten werden durch die Funktion

$$j \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} := f_1(z_1) + f_2(z_2) = 20 + z_1 - \frac{1}{10} \cdot z_1^2 + \frac{2}{10} \cdot (z_2 - 2)^2$$

angegeben. Die Bedingung, dass genau 7 Tonnen Rohmaterial zu erwerben sind, lässt sich durch die Gleichheitsrestriktion mit der wie folgt definierten Funktion h ausdrücken:

$$h \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} := z_1 + z_2 - 7.$$

Die Situation führt zu der folgenden gleichheitsrestringierten endlichdimensionalen Optimierungsaufgabe:

$$\min j \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \text{u.d.N.} \quad h \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Dieses OP wird im Folgenden gelöst. Die zulässige Menge σ ist gegeben durch

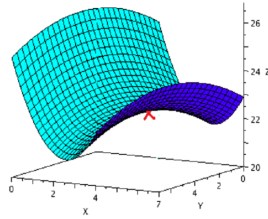
$$\begin{aligned} \sigma &= \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : h \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : z_2 = 7 - z_1 \right\}. \end{aligned}$$

Aufgrund dieser Umformung kann z_2 in die Funktion j eingesetzt werden, und wir erhalten mit

$$\begin{aligned}\tilde{j}(z_1) &= 20 + z_1 - \frac{1}{10} \cdot z_1^2 + \frac{2}{10} \cdot (7 - z_1 - 2)^2 \\ &= 20 + z_1 - \frac{1}{10} \cdot z_1^2 + 5 - 2 \cdot z_1 + \frac{2}{10} \cdot z_1^2 \\ &= 25 - z_1 + \frac{1}{10} \cdot z_1^2\end{aligned}$$

eine Funktion, die wir wie gewohnt optimieren können. Abbildungen (1) und (2) visualisieren den behandelten Sachverhalt. In Abbildung (1a) ist der Graph der Funktion j abgebildet. Die zulässige Menge σ wird über die Schnittmenge der Nullebene (definiert ist durch $E(z_1, z_2) := 0$) mit der Funktion h beschrieben, deren Graphen in Abbildung (1b) abgebildet sind.

a) Graph der Funktion j .



b) Visualisierung der zulässigen Menge σ als Nullstellenmenge der Funktion h .

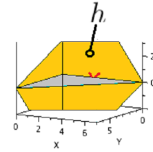
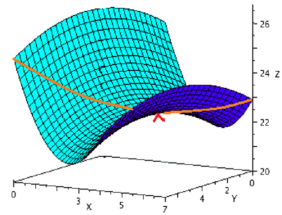


Abbildung 1: Graph der betrachteten Funktionen j und h .

Abbildung (2a) zeigt den Graphen der Funktion j mit in orange hervorgehobenen Funktionswerten auf dem zulässigen Bereich. In Abbildung (2b) ist schließlich die Funktion j eingeschränkt auf den zulässigen Bereich zu sehen. Dass an der Stelle $(5, 2)^T$ – wie in der Abbildung zu erkennen – ein lokales

a) Abbildung a) mit hervorgehobenen Funktionswerten auf σ .



b) Graph der Funktion j eingeschränkt auf die zulässige Menge σ .

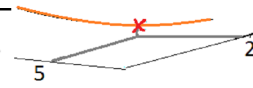


Abbildung 2: Abbildung der Einschränkung von j auf die zulässige Menge.

Minimum vorliegt, wird die Diskussion der Funktion \tilde{j} zeigen. Da wir unser Problem in ein gleichwertiges, unrestringiertes Problem

$$\min \tilde{j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

umgeformt haben, können wir wie gewohnt durch die Kriterien

$$\nabla \tilde{j}(z_1) = 0, \quad \text{Hess}(\tilde{j})(z_1) \text{ positiv definit}$$

überprüfen, an welchen Stellen lokale Optima vorliegen.

$$\nabla \tilde{j}(z_1) = \frac{z_1}{5} - 1, \quad \text{Hess}(\tilde{j})(z_1) = \frac{1}{5}.$$

Die erste Ableitung ist genau dann gleich 0, wenn $z_1 = 5$. Die Hessematrix ist für alle z_1 positiv definit. Somit liegt – anders als bei der unrestringierten Aufgabe $\min j(z)$ u.d.N $x \in \mathbb{R}^2$ – an der Stelle $(5, 2)^T$ ein lokales Minimum vor. Dass bei der unrestringierten Aufgabe kein lokales Minimum vorliegt, resultiert aus der Diskussion des unrestringierten OP:

$$\nabla j \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{10} \cdot x_1 \\ \frac{4}{10} \cdot (x_2 - 2) \end{pmatrix}, \quad \text{Hess}(j) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{10} & 0 \\ 0 & \frac{4}{10} \end{pmatrix}.$$

Hier liegt zwar eine Nullstelle des Gradienten an $(5, 2)^T$ vor, allerdings ist die Hessematrix unabhängig von dem eingesetzten Wert indefinit, da das Produkt

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \left(\text{Hess}(j) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{-2}{10} \cdot a^2 + \frac{1}{10} \cdot b^2$$

für $a = 1, b = 0$ negativ und für $a = 0, b = 1$ positiv ist.

□

2.1.2 unendlichdimensionale Optimierung

Ein Vorgehen wie in Beispiel 2.3 ist in der Regel nicht möglich. Die Nebenbedingung kann im Allgemeinen für ungleichheitsrestringierte Aufgaben nicht in die Zielfunktion eingesetzt werden, es ist also nicht möglich, das restringierte OP in ein Unrestringiertes umzuformen. Deshalb müssen neue Kriterien gefunden werden, mithilfe derer überprüft werden kann, ob es sich bei einem speziellen Punkt um ein lokales Optimum handelt. Dies werde ich im Kapitel 3 für eine verallgemeinerte Form der Optimierungsaufgabe behandeln.

Aus diesem Grund definiere ich nun – analog zu der Darstellung (2) – die unendlichdimensionale Optimierungsaufgabe, welche ich im Folgenden im Zusammenhang mit dem Optimalsteuerungsproblem verwenden werde.

Definition 2.4 (unendlichdimensionale Optimierungsaufgabe¹⁰).

Gegeben sei der Banachraum Z , eine nicht leere Teilmenge $\Sigma \subseteq Z$, $\Sigma \neq \emptyset$ und das Funktional

$$J : Z \rightarrow \mathbb{R}.$$

¹⁰Die Definition lehnt sich an das Problem 2.2.7 in [8] an.

Als allgemeine unendlich dimensionale Optimierungsaufgabe betrachten wir folgende Aufgabenstellung:

$$\min J(z) \quad \text{u.d.N.} \quad z \in \Sigma.$$

Analog zu der Definition für das endlichdimensionale OP bezeichne ich das Funktional J als Zielfunktion, Σ als zulässige Menge und alle Elemente $\bar{z} \in \Sigma$ als zulässige Punkte. Im Falle $\Sigma = Z$ heißt das Problem unrestringiert, andernfalls nennen wir es restringiert. Das Problem wird als konvex bezeichnet, wenn sowohl das Funktional J , als auch die Menge Σ konvex sind.

Wie im Endlichdimensionalen in Formel (3) bietet es Vorteile, die Nebenbedingungen mithilfe von Gleichheits- und Ungleichheitsrestriktion anzugeben. Für das unendlichdimensionale OP fügen wir noch eine Mengenrestriktion hinzu. Dies geschieht zur besseren Verwendbarkeit im Zusammenhang mit den noch zu definierenden Optimalsteuerungsproblemen. Da wir im Folgenden viel mit dieser Darstellung arbeiten werden, bezeichnen wir sie als Standardform des Optimierungsproblems.

Definition 2.5 (unendlichdimensionales OP in Standardform¹¹).

Gegeben seien die Banachräume $(Z, \|\cdot\|_Z)$, $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$, eine nicht leere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge $S \subseteq Z$, $S \neq \emptyset$, $\text{int}(S) \neq \emptyset$, ein abgeschlossener und konvexer Kegel¹² $K \subseteq W$ mit Spitze in 0_W und Funktionen

$$J : Z \rightarrow \mathbb{R}, \quad G : Z \rightarrow W, \quad H : Z \rightarrow V,$$

so dass die Menge

$$\Sigma := S \cap G^{-1}(K) \cap H^{-1}(0_V)$$

nicht leer ist. Hier bezeichnen G^{-1} und H^{-1} die Urbilder der entsprechenden Funktionen. Die unendlichdimensionale Optimierungsaufgabe besteht darin, die Zielfunktion J unter den Nebenbedingungen

$$G(z) \in K, \quad H(z) = 0_V, \quad z \in S$$

zu minimieren. Die Bedingung $z \in S$ wird als Mengen-, $H(z) = 0_V$ als Gleichheits- und $G(z) \in K$ als Ungleichheits- beziehungsweise Kegelrestriktion bezeichnet.

Im Folgenden wird häufig als zusätzliches Kriterium an die Glattheit der Funktionen J , G und H Fréchet-Differenzierbarkeit¹³ gefordert, da notwendige Optimalitätskriterien erster Ordnung hergeleitet werden.

¹¹Die Definition ist an das Problem 2.3.3 in [8] angelehnt.

¹²Die Definition des Kegels findet sich im Anhang unter Definition 5.30.

¹³Die Definition der Fréchet-Differenzierbarkeit und anderen Differentiationsbegriffen auf Banachräumen findet sich unter Definition 5.13 im Anhang.

2.2 Optimalsteuerungsprobleme

Das Optimalsteuerungsproblem besteht darin, eine Funktion z zu finden, die unter Erfüllung gewisser Bedingungen ein von z abhängiges Funktional J minimiert. Da dynamische Gleichungen sowohl in der Natur als auch bei der Modellierung von Situationen aus der Wirtschaft eine große Rolle spielen (vgl. [7]), sind sie ein fester Bestandteil der an die Funktion z gestellten Bedingungen. Beispielsweise werden die Populationsentwicklung einer bestimmten Art (siehe Beispiel 1.0.3 aus dem Buch [8]) und die Entwicklung bestimmter Flugparameter während einer Flugzeugnotlandung (siehe Beispiel 1.11 aus dem Buch [8]) durch dynamische Gleichungen beschrieben. Reicht für die Beschreibung der Populationsentwicklung eine gewöhnliche Differentialgleichung (engl. ordinary differential equation, ODE) aus, ist für eine komplexere Beschreibung der Dynamik bei der Notlandung eine Verallgemeinerung der ODE notwendig. Um auch eine solche Bedingung in dem Optimalsteuerungsproblem erfassen zu können, wird die differential-algebraische Gleichung (engl. differential algebraic equation, DAE) definiert.

Aufgrund der Einbindung der DAE in die Optimale Steuerung ist es – wie im weiteren Verlauf dieser Arbeit ersichtlich wird – vorteilhaft, den beiden Begriffen ODE und DAE per Definition eine weitere Abhängigkeit von einer Funktion u hinzuzufügen. Also betrachten wir im Folgenden als ODE eine Gleichung der Form

$$f(t, z(t), u(t)) = \dot{z}(t).$$

Diese Darstellung bezeichnen wir als explizite Form der Differentialgleichung, das u bezeichnen wir als Steuerungsvariable. Sie wird als externer Dateneingang gesehen, der direkt kontrolliert werden und so das dynamische System beeinflussen kann. Die differential-algebraische Gleichung ist wie folgt definiert:

Definition 2.6 (allgemeine differential-algebraische Gleichung¹⁴).

Betrachte ein nicht leeres, reelles Intervall $\delta := [t_0, t_f] \subseteq \mathbb{R}$. Es gelte für die Intervallgrenzen $t_0 < t_f$.

- a) Für eine genügend glatte Funktion $F : \delta \times \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$ bezeichnen wir die Gleichung

$$F(t, z(t), \dot{z}(t), u(t)) = 0_{\mathbb{R}^{n_z}} \quad (4)$$

als allgemeine differential-algebraische Gleichung in impliziter Form. Wir bezeichnen z als Zustands- und u als Steuerungsfunktion.

¹⁴Diese Definition ist angelehnt an [8], Definition 1.1.1.

b) Eine DAE, die keine ODE ist wird im Folgenden als reine DAE bezeichnet.

Für diese Kategorie dynamischer Gleichungen ist der Name *differential-algebraische Gleichung* gewählt, da für eine reine DAE neben gewöhnlichen Differentialgleichungen auch algebraische Gleichungen vorhanden sein können. Diese Tatsache wird in Beispiel 2.7 näher erläutert.

Die ODE ist ein Spezialfall der DAE. Die implizite Darstellung der ODE resultiert aus der Expliziten durch die folgende Setzung:

$$F(t, z(t), \dot{z}(t), u(t)) := f(t, z(t), u(t)) - \dot{z}(t).$$

Eine differential-algebraische Gleichung, die in explizite Form gebracht werden kann, ist also eine gewöhnliche Differentialgleichung. Wenn F stetig Fréchet-Differenzierbar ist, ist dies immer dann möglich, wenn die partielle Ableitung $F'_z(\cdot)$ linear, stetig und invertierbar ist. Dann existiert nach dem Satz der impliziten Funktion¹⁵ lokal eine Funktion f , die abhängig ist von t , z und u mit

$$F(t, z(t), f(t, z(t), u(t)), u(t)) = 0_Z,$$

also lässt sich \dot{z} lokal implizit durch die Funktion f beschreiben:

$$f(t, z(t), u(t)) = \dot{z}(t).$$

Somit erhalten wir direkt eine gewöhnliche Differentialgleichung in expliziter Form. Sie enthält keine rein-algebraischen Gleichungen, sondern in jeder Komponente gewöhnliche Differentialgleichungen. Die partielle Ableitung der DAE nach \dot{z} aus dem folgenden Beispiel 2.7 ist nicht invertierbar. Es handelt sich um eine reine DAE.

Beispiel 2.7 (DAE in impliziter Darstellung).

Betrachte die DAE zu der wie folgt definierten Funktion F :

$$F(t, z(t), \dot{z}(t)) = \begin{pmatrix} t + z_1(t) - \dot{z}_1(t) \\ 3 - z_2(t) - \dot{z}_2(t) \\ z_3(t) - t + 4 \end{pmatrix}.$$

Die differential-algebraische Gleichung lautet dann wie folgt:

$$\begin{pmatrix} t + z_1(t) - \dot{z}_1(t) \\ 3 - z_2(t) - \dot{z}_2(t) \\ z_3(t) - t + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungen in der ersten und zweiten Komponente sind gewöhnliche Differentialgleichungen. Die Gleichung in der dritten Komponente ist rein algebraisch, da sie keine Ableitung einer Komponente von z beinhaltet.

¹⁵Siehe Theorem 5.9 im Anhang.

In dem Beispiel 2.7 ist es möglich, die differentiellen von den algebraischen Gleichungen zu trennen. Nun stellt sich die Frage, wann dies im Allgemeinen möglich ist. Dafür definiere ich die als semi-explizite DAE bezeichnete spezielle Darstellung einer DAE, die diese Trennung schon beinhaltet. Anschließend wird eine kurze Überlegung angestellt, ob alle allgemeinen DAEs in diese Form gebracht werden können. Wie in [8] auf Seite 12 geschildert, ist aufgrund der Trennung des differentiellen von dem algebraischen Anteil der DAE die semi-explizite Form für das Optimalsteuerungsproblem leichter zu handhaben.

Definition 2.8 (semi-explizite differential-algebraische Gleichung¹⁶).

Betrachte ein nicht leeres Intervall $\delta := [t_0, t_f] \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 < t_f$ und genügend glatte Funktionen

$$\begin{aligned} f : \delta \times \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_u} &\rightarrow \mathbb{R}^{n_x} \text{ und} \\ a : \delta \times \mathbb{R}^{n_z} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_u} &\rightarrow \mathbb{R}^{n_y}. \end{aligned}$$

- a) Die differential-algebraische Gleichung in semi-expliziter Form ist definiert als Gleichungssystem der Form

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), y(t), u(t)) \quad (5)$$

$$0_{\mathbb{R}^{n_y}} = a(t, x(t), y(t), u(t)). \quad (6)$$

Die Gleichung (5) wird als differentielle und (6) als algebraische Gleichung bezeichnet.

- b) Zusätzlich zu dem Gleichungssystem (5, 6) fordern wir als Glattheitseigenschaft an die Lösung die Gültigkeit des Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau), y(\tau), u(\tau)) \, d\tau. \quad (7)$$

Beispiel 2.9 (DAE in semi-expliziter Form).

Betrachte die DAE aus Beispiel 2.7. Wie bereits erwähnt lässt sich hier der differentielle von dem algebraischen Teil trennen. In semi-expliziter Form sieht das Beispiel wie folgt aus: Definiere

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ und } y = (y_1) := (z_3).$$

¹⁶Diese Definition ist angelehnt an [8], Definition 1.1.5.

Dann sind die Funktionen f und a wie folgt definiert:

$$f(t, x(t)) := \begin{pmatrix} t + x_1(t) \\ 3 - x_2(t) \end{pmatrix}, \quad a(t, y(t)) := y_1(t) - t + 4.$$

Die DAE lässt sich also in diesem Fall problemlos in semi-explizite Form bringen. In diesem Fall ist sie in semi-expliziter Form für einen gegebenen Anfangswert $z_0 := z(0_{\mathbb{R}^3}) = (0 \ 4 \ -4)^T$ direkt zu lösen. Sie besitzt folgende Lösung:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t - t - 1 \\ e^{-t} + 3 \\ t - 4 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsfunktion ist in Abbildung 3 für $t \in [-1, 1]$ dargestellt.

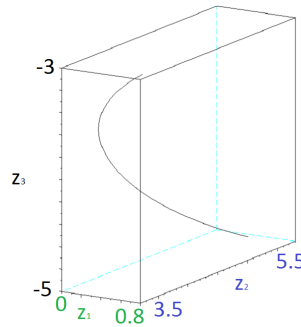


Abbildung 3: Die Lösung der DAE mit Anfangswert z_0 für $t \in [-1, 1]$.

Mit folgender Umformung ist es möglich, eine allgemeine differential-algebraische Gleichung (4) in semi-explizite Form zu bringen:

$$y := \dot{z}$$

$$x := z$$

$$f(t, x(t), y(t), u(t)) := y(t) \tag{8}$$

$$a(t, x(t), y(t), u(t)) := F(t, x(t), y(t), u(t)). \tag{9}$$

Hier wird in (8) die Ableitung von z mit y substituiert, sodass die Gleichung (9) eine zulässige Wahl für die algebraische Funktion a darstellt, obwohl faktisch gesehen in ihr die Ableitung von z vorkommt. Man beachte, dass aufgrund der Setzung die n_y mit n_x und n_z übereinstimmt und deshalb die Setzung gültig ist.

Dass die semi-explizite Form der DAE allerdings immer noch eine Lösung besitzt, ist nicht garantiert. Die Einschränkungen an die Lösung in Formel

(7) werden getroffen, um folgenden Nachteil der Transformation zu beseitigen: Durch die Transformation (8, 9) kann es im Allgemeinen vorkommen, dass die Lösungen der differential-algebraischen Gleichungen vor und nach der Umformung nicht identisch sind (vgl. [8]). Ein Beispiel dieses Sachverhaltes kann in [8] auf Seite 12 nachgelesen werden. Die Diskussion dieser und einiger weiterer Eigenschaften der DAE führt hier jedoch zu weit. Für ein tiefergreifendes Verständnis sei hier auf das erste Kapitel von [8] verwiesen. Jedoch seien im Folgenden noch einige weitere – für die Verwendung in dem Optimalsteuerungsproblem interessante – Eigenschaften der DAE erwähnt.

Bemerkung 2.10 (Eigenschaften der DAE).

Obwohl die DAE in semi-expliziter Form der ODE auf den ersten Blick ähnlich scheint, existieren gravierende Unterschiede. Einige dieser Unterschiede und wichtige Eigenschaften der DAE sind hier mit Referenzen zu der Quelle [8] aufgelistet. Weitere Informationen finden sich auch unter [6].

- *DAEs und ODEs besitzen verschiedene Stabilitätseigenschaften.*¹⁷
- *Der Anfangswert der DAE kann nicht beliebig gewählt werden. Ein möglicher Anfangswert wird als konsistenter Anfangswert bezeichnet.*¹⁸
- *Die Steuerungsvariable u muss genügend glatt sein, um eine belangvolle Lösung der DAE zu erhalten.*¹⁸
- *Die algebraische Variable y ist implizit durch die algebraische Gleichung oder eine ihrer Ableitungen definiert.*¹⁹
- *Die algebraische Variable y wird in der semi-expliziten DAE ausschließlich zu Anschauungszwecken von der Steuerungsvariable u getrennt. Ein Grund für diese Trennung wird aus der Definition des Optimalsteuerungsproblems ersichtlich, weshalb ich im Anschluss daran noch einmal auf diese Eigenschaft zu sprechen komme. Wichtig ist: Die algebraische Variable und die Steuerungsvariable teilen sich dieselben Anforderungen an die Glattheit.*²⁰

¹⁷Siehe [8], Seite 9. Nähere Informationen sind in Kapitel 1 derselben Quelle unter Perturbationsindex auf den Seiten 24 ff. zu finden.

¹⁸Weiterführende Informationen können in [8] unter Beispiel 1.1.4 auf den Seiten 10 f. nachgelesen werden.

¹⁹Siehe [8], Seite 17. Für DAEs existieren Indizes, die den Grad der Regularität messen. Es gibt viele verschiedene Indizes, wie beispielsweise den Differentiationsindex und den Perturbationsindex. Eine Einführung in solche Indizes findet sich auf Seiten 24 f. in derselben Quelle. Für weiterführende Informationen hierzu sei außerdem der Unterpunkt Differentiationsindex auf den Seiten 28 f. aus Kapitel 1 empfohlen.

²⁰Diese Aussage ist nachzulesen in [8] auf Seite 15.

Diese Eigenschaft wird im Folgenden Verwendung finden, wenn passende Funktionenräume für x , y und u gefunden werden müssen.

Nun, da die semi-explizite differential-algebraische Gleichung definiert ist, wenden wir uns dem in der vorliegenden Arbeit untersuchten Optimalsteuerungsproblem zu:

Definition 2.11 (Optimalsteuerungsproblem in Standardform²¹).

Es sei ein nicht leeres, reelles Intervall $\delta := [t_0, t_f] \subseteq \mathbb{R}$ mit festen Werten $t_0 < t_f$ und eine nichtleere, abgeschlossene und konvexe Menge $U \subset L_\infty^{n_u}(\delta)$ mit nichtleerem Inneren. Außerdem seien folgende Funktionen genügend glatt und gegeben:

$$\phi : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (10)$$

$$f_0 : \delta \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f : \delta \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x},$$

$$a : \delta \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x},$$

$$\psi : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_\psi}, \quad (11)$$

$$c : \delta \times \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_c},$$

$$s : \delta \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_s}.$$

Wir bezeichnen die Aufgabenstellung, Funktionen²²

$$x \in W_{1,\infty}^{n_x}(\delta), \quad y \in L_\infty^{n_y}(\delta), \quad u \in L_\infty^{n_u}(\delta)$$

zu bestimmen, die die Zielfunktion

$$J : W_{1,\infty}^{n_x}(\delta) \times L_\infty^{n_y}(\delta) \times L_\infty^{n_u}(\delta)$$

$$J(x, y, u) := \phi(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), y(t), u(t)) dt$$

unter Berücksichtigung der semi-expliziten DAE

$$\dot{x} = f(t, x(t), y(t), u(t)),$$

$$0_{\mathbb{R}^{n_y}} = a(t, x(t), y(t), u(t)),$$

²¹Diese Definition ist angelehnt an die aus [8] auf Seite 68.

²²Für die Definition der betrachteten Räume sei hier auf die Definitionen 5.21 und 5.20 im Anhang verwiesen. Eine Begründung der Wahl dieser Funktionsräume wird Bemerkung 2.12 liefern.

unter Einhaltung der Rand- (12), Steuerungs- (13), Status- (14)

$$\psi(x(t_0), x(t_f)) = 0_{\mathbb{R}^{n_\psi}}, \quad (12)$$

$$c(t, x(t), y(t), u(t)) \leq 0_{\mathbb{R}^{n_c}} \quad \text{fast überall in } \delta, \quad (13)$$

$$s(t, x(t)) \leq 0_{\mathbb{R}^{n_s}} \quad (14)$$

und Mengenbeschränkungen

$$u(t) \in U \quad \text{fast überall in } \delta$$

bezüglich x , y und u zu minimieren, als Standardform des differential-algebraischen Optimalsteuerungsproblems (engl. *optimal control problem*, *OCP*), wenn ein Tripel (x, y, u) existiert, das allen Nebenbedingungen genügt.

Bei der allgemeinen Definition des OCP, wie sie in [8] angegeben ist, sind die reellen Intervallgrenzen t_0 und t_f nicht von Anfang an gegeben, sondern Teil der Optimierung. Dann sind die Funktionen (10) und (11) zusätzlich von ihnen abhängig. Es existieren Techniken, um auch ein solches Problem in die Standardform (2.11) zu überführen. Das resultierende System ist dann äquivalent mit dem Ausgangssystem, wie in [8] nachvollzogen werden kann. Das genaue Vorgehen und die allgemeine Definition eines OCP sind im Abschnitt 1.2 in [8] nachzulesen.

Bemerkung 2.12 (Eigenschaften der Funktionen u und y).

Nun, da das OCP definiert ist, kommen wir zurück auf die Aussage aus Bemerkung 2.10. Hier wurde festgehalten, dass in der semi-expliziten DAE die algebraische Variable y von Kontrollvariable u getrennt wird, obwohl sich beide Funktionen dieselben mathematischen Eigenschaften teilen, wie in Kapitel 3 der Quelle [8] verdeutlicht wird.

Diese – im mathematischen Sinne überflüssige – Trennung geschieht, um zu verdeutlichen, dass die Steuerungsvariable im Gegensatz zu der algebraischen Variable während des Prozesses der optimalen Steuerung direkt beeinflusst werden kann (vgl. [8], Seite 15).

Aufgrund der mathematisch gesehen gleichen Eigenschaften für u und y werden beide aus dem Raum $L_\infty(\delta)$ der jeweiligen Dimension gewählt. Lebesguemessbarkeit wird aufgrund der an eine Lösung der semi-expliziten DAE gestellten Anforderungen gefordert.

Da x die differentielle Variable ist, sind die Anforderungen an die Glattheit der Funktion höher als die an die algebraische Variable y und die Steuerungsfunktion u . Wir verlangen für x unendlich oft stetige Differenzierbarkeit mit endlicher Norm.

Zusätzlich zu den dynamischen Gleichungen, die durch die DAE zusammen mit den Randbeschränkungen festgelegt sind, existieren – ähnlich dem OP – Ungleichheitsrestriktionen. Jedoch sind sie, anders als für das OP, in zwei Funktionen c und s unterteilt. Es fällt auf, dass die Funktion c von allen drei gesuchten Variablen abhängig ist, wohingegen die reinen Statusbeschränkungen s nur von der differentiellen Variablen x abhängig sind. Das geschieht aufgrund der unterschiedlichen Glattheitsanforderungen, die für die verschiedenen Funktionen gefordert werden (vgl. [8], Seite 15).

Als Abschluss dieses Kapitels betrachten wir nun auch ein Beispiel für ein Optimalsteuerungsproblem:

Beispiel 2.13 (Bewegung eines Teilchens I).

Es sei gegeben ein masseloses Teilchen, welches sich auf einer bestimmten – durch die Funktion x beschrieben – Höhe zu einem bestimmten Ziel bewegen soll. Dabei bewegt es sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit in horizontaler Richtung. Die Höhe zur Startzeit $t_0 = 0$ und die Zielhöhe am Endzeitpunkt $t_f = \pi$ sollen hierbei identisch sein. Mithilfe eines regelbaren Magneten, der sich auf der Höhe 2 befindet, kann die natürliche Bahn des Teilchens manipuliert werden. Die Stärke des Magneten zum Zeitpunkt t bezeichnen wir mit $u(t)$. Zu minimieren ist die Abweichung der Teilchenbahn von einer bestimmten, durch die Funktion \sin vorgegebenen Bahn. Die Stärke des Magneten ist durch die Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|u(t)| \leq 2$ beschränkt. Abbildung (4) skizziert den oben beschriebenen Sachverhalt.

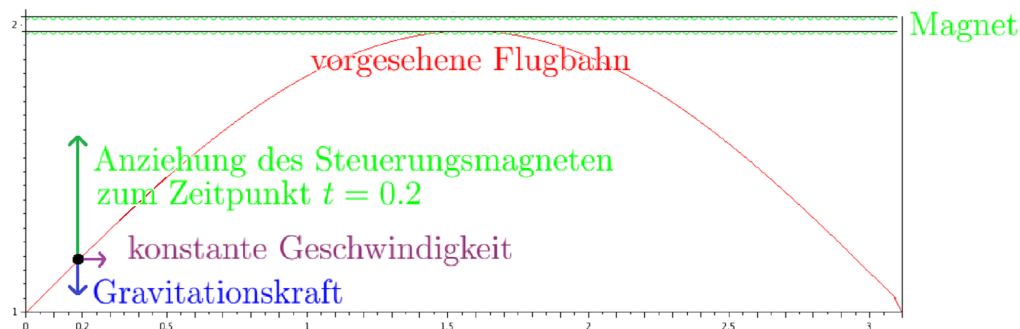


Abbildung 4: Die vorgegebene Bahn und der Magnet des beschriebenen OCP.

Es ergibt sich folgendes Optimalsteuerungsproblem:

Minimiere für das Intervall $\delta := [0, \pi] \subseteq \mathbb{R}$ und die Funktionen

$$\begin{aligned} f_0 : \delta \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f_0(t, x(t)) &= \frac{1}{2} \cdot \left| x(t) - \sin(t) \right|, \\ f : \delta \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(t, x(t), u(t)) &= -9.81 + u(t) \cdot (x(t) - 2), \\ \psi : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x} &\rightarrow \mathbb{R}^{n_\psi}, & \psi((x(0), (x, 1))) &= x(0) - x(1), \\ c : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & c(u(t)) &= |u(t)| - 2 \end{aligned}$$

die Zielfunktion

$$\int_0^\pi \frac{1}{2} \cdot \left| x(t) - \sin(t) \right| dt$$

unter Berücksichtigung der semi-expliziten DAE²³

$$\dot{x} = -9.81 + u(t) \cdot (x(t) - 2),$$

und Einhaltung der Rand- und Steuerungsbeschränkungen

$$x(t_0) - x(t_f) = 0, \quad |u(t)| - 2 \leq 0.$$

²³Es handelt sich bei der DAE aufgrund des Fehlens einer algebraischen Gleichung um eine gewöhnliche Differentialgleichung.

2.3 Transformation

Nun, da wir in Definition 2.5 und 2.11 die unendlichdimensionale Optimierungsaufgabe und das Optimalsteuerungsproblem definiert haben, treffen wir Vorbereitungsschritte für die Detektion lokaler Extrema. Wie bereits erwähnt ist es möglich, das allgemeine Optimalsteuerungsproblem in eine unendlichdimensionale Optimierungsaufgabe zu transformieren. Die Transformation wird in diesem Abschnitt vorgestellt. Im darauf folgenden Kapitel kann dann die unendlichdimensionale Optimierungsaufgabe 2.5 auf notwendige Optimalitätskriterien untersucht werden.

Zu diesem Zwecke ist zunächst unser Ziel, durch Zusammenfassung der Funktionen x , y und u ein System zu schaffen, bestehend aus einem Zielfunktional J , einer Gleichheitsrestriktion H , einer Ungleichheitsrestriktion G und einer Mengenrestriktion S , das wir als unendlichdimensionale Optimierungsaufgabe in Standardform 2.5 verwenden können. Dazu bieten sich die folgenden Funktionen an:

1. als **Zielfunktion** J die Zielfunktion aus dem OCP

$$J(x, y, u) := \phi(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), y(t), u(t)) dt,$$

2. als **Gleichheitsrestriktion** H die differential-algebraische Gleichung bestehend aus den Funktionen f und a und der Randbeschränkung ψ ,
3. als **Ungleichheitsrestriktion** G die Steuerungs- und Statusbeschränkungen c und s .

Als Startraum der Funktionen J , H und G ist Z als Produkt der Funktionenräume definiert, aus denen x , y und u stammen:

$$Z := W_{1,\infty}^{n_x}(\delta) \times L_{\infty}^{n_y}(\delta) \times L_{\infty}^{n_u}(\delta).$$

Der Zielraum der Funktion J ist – passend für die Definition des OP – der Raum der reellen Zahlen mit der euklidischen Norm. Der Bildraum der Gleichheitsrestriktion H ist wie folgt definiert:

$$V := L_{\infty}^{n_x}(\delta) \times L_{\infty}^{n_y}(\delta) \times \mathbb{R}^{n_{\psi}},$$

der der Ungleichheitsrestriktion G durch

$$W := L_{\infty}^{n_c}(\delta) \times C^{n_s}(\delta).$$

Nun finden mit den Funktionen

$$J : Z \rightarrow \mathbb{R}, \quad H : Z \rightarrow V, \quad G : Z \rightarrow W,$$

die durch

$$J(z) = J \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \phi(x(t_0), x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x(t), y(t), u(t)) \, dt,$$

$$H(z) = H \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\cdot, x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) - \dot{x}(\cdot) \\ g(\cdot, x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) \\ -\psi(x(t_0), x(t_f)) \end{pmatrix},$$

$$G(z) = G \begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c(\cdot, x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) \\ -s(\cdot, x(\cdot)) \end{pmatrix}$$

definiert sind, alle Bestandteile des OCP bis auf die Mengenrestriktion Einzug in die transformierte Aufgabe. Die Mengenrestriktion beinhaltet im OCP nur eine Einschränkung an u . Da das u als solches in der transformierten Aufgabe nicht mehr vorkommt, ergänzen wir die Mengenrestriktion $z \in S$ für wie folgt definiertes S :

$$S := W_{1,\infty}^{n_x}(\delta) \times L_{\infty}^{n_y}(\delta) \times \{u \in L_{\infty}^{n_u}(\delta) \mid u(t) \in U \text{ für fast alle } t \in \delta\},$$

sodass sie auf den Definitionsbereich Z der Funktion J angewendet werden kann. Der für die Ungleichheitsrestriktion G benötigte Kegel ist aufgrund unserer Anforderungen wie folgt definiert:

$$K := \{k \in L_{\infty}^{n_c}(\delta) \mid k(t) \geq 0_{\mathbb{R}^{n_c}} \text{ fast überall in } \delta\} \\ \times \{k \in C^{n_s}(\delta) \mid k(t) \geq 0_{\mathbb{R}^{n_s}} \text{ für alle } t \text{ aus } \delta\}.$$

In der Definition der unendlichdimensionalen Optimierungsaufgabe 2.5 werden gewisse Eigenschaften gefordert, die nun für unser transformiertes Problem überprüft werden müssen. Dafür verwenden wir das folgende Lemma:

Lemma 2.14.

Es seien $(A, \|\cdot\|_A)$ und $(B, \|\cdot\|_B)$ Banachräume. Dann ist die Abbildung $\|\cdot\|_{A \times B} : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$, die wie folgt definiert ist

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|_{A \times B} := \max\{\|a\|_A, \|b\|_B\} \quad \text{für } a \in A, b \in B,$$

eine Norm und $(A \times B, \|\cdot\|_{A \times B})$ ein Banachraum.

Beweis. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $z_1 := \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$, $z_2 := \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ für $a_i \in A, b_i \in B$ für $i = 1, 2$. Bezeichne $A \times B =: Z$. Für den Beweis des Lemmas sind folgende vier Aussagen zu zeigen:

- a) $\|\alpha \cdot z_1\|_Z = |\alpha| \cdot \|z_1\|_Z$.
- b) $\|z_1 + z_2\|_Z \leq \|z_1\|_Z + \|z_2\|_Z$.
- c) $\|z_1\|_Z = 0 \Rightarrow z_1 = 0_Z$.
- d) Eine beliebige Cauchyfolge $\{(a_k, b_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A \times B$ konvergiert in $A \times B$.

zu a) Für $\alpha = 0$ ist leicht durch Einsetzen der Definition der Norm einzusehen, dass die Aussage erfüllt ist. Es sei also im Folgenden $\alpha \neq 0$. Der Beweis der Gültigkeit von Aussage a) verwendet folgende Eigenschaft des Maximums: Ein nichtnegatives Skalar $|\alpha|$ kann aus der Maximumsfunktion durch Division beider Komponenten durch das Skalar herausgezogen werden. Durch Einsetzen der Definition der Norm im ersten Schritt und durch Anwenden der oben genannten Eigenschaft des Maximums und der Normeigenschaften von $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ erhalten wir die gewünschte Aussage wie folgt:

$$\begin{aligned} \|\alpha \cdot z_1\|_Z &= \max \{ \|\alpha \cdot a_1\|_A, \|\alpha \cdot b_1\|_B \} \\ &= \max \{ |\alpha| \cdot \|a_1\|_A, |\alpha| \cdot \|b_1\|_B \} \\ &= |\alpha| \cdot \max \{ \|a_1\|_A, \|b_1\|_B \} \\ &= |\alpha| \cdot \|z_1\|_Z. \end{aligned}$$

zu b) Der Beweis zu b) erfolgt mittels einer Fallunterscheidung, da die Maximumsfunktion entweder $\|a_1 + a_2\|_A$ oder $\|b_1 + b_2\|_B$ annimmt.

$$\|z_1 + z_2\|_Z = \max \{ \|a_1 + a_2\|_A, \|b_1 + b_2\|_B \}.$$

Fall 1: $\|z_1 + z_2\|_Z = \|a_1 + a_2\|_A$.

Da $\max \{ \|a_1\|_A, \|b_1\|_B \} \geq \|a_1\|_A$ und $\max \{ \|a_2\|_A, \|b_2\|_B \} \geq \|a_2\|_A$, gilt die zu zeigende Aussage

$$\begin{aligned} \|z_1 + z_2\|_Z &= \|a_1 + a_2\|_A \\ &\leq \|a_1\|_A + \|a_2\|_A \\ &\leq \max \{ \|a_1\|_A, \|b_1\|_B \} + \max \{ \|a_2\|_A, \|b_2\|_B \} \\ &= \|z_1\|_Z + \|z_2\|_Z. \end{aligned}$$

Fall 2: $\|z_1 + z_2\|_Z = \|b_1 + b_2\|_B$ funktioniert analog zu Fall 1.

zu c) Es sei $\|z_1\| = 0$. Wenn das Maximum zweier Zahlen kleiner gleich 0 ist, dann ist jede der beiden Zahlen kleiner gleich 0. Also folgt aus

$$0 = \|z_1\|_Z = \max \{ \|a_1\|_A, \|b_1\|_B \},$$

dass die Normen $\|a_1\|_A$ und $\|b_1\|_B$ kleiner gleich 0 sind. Da nun aber aufgrund der Normeigenschaften gilt²⁴

$$\|a_1\|_A, \|b_1\|_B \geq 0,$$

folgt mit der Normeigenschaft c) auf den Banachräumen A und B , dass $a_1 = 0_A$ und $b_1 = 0_B$ sind, also gilt $z_1 = 0_Z$. Dies war zu zeigen.

zu d) Der Beweis der Konvergenz der Cauchyfolge lässt sich auf die Konvergenz in den Teilräumen A und B zurückführen. Es sei also die Cauchyfolge $\{(a_k, b_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A \times B$ gegeben. Also gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ sodass für alle } m, n \geq N \text{ gilt } \|(a_m, b_m) - (a_n, b_n)\|_Z < \epsilon.$$

Da die Norm $\|\cdot\|_Z$ als Maximum der Normen auf den Räumen A und B definiert ist, gilt also insbesondere

$$\|a_m - a_n\|_A < \epsilon \text{ und } \|b_m - b_n\|_B < \epsilon,$$

also handelt es sich bei den Folgen $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in A beziehungsweise B um Cauchyfolgen. Da es sich bei A und B um Banachräume handelt, konvergieren sie gegen Grenzwerte, die wir mit a und b bezeichnen. Also konvergiert $\{(a_k, b_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ in Z gegen (a, b) . \square

Theorem 2.15.

Bei der Problemstellung

$$\min J \quad \text{u.d.N.} \quad z \in S, \quad G(z) \in K, \quad H(z) = 0_V$$

handelt es sich um eine Optimierungsaufgabe in Standardform (2.5).

Beweis. Damit unsere Funktionen der unendlichdimensionalen Optimierungsaufgabe in Standardform (2.5) genügen, müssen folgende Kriterien überprüft werden:

1. Die Mengen Z, V, W mit zugehörigen Normen sind Banachräume,
2. S ist eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge von Z mit $\text{int}(S) \neq \emptyset$,
3. Σ ist nicht leer,
4. K ist ein abgeschlossener, konvexer Kegel mit Spitze in 0_W .

²⁴Siehe Theorem 5.6 im Anhang.

zu 1: Betrachte folgende Abbildungen für die Mengen Z , V und W :

$$\begin{aligned}\|z\|_Z &= \|(x, y, u)^T\|_Z := \max \{ \|x\|_{1,\infty}, \|y\|_\infty, \|u\|_\infty \}, \\ \|v\|_V &= \|(x, y, r)^T\|_V := \max \{ \|x\|_{1,\infty}, \|y\|_\infty, \|r\|_2 \}, \\ \|w\|_W &= \|(w_1, w_2)^T\|_W := \max \{ \|w_1\|_\infty, \|w_2\|_\infty \},\end{aligned}$$

die durch das Bilden des Maximums der Normen auf den Banachräumen der Komponenten gebildet werden. Durch iterative Anwendung des Lemmas 2.14 folgt die Behauptung.

zu 2: Es ist Folgendes zu zeigen:

- 2a)** $Z \supseteq S$ mit $\text{int}(S) \neq \emptyset$.
- 2b)** Die Menge S ist abgeschlossen.
- 2c)** Die Menge S ist konvex.

zu 2a) Für den Beweis der Aussagen ist es hilfreich, dem letzten Bestandteil der Menge S eine Bezeichnung zu geben. Wir bezeichnen im Folgenden $\{u \in L_\infty^{n_u}(\delta) \mid u(t) \in U \text{ für fast alle } t \in \delta\}$ als U_{FU} . Dann ist S wie folgt definiert:

$$S = W_{1,\infty}^{n_x}(\delta) \times L_\infty^{n_y}(\delta) \times U_{FU}.$$

Nach Konstruktion ist S eine Teilmenge des Banachraums

$$Z = W_{1,\infty}^{n_x}(\delta) \times L_\infty^{n_y}(\delta) \times L_\infty^{n_u}(\delta),$$

da U_{FU} Teilmenge von $L_\infty^{n_u}(\delta)$ ist. Um zu zeigen, dass S innere Punkte enthält, zeigen wir erst die Existenz eines Elementes $u \in U_{FU}$. Dieses Element konstruieren wir mithilfe eines inneren Punktes $u_0 \in \text{int}(U)$. Dieser existiert, da in der Definition des OCP 2.11, gefordert ist, dass die Menge U innere Punkte enthält. Da u_0 ein innerer Punkt der Menge U ist, existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $U_\epsilon(u_0) \subset U$ eine Teilmenge von U ist.

Nun betrachte die konstante Funktion $u \in U_{FU}$ definiert durch

$$u : \delta \rightarrow \mathbb{R}^{n_u}, \quad u(t) := u_0 \text{ für alle } t \in \delta.$$

Die Lebesguemessbarkeit²⁵ ist zu überprüfen. Das Urbild der Funktion u sieht für beliebige (insbesondere offene) Teilmengen $M \subset L_\infty^{n_u}(\delta)$ wie folgt aus:

$$u^{-1}(M) = \begin{cases} \delta, & \text{für } u_0 \in M, \\ \emptyset, & \text{für } u_0 \notin M. \end{cases}$$

²⁵Eine Definition der Messbarkeit findet sich im Anhang unter Definition 5.18.

Die leere Menge \emptyset und das abgeschlossene Intervall δ sind nach Theorem 5.19 Lebesgue-Mengen. Nach Definition 5.18 im Anhang ist u aus diesem Grunde Lebesgue-messbar. Um zu zeigen, dass u ein Element des Raumes $L_\infty^{n_u}(\delta)$ ist, bleibt zu überprüfen, dass für die Norm gilt

$$\|u\|_\infty = \inf_{N \subseteq \delta \text{ Nullmenge}} \sup_{\delta \setminus N} \|u(t)\|_2 < \infty.$$

Da $\|u\|_\infty = u_0 < \infty$ ist u ein Element des Funktionenraums $L_\infty^{n_u}(\delta)$. Weil außerdem $u(t) = u_0 \in U$ für alle t aus δ , folgt, dass u Element der Menge U_{FU} ist.

Es sei $\bar{u} \in U_\epsilon(u) \subset L_\infty^{n_u}(\delta)$ beliebig. Falls gezeigt werden kann, dass $\bar{u} \in U_{FU}$, handelt es sich bei u um einen inneren Punkt der Menge U_{FU} .

Zu zeigen ist, dass $\bar{u}(t) \in U$ fast überall in δ . Dies ist erfüllt, da

$$\inf_{N \subseteq \delta \text{ Nullmenge}} \sup_{\delta \setminus N} \|u(t) - \bar{u}(t)\|_2 < \epsilon.$$

Für fast alle $t \in \delta$ gilt deshalb

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\|_2 < \epsilon.$$

Da $\bar{u}(t) \in U_\epsilon(u(t))$, liegt u insbesondere in $\text{int}(U_{FU})$, was zu zeigen war.

zu 2b) Wieder reicht es, die Menge U_{FU} zu betrachten, und in diesem Fall die Abgeschlossenheit zu zeigen. Betrachte also eine beliebige, gegen $u \in L_\infty^{n_u}(\delta)$ konvergente Folge $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq U_{FU}$. Zu zeigen ist $u \in U_{FU}$. Da $L_\infty^{n_u}(\delta)$ ein Banachraum ist, liegt der Grenzwert u der Folge $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in eben jenem Raum.

Zu zeigen ist noch für die Folge u_k mit den folgenden Eigenschaften

$$u_k : \delta \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbar mit } \|u\|_\infty < \infty, u_k(t) \in U \text{ fast überall in } \delta,$$

dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) \in U \text{ fast überall in } \delta.$$

Die Konvergenz $u_k \rightarrow u$ lässt sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\|_{L_\infty^{n_u}} = 0 \\ \Leftrightarrow & \forall \epsilon > 0 \exists K(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq K(\epsilon) : \|u_k - u\|_{L_\infty^{n_u}} < \epsilon \\ \Leftrightarrow & \forall \epsilon > 0 \exists K(\epsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq K(\epsilon) : \inf_{N \subseteq \delta \text{ Nullmenge}} \sup_{t \in \delta \setminus N} \|u_k(t) - u(t)\|_2 < \epsilon \end{aligned}$$

Da außerdem $u_k(t) \in U$ fast überall in δ folgt, dass auch der Grenzwert u fast überall in δ nach U abbildet. Also liegt u in der Menge U_{FU} , was zu zeigen war.

2c) Die Konvexität folgt direkt aus der noch zu zeigenden Konvexität der Menge U_{FU} .

Es seien u_1 und u_2 Elemente der Menge U_{FU} und $\lambda \in (0, 1)$. Bezeichne als N die Vereinigung der Nullmengen, in denen u_1 und u_2 nicht nach U abbilden. Es sei $t \in \delta \setminus N$ beliebig. Dann gilt

$$u_1(t) \in U \ni u_2(t).$$

Also befindet sich die Summe aufgrund der Konvexität der Menge U

$$\lambda \cdot u_1(t) + (1 - \lambda) \cdot u_2(t) \in U$$

wieder in U . Also ist $\lambda \cdot u_1(\cdot) + (1 - \lambda) \cdot u_2(\cdot)$ für alle $\lambda \in (0, 1)$ Element von U_{FU} , was zu zeigen war.

zu 3: Die Menge Σ ist nicht leer, da laut Definition des OCP ein Tripel x, y, u existieren muss, das allen Nebenbedingungen genügt.

zu 4: Die Beweise für die Konvexität und die Abgeschlossenheit funktionieren analog zu denen für die Menge S . Es bleiben die Kegeleigenschaften zu zeigen. Es ist zu zeigen, dass K_1 und K_2 Kegel mit Spitze im Null-element ihrer jeweiligen Banachräume sind.

Dazu sei $k_1 \in K_1$, $k_2 \in K_2$ und $\lambda \geq 0$ beliebig. Zu zeigen ist $\lambda \cdot k_1 \in K_1$ und $\lambda \cdot k_2 \in K_2$.

Es ist leicht einzusehen, dass aus $k_1 \in L_\infty^{nc}(\delta)$ folgt $\lambda \cdot k_1 \in L_\infty^{nc}(\delta)$ und aus $k_2 \in C^{ns}(\delta)$ folgt $\lambda \cdot k_2 \in C^{ns}(\delta)$. Die restlichen Eigenschaften folgen direkt: Aus $k_1(t) \geq 0_{\mathbb{R}^{nc}}$ fast überall in δ folgt $\lambda \cdot k_1(t) \geq 0_{\mathbb{R}^{nc}}$ fast überall in δ . Aus $k_2(t) \geq 0_{\mathbb{R}^{ns}}$ für alle $t \in \delta$ folgt, dass $\lambda \cdot k_2(t) \geq 0_{\mathbb{R}^{ns}}$ für alle $t \in \delta$. Also ist $\lambda \cdot (k_1, k_2)$ Element des Kegels K .

□

Bemerkung 2.16.

Für die weitere Betrachtung sind Funktionen J , G und H interessant, die zusätzlich Fréchet-Differenzierbar sind, da notwendige Optimalitätskriterien erster Ordnung die erste Ableitung der Funktionen verwenden. Die Fréchet-Differenzierbarkeit kann erhalten werden, wenn spezielle Voraussetzungen für die Funktionen des Optimalsteuerungsproblems erfüllt sind. Diese Voraussetzungen und der Beweis dieser Aussage können in [8] unter Annahme 2.2.8

und Theorem 2.2.9 nachgelesen werden. Im Folgenden sei immer davon ausgegangen, die Funktionen J , G und H des OP in Standardform 2.5 seien Fréchet-Differenzierbar.

Mit diesen Bezeichnungen können wir nun die Bedingungen an unsere Lösung der Zielfunktion umschreiben. Nun werden wir das Optimalsteuerungsproblem aus Beispiel 2.13 in eine Optimierungsaufgabe transformieren:

Beispiel 2.17 (Bewegung eines Teilchens II). *Betrachte auf den oben definierten Banachräumen die folgende Aufgabenstellung:*

$$\min \quad J \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \int_0^\pi \frac{1}{2} |x(t) - \sin(t)| dt \quad \text{u.d.N.} \quad H \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = 0_V, \quad G \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \in K$$

$$\text{für } H \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.81 + u(\cdot) \cdot (x(\cdot) - 2) - \dot{x}(\cdot) \\ -x(0) + x(1) \end{pmatrix}, \quad G \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = 2 - |u(\cdot)|$$

Hierbei handelt es sich um das transformierte OCP aus Beispiel 2.13.

3 Notwendige Optimalitätskriterien

Ziel dieses Abschnittes ist es, für den allgemeinen Fall einer Optimierungsaufgabe 2.5 überprüfbare Kriterien zu finden, die notwendigerweise an einem lokalen Optimum \hat{z} des unendlichdimensionalen OP gelten müssen. Diese Kriterien sollten im endlichdimensionalen unrestringierten Fall möglichst mit dem Kriterium $\nabla j(\hat{z}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ übereinstimmen.

3.1 Stationäre Punkte

Kegel (siehe Definition 5.30 im Anhang) spielen eine wichtige Rolle in der Formulierung von notwendigen Optimalitätskriterien für restringierte Optimierungsaufgaben. Um zu überprüfen, ob es sich in der allgemeinen Optimierungsaufgabe 2.4 bei einem zulässigen Punkt \bar{z} um ein lokales Optimum handelt, ist zunächst einmal eine formale Beschreibung der zulässigen lokalen Umgebung des Punktes notwendig. Dazu definiere ich nun den Tangentialkegel.

Definition 3.1 (Tangentialkegel²⁶).

Es sei Z ein Banachraum und $\Sigma \subseteq Z$ eine nicht leere Teilmenge. Des Weiteren sei $\bar{z} \in \Sigma$.

1. *Ein Element $d \in Z$ heißt tangential zu Σ im Punkt \bar{z} , falls Folgen*

$$\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{mit } t_k \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad (15)$$

$$\{\bar{z}^k\}_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{mit } \bar{z}^k \in \Sigma \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \quad (16)$$

existieren, für die folgende drei Eigenschaften erfüllt sind:

$$1. \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{z}^k = \bar{z}, \quad (17)$$

$$2. \quad t_k \downarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty, \quad (18)$$

$$3. \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}^k - \bar{z}}{t_k} = d. \quad (19)$$

2. *Die Menge $T(\Sigma, \bar{z}) := \{d \in Z \mid d \text{ tangential zu } \bar{z} \text{ in } \Sigma\}$ heißt Tangentialkegel von Σ in \bar{z} .*

Wird der Tangentialkegel in Richtung des betrachteten Punktes \bar{z} verschoben, erhalten wir einen Kegel mit Spitze in \bar{z} , der sich in alle Richtungen erstreckt, in denen ab einem Abstand $\epsilon > 0$ zu dem betrachteten Punkt nur Punkte der zulässigen Menge liegen. Im endlichdimensionalen Fall betrachten

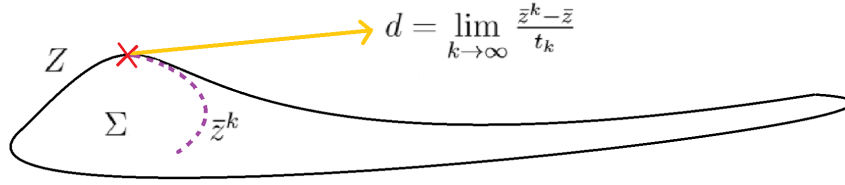


Abbildung 5: zeigt einen tangentialen Vektor d für eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 . Die Folge \bar{z}^k ist in lila, der Tangentialvektor in orange und die Stelle \bar{z} in rot eingezeichnet.

wir $Z = \mathbb{R}^n$ für eine natürliche Zahl n . Ein Beispiel eines Tangentialvektors d zu einer Menge $\Sigma \subset \mathbb{R}^2 = Z$ an $\bar{z} \in \Sigma$ ist in Abbildung 5 gezeichnet. Einige Beispiele von Tangentialkegeln zu zweidimensionalen zulässigen Mengen sind in Abbildung 6 skizziert. Hier sind die Tangentialkegel in Richtung des betrachteten zulässigen Punktes verschoben.

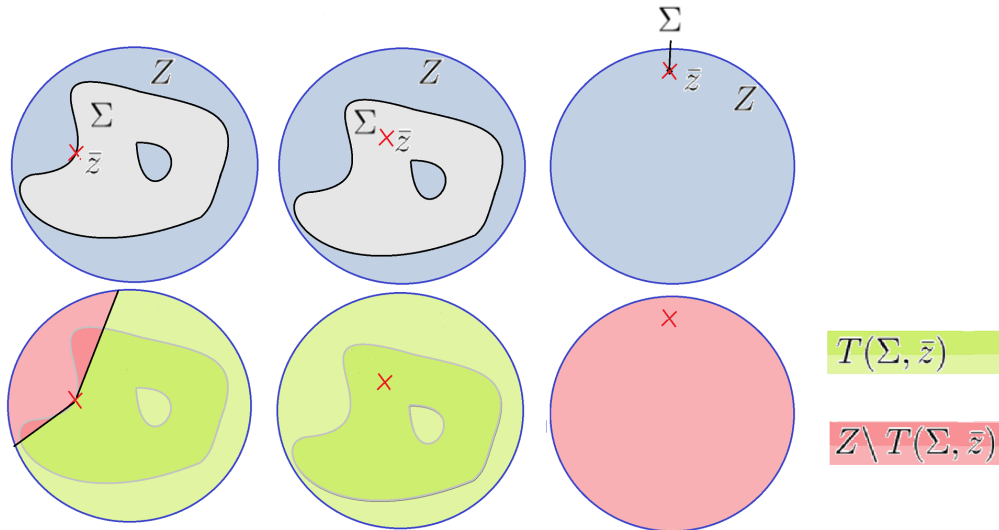


Abbildung 6: zeigt in der ersten Zeile die zulässigen Mengen Σ zusammen mit Elementen \bar{z} aus dem als Kreis dargestellten Banachraum Z . In der zweiten Zeile befinden sich die jeweiligen um \bar{z} verschobene Tangentialkegel $T(\Sigma, \bar{z})$.

Da die folgende Aussage für mehrere Beweise genutzt werden kann, formuliere ich sie als Lemma:

²⁶Diese Definition ist angelehnt an [5], Definition 2.28.

Lemma 3.2.

Der Tangentialkegel einer Teilmenge Σ eines Banachraums Z in $\bar{z} \in \Sigma$ enthält das Nullelement 0_Z des Banachraums Z .

Beweis. Es ist zu zeigen, dass für das Nullelement $d = 0_Z$ Folgen (15, 16) existieren, die den Bedingungen (17 - 19) genügen. Dafür betrachte die für $k \in \mathbb{N}$ wie folgt definierten Folgen $\{\bar{z}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\bar{z}^k := \bar{z}, \quad t_k := \frac{1}{k}.$$

Es gilt $\bar{z}^k = \bar{z} \in \Sigma$ und $t_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Außerdem gelten die Bedingungen (17 - 19)

$$t_k \downarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{z}^k = \bar{z}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}^k - \bar{z}}{t_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0_Z}{t_k} = 0_Z,$$

also liegt 0_Z im Tangentialkegel $T(\Sigma, \bar{z})$.

□

Nun ist es interessant zu überprüfen, ob der Tangentialkegel im unrestringierten Fall eine passable Angabe der lokalen Umgebung eines Punktes liefert, also identisch ist mit dem Banachraum Z . Dafür wird die Aussage des soeben bewiesenen Lemmas 3.2 benutzt.

Theorem 3.3 (Tangentialkegel im unrestringierten Fall).

Es sei Z ein Banachraum und $\Sigma \subseteq Z$ eine nicht leere Teilmenge.

- a) *Für einen inneren Punkt $\bar{z} \in \text{int}(\Sigma)$ stimmt der Tangentialkegel $T(\Sigma, \bar{z})$ mit dem Banachraum Z überein.*
- b) *Im unrestringierten Fall stimmt der Tangentialkegel $T(\Sigma, \bar{z})$ für beliebiges $\bar{z} \in \Sigma$ mit dem Banachraum Z überein.*

Beweis.

zu a) Es seien $d \in Z$ und $\bar{z} \in \text{int}(\Sigma)$ beliebig. Zu zeigen ist, dass d Element des Tangentialkegels $T(\Sigma, \bar{z})$ ist.

Da $d = 0_Z$, wie in Lemma 3.2 bewiesen, Element eines Jeden Tangentialkegels ist, können wir für diesen Beweis ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen $d \neq 0_Z$. Daraus folgt, dass die Norm $\|d\|_Z$ echt positiv ist.

Da \bar{z} ein innerer Punkt der Menge Σ ist, existiert ein $\epsilon > 0$, für das der abgeschlossene Ball $B_\epsilon(\bar{z})$ vollständig in der Menge Σ liegt. Nun sind

Folgen $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$ und $\{\bar{z}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ wie in (15, 16) gesucht, die die Bedingungen (17 - 19) erfüllen. Betrachte dafür

$$t_k := \frac{\epsilon}{\|d\|_Z} \cdot \frac{1}{k}, \quad \bar{z}^k := \bar{z} + d \cdot t_k \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Da die Konstanten ϵ und $\|d\|_Z$ echt positiv sind, ist jedes Folgenglied $t_k > 0$. Da t_k monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert, folgt die Bedingung (18), also die Konvergenz $t_k \downarrow 0$. Außerdem gilt $\bar{z}_k \in \Sigma$ für alle $k \in \mathbb{N}$, da

$$\|\bar{z}^k - \bar{z}\|_Z = \|\bar{z} + d \cdot t_k - \bar{z}\|_Z = \left\| d \cdot \frac{\epsilon}{\|d\|_Z} \cdot \frac{1}{k} \right\|_Z = \frac{\|d\|_Z}{\|d\|_Z} \cdot \frac{\epsilon}{k} = \frac{\epsilon}{k} \leq \epsilon,$$

also $\bar{z}_k \in B_\epsilon(\bar{z}) \subseteq \Sigma$. Des Weiteren ist die Bedingung (17) erfüllt. Für den Beweis wird die bereits bewiesene Konvergenz von t_k gegen 0 verwendet:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{z}^k = \bar{z} + d \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \bar{z}.$$

Zu zeigen ist nur noch die Gültigkeit der Bedingung (19):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}^k - \bar{z}}{t_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{z} + d \cdot t_k - \bar{z}}{t_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d \cdot t_k}{t_k} = d \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t_k}{t_k} = d.$$

zu b) Da im unrestringierten Fall jeder Punkt eines Banachraums ein innerer Punkt ist, folgt die Behauptung aus Aussage (a). □

Nun werden zwei wichtige Eigenschaften des Tangentialkegels betrachtet, die im weiteren Verlauf der Arbeit Verwendung finden.

Lemma 3.4 (Eigenschaften des Tangentialkegels²⁷).

Es sei Z ein Banachraum und $\Sigma \subseteq Z$ eine nicht leere Teilmenge. Weiter sei $\bar{z} \in \Sigma$. Dann ist der Tangentialkegel $T(\Sigma, \bar{z})$ ein abgeschlossener Kegel mit Spitze in 0_Z .

Beweis. Der Beweis teilt sich auf in zwei Teilbeweise:

- a) Der Tangentialkegel $T(\Sigma, \bar{z})$ ist ein Kegel mit Spitze in 0_Z ,
- b) Der Tangentialkegel $T(\Sigma, \bar{z})$ ist abgeschlossen.

²⁷Die Aussage b) des Lemmas findet sich für den endlichdimensionalen Fall in [5] unter Lemma 2.29.

zu a) Betrachte beliebige $d \in T(\Sigma, \bar{z})$ und $\lambda \geq 0$. Dann ist zu zeigen, dass Produkt $\lambda \cdot d \in T(\Sigma, \bar{z})$ Element des Tangentialkegels von Σ im Punkt \bar{z} ist.

Fall 1: Es sei $\lambda = 0$.

Dann ist zu zeigen, dass das additive neutrale Element $0_Z = \lambda \cdot d$ des Banachraums Z ein Element des Tangentialkegels ist. Dies ist bereits in Lemma 3.2 geschehen.

Fall 2: Es sei $\lambda > 0$.

Da d tangential zu Σ im Punkt \bar{z} ist, existieren Folgen $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$ und $\{\bar{z}^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ wie in Definition 3.1, die die Bedingungen (17 - 19) für $\bar{z} \in \Sigma$ erfüllen. Definiere

$$\tilde{t}_k := \frac{t_k}{\lambda}, \quad \tilde{z}_k := \bar{z}_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für die neu definierten Folgen $\{\tilde{t}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\geq 0}$ und $\{\tilde{z}^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{z}^k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{z}^k = \bar{z}, \\ \tilde{t}_k &= \frac{1}{\lambda} \cdot t_k \downarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{z}^k - \bar{z}}{\tilde{t}_k} &= \lambda \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}^k - \bar{z}}{t_k} = \lambda \cdot d, \end{aligned}$$

also zeichnen die Folgen $\{\tilde{t}_k\}_{k \in \mathbb{N}}, \{\tilde{z}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ das Element $\lambda \cdot d$ als ein Element des Tangentialkegels $T(\Sigma, \bar{z})$ aus.

zu b) Es bleibt zu zeigen, dass jeder Tangentialkegel $T(\Sigma, \bar{z})$ abgeschlossen ist. Es sei also $\{d^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $T(\Sigma, \bar{z})$, welche gegen einen Grenzwert $d := \lim_{k \rightarrow \infty} d^k$ konvergiert. Dann ist zu zeigen: $d \in T(\Sigma, \bar{z})$.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein Index $i(k)$, sodass für alle $i \geq i(k)$ gilt

$$\|d^i - d\|_Z < \frac{1}{k}.$$

Für jedes d^k existieren Folgen, die den Bedingungen (17 - 19) genügen. Bezeichne diese Folgen mit $\{t_{k,l}\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $\{\bar{z}^{k,l}\}_{l \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$. Es gilt also für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \bar{z}^{k,l} = \bar{z}, \quad t_{k,l} \downarrow 0 \text{ für } l \rightarrow \infty, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}^{k,l} - \bar{z}}{t_{k,l}} = d^k.$$

Daher existiert zu jeder natürlichen Zahl $i \in \mathbb{N}$ einen Index $l(i)$ mit

$$\|\bar{z}^{i,l} - \bar{z}\|_Z \leq \frac{1}{k}, \quad t_{i,l} \leq \frac{1}{k} \quad \text{und} \quad \left\| \frac{\bar{z}^{i,l} - \bar{z}}{t_{i,l}} - d^i \right\|_Z \leq \frac{1}{k}$$

für alle $l \geq l(i)$. Also genügen die Folgen $\{t_{i(k),l(i(k))}\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\{\bar{z}^{i(k),l(i(k))}\}_{k \in \mathbb{N}}$ den Bedingungen (17 - 18) für den Grenzwert $d \in Z$. Dass die Folgen auch Bedingung (19) genügen, sieht man unter Verwendung der Konvergenz von d^k gegen d wie ein:

$$\left\| \frac{\bar{z}^{i(k),l(i(k))} - \bar{z}}{t_{i(k),l(i(k))}} - d \right\|_Z \leq \left\| \frac{\bar{z}^{i(k),l(i(k))} - \bar{z}}{t_{i(k),l(i(k))}} - d_{i(k)} \right\|_Z + \|d_{i(k)} - d\|_Z \leq \frac{2}{k},$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit sind die Bedingungen (17 - 19) für d erfüllt. \square

Jetzt, da ich mich mit einigen Eigenschaften des Tangentialkegels beschäftigt habe, kommen ich zu der Frage, wie wir den Tangentialkegel in der Optimierungsaufgabe verwenden können: In einem lokalen Minimum \hat{z} einer Optimierungsaufgabe darf keine zu der Menge Σ tangentiale Richtung d existieren, welche für das Zielfunktional J eine Abstiegsrichtung ist. Ob eine Abstiegsrichtung vorliegt, kann durch Betrachtung der Ableitung der Zielfunktion J an der Stelle \hat{z} festgestellt werden. Dieser Sachverhalt formal ausgedrückt liefert uns das erste notwendige Optimalitätskriterium:

Theorem 3.5 (notwendiges Optimalitätskriterium 1²⁸).

Betrachte die unendlichdimensionale Optimierungsaufgabe 2.4 für ein an der Stelle $\hat{z} \in \Sigma$ Fréchet-Differenzierbares²⁹ Funktional J . Es sei \hat{z} ein lokales Minimum des Problems. Dann gilt für das Fréchet-Differential von J an der Stelle \hat{z}

$$J'(\hat{z})(d) \geq 0 \quad \text{für alle } d \in T(\Sigma, \hat{z}).$$

Beweis. Es sei d ein beliebiges Element aus dem Tangentialkegel $T(\Sigma, \hat{z})$. Zu zeigen ist $J'(\hat{z})(d) \geq 0$. Betrachte dazu die für d existenten Folgen $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\{\bar{z}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften (17 - 19):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{z}^k = \hat{z}, \quad t_k \downarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}^k - \hat{z}}{t_k} = d.$$

Da \hat{z} nach Voraussetzung ein lokales Minimum der Optimierungsaufgabe ist, gilt für genügend großes $K \in \mathbb{N}$ unter Benutzung der Konvergenz von \bar{z}^k gegen \hat{z}

$$J(\bar{z}_k) \geq J(\hat{z}) \quad \text{für alle } k \geq K, \tag{20}$$

²⁸Diese Aussage findet sich unter Theorem 2.3.15 in [8].

²⁹Siehe Definition 5.13 im Anhang.

da \bar{z}^k für alle $k \in \mathbb{N}$ zulässige Elemente sind. Aufgrund der Fréchet-Differenzierbarkeit ist es möglich, die Taylorentwicklung³⁰ von J an der Stelle \hat{z} zu betrachten³¹:

$$\begin{aligned} J(\hat{z} + (\bar{z}_k - \hat{z})) &= J(\hat{z}) + J'(\hat{z})(\bar{z}_k - \hat{z}) + o(\|\bar{z}_k - \hat{z}\|_Z) \\ \Leftrightarrow J(\bar{z}_k) - J(\hat{z}) &= J'(\hat{z})(\bar{z}_k - \hat{z}) + o(\|\bar{z}_k - \hat{z}\|_Z). \end{aligned} \quad (21)$$

Unter Verwendung von (21) kann die Gleichung (20) umgeformt werden in

$$\begin{aligned} 0 &\leq J(\bar{z}_k) - J(\hat{z}) \\ &= J'(\hat{z})(\bar{z}_k - \hat{z}) + o(\|\bar{z}_k - \hat{z}\|_Z) \\ &= J'(\hat{z})(\bar{z}_k - \hat{z}) + \|\bar{z}_k - \hat{z}\|_Z \cdot \frac{o(\|\bar{z}_k - \hat{z}\|_Z)}{\|\bar{z}_k - \hat{z}\|_Z}. \end{aligned} \quad (22)$$

Die Division der Ungleichung (22) durch die echt positive reelle Zahl t_k liefert zusammen mit der Linearität des Fréchet-Differentials in der zweiten Komponente folgende Ungleichung:

$$0 \leq J'(\hat{z}) \left(\frac{\bar{z}_k - \hat{z}}{t_k} \right) + \left\| \frac{\bar{z}_k - \hat{z}}{t_k} \right\|_Z \cdot \frac{o(\|\bar{z}_k - \hat{z}\|_Z)}{\|\bar{z}_k - \hat{z}\|_Z}. \quad (23)$$

Nun gilt aufgrund der Voraussetzung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\bar{z}_k - \hat{z}}{t_k} \right) = d.$$

Aufgrund der Stetigkeit des Operators $J'(\hat{z})(\cdot)$ kann von der Ungleichung (23) der Limes gebildet werden:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(J'(\hat{z}) \left(\frac{\bar{z}_k - \hat{z}}{t_k} \right) + \left\| \frac{\bar{z}_k - \hat{z}}{t_k} \right\|_Z \cdot \frac{o(\|\bar{z}_k - \hat{z}\|_Z)}{\|\bar{z}_k - \hat{z}\|_Z} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(J'(\hat{z}) \left(\frac{\bar{z}_k - \hat{z}}{t_k} \right) \right) + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left\| \frac{\bar{z}_k - \hat{z}}{t_k} \right\|_Z \cdot \frac{o(\|\bar{z}_k - \hat{z}\|_Z)}{\|\bar{z}_k - \hat{z}\|_Z} \right) \\ &= J'(\hat{z})(d) + \|d\|_Z \cdot 0 \end{aligned}$$

Dies liefert die Behauptung. □

Definition 3.6 (Stationärer Punkt³²).

Wenn für einen zulässigen Punkt \bar{z} der Optimierungsaufgabe 2.4 für die stetig Fréchet-Differenzierbare Zielfunktion J gilt

$$J'(\bar{z})(d) \geq 0 \quad \text{für alle } d \in T(\Sigma, \bar{z}),$$

bezeichnen wir \bar{z} als stationären Punkt von 2.4.

³⁰Siehe Theorem 5.16 im Anhang.

³¹Für die Landau-Notation siehe Anhang, Definition 5.3

³²Diese Definition ist angelehnt an die Bezeichnung aus [5] auf Seite 43.

Da, wie in [8] dargelegt, das Fréchet-Differential von J im Endlichdimensionalen mit dem Gradienten übereinstimmt³³, ist diese Definition – eingeschränkt auf den endlichdimensionalen Fall für ein stetig differenzierbares Funktional J – äquivalent mit der folgenden Definition:

Definition 3.7 (stationärer Punkt im Endlichdimensionalen³⁴).

Es sei $Z = \mathbb{R}^n$ und $\bar{z} \in \Sigma$ ein zulässiger Punkt des OP 2.5 für das stetig differenzierbare Funktional $j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn

$$\nabla j(\bar{z})^T \cdot d \geq 0 \quad \text{für alle } d \in T(\Sigma, \bar{z}) \quad (24)$$

gilt, bezeichnen wir \bar{z} als stationären Punkt der Optimierungsaufgabe.

Nun gilt es zu überprüfen, ob unser in Theorem 3.5 entwickeltes notwendiges Optimalitätskriterium im unrestringierten endlichdimensionalen Fall äquivalent zu dem bisher bekannten notwendigen Optimalitätskriterium ist:

Lemma 3.8 (stationärer Punkt für unrestringierte endlichdimensionale OP).

Betrachte eine unrestringierte endlichdimensionale Optimierungsaufgabe (2.1).

In diesem Fall ist die Aussage, \bar{z} sei ein stationärer Punkt, äquivalent mit

$$\nabla j(\bar{z})^T = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Beweis. Gilt $\nabla j(\bar{z})^T = 0_{\mathbb{R}^n}$ folgt direkt, dass an der Stelle \bar{z} ein stationärer Punkt vorliegt. Es ist also nur noch die Umkehrung zu zeigen.

Es liege also an der Stelle \bar{z} ein stationärer Punkt vor. Wie in Lemma 3.3 gezeigt, stimmt – da wir den unrestringierten Fall betrachten – der Tangentialkegel $T(\Sigma, \bar{z})$ mit dem Banachraum $Z = \mathbb{R}^n$ überein. Dementsprechend gilt insbesondere, dass die positiven und negativen Standardvektoren

$$e_1^+ := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2^+ := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n^+ := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_i^- := -e_i^+,$$

für $i = 1 \dots n$ Elemente des Tangentialkegels $T(\Sigma, \bar{z})$ sind. Also gilt für die partiellen Ableitungen von j an der Stelle \bar{z}

$$-\frac{\partial j}{\partial z_i}(\bar{z}) \geq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial j}{\partial z_i}(\bar{z}) \geq 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\},$$

wobei z_i die i -te Komponente des Funktionsparameters bezeichnet. Daraus folgt das bekannte Kriterium $\nabla j(\bar{z}) = 0_{\mathbb{R}^n}$. □

³³Siehe Theorem 5.17 im Anhang.

³⁴Vergleiche [5], Seite 43.

Nun haben wir mit dem Satz 3.5 ein erstes notwendiges Optimalitätskriterium hergeleitet, das – wie Lemma 3.8 gezeigt hat – im unrestringierten endlich-dimensionalen Fall mit unserem bisher bekannten Kriterium übereinstimmt. Das Kriterium ist allerdings im Allgemeinen schwer anwendbar, da für dessen Anwendung der Tangentialkegel berechnet werden muss. Für komplizierte zulässige Mengen Σ ist dies allerdings nicht für alle zulässigen Punkte möglich (vgl. [8]). Deshalb genügt dieses Kriterium unseren Anforderungen nicht, und es muss ein anderes gefunden werden. Für das bereits behandelte Beispiel 2.13 des fliegenden Teilchens ist das Kriterium nicht anzuwenden, da die Komplexität dieses Beispiels in den Nebenbedingungen liegt. Falls diese durch Reduktion so stark vereinfacht wird, dass der Tangentialkegel an bestimmten Stellen einfach bestimmt werden kann, liegt an jeder Stelle ein stationärer Punkt vor, da die Zielfunktion nichtnegativ ist. Das folgende Beispiel soll zeigen, dass für einfache zulässige Mengen Σ das Kriterium 3.5 trotzdem ausgenutzt werden kann.

Beispiel 3.9 (Anwendung notwendiges Optimalitätskriterium 1³⁵).

Betrachte für das Funktional $J : L_\infty[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ die Optimierungsaufgabe

$$\min J \quad \text{u.d.N. } z \in \Sigma$$

für die wie folgt definierte Funktion J und zulässige Menge Σ :

$$J(z) := \int_{-1}^1 t \cdot z(t) dt,$$

$$\Sigma := \{z \in L_\infty[-1, 1] \mid z(t) \in [-1, 1] \text{ für fast alle } t \text{ aus } [-1, 1]\}.$$

J ist Fréchet-Differenzierbar mit dem Fréchet-Differential

$$J'(z)(d) = \int_{-1}^1 t \cdot d(t) dt,$$

weil für die soeben als $J'(z)(d)$ definierte Funktion gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{\|d\|_\infty \rightarrow 0} \frac{J(z+d) - J(z) - J'(z)(d)}{\|d\|_\infty} \\ &= \lim_{\|d\|_\infty \rightarrow 0} \frac{1}{\|d\|_\infty} \left(\int_{-1}^1 t \cdot (z+d)(t) dt + \int_{-1}^1 t \cdot z(t) dt - \int_{-1}^1 t \cdot d(t) dt \right) \\ &= \lim_{\|d\|_\infty \rightarrow 0} \frac{1}{\|d\|_\infty} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

³⁵Dieses Beispiel findet sich in [8] unter Beispiel 2.3.16.

Für diese zulässige Menge ist es uns nun möglich, für gewisse zulässige Elemente auszuschließen, dass lokale Minima vorliegen. Für die von mir ausgewählten Punkte

$$\text{beliebiges } z_1 \in \text{int}(\Sigma) \text{ und } z_2(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [-1, 0] \\ -1 & \text{für } t \in (0, 1]. \end{cases}$$

wird zu diesem Zweck erst der Tangentialkegel bestimmt, und dann das notwendige Optimalitätskriterium 3.5 überprüft.

- a) Für innere Punkte $z_1 \in \text{int}(\Sigma)$ gilt – wie in Lemma 3.3 gezeigt – für den Tangentialkegel $T(\Sigma)(z_1) = L_\infty[-1, 1]$. Es reicht also aus, ein beliebiges $d \in L_\infty[-1, 1]$ zu finden, für das das Kriterium $J'(z_1)(d) \geq 0$ nicht gilt. Betrachte dazu

$$d(t) := -t \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Dann gilt

$$J'(z_1)(d) = \int_{-1}^1 t d(t) dt = \int_{-1}^1 -t^2 dt = \left[\frac{-t^3}{3} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} < 0.$$

Also kann an keinem inneren Punkt der zulässigen Menge ein lokales Minimum vorliegen.

- b) **Schritt 1: Behauptung:** Es gilt

$$T(\Sigma, z_2) \subseteq \{d \in L_\infty[-1, 1] \mid d(t) \cdot z_2(t) \leq 0 \text{ fast überall in } [-1, 1]\}.$$

Beweis. Es sei $d \in T(\Sigma, z_2)$. Dann existieren Folgen $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\{\bar{z}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, die den Bedingungen (17 - 19) genügen:

$$t_k \downarrow 0, \quad \bar{z}^k \rightarrow z_2, \quad \frac{\bar{z}^k - z_2}{t_k} \rightarrow d \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Es reicht zu zeigen

$$0 \leq \begin{cases} -d(t) & \text{für fast alle } t \in [-1, 0], \\ d(t) & \text{für fast alle } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Nun gilt für fast alle $t \in [-1, 0]$

$$\begin{aligned} d(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}^k(t) - z_2(t)}{t_k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}^k(t) - 1}{t_k}. \end{aligned} \quad (25)$$

Da \bar{z}^k Element aus $L_\infty[-1, 1]$, ist insbesondere $\bar{z}^k(t) \leq 1$. Also gilt die folgende Abschätzung von (25) :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{z}^k(t) - 1}{t_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - 1}{t_k} = 0.$$

Also gilt $d(t) \leq 0$ für $t \in [-1, 0]$, was zu zeigen war. Das entsprechende Ergebnis für $t \in [0, 1]$ kann analog erhalten werden. \square

Schritt 2: Prüfe das notwendige Optimalitätskriterium 3.5 für alle $d \in M := \{d \in L_\infty[-1, 1] \mid d(t) \cdot z_2(t) \leq 0 \text{ fast überall in } [-1, 1]\}$.

Es sei $d \in M$. Dann gilt für das Fréchet-Differential von J an der Stelle z_2 ausgewertet an d

$$\begin{aligned} J'(z_2)(d) &= \int_{-1}^1 t d(t) \, dt \\ &= \int_{-1}^0 t d(t) \, dt + \int_0^1 t d(t) \, dt \\ &= \int_{-1}^0 t \cdot d(t) \cdot z_2(t) \, dt + \int_0^1 -t \cdot d(t) \cdot z_2(t) \, dt \end{aligned}$$

Da für $d \in M$ gilt $d(t) \cdot z_2(t) \leq 0$ für fast alle $t \in [-1, 1]$, gilt

1. für die Funktion im ersten Integral

$$t \cdot d(t) \cdot z_2(t) \geq 0 \text{ fast überall in } [-1, 0]$$

2. und für die Funktion im zweiten Integral

$$-t \cdot d(t) \cdot z_2(t) \geq 0 \text{ fast überall in } [0, 1].$$

Also sind die ausgewerteten einzelnen Integrale nichtnegativ. Zusammengekommen folgt dieselbe Aussage auch für $J'(z_2)(d)$ als Summe der beiden Integrale. Also gilt an der Stelle z_2 das notwendige Optimalitätskriterium 3.5.

3.2 Fritz-John-Bedingungen

Da, wie im vorangegangenen Kapitel erläutert, der Tangentialkegel in der Regel schwer zu bestimmen ist, wird in diesem Abschnitt ein für die Berechnung einfacheres Kriterium hergeleitet. Dieses Kriterium beinhaltet eine Linearisierung der Nebenbedingungen und eine konische Approximation der um ein Element \hat{z} verschobenen Kegelrestriktion. Dazu ist es zunächst einmal notwendig, den Begriff der konischen Hülle einer Menge zu definieren.

Definition 3.10 (konische Hülle³⁶).

Es sei $A \subseteq Z$ eine Teilmenge eines reellen Vektorraums Z . Für ein Element $z \in A$ bezeichnet die Menge

$$\text{cone}(A, z) := \{\alpha \cdot (a - z) \mid \alpha \geq 0, a \in A\}$$

die konische Hülle von $A - z := \{a - z \mid a \in A\}$.

Aus der Definition ist sofort ersichtlich, dass es sich hierbei um einen Kegel mit Spitze in 0_Z handelt, da für ein Element $y \in \text{cone}(A, z)$ jedes nichtnegative Vielfache $\tilde{y} := \mu \cdot y$ für $\mu \geq 0$ in $\text{cone}(A, z)$ liegt:

$$\begin{aligned} y &\in \text{cone}(A, z) \\ \Leftrightarrow \exists \alpha \geq 0 \text{ und } a \in A, \text{ sodass } y &= \alpha \cdot (a - z) \\ \Rightarrow \mu \cdot y &= \alpha \cdot \mu \cdot (a - z) \in \text{cone}(A, z) \text{ da } \mu \cdot \alpha \geq 0. \end{aligned}$$

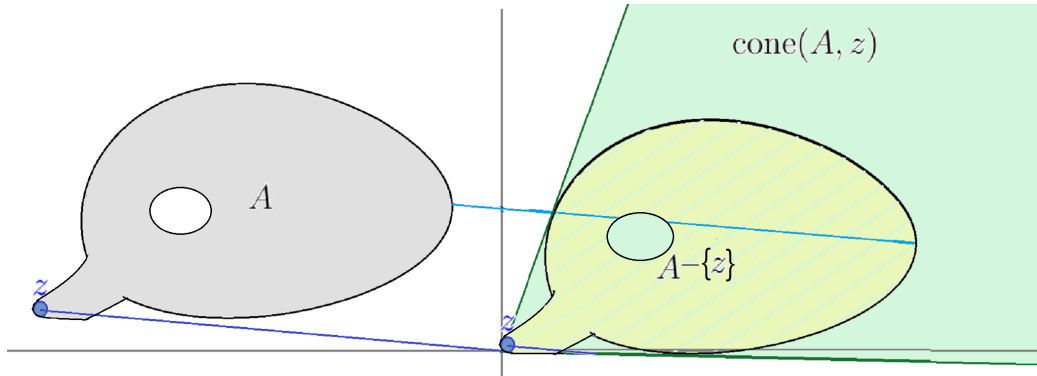


Abbildung 7: Die konische Hülle einer Teilmenge $A - \{z\}$ des \mathbb{R}^2 .

In Abbildung 7 ist die konische Hülle einer Teilmenge $A - \{z\}$ des \mathbb{R}^2 eingezeichnet. Die Ursprungsmenge A ist in grau eingezeichnet, der Punkt z in

³⁶Diese Definition ist angelehnt an Definition 2.3.9 aus [8].

blau. Die resultierende konische Hülle ist in grün gezeichnet. Man beachte, dass die Menge A an sich nicht in der konischen Hülle liegt, allerdings die verschobene Menge $A - \{z\}$.

In Abbildung 8 ist die konische Hülle eines um $-x$ verschobenen konvexen Kegels A gezeichnet. Hier ist – anders als bei der in 7 gezeichneten Menge – der Ursprungskegel A Teilmenge der konischen Hülle. Jetzt stellt sich die Frage, ob dies im Allgemeinen für die konische Hülle eines konvexen Kegels mit Spitze in 0_Z gilt. Das folgende Lemma 3.11 wird diese Aussage als Spezialfall für allgemeine konvexe, nicht leere Kegel zeigen.

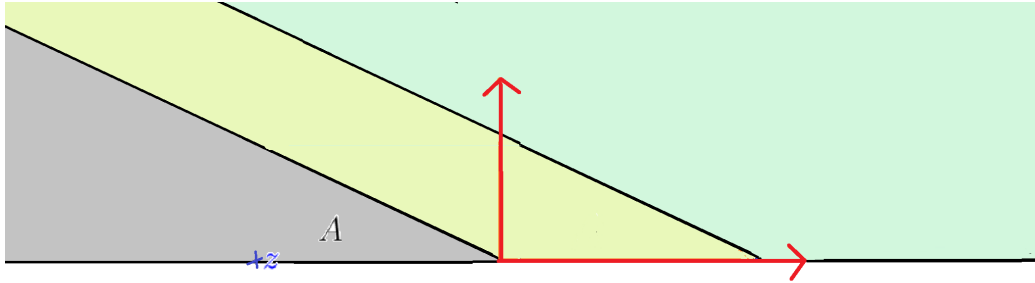


Abbildung 8: Die Ursprungsmenge ist ein konvexer Kegel $A \subset \mathbb{R}^2$, der in grau eingezeichnet ist. Ein Punkt z des Kegels ist in blau eingezeichnet. Der um $-z$ verschobene Kegel ist die hellgrüne vereinigt mit der grauen Menge. Die konische Hülle $\text{cone}(A, z)$ besteht aus beiden grünen und der grauen Menge.

Die Aussage des Lemmas wird Verwendung in wichtigen Sätzen wie Lemma 3.15 und Theorem 3.18 dieser Bachelorarbeit finden. Zu beachten ist, dass – anders als in [8] auf Seite 79 behauptet – die Konvexität als Voraussetzung an den Kegel K notwendig ist. Zu diesem Sachverhalt folgt dem Lemma ein Beispiel eines nicht konvexen Kegels, an dem ich die Gültigkeit der Aussage im Allgemeinen widerlege.

Lemma 3.11 (konische Hülle konvexer Kegel).

Es sei K ein konvexer, nicht leerer Kegel, der Teilmenge eines Banachraums Z ist. Außerdem sei $z \in K$. Dann gilt die Identität

$$\text{cone}(K, z) = \{b - \beta \cdot z \mid b \in K, \beta \geq 0\} =: M_2^{37}.$$

Beweis. Um Verwirrung bezüglich der Notation vorzubeugen bezeichne die ursprüngliche Definition der konischen Hülle

$$\text{cone}(K, z) = \{\alpha \cdot (a - z) \mid a \in K, \alpha \geq 0\} =: M_1$$

mit M_1 . Aufgrund der Kegeleigenschaft der Menge K folgt direkt $M_1 \subseteq M_2$, da für $a \in K$ und $\beta := \alpha \geq 0$ gilt $\alpha \cdot a =: b \in K$. Es bleibt also zu zeigen $M_2 \subseteq M_1$.

Es sei $s \in M_2$. Dann existieren $\beta \geq 0$ und $b \in K$, sodass $s = b - \beta \cdot z$.

Fall: $\beta > 0$. Dann gilt

$$s = b - \beta \cdot z = \beta \cdot \left(\frac{b}{\beta} - z\right).$$

Durch das Setzen von $\alpha := \beta \geq 0$ und $a := \frac{b}{\beta} \in K$ erhalten wir eine Darstellung von s als $\alpha \cdot (a - z)$ für $\alpha \geq 0$ und $a \in K$ aufgrund der Kegeleigenschaft von K . Also gilt $s \in M_1$.

Fall: $\beta = 0$. Dann ist eine Darstellung gesucht mit

$$s = b \stackrel{!}{=} \alpha \cdot (a - z).$$

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass es sich bei b um ein von 0_Z verschiedenes Element handelt, da andernfalls das Ergebnis durch das Setzen von $\alpha := 0$ erhalten werden kann.

Als Kriterium zum Bestimmen eines solchen a verwenden wir die Bedingung, dass a Element des Kegels K sein muss. Deshalb reicht es aus, ein Vielfaches eines Elementes zu bestimmen, das auf jeden Fall Element des Kegels ist. Um letzteres Element zu finden, wird die Konvexität von K verwendet.

Der Prozess des Suchens einer solchen Setzung würde den Beweis verkomplizieren. Deshalb gebe ich direkt das Ergebnis an, für das nur noch die geforderten Eigenschaften an ein Element aus M_1 zu prüfen sind.

Wähle

$$\alpha > 0 \text{ beliebig, } a := \frac{\alpha + 1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha + 1} \cdot b + \frac{\alpha}{\alpha + 1} \cdot z \right).$$

Zu prüfen sind:

1. Das Element a ist Element des Kegels K .
2. Die Setzung genügt der Bedingung $b = \alpha \cdot (a - z)$.

zu 1. Da b und z nach Voraussetzung Elemente des Kegels K sind und

$$\frac{1}{\alpha + 1} + \frac{\alpha}{\alpha + 1} = 1,$$

folgt aus der Konvexität von K , dass

$$\frac{1}{\alpha+1} \cdot b + \frac{\alpha}{\alpha+1} \cdot z \in K$$

Element von K ist. Da es sich bei K um einen Kegel handelt und $\frac{\alpha+1}{\alpha}$ positiv ist, folgt die Behauptung $a \in K$.

zu 2. Berechne $\alpha \cdot (a - z)$ für die vorgegebenen Werte für α und a .

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (a - z) &= \alpha \cdot \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha+1} \cdot b + \frac{\alpha}{\alpha+1} \cdot z \right) - z \right) \\ &= \alpha \cdot \left(\frac{\alpha+1}{(\alpha+1) \cdot \alpha} \cdot b + \frac{(\alpha+1) \cdot \alpha}{(\alpha+1) \cdot \alpha} \cdot z - z \right) \\ &= \alpha \cdot \left(\frac{\alpha+1}{(\alpha+1) \cdot \alpha} \cdot b + z - z \right) \\ &= \frac{(\alpha+1) \cdot \alpha}{(\alpha+1) \cdot \alpha} \cdot b \\ &= b \end{aligned}$$

Also erfüllt unsere Setzung die Voraussetzungen. Somit liegt $b \in M_1$, was zu zeigen war.

□

Beispiel 3.12.

Wie bereits erwähnt gilt die Identität aus Lemma 3.11 nicht für jeden Kegel K mit Spitze in 0. In diesem Beispiel wird für einen solchen Kegel gezeigt, dass die Mengen M_1 und M_2 aus Lemma 3.11 nicht übereinstimmen.

Betrachte dazu im normierten Vektorraum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ die Menge

$$K := \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \geq 0 \right\} \cup \left\{ \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \mu \geq 0 \right\}$$

und das Element $z = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \in K$.

Beweis. Es handelt es sich bei K wie gefordert um einen Kegel mit Spitze in $0_{\mathbb{R}^2}$, da für jedes Element $k \in K$ das nichtnegative Vielfache wieder Element von K ist. Der Kegel ist nicht konvex, da beispielsweise die Verbindungsstrecke zwischen $(1, 1)^T$ und $(0, -1)^T$ nicht Element des Kegels ist.

Da direkt aus der Definition eines Kegels resultiert, dass $M_1 \subseteq M_2$, kann nur

gezeigt werden, dass es sich bei M_1 um eine echte Teilmenge von M_2 handelt. Also ist zu zeigen, dass ein Element s aus M_2 existiert, welches nicht Element der Menge M_1 ist. Dazu betrachte mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.11 das Element

$$s := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = b - \beta \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \in M_2$$

für $\beta = 0$ und $b := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Es reicht zu zeigen, dass keine Darstellung

$$s = \alpha \cdot (a - z)$$

für $\alpha \geq 0$ und $a = (a_1, a_2)^T \in K$ existiert. Betrachte dafür das folgende Gleichungssystem, welches für eine solche Darstellung erfüllt sein muss:

$$\begin{cases} \alpha \cdot (a_1 - 5) = 0 \\ \alpha \cdot (a_2 - 5) = -1 \end{cases}$$

Da aufgrund der zweiten Gleichung $\alpha \neq 0$ gewählt werden muss, folgt aus Gleichung 1 die Setzung $a_1 = 5$. Damit allerdings das Element a Element des Kegels K ist, muss, da $a_1 \neq 0$ ist, die Identität $a_2 = a_1$ erfüllt sein. Aufgrund dieser Setzung folgt, dass das Gleichungssystem nicht erfüllt ist, also existiert kein $a \in K$, sodass ein $\alpha \geq 0$ existiert, das den Anforderungen an M_1 genügt. \square

Nun ist es zur Linearisierung der Kegel- und Gleichheitsrestriktion des Optimierungsproblems möglich, den linearisierten Tangentialkegel zu definieren.

Definition 3.13 (linearisierter Tangentialkegel³⁸).

Es seien Z , V und W Banachräume. Außerdem seien die im Optimierungsproblem 2.5 verwendeten Funktionen $G : Z \rightarrow W$ und $H : Z \rightarrow V$ stetig Fréchet-Differenzierbar. Der linearisierte Tangentialkegel von K und S an der Stelle $\bar{z} \in \Sigma$ ist definiert durch

$$T_{lin}(K, S, \bar{z}) := \{d \in \text{cone}(S, \bar{z}) \mid G'(\bar{z})(d) \in \text{cone}(K, G(\bar{z})), \\ H'(\bar{z})(d) = 0_V\}.$$

Nachdem notwendige Optimalitätskriterien gefunden sind, werden wir diese auch für den endlichdimensionalen Fall formulieren. Dazu ist es notwendig, eine griffige Definition des Tangentialkegels im Endlichdimensionalen zu verwenden.

³⁸Diese Definition ist angelehnt an [8], Definition 2.3.12.

Definition 3.14 (linearisierter Tangentialkegel im endlichdimensionalen Fall³⁹).

Es sei $\bar{z} \in \sigma$ ein zulässiger Punkt der endlichdimensionalen Optimierungsaufgabe 2.1 mit stetig differenzierbaren Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p.$$

Bezeichne die einzelnen Komponenten der Funktionen g und h mit $g_i, h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist der linearisierte Tangentialkegel T_{lin} wie folgt definiert:

$$T_{lin}(\bar{z}) := \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(\bar{z})^T \cdot d \leq 0 \quad \text{für alle } i \in I \\ \nabla h_j(\bar{z})^T \cdot d = 0 \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, p\}\},$$

wobei die Menge I die „Menge der aktiven Ungleichheitsrestriktionen“ bezeichnet, die definiert ist als $I := \{i \in \{1, \dots, m\} \mid g_i(\bar{z}) = 0\}$.

Wieder ist es notwendig zu zeigen, dass der im Speziellen in Definition 3.14 definierte Tangentialkegel mit der allgemeinen Definition des Tangentialkegels in Definition 3.13 übereinstimmt. Dies geschieht im nächsten Lemma.

Lemma 3.15 (Linearisierter Tangentialkegel im Endlichdimensionalen).

Definition 3.14 stimmt mit Definition 3.13, eingeschränkt auf einen endlichdimensionalen Raum überein.

Beweis. Es seien $Z = \mathbb{R}^n, V = \mathbb{R}^m$ und $W = \mathbb{R}^p$ Banachräume. Da die Jakobimatrix in diesem Fall mit dem Fréchet-Differential übereinstimmt (vgl. Theorem 5.17 im Anhang), sind die Funktionen

$$j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{und} \quad h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$

insbesondere total differenzierbar. Im Folgenden wird die Notation aus Definition 3.14 verwendet:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad g(z) = \begin{pmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_m(z) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h(z) = \begin{pmatrix} h_1(z) \\ \vdots \\ h_p(z) \end{pmatrix},$$

für Funktionale $g_i, h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Eingeschränkt auf das endlichdimensionale Problem lautet die Definition des Kegels K wie folgt:

$$W \supset (\mathbb{R}^{\geq 0})^p = K.$$

³⁹Diese Definition ist angelehnt an [5], Definition 2.31.

Für den linearisierten Tangentialkegel im Allgemeinen verwende ich im Folgenden die Bezeichnung T^1 , die also wie folgt definiert ist:

$$T^1 := T_{lin}(K, S, \bar{z}) = \{d \in \text{cone}(S, \bar{z}) \mid g'(\bar{z})(d) \in \text{cone}(K, g(\bar{z})), \quad (26)$$

$$h'(\bar{z})(d) = 0_{\mathbb{R}^m}\}.$$

Hier können – wie bereits erwähnt und in 5.17 nachzulesen – die Fréchet-Differentiale $g'(\bar{z})(d)$ und $h'(\bar{z})(d)$ jeweils durch $Dg(\bar{z}) \cdot d$ beziehungsweise $Dh(\bar{z}) \cdot d$ ersetzt werden. Die Funktionen Dg und Dh bezeichnen die Jakobimatrizen der jeweiligen Funktion. Zu zeigen ist die Identität

$$T^1 \stackrel{!}{=} T^2 := \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_i(\bar{z})^T \cdot d \geq 0 \quad \text{für alle } i \in I, \quad (27)$$

$$\nabla h_j(\bar{z})^T \cdot d = 0 \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, p\}\},$$

wobei die Menge I wie in Definition 3.14 die Menge der aktiven Ungleichheitsrestriktionen bezeichnet. Vergleiche nun die Mengen (26) und (27). Da wir die endlichdimensionale Optimierungsaufgabe ohne Mengenrestriktion definiert haben, gilt $S = \mathbb{R}^n$ und damit $\text{cone}(S)(\bar{z}) = \mathbb{R}^n$. Deshalb sind nur die Bedingungen an die Funktionen g und h zu vergleichen. Folgende Äquivalenz wird durch Komponentenweise Betrachtung eingesehen:

$$Dh(\bar{z}) \cdot d = 0_{\mathbb{R}^m} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla h_j(\bar{z})^T \cdot d = 0 \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, p\}.$$

Es ist also nur zu zeigen, dass die Bedingungen

$$Dg(\bar{z}) \cdot d \in \text{cone}(K, g(\bar{z})) \quad \text{und} \quad \nabla g_i(\bar{z})^T \cdot d \geq 0 \quad \text{für alle } i \in I$$

äquivalent sind. Es sei also $d \in \mathbb{R}^n$ und $Dg(\bar{z}) \cdot d \in \text{cone}(K, g(\bar{z}))$. Da der Kegel K konvex und nichtleer ist, kann die Aussage von Lemma 3.11 für die konische Hülle eingesetzt werden. Also gilt

$$\text{cone}(K, g(\bar{z})) = \{k - \lambda \cdot g(\bar{z}) \mid k \in K, \lambda \geq 0\}.$$

Zusätzliches Einsetzen der Definition des Kegels K liefert

$$\exists k \in (\mathbb{R}^{\geq 0})^p \quad \text{und} \quad \lambda \geq 0, \quad \text{sodass} \quad Dg(\bar{z}) \cdot d = k - \lambda \cdot g(\bar{z}). \quad (28)$$

Da in der Umformung nur äquivalente Ausdrücke eingesetzt wurden, ist (28) äquivalent zu der Bedingung $Dg(\bar{z}) \cdot d \in \text{cone}(K, g(\bar{z}))$. Durch komponentenweise Betrachtung erhalten wir folgende, zu (28) äquivalente Aussage:

$$\exists k_i, \lambda \geq 0, \quad \text{sodass} \quad \nabla g_i(\bar{z}) \cdot d^T = k_i - \lambda \cdot g_i(\bar{z}) \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, m\}. \quad (29)$$

Die Äquivalenz dieser Aussage mit $\nabla g_i(\bar{z})^T \cdot d \geq 0$ für alle $i \in I$ für die in Definition 3.14 definierte „Menge der aktiven Ungleichheitsrestriktionen“ folgt mithilfe einer Fallunterscheidung nach $i \in I$:

Für $i \in I$ gilt nach Definition der Menge I $g_i(\bar{z}) = 0$.

„ \Rightarrow “ Es sei $d \in T^1$. Mit dem Einsetzen von 0 für $g_i(\bar{z})$ in die Gleichung (29) folgt $\nabla g_i(\bar{z}) \cdot d^T = k_i \geq 0$, also ist $d \in T^2$.

„ \Leftarrow “ Für die Umkehrung dieser Aussage betrachte $d \in T^2$. Betrachte für d und $i \in I$ das wie folgt definierte

$$k_i := \nabla g_i(\bar{z})^T \cdot d \geq 0$$

und beliebiges $\lambda \geq 0$. Für diese Setzung ist Bedingung (29) erfüllt, da für $i \in I$ gilt $g_i(\bar{z}) = 0$. Also ist $d \in T^1$.

Für $i \notin I$ gilt $g_i(\bar{z}) > 0$.

„ \Leftarrow “ Es sei $d \in T^2$. Durch geeignete Wahl von nichtnegativen reellen Zahlen k_i und λ kann jede reelle Zahl durch $k_i - \lambda \cdot g_i(\bar{z})$ angegeben werden, also insbesondere auch $\nabla g_i(\bar{z}) \cdot d^T$, deshalb ist $d \in T^1$.

„ \Rightarrow “ Da in der Definition von T^2 nur eine Aussage für alle $i \in I$ gefordert wird, ist auch die Rückrichtung erfüllt.

□

Nun betrachten wir ein sehr einfaches Beispiel eines linearisierten Tangentialkegels für eine endlichdimensionale Optimierungsaufgabe 2.1.

Beispiel 3.16.

Betrachte die Stelle $z_0 = (2, 0)^T$ und die Gleichheitsrestriktion $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(z) := \|z\|_2^2 - 1 = 0$. Dann ist der Linearisierte Tangentialkegel wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} T_{lin}(z_0) &= \left\{ d \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla h \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d^T = 0 \right\} \\ &= \left\{ d \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d^T = 0 \right\} = \left\{ \lambda \cdot e_2 \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Der nächste Satz gibt ein Kriterium, wie der linearisierte Tangentialkegel und der Tangentialkegel in Zusammenhang stehen. Im endlichdimensionalen Fall kann dieser Zusammenhang für die Entwicklung eines sogenannten Regularitätskriteriums – der Abadie Constraint Qualification (vergleiche [5], Kapitel 2) – genutzt werden. Zu der Definition von Regularitätskriterien werden wir allerdings erst am Ende dieser Arbeit kommen.

Theorem 3.17 (Zusammenhang zwischen T_{lin} und T eines OPs⁴⁰).

Betrachte das OP (2.5) für Fréchet-Differenzierbare Funktionen G und H . Es sei $\bar{z} \in \Sigma$ ein zulässiger Punkt der Optimierungsaufgabe und die konischen Hüllen $\text{cone}(S, \bar{z})$ und $\text{cone}(K, G(\bar{z}))$ abgeschlossen. Dann gilt $T(\Sigma, \bar{z}) \subseteq T_{lin}(K, S, \bar{z})$.

Beweis. Es sei $d \in T(\Sigma, \bar{z})$. Es ist zu zeigen $d \in T_{lin}(K, S, \bar{z})$.

Da die Menge Σ als $\{x \in S \mid G(x) \in K, H(x) = 0_V\}$ definiert ist, gilt

$$G(x) \in K \text{ und } H(x) = 0_V \text{ für alle Elemente } x \in \Sigma. \quad (30)$$

Betrachte nun die Folgen $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ und $\{\bar{z}^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ aus der Definition des Tangentialkegels mit den Eigenschaften (17 - 19):

$$0 < t_k \downarrow 0, \quad \Sigma \ni \bar{z}^k \rightarrow \bar{z}, \quad \frac{\bar{z}^k - \bar{z}}{t_k} \rightarrow d \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

Da es sich bei den Folgengliedern \bar{z}^k um zulässige Elemente handelt, gilt aufgrund von (30)

$$G(\bar{z}^k) \in K, \quad H(\bar{z}^k) = 0_V.$$

Zu zeigen sind folgende drei Eigenschaften für das Element d .

1. $d \in \text{cone}(S, \bar{z})$,
2. $G'(\bar{z})(d) \in \text{cone}(K, G(\bar{z}))$,
3. $H'(\bar{z})(d) = 0_V$.

zu 1: Weil $\bar{z}^k \in \Sigma \subseteq S$ und $t_k^{-1} \geq 0$ gilt, ist jedes Folgenglied $\frac{\bar{z}^k - \bar{z}}{t_k}$ ein Element der konischen Hülle $\text{cone}(S, \bar{z})$. Da diese Menge nach Voraussetzung abgeschlossen ist, liegt auch der Grenzwert d in der Menge $\text{cone}(S, \bar{z})$.

zu 2: Da $G(\cdot)$ auch Fréchet-Differenzierbar ist, ist es möglich, mithilfe der Taylorentwicklung eine Folge $\{\epsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq W$, $\epsilon_k = o(\|\bar{z}^k - \bar{z}\|_Z)$ zu konstruieren, sodass gilt

$$G(\bar{z} + (\bar{z}^k - \bar{z})) = G(\bar{z}) + G'(\bar{z})(\bar{z}^k - \bar{z}) + \epsilon_k \|\bar{z}^k - \bar{z}\|_Z. \quad (31)$$

Aufgrund der Stetigkeit und Linearität des Fréchet-Differentials folgt aus (31) durch Umformung die Identität

$$\frac{G(\bar{z}^k) - G(\bar{z})}{t_k} = G'(\bar{z}) \left(\frac{\bar{z}^k - \bar{z}}{t_k} \right) + \epsilon_k \left\| \frac{\bar{z}^k - \bar{z}}{t_k} \right\|_Z, \quad (32)$$

⁴⁰Die Aussage dieses Theorems findet sich unter Korollar 2.3.14 in [8].

und durch Bildung des Grenzwertes

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{G(\bar{z}^k) - G(\bar{z})}{t_k} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(G'(\bar{z}) \left(\frac{\bar{z}^k - \bar{z}}{t_k} \right) \right) \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\epsilon_k \left\| \frac{\bar{z}^k - \bar{z}}{t_k} \right\|_Z \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Es gilt $t_k^{-1} > 0$ und $G(\bar{z}^k) \in K$, da es sich bei \bar{z}^k um ein zulässiges Element handelt. Deshalb sind beide Seiten der Gleichung (32) Elemente der Menge $\text{cone}(K, G(\bar{z}))$. Diese ist nach Voraussetzung abgeschlossen. Somit liegt auch der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{G(\bar{z}^k) - G(\bar{z})}{t_k}$$

in der konischen Hülle $\text{cone}(K, G(\bar{z}))$. Nun liefert das Einsetzen der rechten Seite der Gleichung (33)

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{G(\bar{z}^k) - G(\bar{z})}{t_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(G'(\bar{z}) \left(\frac{\bar{z}^k - \bar{z}}{t_k} \right) + \epsilon_k \left\| \frac{\bar{z}^k - \bar{z}}{t_k} \right\|_Z \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(G'(\bar{z}) \left(\frac{\bar{z}^k - \bar{z}}{t_k} \right) \right) + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\epsilon_k \left\| \frac{\bar{z}^k - \bar{z}}{t_k} \right\|_Z \right) \\ &= G'(\bar{z})(d) + 0_Z \cdot d, \end{aligned}$$

dass $G'(\bar{z})(d)$ Element von $\text{cone}(K, G(\bar{z}))$ ist, was zu zeigen war. Die letzte Identität ist erfüllt, da – nach Definition des Landau-Symbols o – gilt

$$\lim_{\bar{z}^k \rightarrow \bar{z}} \frac{\|\epsilon_k\|_Z}{\|\bar{z}^k - \bar{z}\|_Z} = 0,$$

also insbesondere $\epsilon_k \rightarrow 0_Z$ für $k \rightarrow \infty$.

zu 3: Aufgrund der Fréchet-Differenzierbarkeit von $H(\cdot)$ ist es möglich, mithilfe der Taylorentwicklung eine Folge $\{\epsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq V$ analog zu der im obigem Beweisabschnitt zu konstruieren:

$$H(\bar{z}^k) = H(\bar{z}) + H'(\bar{z})(\bar{z}^k - \bar{z}) + \epsilon_k \|\bar{z}^k - \bar{z}\|_Z.$$

Da \bar{z} und \bar{z}^k zulässige Elemente sind, gilt $0_V = H(\bar{z}) = H(\bar{z}^k)$. Daraus folgt

$$0_V = H'(\bar{z})(\bar{z}^k - \bar{z}) + \epsilon_k \|\bar{z}^k - \bar{z}\|_Z.$$

Die Behauptung $H'(\bar{z})(d) = 0_V$ folgt analog zu der Argumentation im Beweis von $G'(\bar{z})(d) \in \text{cone}(K, G(\bar{z}))$.

Zusammengenommen haben wir bewiesen: Für $d \in T(\Sigma, \bar{z})$ gilt

$$d \in \text{cone}(S, \bar{z}), \quad H'(\bar{z})(d) = 0_V, \quad G'(\bar{z})(d) \in \text{cone}(K, G(\bar{z})).$$

Diese drei Eigenschaften sind äquivalent zu $d \in T_{lin}(K, S, Z)$. □

Eine Aussage, die für den kompletten Tangentialkegel gezeigt werden muss, ist also unter den Voraussetzungen von Theorem 3.17 erfüllt, wenn sie für den einfacher zu bestimmenden linearisierten Tangentialkegel gezeigt werden kann.

Nun können wir uns im folgenden Theorem dem zweiten notwendigen Optimalitätskriterium zuwenden:

Theorem 3.18 (notwendiges Optimalitätskriterium 2: Fritz-John⁴¹).

Wir betrachten die unendlichdimensionale Optimierungsaufgabe in Standardform 2.5 für das außerdem folgende Eigenschaften erfüllt seien:

1. *Die Funktionen J und G seien Fréchet-Differenzierbar, H sei stetig Fréchet-Differenzierbar.*
2. *Es sei der zulässige Punkt \hat{z} ein lokales Minimum des Problems.*
3. *Das Bild $\text{im}(H'(\hat{z})(\cdot))$ sei keine echte dichte Teilmenge des Banachraums V .*
4. *Die Menge der inneren Punkte $\text{int}(K)$ sei nicht leer.*

Die Funktion \tilde{L} sei wie folgt definiert:

$$\tilde{L}(\hat{z}, l_0, \lambda^*, \mu^*)(d) := l_0 J'(\hat{z})(d) - \mu^*(G'(\hat{z})(d)) - \lambda^*(H'(\hat{z})(d)).$$

Dann existiert ein Tripel $(l_0, \mu^*, \lambda^*) \in \mathbb{R} \times W^* \times V^* \setminus \{0_{\mathbb{R} \times W^* \times V^*}\}$, sodass

$$l_0 \geq 0, \tag{34}$$

$$\mu^* \in K^+, \tag{35}$$

$$\mu^*(G(\hat{z})) = 0 \tag{36}$$

$$\tilde{L}(\hat{z}, l_0, \lambda^*, \mu^*)(d) \geq 0 \quad \text{für alle } d \in S - \{\hat{z}\} \tag{37}$$

wobei K^+ den negativen Dualkegel von K bezeichnet.⁴²

⁴¹Dieser Satz findet sich unter Theorem 2.3.24 in [8].

⁴²Die Definition des negativen Dualkegels findet sich unter Definition (5.31) im Anhang.

Beweis. Der Beweis gliedert sich in zwei Abschnitte:

Im **ersten Beweisabschnitt** zeige ich, dass $(l_0, \mu^*, \lambda^*) \in \mathbb{R} \times W^* \times V^*$ existieren, für die gilt $(l_0, \mu^*, \lambda^*) \neq \{0_{\mathbb{R} \times W^* \times V^*}\}$ und die Ungleichung

$$0 \leq l_0(J'(\hat{z})(d) + r) - \mu^*(G'(\hat{z})(d) - \omega) - \lambda^*(H'(\hat{z})(d)) \quad (38)$$

für alle $d \in \text{int}(S) - \{\hat{z}\}$, $w \in \text{int}(\text{cone}(K, G(\hat{z})))$ und $r \geq 0$ erfüllt ist. Daraus folgt insbesondere Resultat (37). Für den Beweis dieser Aussage werden die Separationstheoreme⁴³ verwendet.

Im **zweiten Abschnitt** werden aus der Ungleichung (38) die noch zu beweisenden Resultate (34 - 36) extrahiert.

Abschnitt 1: Die zu zeigende Aussage (38) beweisen wir mithilfe einer Fallunterscheidung in zwei Fälle. Zuerst betrachten wir folgenden Fall:

Fall 1.1: $H'(\hat{z})(\cdot) : Z \rightarrow V$ ist nicht surjektiv.

Betrachte die Menge M , die wie folgt definiert ist:

$$M := \text{cl} \left(\left\{ \begin{pmatrix} r \\ \omega \\ H'(\hat{z})(d) \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} r \in \mathbb{R}, \\ \omega \in W, \\ d \in Z \end{matrix} \right\} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \omega \\ \text{cl}(H'(\hat{z})(d)) \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} r \in \mathbb{R}, \\ \omega \in W, \\ d \in Z \end{matrix} \right\}.$$

Unser Ziel ist es, Theorem 5.28 für die Menge M anzuwenden. Dafür müssen folgende Eigenschaften gezeigt werden:

- a) M ist ein abgeschlossener Unterraum des Banachraums X , definiert als $X := \mathbb{R} \times W \times V$.
- b) M ist eine echte Teilmenge von X , also existiert ein $\hat{x} \in X \setminus M$.

zu a: Zunächst sei erwähnt, dass die als Produktraum von Banachräumen definierte Menge $X = \mathbb{R} \times W \times V$ wieder ein Banachraum $(X, +_X, \cdot_X)$ ist. In diesem Abschnitt wird zwecks einer besseren Unterscheidung der verschiedenen Operatoren der jeweilige Banachraum annotiert, dessen additive oder multiplikative Verknüpfung verwendet wird. Die folgende Überlegung zeigt, dass M ein bezüglich der Addition $+_X$ und Multiplikation \cdot_X abgeschlossener Unterraum ist: Es seien $\lambda \in K$ und $m_1 := (r_1, w_1, v_1)$ und $m_2 := (r_2, w_2, v_2)$ Elemente aus M . also existieren $z_1, z_2 \in Z$, sodass $H'(\hat{z})(z_1) = v_1$ und $H'(\hat{z})(z_2) = v_2$. Aufgrund der Linearität des Operators $H'(\hat{z})(\cdot)$ gilt

$$v_1 +_V v_2 = H'(\hat{z})(z_1) +_V H'(\hat{z})(z_2) = H'(\hat{z})(z_1 +_Z z_2).$$

⁴³Siehe Anhang, Theorem 5.29.

Deshalb ist $z_1 +_Z z_2$ ein Element aus Z . Da die Summen $\omega_1 +_W \omega_2 \in W$, $z_1 +_Z z_2 \in Z$ und $r_1 +_{\mathbb{R}} r_2 \in \mathbb{R}$ wieder Elemente der jeweiligen Banachräume sind, folgt $m_1 +_Z m_2 \in M$. Eine analoge Überlegung wird geführt um zu zeigen, dass $\lambda \cdot_Z v_1$ Element der Menge M ist.

Die Menge M ist darüber hinaus in X abgeschlossen, da sie als Abschluss definiert ist.

zu b: Da $H'(\hat{z})(\cdot)$ nach Annahme nicht surjektiv ist, existiert ein $v \in V$ auf das kein $z \in Z$ abgebildet wird; für kein $z \in Z$ gilt die Identität

$$H'(\hat{z})(z) = v.$$

Also ist $\text{im}(H'(\hat{z})(\cdot))$ eine echte Teilmenge von V . Da außerdem für das Bild von $H'(\hat{z})(\cdot)$ nach Voraussetzung (3.) des Satzes gilt

$$\text{im}(H'(\hat{z})(\cdot)) \text{ ist keine echte dichte Teilmenge von } V,$$

handelt es sich bei $\text{im}(H'(\hat{z})(\cdot))$ nicht um eine in V dichte Teilmenge. Also ist auch der Abschluss $\text{cl}(\text{im}(H'(\hat{z})(\cdot))) = M$ eine echte Teilmenge von V . Es existiert also ein $\bar{x} \in X \setminus M$.

Anwendung des Theorems 5.28: Nach Theorem 5.28 existiert also eine lineare, stetige Funktion⁴⁴

$$h^* \in X^* = \mathbb{R} \times W^* \times V^* \quad \text{mit} \quad h^*(x) = \begin{cases} \text{beliebig} & x \in X \setminus M, \\ 0 & x \in M, \end{cases}$$

für die außerdem gilt $h^*(\bar{x}) \neq 0$. Insbesondere ist deshalb $h \neq 0_{X^*}$. Da es sich bei h^* um eine lineare, stetige Funktion handelt, lässt sich die Funktion für $r \in \mathbb{R}$, $\omega \in W$ und $v \in V$ als Summe dreier Teilfunktionen $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\mu^* \in W^*$ und $\lambda^* \in V^*$ schreiben

$$h^* := (l_0, \mu^*, \lambda^*) \quad \text{mit} \quad h^*(r, \omega, v) = l_0 r - \mu^*(\omega) - \lambda^*(v).$$

Dass die Funktionen μ^* und λ^* mit negativem Vorzeichen in die Summe eingehen, scheint zu diesem Punkte des Beweises willkürlich gewählt. Im Abschnitt 2 des Beweises wird allerdings deutlich, dass die Funktionen so direkt als Multiplikatoren mit den gewünschten Eigenschaften (35 - 37) verwendet werden können.

Da für alle $r \geq 0$, $\omega \in \text{int}(\text{cone}(K, G(\hat{z}))) \subseteq W$ und $d \in \text{int}(\text{cone}(S, \hat{z})) \subseteq Z$ gilt

$$\begin{pmatrix} J'(\hat{z})(d) + r \\ G'(\hat{z})(d) - \omega \\ H'(\hat{z})(d) \end{pmatrix} \in M,$$

⁴⁴Der Dualraum der reellen Zahlen kann mit den reellen Zahlen selbst identifiziert werden. Siehe dazu Bemerkung 5.11 im Anhang.

folgt die Identität

$$l_0(J'(\hat{z})(d) + r) - \mu^*(G'(\hat{z})(d) - \omega) - \lambda^*(H'(\hat{z})(d)) = 0.$$

Dies impliziert das Teilresultat (38).

Veranschaulichung

Da der Operator $H'(\hat{z})(\cdot)$ linear ist, gilt $H'(\hat{z})(0_Z) = 0_V$. Also ist die Menge $B := \{(0, 0_W, 0_V)\}$ Teilmenge von M . Betrachte die Menge

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} J'(\hat{z})(d) + r \\ G'(\hat{z})(d) - k \\ H'(\hat{z})(d) \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} d \in \text{int}(\text{cone}(S, \hat{z})), \\ k \in \text{int}(\text{cone}(K, G(\hat{z}))), \\ r > 0 \end{array} \right\}.$$

Wie bereits festgestellt, handelt es sich auch bei A um eine Teilmenge von M . Da für alle $x \in M$ gilt $h^*(x) = 0$, trennt die Hyperebene⁴⁵

$$H := \{(r, \omega, v) \in \mathbb{R} \times W \times V \mid h^*(r, \omega, v) = 0\}$$

die Menge A trivial⁴⁶ von der einpunktigen Menge B .

Fall 1.2: $H'(\hat{z})(\cdot) : Z \rightarrow V$ ist surjektiv.

Für den Beweis der Aussage (38) gehe ich wie folgt vor: Zuerst zeige ich per Widerspruchsbeweis, dass für alle $d \in \text{int}(S) - \{\hat{z}\}$ mit

$$d = z - \hat{z}, \quad \text{für } z \in \text{int}(S), \quad (39)$$

$$G'(\hat{z})(d) \in \text{int}(\text{cone}(K, G(\hat{z}))), \quad (40)$$

$$H'(\hat{z})(d) = 0_V \quad (41)$$

die Gleichung

$$J'(\hat{z})(d) \geq 0$$

gilt. Im Anschluss wird mithilfe des *Satzes über die offene Abbildung* (5.12) und des *Trennungssatzes* (5.29) die Existenz von Multiplikatoren, die der Ungleichung (38) genügen, gezeigt.

Fall 1.2, Teil A: Widerspruchsbeweis.

Hier ist es aufgrund der Stetigkeit der Funktionen J , G und H möglich, das um den Punkt $\hat{z} \in \Sigma$ linearisierte Problem zu betrachten:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & J(\hat{z}) + J'(\hat{z})(z - \hat{z}) \\ \text{u. d. N.} \quad & G(\hat{z}) + G'(\hat{z})(z - \hat{z}) \in K \\ & H(\hat{z}) + H'(\hat{z})(z - \hat{z}) = 0_V \end{aligned}$$

⁴⁵Siehe Definition 5.24 im Anhang.

⁴⁶Siehe Definition 5.26 im Anhang.

Da es sich bei K um einen konvexen Kegel handelt, ist es dann insbesondere möglich, die Ungleichheitsrestriktion G zu linearisierten, weshalb wir für $G'(\hat{z})(z - \hat{z}) \in \text{int}(\text{cone}(K, G(\hat{z})))$ die Gültigkeit von

$$G(\hat{z}) + G'(\hat{z})(z - \hat{z}) \in \text{int}(K)$$

annehmen können.

Es sei also $z \in \text{int}(S)$. Die Existenz eines solchen z ist garantiert durch die Anforderung, dass $\text{int}(S)$ nicht leer ist, die für jede Optimierungsaufgabe in Standardform 2.5 erfüllt sein muss. Definiere $d \in Z$ – wie in (39) gefordert – als

$$d := z - \hat{z} \in \text{cone}(S, \hat{z})$$

für ein $z \in \text{int}(S)$ und das lokale Minimum \hat{z} . Für d seien zusätzlich die Bedingungen (40 - 41) und die folgende Annahme erfüllt:

Annahme: $J'(\hat{z})(d) < 0$.

Als erstes beweise ich die Existenz einer Kurve $z : [0, t_0] \rightarrow Z$ mit

$$z(t) = \hat{z} + t(z - \hat{z}) + r(t)$$

für ein $t_0 > 0$, sodass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Für die Kurve gilt $\|z(t) - \hat{z}\|_Z = O(t)$.
2. Es existiert ein $t_1 > 0$, sodass für alle positiven reellen Zahlen t , für die gilt $t < t_1$ der Punkt $z(t)$ ein zulässiger Punkt ist. Also gelten die folgenden Bedingungen:
 - 2a. Die Kurve $z(t)$ bleibt bezüglich der Gleichheitsrestriktion zulässig, also gilt $H(z(t)) = 0_V$ für alle $t \in [0, t_0]$.
 - 2b. Die Kurve bleibt bezüglich der Ungleichheitsrestriktion auf dem Intervall $[0, t_1]$ zulässig für ein $t_1 > 0$. Also gilt $G(z(t)) \in K$ für genügend kleine $t > 0$,
 - 2c. Die Kurve bleibt auf dem Intervall $[0, t_1]$ für ein $t_1 > 0$ in der Menge S . Also ist $z(t) \in S$ für genügend kleine $t \geq 0$ erfüllt.
3. Es gilt $J(z(t)) < J(\hat{z})$ für genügend kleine $t \geq 0$.

Die Eigenschaften 1 und 2 sind in Grafik (9) visualisiert.

Aus der Bedingung (1.) folgt die Existenz einer reellen Zahl $c \in \mathbb{R}$, für die für alle $t \in [0, t_0]$ gilt

$$\|z(t) - \hat{z}\|_Z < c \cdot t =: \epsilon(t).$$



Abbildung 9: zeigt die Funktion $z(\cdot)$ mit ihren Eigenschaften unter Einzeichnung beispielhafter Kegel- Gleichheits- und Ungleichheitsrestriktion.

Also gilt $z(t) \in U_{\epsilon(t)}(\hat{z})$. Deshalb liegen – wie in Grafik (9) angedeutet – für genügend kleines t die Funktionswerte $z(t)$ nahe an \hat{z} .

Unter Hinzunahme der Bedingung (2.) zu der Bedingung (1.) folgt für alle $\epsilon > 0$ die Existenz eines zulässigen Punktes $\bar{z} := z(t)$ in der Umgebung $U_{\epsilon}(\hat{z})$, für den die Bedingung (3.) erfüllt ist. Dies steht im Widerspruch dazu, dass \hat{z} ein lokales Minimum des Problems ist.

Hieraus folgt, dass die Annahme $J'(\hat{z})(d) < 0$ nicht erfüllt ist. Also gilt $J'(\hat{z})(d) \geq 0$ für alle d , für die die Eigenschaften (39 - 41) gelten.

Nun gilt es also die Gültigkeit der oben genannten Eigenschaften für die Funktion $z(\cdot)$ zu zeigen.

Beweis der Eigenschaften:

zu 1: Die Kurve z wird mithilfe des Theorems 5.27 von Ljusternik konstruiert. Dass dessen Voraussetzungen erfüllt sind, ist wie folgt einzusehen:

- i. H ist **Gâteaux- differenzierbar** und **stetig**, da – wie in 5.15 im Anhang nachzulesen ist – diese beiden Eigenschaften aus der vorausgesetzten Fréchet-Differenzierbarkeit folgen.
- ii. Das **Gâteaux-Differential** $H'(\hat{z})(\cdot)$ **ist stetig**, da es mit dem – nach Annahme des Theorems – stetigen Fréchet-Differential übereinstimmt.
- iii. Nach Voraussetzung der Fallunterscheidung ist das **Gâteaux-Differential** $H'(\hat{z})(\cdot)$ **surjektiv**.
- iv. Für das betrachtete $d = z - \hat{z}$ gilt aufgrund der Voraussetzung (41) für das Gâteaux-Differential $\delta H(\hat{z})(d) = 0_V$.
- v. Es gilt $H(\hat{z}) = 0_V$, da es sich bei \hat{z} um einen zulässigen Punkt des Optimierungsproblem handelt.

Wir können deshalb für die Abbildung $H : Z \rightarrow V$ Ljusterniks Theorem 5.27 anwenden. Es existiert deshalb ein $t_0 > 0$ und eine Abbildung r mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} r : (0, t_0] &\rightarrow Z, \\ \lim_{t \downarrow 0} \frac{r(t)}{t} &= 0_Z, \end{aligned} \quad (42)$$

$$H(\hat{z} + t \cdot (z - \hat{z}) + r(t)) = 0_V. \quad (43)$$

für alle $t \in (0, t_0]$. Wir erweitern den Definitionsbereich der Kurve, indem wir $r(0) := 0_Z$ definieren. Dann gilt für alle $t \in [0, t_0]$ für die wie folgt definierte Funktion z

$$z(t) := \hat{z} + t \cdot (z - \hat{z}) + r(t)$$

die zu zeigende Bedingung (1.)⁴⁷:

$$\|z(t) - \hat{z}\|_Z = \|t \cdot (z - \hat{z}) + o(t)\|_Z = t \cdot \|z - \hat{z}\|_Z + \|o(t)\|_Z = O(t).$$

Die letzte Gleichheit gilt, da $t \cdot \|z - \hat{z}\|_Z = O(t)$ ist und $f \in o(t)$ impliziert $f \in O(t)$. Beides wird aus Bemerkung 5.4 im Anhang ersichtlich.

Außerdem gilt für die Kurve z an der Stelle 0, dass der Funktionswert

$$z(0) = \hat{z} + 0 \cdot (z - \hat{z}) + r(0) = \hat{z}$$

mit dem Grenzwert $\lim_{t \rightarrow 0} z(t)$ übereinstimmt.

zu 2a: Aufgrund der mithilfe des Theorems 5.27 gelieferten Funktion wird direkt aus Gleichung (43) ersichtlich, dass die Gleichheitsrestriktion

$$H(z(t)) = 0_V$$

für alle $t \in (0, t_0]$ erfüllt ist.

Weil \hat{z} ein zulässiger Punkt der Optimierungsaufgabe ist, gilt dies auch für unsere Erweiterung auf $t = 0$:

$$H(z(0)) = H(\hat{z}) = 0_V.$$

Somit ist die Eigenschaft (2a) für alle $t \in [0, t_0]$ erfüllt.

zu 2b: Wir betrachten die Taylorentwicklung der Fréchet-Differenzierbaren

⁴⁷Siehe für die verschiedenen Landau-Symbole die Definition 5.3 und den Kommentar 5.4 im Anhang.

Funktion G an der Stelle \hat{z} :

$$\begin{aligned}
 G(z(t)) &= G(\hat{z} + t(z - \hat{z}) + r(t)) \\
 &= G(\hat{z}) + G'(\hat{z})(t \cdot (z - \hat{z}) + r(t)) + o(t) \\
 &= G(\hat{z}) + t \cdot G'(\hat{z})(z - \hat{z}) + G'(\hat{z})(r(t)) + o(t) \\
 &= G(\hat{z}) + t \cdot G'(\hat{z})(z - \hat{z}) + o(t).
 \end{aligned} \tag{44}$$

In der letzten Gleichung ging ein, dass $\|G'(\hat{z})(r(t))\|_W = o(t)$, da aufgrund der Linearität des Operators $G'(\hat{z})(\cdot)$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{G'(\hat{z})(r(t))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(G'(\hat{z}) \left(\frac{r(t)}{t} \right) \right) = G'(\hat{z}) \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t} \right) = G'(\hat{z})(0_Z) = 0_W.$$

Eine Nullergänzung von $\pm t \cdot G(\hat{z})$ in (44) liefert

$$\begin{aligned}
 G(z(t)) &= t \cdot G(\hat{z}) - t \cdot G(\hat{z}) + t \cdot G'(\hat{z})(z - \hat{z}) + G(\hat{z}) + o(t) \\
 &= t \cdot (G(\hat{z}) + G'(\hat{z})(z - \hat{z})) + (1 - t) \cdot G(\hat{z}) + o(t) \\
 &= t \cdot \left(G(\hat{z}) + G'(\hat{z})(z - \hat{z}) + \frac{o(t)}{t} \right) + (1 - t) \cdot G(\hat{z})
 \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt $G'(\hat{z})(d) + G(\hat{z}) \in \text{int}(K)$. Also existiert ein positiver Radius $\delta > 0$, sodass der abgeschlossene Ball

$$B_\delta(G'(\hat{z})(d) + G(\hat{z})) \subseteq K$$

Es sei $t \in [0, 1]$. Dann folgt aus der Konvexität von K

$$(1 - t) \cdot G(\hat{z}) + t \cdot \omega \in K \quad \text{für alle } \omega \in B_\delta(G'(\hat{z})(d) + G(\hat{z}))$$

Da gilt

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0_Z,$$

existiert ein $t_1 > 0$ sodass für alle positiven reellen $t < t_1$ gilt $\frac{o(t)}{t} < \delta$. Also liegt $G(\hat{z}) + G'(\hat{z})(z - \hat{z}) + \frac{o(t)}{t}$ in der Menge $B_\delta(G'(\hat{z})(d) + G(\hat{z}))$. Aus diesem Grunde liegt

$$G(z(t)) = (1 - t) \cdot G(\hat{z}) + t \cdot \left(G(\hat{z}) + G'(\hat{z})(z - \hat{z}) + \frac{o(t)}{t} \right)$$

für alle $t \in [0, t_1]$ im Kegel K . Also ist die Aussage 2b) für genügend kleine t erfüllt.

zu 2c: Da nach Voraussetzung das betrachtete $z \in \text{int}(S)$ ein innerer Punkt von S ist, existiert ein abgeschlossener Ball $B_\delta(z)$ mit Radius $\delta > 0$, der vollständig in der Menge S liegt.

Für beliebige Elemente $\tilde{z} \in B_\delta(z)$ gilt dann aufgrund der Konvexität von S

$$t \cdot \tilde{z} + (1 - t) \cdot \hat{z} \in S \quad \text{für alle } t \in [0, 1]. \quad (45)$$

Aufgrund der Konvergenz $\lim_{t \downarrow 0} \left\| \frac{r(t)}{t} \right\|_Z = 0$ existiert ein $t_1 > 0$, sodass für alle positiven reellen Zahlen $\epsilon < t_1$ gilt $\left\| \frac{r(t)}{t} \right\|_Z \leq \delta$. Also ist dann der Punkt

$$z + \frac{r(t)}{t} \in B_\delta(z). \quad (46)$$

Dann gilt für $z(t)$ für alle $t \in [0, t_1]$

$$z(t) = \hat{z} + t \cdot (z - \hat{z}) + r(t) = \hat{z} + t \cdot \left(z + \frac{r(t)}{t} - \hat{z} \right).$$

Aufgrund von (45) zusammen mit (46) gilt $z(t) \in S$ für alle $t \in [0, t_1]$ für ein $t_1 > 0$.

zu 3: Jetzt ist nur noch die Eigenschaft der Zielfunktion zu zeigen. Betrachte das Fréchet-Differential von J nach t .⁴⁸ Dafür ist die Ableitung von z nach t an der Stelle 0 erforderlich: Da wir z abschnittsweise Definiert haben für $(0, t_0]$ und an der Stelle 0, ist die Existenz der Ableitung zu überprüfen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t}(0) &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{z(t) - z(0)}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{z(t) - \hat{z}}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\hat{z} + t(z - \hat{z}) + r(t) - \hat{z}}{t} \\ &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{t(z - \hat{z}) + r(t)}{t} \\ &= z - \hat{z} + \lim_{t \downarrow 0} \frac{r(t)}{t} \\ &= z - \hat{z} \end{aligned} \quad (47)$$

⁴⁸Siehe Definition 5.13 im Anhang.

wobei in (47) die Eigenschaft (42) für r eingesetzt das Resultat liefert. Für die Ableitung der Funktion J gilt

$$\frac{\partial J}{\partial t} J(z(t))|_{t=0} = J'(\hat{z}) \left(\frac{\partial z}{\partial t}(0) \right) = J'(\hat{z})(z - \hat{z}).$$

Also ist $z - \hat{z}$ eine Abstiegsrichtung, was bedeutet dass $J(z(t)) < J(\hat{z})$ gilt für genügend kleines t .

Fall 1.2, Teil B: Existenz der Multiplikatoren. Nun ist also mithilfe des Widerspruchsbeweises folgendes gezeigt: Wenn $H'(\hat{z})$ surjektiv ist, gilt für ein lokales Minimum \hat{z} des Problems (2.5)

$$J'(\hat{z})(d) \geq 0 \text{ für alle } d \in S, \text{ welche (39 - 41) erfüllen.} \quad (48)$$

Definiere

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ \begin{pmatrix} J'(\hat{z})(d) + r \\ G'(\hat{z})(d) - k \\ H'(\hat{z})(d) \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} d \in \text{int}(\text{cone}(S, \hat{z})), \\ k \in \text{int}(\text{cone}(K, G(\hat{z}))), \\ r > 0 \end{array} \right. \right\}, \\ A_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} J'(\hat{z})(d) \\ G'(\hat{z})(d) \\ H'(\hat{z})(d) \end{pmatrix} \left| d \in \text{int}(\text{cone}(S, \hat{z})) \right. \right\}, \\ A_2 &:= \left\{ \begin{pmatrix} r \\ -k \\ 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} k \in \text{int}(\text{cone}(K, G(\hat{z}))), \\ r > 0 \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

A kann aufgeteilt werden in $A = A_1 + A_2$. Um den Separationssatz 5.29 anwenden zu können, müssen zunächst einige Eigenschaften gezeigt werden:

Zeige: A enthält innere Punkte.

Betrachte die dritte Komponente der Menge A_1 . Bezeichne mit O die Menge $O := \text{int}(\text{cone}(S, \hat{z}))$. Als Menge aller inneren Punkte ist O offen im Banachraum V . Da die Menge S innere Punkte enthält, ist O zusätzlich nicht die leere Menge.

Nun gilt aufgrund der Surjektivität und Linearität des Fréchet-Differentials $H'(\hat{z})(\cdot)$ unter Verwendung des Satzes des offenen Bildes (5.12), dass $\tilde{O} := H'(\hat{z})(O) \subseteq V$ offen ist. Also enthält A_1 in der dritten Komponente innere Punkte.

A_2 enthält offensichtlich innere Punkte in den ersten zwei Komponenten, da $\text{int}(\text{cone}(K, G(\hat{z}))) \neq 0_W$.

Zusammengenommen enthält $A = A_1 + A_2$ innere Punkte $\in \mathbb{R} \times W \times V$.

Zeige: A ist konvex.

Teilaussage 1: A_1 und A_2 sind konvex.

Da A_2 konvex ist, reicht zu zeigen, dass die Menge A_1 in jeder Komponente konvex ist.

Die Konvexität resultiert aus der Linearität der Fréchet-Differentiale $J'(\hat{z})(\cdot)$, $G'(\hat{z})(\cdot)$ und $H'(\hat{z})(\cdot)$ zusammen mit der Konvexität der Menge $\text{int}(\text{cone}(S, \hat{z}))$. Die Beweise für die verschiedenen Komponenten funktionieren analog. Aus diesem Grund wird hier nur die Überlegung für die erste Komponente durchgeführt:

$$\begin{aligned} & \lambda \cdot J'(\hat{z})(d_1) + (1 - \lambda)J'(\hat{z})(d_2) \\ &= J'(\hat{z})(\lambda \cdot d_1) + J'(\hat{z})((1 - \lambda) \cdot d_2) \\ &= J'(\hat{z})(\lambda \cdot d_1 + (1 - \lambda) \cdot d_2) \\ &= J'(\hat{z})(d) \end{aligned}$$

für $d := \lambda \cdot d_1 + (1 - \lambda) \cdot d_2 \in \text{int}(\text{cone}(S, \hat{z}))$. $J'(\hat{z})(d)$ ist also Element der ersten Komponente von A_1 .

Teilaussage 2: Aus der Konvexität der beiden Mengen A_1 und A_2 folgt die Konvexität der Menge A .

Es seien also $x^1 := a_1^1 + a_2^1, x^2 := a_1^2 + a_2^2 \in A$ für $a_1^i \in A_1$ und $a_2^i \in A_2$ für $i \in \{1, 2\}$ und $\lambda \in (0, 1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lambda \cdot x^1 + (1 - \lambda) \cdot x^2 &= \lambda \cdot (a_1^1 + a_2^1) + (1 - \lambda) \cdot (a_1^2 + a_2^2) \\ &= \lambda \cdot a_1^1 + (1 - \lambda) \cdot a_1^2 + \lambda \cdot a_2^1 + (1 - \lambda) \cdot a_2^2 \end{aligned}$$

Aufgrund der Konvexität der Mengen A_1 und A_2 ist

$$\lambda \cdot a_i^1 + (1 - \lambda) \cdot a_i^2 \in A_i \quad \text{für } i \in \{1, 2\},$$

also ist $\lambda \cdot x^1 + (1 - \lambda) \cdot x^2 \in A$, was zu zeigen war.

Nun wird das Resultat des Widerspruchsbeweises genutzt:

Zeige: Es gilt

$$(0, 0_W, 0_V) \notin \text{int}(A).$$

Beweis Die Aussage wird mittels eines Widerspruchsbeweises gezeigt.

Annahme $x := (0, 0_W, 0_V) \in A$

Also gilt für $d \in \text{int}(\text{cone}(S, \hat{z}))$, $k \in \text{int}(\text{cone}(K, G(\hat{z})))$ und $r > 0$

$$\begin{aligned} J'(\hat{z})(d) + r &= 0, \\ G'(\hat{z})(d) - k &= 0_W, \\ H'(\hat{z})(d) &= 0_V. \end{aligned}$$

Umgeschrieben ergibt das

$$J'(\hat{z})(d) < 0, \quad G'(\hat{z})(d) \in \text{int}(\text{cone}(K, G(\hat{z}))), \quad H'(\hat{z})(d) = 0_V.$$

Dies ist ein Widerspruch zu dem Resultat (48). Also ist $(0, 0_W, 0_V)$ kein Element von A und insbesondere kein innerer Punkt der Menge. \square

Also kann der Separationssatz 5.29 angewendet werden, da gilt

- $\text{int}(A) \neq \emptyset$
- Die Mengen A und $B := (0, 0_W, 0_V)$ sind konvex.
- $\text{int}(A) \cap B = \emptyset$

Es existiert also eine Funktion $h \in (\mathbb{R} \times W \times V)^*$, sodass

$$\begin{aligned} 0 &= h(0_{\mathbb{R} \times W \times V}) \leq \gamma, \\ h(x) &\geq \gamma \quad \text{für alle } x \in A. \end{aligned}$$

Zusammengenommen gilt also für alle $x \in A$

$$h(x) \geq 0,$$

was für $h = (l_0, \mu^*, \lambda^*)$ mit der Aussage (38) übereinstimmt.

Abschnitt 2: Es wurde nun – unabhängig von der Surjektivität des Fréchet-Differentials $H'(\hat{z})(\cdot)$ – die Existenz eines Tripels $(l_0, \mu^*, \lambda^*) \in \mathbb{R} \times W^* \times V^*$ nachgewiesen, für das folgende Eigenschaften gelten:

1. Die Ungleichung

$$0 \leq l_0(J'(\hat{z})(d) + r) - \mu^*(G'(\hat{z})(d) - \sigma) - \lambda^*(H'(\hat{z})(d))$$

gilt für alle $d \in \text{int}(S) - z \subseteq \text{int}(\text{cone}(S, \hat{z}))$, nichtnegativen reellen Zahlen $r \geq 0$ und $\sigma \in \text{int}(K) - G(\hat{z}) \subseteq \text{int}(\text{cone}(K, G(\hat{z})))$.

2. Es gilt $(l_0, \mu^*, \lambda^*) \neq (0, 0_{W^*}, 0_{V^*})$.

3. Die Operatoren $l_0(\cdot), \mu^*(\cdot), \lambda^*(\cdot)$ sind – als Elemente der jeweiligen Dualräume – stetig und linear.
4. Die Fréchet-Differentiale $J'(\hat{z})(\cdot), G'(\hat{z})(\cdot), H'(\hat{z})(\cdot)$ sind als solche linear und stetig.

Aufgrund der Stetigkeit (Eigenschaften 3, 4) wird Bedingung 1 sogar für alle

$$d \in S - \hat{z}, \quad \sigma \in K - G(\hat{z}), \quad r \geq 0,$$

indem auf die Ungleichung unter 1. der Limes angewendet wird. Zu zeigen bleiben folgende Eigenschaften

- a) $l_0 \geq 0$,
- b) $\mu^* \in K^+$,
- c) $\mu^*(G(\hat{z})) = 0$

zu a) Für den Beweis betrachte die Ungleichung 1. für die beiden Werte $d = 0_Z = \hat{z} - \hat{z} \in S - \hat{z}$ und $\sigma = 0_W = G(\hat{z}) - G(\hat{z}) \in K - G(\hat{z})$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq l_0(J'(\hat{z})(0_Z) + r) - \mu^*(G'(\hat{z})(0_Z)) - \lambda^*(H'(\hat{z})(0_Z)) \\ &= l_0(r) - \mu^*(0_W) - \lambda^*(0_V) \\ &= l_0 \cdot r \end{aligned}$$

Da es sich bei den Funktionen $J'(\hat{z})(\cdot), G'(\hat{z})(\cdot), H'(\hat{z})(\cdot), l_0(\cdot), \mu^*(\cdot)$ und $\lambda^*(\cdot)$ um lineare Funktionen handelt, nehmen sie an der Stelle 0 im jeweiligen Banachraum den Funktionswert 0 im Zielraum an. Dies gilt, da Linearität einer Funktion $L : X \rightarrow Y$ insbesondere die folgende Eigenschaft impliziert:

$$L(a + b) = L(a) + L(b) \quad \text{für alle } a, b \in X.$$

Für $a = b = 0_X \in X$ folgt $L(0_X) = 0_Y$. Eingesetzt in die Ungleichung 1. liefert dies die Ungleichung $0 \leq l_0(r)$. Da der Dualraum von \mathbb{R} – wie im Anhang unter Theorem 5.11 erläutert – mit \mathbb{R} identifiziert werden kann, wird die Gleichung umgeschrieben in $l_0 \cdot r \geq 0$. Da diese Gleichung für alle nichtnegativen $r > 0$ gilt, impliziert dies die Behauptung a).

zu b) und c) Betrachte nun die Ungleichung 1 für $d = 0_Z \in S - \hat{z}, r = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq l_0(J'(\hat{z})(0_Z)) - \mu^*(G'(\hat{z})(0_Z) + \sigma) - \lambda^*(H'(\hat{z})(0_Z)) \\ &= \mu^*(\sigma) \end{aligned}$$

In der Rechnung wurde analog zu der Rechnung von a) vorgegangen. Nun können noch die Eigenschaften des Kegels $\text{cone}(K, G(\hat{z}))$ verwendet werden. Es gilt

$$\text{cone}(K, G(\hat{z})) = \{\lambda \cdot (k - G(\hat{z})) \mid k \in K, \lambda \geq 0\}. \quad (49)$$

Aufgrund der in Satz (3.11) gezeigten Identität

$$\begin{aligned} \text{cone}(K, G(\hat{z})) &= \{\lambda \cdot (k - G(\hat{z})) \mid k \in K, \lambda \geq 0\} \\ &= \{k - \lambda \cdot G(\hat{z}) \mid k \in K, \lambda \geq 0\}, \end{aligned} \quad (50)$$

ist jedes Element k des konvexen Kegels K Element der Menge (49). Dies wird ersichtlich, betrachtet man die Elemente der umgeformten Menge für $\lambda = 0$. Also gilt insbesondere für alle $k \in K$ die Ungleichung

$$\mu^*(k) \geq 0.$$

Also ist $\mu^*(\cdot)$ ein Element des positiven Dualkegels⁴⁹ K^+ .

Da K ein Kegel mit Spitze in 0_W ist, gilt insbesondere $0_W \in K$. Setzt man $k = 0_W \in \text{cone}(K, G(\hat{z}))$ in die Gleichung (50) ein, erhält man die Ungleichung

$$\mu^*(-\lambda \cdot G(\hat{z})) \geq 0.$$

Für $\lambda = 1$, unter Berücksichtigung der Linearität, folgt

$$\mu^*(-G(\hat{z})) = -\mu^*(G(\hat{z})) \geq 0$$

Da $G(\hat{z})$ allerdings auch ein Element aus dem Kegel K ist, gilt zusätzlich

$$\mu^*(G(\hat{z})) \geq 0.$$

Zusammengenommen folgt die Behauptung $\mu^*(G(\hat{z})) = 0$. □

Definition 3.19 (Karush-Kuhn-Tucker/ Fritz-John⁵⁰).

a) Bezeichne die Kriterien (34 - 37) als Fritz-John (FJ)- Bedingungen. Falls zusätzlich zu den Fritz-John-Bedingungen noch

$$l_0 \neq 0$$

erfüllt ist, spricht man von Karush-Kuhn-Tucker (KKT)- Bedingungen.

⁴⁹Für die Definition des positiven Dualkegels siehe Definition (5.31) im Anhang.

⁵⁰Diese Definition lehnt sich an an Definition 2.3.25 in [8].

- b) Jeder Punkt $(\hat{x}, l_0, \mu^*, \lambda^*)$, der den FJ- beziehungsweise KKT Bedingungen genügt, wird Fritz-John beziehungsweise Karush-Kuhn-Tucker-Punkt der Optimierungsaufgabe 2.5 genannt.
- c) Das Funktionentripel (l_0, μ^*, λ^*) wird als Lagrange-Multiplikatoren bezeichnet.

Man beachte, dass für die sogenannten trivialen Lagrange-Multiplikatoren $(0, 0_{W^*}, 0_{V^*})$ die Fritz-John-Bedingungen an jedem zulässigen Punkt der Optimierungsaufgabe erfüllt sind. Das Theorem 3.18 schließt diesen Fall aus.

Nun betrachten wir die Fritz-John-Bedingungen im Endlichdimensionalen und formulieren für diesen Fall Kriterien, die einfacher zu kontrollieren sind, als die allgemeinen Kriterien in Theorem 3.18. Dazu definiere ich zunächst die Lagrangefunktion.

Definition 3.20 (Lagrange Funktion⁵¹).

- a) Betrachte die allgemeine Optimierungsaufgabe in Standardform (2.5).
Bezeichne mit $L : Z \times \mathbb{R} \times W^* \times V^*$ die Funktion⁵², die definiert ist als

$$L(\hat{z}, l_0, \lambda^*, \mu^*) := l_0 \cdot J(\hat{z}) + \mu^*(G(\hat{z})(d)) + \lambda^*(H(\hat{z})(d)).$$

- b) Im endlichdimensionalen Fall für $l_0 = 1$ bezeichne die Funktion L als Lagrangefunktion der Optimierungsaufgabe 2.1 in der Form (3).

Bemerkung 3.21.

Betrachte die endlichdimensionale Optimierungsaufgabe (2.1) für stetig differenzierbare Funktionen j, g und h . Durch Einsetzen der jeweiligen Räume in die Definition 3.20 wird die Lagrangefunktion im Endlichdimensionalen erhalten:

$$L(x, l_0, \lambda, \mu) := l_0 \cdot j(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i \cdot g_i(x) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \cdot h_j(x).$$

Hier können die Lagrange-Multiplikatoren als Elemente

$$(l_0, \mu, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$$

geschrieben werden. Eine Erläuterung dazu befindet sich im Anhang unter Theorem 5.11.

⁵¹Diese Definition findet sich im Endlichdimensionalen unter Definition 2.34 in [5].

⁵²Der Hilbertraum der reellen Zahlen kann mit seinem Dualraum identifiziert werden, vgl. Theorem 5.11 im Anhang.

Theorem 3.22 (Fritz-John-Bedingungen im Endlichdimensionalen⁵³).

Betrachte die endlichdimensionale Optimierungsaufgabe 2.1 mit der Notation aus (3) für stetig differenzierbare Funktionen j, g und h :

$$\begin{aligned} j &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ h &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, \\ g &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Es sei \hat{z} ein lokales Minimum des Problems.

Dann existieren Multiplikatoren $l_0 \geq 0, \mu \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}^p$, sodass

$$g(\hat{z}) \cdot \mu = 0, \quad (51)$$

$$\mu_i \geq 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, m\}, \quad (52)$$

$$\nabla L(\hat{z}, l_0, \mu, \lambda) = 0, \quad (53)$$

wobei L die Lagrange-Funktion 3.20 bezeichnet.

Beweis. Um die Resultate für die endlichdimensionale Optimierungsaufgabe 2.1 herzuleiten, wird das Theorem 3.18 angewendet. Der daraus resultierende Karush-Kuhn-Tucker Punkt wird – wie im Theorem 3.18 – mit $(\hat{x}, l_0, \mu, \lambda^*)$ bezeichnet. Da sich die Multiplikatoren für den endlichdimensionalen Fall von denen, die uns das Theorem liefert unterscheiden, verwende ich für erstere die Notation $(\hat{x}, l_0, \mu, \lambda)$. Die Multiplikatoren μ und λ werden im Laufe des Beweises definiert.

Damit das Theorem 3.18 angewendet werden kann, muss sichergestellt sein, dass dessen Voraussetzungen erfüllt sind:

- a) Da wir im endlichdimensionalen keine Mengenrestriktion S betrachten, gilt $S = \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen, konvex und beinhaltet innere Punkte.
- b) $K := (\mathbb{R}^{\leq 0})^m$ ist ein konvexer Kegel mit Spitze in $0_{\mathbb{R}^m}$, dessen Inneres nicht leer ist.
- c) Das Bild des linearen Operators $\text{Hess}(H)(\hat{z})(\mathbb{R}^n)$

$$\text{Hess}(H)(\hat{z})(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{pmatrix} \nabla h_1(\hat{z})^T \cdot d \\ \vdots \\ \nabla h_m(\hat{z})^T \cdot d \end{pmatrix} \middle| d \in \mathbb{R}^n \right\}$$

ist aus folgendem Grunde immer abgeschlossen:

⁵³Diese Aussage findet sich in Abgewandelter Form unter Theorem 2.3.28 in [8].

Falls $\nabla h_i(\hat{z}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ besteht die i -te Komponente des Bildes aus $\{0\}$, andernfalls aus dem kompletten \mathbb{R} .

Deshalb kann das Bild keine echte dichte Teilmenge des \mathbb{R}^m sein.

- d) Die Funktionen f , g und h sind stetig Fréchet-Differenzierbar, da die Fréchet-Differenzierbarkeit eine Verallgemeinerung der totalen Differenzierbarkeit ist.

Also existiert ein Tripel $(l_0, \mu^*, \lambda^*) \in \mathbb{R} \times W^* \times V^* \setminus \{0_{\mathbb{R} \times W^* \times V^*}\}$, sodass

$$l_0 \geq 0, \quad (54)$$

$$\mu^* \in K^+ = \{f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \mid f(k) \geq 0 \ \forall k \in (\mathbb{R}^{\leq 0})^m\}, \quad (55)$$

$$\mu^*(g(\hat{z})) = 0, \quad (56)$$

$$\tilde{L}(\hat{z}, l_0, \lambda^*, \mu^*)(d) \geq 0 \quad \text{für alle } d \in S - \{\hat{z}\}, \quad (57)$$

wobei K^+ den negativen Dualkegel von K bezeichnet⁵⁴ und die Funktion \tilde{L} wie folgt definiert ist:

$$\tilde{L}(\hat{z}, l_0, \lambda^*, \mu^*)(d) := l_0 j'(\hat{z})(d) - \mu^*(g'(\hat{z})(d)) - \lambda^*(h'(\hat{z})(d)).$$

Nun gilt es zu zeigen, dass das aus Theorem 3.18 erhaltene Resultat wie in (51 - 53) geschrieben werden kann:

Zunächst sind die Zielräume der Funktionen j , g und h , also \mathbb{R} , \mathbb{R}^m , und \mathbb{R}^p Hilberträume. Als solche sind sie isomorph zu ihren Dualräumen⁵⁵. Deshalb können wir die erhaltenen Funktionale l_0 , λ^* und μ^* als Vektoren schreiben. Das Resultat $\mu^* \in K^+$ lässt sich dann als $\mu^* \cdot k \geq 0$ für alle $k \in K$ schreiben. Da der Kegel K alle Elemente aus \mathbb{R}^m beinhaltet, die in jeder Komponente negativ oder null sind, gilt $\mu_i^* \leq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$.

Jedoch suchen wir im Theorem 3.22 im Endlichdimensionalen ein μ , für das gilt $\mu_i \geq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Also setze

$$\lambda := -\lambda^*,$$

$$\mu := -\mu^*,$$

Dann gelten die Kriterien (51), (52). Das Kriterium (57) lässt sich für die Multiplikatoren μ und λ wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} l_0 \cdot \nabla j(\hat{z}) \cdot d^T - \sum_{k=1}^m \nabla g_k(\hat{z}) \cdot d^T \cdot \mu_k^* - \sum_{l=1}^p \nabla h_l(\hat{z}) \cdot d^T \cdot \lambda_l^* &\geq 0 \\ \Rightarrow l_0 \cdot \nabla j(\hat{z}) \cdot d^T + \sum_{k=1}^m \nabla g_k(\hat{z}) \cdot d^T \cdot \mu_k + \sum_{l=1}^p \nabla h_l(\hat{z}) \cdot d^T \cdot \lambda_l &\geq 0. \end{aligned} \quad (58)$$

⁵⁴Die Definition des negativen Dualkegels findet sich unter Definition (5.31) im Anhang.

⁵⁵Siehe Kommentar 5.11 im Anhang für weiterführende Informationen.

für alle $d \in S - \{\hat{z}\}$. Die Menge $S - \{\hat{z}\} = \mathbb{R}^n - \hat{z}$ stimmt mit dem \mathbb{R}^n überein. Also resultiert aus (58) für alle $d \in \mathbb{R}^n$ die folgende Identität:

$$l_0 \cdot \nabla j(\hat{z}) + \sum_{k=1}^m \nabla g_k(\hat{z}) \cdot d^T \cdot \mu_k + \sum_{l=1}^p \nabla h_l(\hat{z}) \cdot d^T \cdot \lambda_l = 0_{\mathbb{R}^n},$$

also ist Bedingung (53) für erfüllt.

□

Um Theorem 3.18 anwenden zu können, darf das Bild des linearen Operators $H'(\hat{z})(d)$ nie eine echte dichte Teilmenge des Zielraums sein. In dem Beweis des Theorems 3.22 haben wir gezeigt, dass dieses Kriterium im endlichdimensionalen immer erfüllt ist. Im Unendlichdimensionalen hingegen ist dies im Allgemeinen nicht der Fall. Da das Kriterium nicht immer direkt nachzuprüfen ist, findet sich im Theorem 2.3.29 aus [8] ein einfacher zu überprüfendes Kriterium, welches impliziert, dass das Bild des Fréchet-Differentials keine echte dichte Teilmenge des Zielraumes ist.

Nur über die in Theorem 3.18 getroffenen Annahmen erhalten wir, dass als notwendige Bedingung für ein lokales Minimum ein Fritz-John-Punkt vorliegen muss. Um Kandidaten für lokale Extrema einer gegebenen Funktion zu bestimmen, reicht es nun aus, die zulässigen Punkte darauf zu prüfen, ob die Fritz-John-Bedingungen für nicht-triviale Lagrange-Multiplikatoren erfüllt sind. Allerdings existieren auch Fritz-John-Bedingungen, an denen kein lokales Optimum vorliegt. Die Existenz nur von einem Lagrange-Multiplikator mit $l_0 = 0$ deutet schon darauf hin, dass möglicherweise – obwohl die Fritz-John-Bedingungen erfüllt sind – kein lokales Optimum vorliegt, da für $l_0 = 0$ die eigentlich betrachtete Zielfunktion in der Ungleichung (37) nicht berücksichtigt wird.

Falls $l_0 \neq 0$ gilt, ist es möglich, die Multiplikatoren so zu normieren, dass l_0 die Länge 1 besitzt, da die Lagrange-Multiplikatoren dann immer noch die gesetzten Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} l_0 J'(\hat{z})(d) - \mu^*(G'(\hat{z})(d)) + \lambda^*(H'(\hat{z})(d)) &\geq 0 \quad \forall d \in S \setminus \{z\} \\ \Leftrightarrow J'(\hat{z})(d) - \bar{\mu}^*(G'(\hat{z})(d)) + \bar{\lambda}^*(H'(\hat{z})(d)) &\geq 0 \quad \forall d \in S \setminus \{z\} \end{aligned}$$

für

$$\bar{\lambda}^*(x) = \frac{\lambda^*(x)}{l_0}, \quad \bar{\mu}^*(x) = \frac{\mu^*(x)}{l_0}$$

erfüllt (34 - 37). In einem solchen Falle stimmt das soeben entwickelte notwendige Optimalitätskriterium im unrestringierten Fall mit $\nabla j(\hat{z}) = 0_{\mathbb{R}^n}$

überein. Dies ist ersichtlich, da in einem solchen Falle die Gleichheits- und Ungleichheitsrestriktionen automatisch erfüllt sind, sie also als

$$g(z) = 0_{\mathbb{R}^m}, \quad h(z) = 0_{\mathbb{R}^p}$$

gesetzt werden können. Für einen Karush-Kuhn-Tucker-Punkt gilt also

$$l_0 \cdot \nabla j(\hat{z}) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Falls jetzt ein Fritz-John-Punkt mit $l_0 = 0$ vorliegt, beinhaltet dies keine Aussage über die Zielfunktion j , ist also kein sinnvolles notwendiges Kriterium. Deshalb schließt die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingung diesen Fall aus. Damit der Satz 3.18 uns die Existenz von Lagrange-Multiplikatoren liefert, die den KKT-Bedingungen genügen, müssen jedoch noch zusätzliche – sogenannte Regularitätsbedingungen – erfüllt sein, denen wir uns im folgenden Kapitel zuwenden. Unter Voraussetzung der Gültigkeit eines Regularitätskriteriums gilt dann, dass das entwickelte Kriterium im unrestringierten Fall mit $\nabla j(\hat{z}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ übereinstimmt.

3.3 Regularitätskriterien und Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen

Regularitätskriterien, also Kriterien, die garantieren, dass der Lagrange-Multiplikator l_0 notwendigerweise an einem lokalen Optimum ungleich 0 ist, werden in diesem Abschnitt vorgestellt. Anschließend werden wir mithilfe der Regularitätskriterien unter einigen weiteren Voraussetzungen ein hinreichendes Kriterium herleiten.

Definition 3.23 (Regularitätskriterium von Robinson⁵⁶).

Das Regularitätskriterium von Robinson ist an einer zulässigen Stelle \hat{z} genau dann erfüllt, wenn

$$\begin{pmatrix} 0_W \\ 0_V \end{pmatrix} \in \text{int} \left\{ \begin{pmatrix} G(\hat{z}) + G'(\hat{z})(z - \hat{z}) - k \\ H'(\hat{z})(z - \hat{z}) \end{pmatrix} \middle| z \in S, k \in K \right\}. \quad (59)$$

Das oben genannte Kriterium scheint nicht sehr griffig und leicht zu überprüfen. Ein anschauliches Kriterium, welches das Regularitätskriterium von Robinson impliziert, liefert das folgende Lemma.

Lemma 3.24 (Regularitätskriterium von Robinson⁵⁷).

Das Robinson Regularitätskriterium ist bereits an der Stelle \hat{z} erfüllt, wenn der zu prüfende zulässige Punkt \hat{z} im Inneren von S liegt und der lineare Operator $T : Z \rightarrow W \times V$, definiert durch

$$T := (G'(\hat{z})(\cdot), H'(\hat{z})(\cdot))$$

surjektiv ist.

Beweis. Da es sich bei $\hat{z} \in \text{int}(S)$ um einen inneren Punkt von S handelt, existiert ein $\epsilon > 0$, sodass die offene Umgebung von \hat{z} mit Radius ϵ Teilmenge von S ist:

$$U_\epsilon(\hat{z}) \subseteq S.$$

Für die um \hat{z} verschobene Menge $S - \{\hat{z}\}$ gilt deshalb

$$U_\epsilon(0_Z) \subseteq S - \{\hat{z}\}.$$

Aufgrund der Surjektivität des linearen Operators T kann der Satz des offenen Bildes 5.12 angewendet werden, der die Offenheit des Bildes $T(U_\epsilon(0_Z))$ in $W \times V$ liefert.

⁵⁶Vergleiche Definition 2.3.32 aus [8].

⁵⁷Vergleiche Korollar 2.3.24 aus [8].

Also ist die Menge

$$T(U_\epsilon(0_Z)) = \left\{ \begin{pmatrix} G'(\hat{z})(z - \hat{z}) \\ H'(\hat{z})(z - \hat{z}) \end{pmatrix} \middle| z \in S \right\}$$

offen in $W \times V$. Da der Operator T linear ist, gilt $T(0_Z) = 0_{W \times V}$, also gilt

$$T(0_Z) = \begin{pmatrix} 0_W \\ 0_V \end{pmatrix} \in \text{int} \left(\left\{ \begin{pmatrix} G'(\hat{z})(z - \hat{z}) \\ H'(\hat{z})(z - \hat{z}) \end{pmatrix} \middle| z \in S \right\} \right). \quad (60)$$

Da $G(\hat{z})$ ein Element des Kegels K ist, existiert $k = G(\hat{z})$ in K , sodass gilt $k - g(\hat{z}) = 0_W$. Also umschließt die Menge (59) die Menge (60), woraus folgt, dass insbesondere $0_{W \times V}$ ein innerer Punkt von (59) ist, also das Regularitätskriterium von Robinson erfüllt ist. \square

Das folgende Lemma stellt sicher, dass es sich bei der Bedingung von Robinson überhaupt um ein Regularitätskriterium handelt. Es liefert die Gültigkeit der Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen als notwendige Optimalitätskriterien.

Theorem 3.25 (Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen⁵⁸).

Es seien die Bedingungen des Theorems 3.18 erfüllt. Außerdem gelte das Regularitätskriterium von Robinson an der Stelle \hat{z} .

Dann handelt es sich bei dem aus dem Theorem 3.18 resultierenden Quadrupel $(\hat{z}, l_0, \mu^, \lambda^*)$ um einen KKT-Punkt.*

Beweis. Da die Bedingungen des Theorems 3.18 erfüllt sind, existiert ein Tripel

$$(l_0, \mu^*, \lambda^*) \in \mathbb{R} \times W^* \times V^* \setminus \{0_{\mathbb{R} \times W^* \times V^*}\},$$

für das die folgenden Bedingungen gelten:

$$l_0 \geq 0, \quad (61)$$

$$\mu^* \in K^+, \quad (62)$$

$$\mu^*(G(\hat{z})) = 0, \quad (63)$$

$$\tilde{L}(\hat{z}, l_0, \lambda^*, \mu^*)(d) \geq 0 \quad \text{für alle } d \in S - \{\hat{z}\}. \quad (64)$$

Die Funktion \tilde{L} ist wie folgt definiert:

$$\tilde{L}(\hat{z}, l_0, \lambda^*, \mu^*)(d) := l_0 j'(\hat{z})(d) - \mu^*(g'(\hat{z})(d)) - \lambda^*(h'(\hat{z})(d)).$$

Zu zeigen ist, dass $l_0 \neq 0$ gilt. Die Aussage wird per Widerspruchsbeweis gezeigt.

⁵⁸Vgl. Theorem 2.3.33 aus [8].

Annahme $l_0 = 0$ Dann lässt sich die Eigenschaft (64) wie folgt schreiben:

$$0 \geq \mu^*(G'(\hat{z})(d)) + \lambda^*(H'(\hat{z})(d)).$$

Aufgrund der Linearität des Fréchet-Differential folgt dann aus (64) unter Benutzung der Bedingungen (62) und (63) für alle $d \in S - \{\hat{z}\}$ und $k \in K$

$$\begin{aligned} 0 &\geq \mu^*(G'(\hat{z})(d)) + \lambda^*(H'(\hat{z})(d)) \\ &\geq \mu^*(G'(\hat{z})(d)) + \mu^*(G(\hat{z})) - \mu^*(k) + \lambda^*(H'(\hat{z})(d)) \\ &= \mu^*(G'(\hat{z})(d) + G(\hat{z}) - k) + \lambda^*(H'(\hat{z})(d)). \end{aligned} \quad (65)$$

Betrachte die Menge

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} G(\hat{z}) + G'(\hat{z})(z - \hat{z}) - k \\ H'(\hat{z})(z - \hat{z}) \end{pmatrix} \middle| z \in S, k \in K \right\}.$$

Der Punkt $0_{W \times V}$ wird aufgrund von Gleichung (65) durch das Funktional

$$\nu^* \in (W \times V)^*, \quad \nu^*(w, v) := \mu^*(w) + \lambda^*(v)$$

von der Menge M separiert⁵⁹. Das Funktional ν^* hat folgende zwei Eigenschaften:

- Es ist als Summe zweier linearer Funktionen linear.
- Da wir $l_0 = 0$ angenommen haben, bilden die Funktionen μ^* und λ^* nach Theorem 3.18 nicht konstant auf 0 ab. Also ist die Funktion ν^* nicht gleich der Funktion $0_{(W \times V)^*}$.

Aufgrund dieser beiden Eigenschaften von ν^* kann insbesondere $0_{W \times V}$ nicht im Inneren der Menge M liegen. Dies kann wie folgt gezeigt werden:

Annahme $0_{W \times V} \in \text{int}(M)$.

Da laut Annahme $0_{W \times V}$ ein innerer Punkt der Menge M ist, existiert ein $\epsilon > 0$ sodass

$$U_\epsilon(0_{W \times V}) \subseteq M.$$

Außerdem bildet – wie soeben erläutert – die Funktion ν^* nicht konstant auf 0 ab. Deshalb existiert ein $x \in W \times V$, für das gilt

$$\nu^*(x) \neq 0.$$

⁵⁹Die Definition des Begriffs „Separation von Hyperebenen“ findet sich im Anhang unter Definition 5.26

Aufgrund der Linearität von ν^* gilt auch für den Punkt y

$$y := \frac{\epsilon \cdot x}{2 \cdot \|x\|_{W \times V}},$$

dass dessen Funktionswert von ν^* ungleich 0 ist:

$$\nu^*(y) = \frac{\epsilon}{2 \cdot \|x\|_{W \times V}} \cdot \nu^*(x) \neq 0.$$

Außerdem befindet sich sowohl $-y$ als auch y in der offenen Umgebung $U_\epsilon(0_{W \times V})$ und damit in der Menge M .

Aufgrund der Linearität von ν^* gilt weiter, dass

$$\nu^*(y) = -\nu^*(-y) \neq 0.$$

Daraus folgt, dass entweder y oder $-y$ von ν^* auf einen negativen Wert abgebildet wird. Das wiederum widerspricht der Gleichung (65), die für alle Elemente aus M gilt. Also ist entweder y oder $-y$ kein Element der Menge M . Das widerspricht der Annahme, dass es sich bei $0_{W \times V}$ um einen inneren Punkt handelt.

Wir haben gezeigt: wenn $l_0 = 0$ ist, handelt es sich bei $0_{W \times V}$ nicht um einen inneren Punkt der Menge M . Das Regularitätskriterium verlangt aber eben die Eigenschaft, dass es sich bei $0_{W \times V}$ um einen inneren Punkt besagter Menge handelt. Da die Gültigkeit des Regularitätskriteriums von Robinson vorausgesetzt ist, folgt der Widerspruch. Also gilt $l_0 \neq 0$.

□

Da nun durch das Regularitätskriterium von Robinson ein Kriterium dafür bekannt ist, dass ein Karush-Kuhn-Tucker-Punkt vorliegt, wird ein hinreichendes Kriterium vorgestellt. Folgender Satz liefert unter gewissen Voraussetzungen die Gültigkeit der Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen als hinreichendes Kriterium für ein globales Optimum.

Theorem 3.26 (Globales Optimum⁶⁰).

Betrachte eine Optimierungsaufgabe (2.5) für eine Fréchet-Differenzierbare und konvexe Funktion J und affin lineare Funktionen G und H . Außerdem existiere ein Fritz-John-Punkt $(\hat{z}, l_0, \mu^, \lambda^*)$ für einen zulässigen Punkt \hat{z} und $l_0 = 1$. Dann liegt an der Stelle \hat{z} ein globales Minimum vor.*

⁶⁰Vergleiche Theorem 2.3.41 aus [8].

Beweis. Damit es sich bei dem zulässigen Punkt \hat{z} um ein globales Minimum handelt, muss gelten

$$J(\hat{z}) \leq J(\bar{z}) \quad \text{für alle } \bar{z} \in \Sigma.$$

Es sei also $\bar{z} \in \Sigma$ ein zulässiger Punkt. Zu zeigen ist obige Gleichung. Aufgrund der Annahmen des Satzes gelten folgende Kriterien:

- Aufgrund der Konvexität von J gilt für t aus dem reellen Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$

$$J(t \cdot \bar{z} + (1 - t) \cdot \hat{z}) \leq t \cdot J(\bar{z}) + (1 - t) \cdot J(\hat{z}). \quad (66)$$

- Da es sich bei $(\hat{z}, 1, \mu^*, \lambda^*)$ um einen Fritz-John-Punkt handelt, gilt

$$\mu^* \in K^+ \quad (67)$$

$$\mu^*(G(\hat{z})) = 0 \quad (68)$$

$$J'(\hat{z})(d) - \mu^*(G'(\hat{z})(d)) - \lambda^*(H'(\hat{z})(d)) \geq 0 \quad (69)$$

Aufgrund der Konvexität des Funktional J gilt folgendes:

Behauptung 1: Es gilt $J(\bar{z}) \geq J(\hat{z}) + J'(\hat{z})(\bar{z} - \hat{z})$.

Beweis Beh. 1: Es sei $t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Definiere die Funktion ϕ durch

$$\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\phi(t) := t \cdot J(\bar{z}) + (1 - t) \cdot J(\hat{z}) - J(t \cdot \bar{z} + (1 - t) \cdot \hat{z})$$

als Differenz der linken und rechten Seite der Konvexitätsgleichung (66). Im Folgenden wird die Gültigkeit folgender Eigenschaften gezeigt:

1. $\phi(t) \geq 0$ für alle t im Intervall $[0, 1]$.
2. $\phi(0) = 0$.
3. ϕ ist Fréchet-Differenzierbar und $\phi'(0)$ ist nichtnegativ.

zu 1) Für $t \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} \phi(t) &= t \cdot J(\bar{z}) + (1 - t) \cdot J(\hat{z}) - J(t \cdot \bar{z} + (1 - t) \cdot \hat{z}) \\ &\geq J(t \cdot \bar{z} + (1 - t) \cdot \hat{z}) - J(t \cdot \bar{z} + (1 - t) \cdot \hat{z}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (70)$$

In Gleichung (70) wurde die Konvexitätseigenschaft (66) des Funktional J für $t \cdot J(\bar{z}) + (1 - t) \cdot J(\hat{z})$ eingesetzt. Also gilt $\phi(t) \geq 0$ für alle t in $[0, 1]$.

zu 2) Es gilt $\phi(0) = J(\bar{z}) - J(\hat{z}) = 0$.

zu 3) Aufgrund der Fréchet-Differenzierbarkeit von J ist ϕ Fréchet-Differenzierbar. Die Ableitung ist

$$\phi'(t) = J(\bar{z}) - J(\hat{z}) - J'(t \cdot \bar{z} + (1-t) \cdot \hat{z})(\bar{z} - \hat{z}).$$

Insbesondere gilt also

$$\phi'(0) = J(\bar{z}) - J(\hat{z}) - J'(\hat{z})(\bar{z} - \hat{z}).$$

Aufgrund der bereits gezeigten Eigenschaften (1) und (2) muss die Ableitung ϕ' an der Stelle $t = 0$ nichtnegativ sein. Da es sich bei ϕ um eine reellwertige Funktion handelt und die Ableitung ϕ' existiert, ist die Ableitung an der Stelle 0 gegeben als

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\phi(h) - \phi(0)}{h}.$$

Für $h \leq 1$ gilt also

$$\begin{aligned} \phi'(0) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\phi(h) - \phi(0)}{h} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{\phi(h)}{h} \\ &\geq \lim_{h \downarrow 0} \frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Nun haben wir die letzte Aussage gezeigt und können das Ergebnis $\phi'(0) \geq 0$ für den Beweis von Behauptung 1 wie folgt verwenden:

$$\begin{aligned} 0 \leq \phi'(0) &= J(\bar{z}) - J(\hat{z}) - J'(\hat{z})(\bar{z} - \hat{z}) \\ &\Leftrightarrow J(\bar{z}) \geq J(\hat{z}) + J'(\hat{z})(\bar{z} - \hat{z}) \end{aligned}$$

Also gilt

$$J(\bar{z}) \geq J(\hat{z}) + J'(\hat{z})(\bar{z} - \hat{z}) \tag{71}$$

$$\geq J(\hat{z}) + \mu^*(G'(\hat{z})(\bar{z} - \hat{z})) - \lambda^*(H'(\hat{z})(\bar{z} - \hat{z})), \tag{72}$$

wobei in (71) das soeben gezeigte Resultat und in (72) das Fritz-John-Kriterium (69) eingesetzt ist.

Aufgrund von (68) gilt $\mu^*(G(\hat{z})) \geq 0$. Da für den zulässigen Punkt \hat{z} gilt

$H(\hat{z}) = 0_V$ folgt $\lambda^*(H(\hat{z})) = 0$. Unter Ausnutzung der Linearität der Operatoren μ^* und λ^* und $\mu^*(G(\hat{z})) \geq 0$, $\lambda^*(H(\hat{z})) \geq 0$ folgt

$$\begin{aligned} J(\bar{z}) &\geq J(\hat{z}) + \mu^*(G'(\hat{z})(\bar{z} - \hat{z})) + \mu^*(G(\hat{z})) - \lambda^*(H(\hat{z})) - \lambda^*(H'(\hat{z})(\bar{z} - \hat{z})) \\ &= J(\hat{z}) + \mu^*(G'(\hat{z})(\bar{z} - \hat{z}) + G(\hat{z})) - \lambda^*(H'(\hat{z})(\bar{z} - \hat{z}) + H(\hat{z})). \end{aligned}$$

Die Operatoren G' und H' sind affin linear. Also gilt

$$G'(\hat{z})(\bar{z} - \hat{z}) + G(\hat{z}) = G(\hat{z} + \bar{z} - \hat{z}) = G(\bar{z}).$$

Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 10 verdeutlicht.

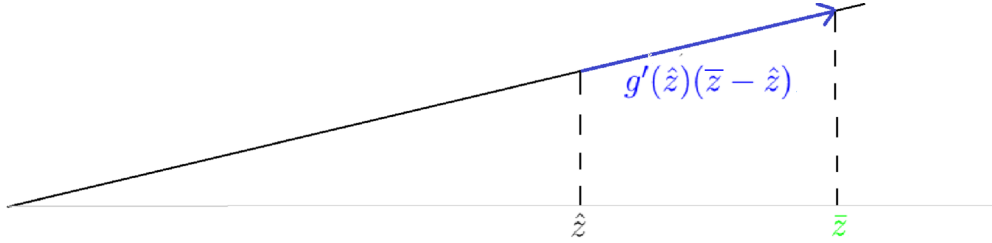


Abbildung 10: Visualisierung von $g'(\hat{z})(\bar{z} - \hat{z}) + g(\hat{z}) = g(\hat{z} + \bar{z} - \hat{z}) = g(\bar{z})$ für eine affin lineare Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Also folgt die Ungleichung

$$J(\bar{z}) \geq J(\hat{z}) + \mu^*(G(\bar{z})) + \lambda^*(H(\bar{z})) \quad (73)$$

Da \bar{z} ein zulässiger Punkt ist, ist $G(\bar{z})$ ein Element des Kegels K . Deshalb gilt aufgrund von (67) $\mu^*(G(\bar{z})) \geq 0$. Außerdem gilt für \bar{z} aus selbigem Grunde $H(\bar{z}) = 0_V$ und zusammen mit der Linearität von λ^* die Identität $\lambda^*(H(\bar{z})) = 0$. Zusammengenommen folgt aus (73) mit

$$\mu^*(G(\bar{z})) + \lambda^*(H(\bar{z})) \geq 0$$

die Aussage

$$J(\bar{z}) \geq J(\hat{z}).$$

Da \bar{z} ein beliebiger zulässiger Punkt der Optimierungsaufgabe ist, folgt, dass an der Stelle \hat{z} ein globales Minimum vorliegt, was zu zeigen war. \square

4 Fazit

In dieser Arbeit habe ich Optimalsteuerungsaufgaben und Optimierungsaufgaben auf Banachräumen definiert und jeweils ein anschauliches Beispiel gegeben. Wie in Abschnitt 2.3 gezeigt, ist es möglich, die Optimalsteuerungsaufgabe in eine Optimierungsaufgabe zu transformieren, sodass notwendige Optimalitätskriterien für Optimierungsaufgaben auch auf Optimalsteuerungsaufgaben angewendet werden können.

Zunächst habe ich als notwendige Optimalitätskriterien für Optimierungsaufgaben in Abschnitt 3.1 vorgestellt, dass an einem lokalen Optimum \hat{z} notwendigerweise ein stationärer Punkt vorliegt. Dieses Kriterium stimmt im unrestringierten Fall mit der bereits bekannten Bedingung $\nabla j(\hat{z}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ überein. Da die Überprüfung dieses notwendigen Kriteriums allerdings die – im Allgemeinen unmögliche – Bestimmung des Tangentialkegels der zulässigen Menge an jedem zulässigen Punkt \hat{z} verlangt, ist es nicht praktikabel.

Im Abschnitt 3.2 habe ich in einem ausführlichen Beweis die Gültigkeit der Fritz-John-Bedingungen als notwendige Optimalitätskriterien bewiesen. Hierbei handelt es sich um ein praktikableres Optimalitätskriterium. Der Nachteil der Fritz-John-Bedingungen ist, dass möglicherweise Lagrange-Multiplikatoren mit $l_0 = 0$ existieren, die den Bedingungen genügen, allerdings geringe Aussagekraft über die Existenz eines lokalen Optimums besitzen.

Mithilfe der im darauf folgenden Abschnitt 3.3 vorgestellten Regularitätskriterien wird sichergestellt, dass an einem lokalen Optimum der Multiplikator l_0 des Fritz-John-Punkts ungleich 0 ist, also ein Karush-Kuhn-Tucker-Punkt vorliegt. Dieses Kriterium stimmt eingeschränkt auf den endlichdimensionalen unrestringierten Fall auch mit dem bereits bekannten notwendigen Optimalitätskriterium überein.

Notwendige Optimalitätskriterien sind für ein analytisches Vorgehen zum Lösen von Optimalsteuerungsproblemen von grundlegender Bedeutung. Doch auch für eine numerische Vorgehensweise werden sie verwendet: Sowohl für die direkten als auch für die indirekten Lösungsmethoden bilden sie die theoretische Grundlage. Weiterführende Informationen zu dem auf den notwendigen Optimalitätskriterien aufbauenden lokalen Minimumsprinzip können in Kapitel 2 von [8] nachgelesen werden.

5 Anhang

Im Anhang sind zum Nachschlagen Definitionen und Sätze festgehalten. Die Sätze sind hier unbewiesen und gelten als Vorausgesetzt. Die Beweise können in den jeweils angegebenen – meist aus der Quelle [8] entnommen – Kapiteln nachgelesen werden.

5.1 allgemeine Definitionen und Sätze

Definition 5.1 (innerer Punkt⁶¹).

Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge von X . Dann ist $x \in A$ genau dann ein innerer Punkt, wenn eine positive reelle Zahl $\epsilon > 0$ existiert, sodass $U_\epsilon(x) \subseteq A$.

Definition 5.2 (Randpunkt⁶¹).

Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge von X . Dann ist $x \in A$ genau dann ein Randpunkt, wenn für jede positive reelle Zahl $\epsilon > 0$ zwei Punkte x_0 und x_1 aus dem abgeschlossenen Ball $B_\epsilon(x)$ existieren, sodass $x_0 \in A$ und $x_1 \notin A$.

Definition 5.3 (Landau-Symbole $O(h)$ und $o(h)$).

Es sei X, Y, Z Banachräume mit $a \in X$ und f, g Funktionen $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Z$.

1. *Dann ist die Funktion f genau dann in der Landau-Klasse von $o(g)$, wenn folgender Limes existiert und gilt*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|g(x)\|_Z} = 0.$$

Insbesondere gilt für $g(x) = x$ die folgenden Äquivalenz:

$$f = o(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{0 \neq x \rightarrow a} \frac{\|f(x)\|_Y}{\|x\|_X} = 0.$$

2. *Die Funktion f ist genau dann in der Landau-Klasse von $O(g)$, wenn folgender Limes existiert und gilt*

$$\lim_{0 \neq x \rightarrow a} \sup \frac{\|f(x)\|_Y}{\|g(x)\|_Z} = 0.$$

⁶¹Siehe Kapitel 3, Seite 53 der Quelle [12].

Theorem 5.4 (äquivalente Darstellung Landau- Symbole).

Die Definitionen der Landau- Symbole können äquivalent wie folgt geschrieben werden:

$$f = o(g) \Leftrightarrow \forall C > 0 \exists \epsilon > 0 \forall x \in U_\epsilon(a) : \|f(x)\|_Y \leq C \cdot \|g(x)\|_Z,$$

$$f = O(g) \Leftrightarrow \exists C > 0 \exists \epsilon > 0 \forall x \in U_\epsilon(a) : \|f(x)\|_Y \leq C \cdot \|g(x)\|_Z.$$

Theorem 5.5 (Eigenschaften der Maximumsfunktion⁶²).

Die Maximumsfunktion $\max : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich wie folgt charakterisieren:
Für reelle Zahlen a und b gilt

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}.$$

Theorem 5.6 (Normeigenschaften).

Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum mit Norm $\|\cdot\|_X$. Für die Norm gilt

1. $\|0_X\|_X = 0$.
2. $\|a\|_X \geq 0$ für alle $a \in X$.

Beweis. zu 1: Unter Benutzung der Norm- Eigenschaften folgt mit

$$\|0_X\|_X = \|2 \cdot 0_X\|_X = 2 \cdot \|0_X\|_X$$

die Behauptung $0 = \|0_X\|_X$.

zu 1: Für ein beliebiges $a \in X$ gilt $\|-a\|_X = |-1| \cdot \|a\|_X = \|a\|_X$. Unter Benutzung dieser Tatsache folgt mit der folgenden Rechnung die Behauptung:

$$0 = \|0_X\| = \|a + (-a)\|_X \leq \|a\|_X + \|-a\|_X = 2 \cdot \|a\|_X.$$

□

⁶²Siehe [2].

5.2 Banachräume, Differenzierbarkeit

In diesem Abschnitt finden sich grundlegende Definitionen und Sätze zur Verallgemeinerung der totalen Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n . Außerdem sind die Definitionen von speziellen Funktionenräumen angegeben, die in der Bachelorarbeit Verwendung finden.

Definition 5.7 (Banachraum⁶³).

Als Banachraum bezeichnen wir einen vollständigen, normierten Vektorraum. In dieser Arbeit werden ausschließlich Banachräume über dem Körper der reellen Zahlen verwendet.

Definition 5.8 (Hilbertraum⁶⁴).

Als Hilbertraum bezeichnen wir einen mit einem inneren Produkt ausgestatteten vollständigen Vektorraum.

Theorem 5.9 (Satz über implizite Funktionen⁶⁵).

Es seien X, Y, Z Banachräume, $D \subseteq X \times Y$ Umgebung eines Punktes $(\hat{x}, \hat{y}) \in D$ und $T : D \rightarrow Z$ stetig Fréchet- differenzierbar mit $T(\hat{x}, \hat{y}) = 0_Z$. Außerdem sei die partielle Ableitung $T'_y(\hat{x}, \hat{y})$ linear, stetig und bijektiv.

Dann existieren offene Umgebungen $U_\epsilon(\hat{x}) \subseteq X$ und $U_\delta(\hat{y}) \subseteq Y$ mit Radien ϵ und $\delta > 0$ und eine Abbildung $y : U_\epsilon(\hat{x}) \rightarrow Y$, für die gilt $y(\hat{x}) = \hat{y}$ und

$$T(x, y(x)) = 0_Z \quad \text{für alle } (x, y(x)) \in U_\epsilon(\hat{x}) \times U_\delta(\hat{y}).$$

Definition 5.10 (Dualraum⁶⁶).

Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum. Bezeichne mit

$$X^* := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ linear und stetig} \}$$

den Dualraum von X . Zusammen mit der Norm

$$\|T\|_{X^*} := \sup_{\|x\|_X \leq 1} |T(x)|$$

ist der Dualraum eines Banachraumes ein Banachraum.

Theorem 5.11 (Identifizierung des Dualraums für Hilbertraum⁶⁷).

Man kann den Dualraum \mathbb{R}^ mit \mathbb{R} identifizieren. Diese Identifizierung des*

⁶³Vgl. Definition 2.1.6 aus [8].

⁶⁴Vgl. Definition 2.1.8 aus [8].

⁶⁵Vergleiche [8], Theorem 2.1.14.

⁶⁶Vgl. Definition 2.1.9 f. aus [8].

⁶⁷Vgl. Theorem 2.1.10 aus [8].

Raumes mit seinem Dualraum ist für jeden Hilbertraum möglich, wie Theorem 2.1.10 aus [8] zeigt.

Für die reellen Zahlen ist diese Identifizierung wie folgt schnell einzusehen: Gegeben ein Element $\gamma \in \mathbb{R}^*$. Diese Funktion ist eine lineare, stetige Funktion. Also wird γ wie folgt durch seine Steigung $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}$ bestimmt : $\gamma(x) = \bar{\gamma} \cdot x$. Bezeichne den Skalar $\bar{\gamma}$ mit γ , dann gilt also

$$\gamma(x) = \gamma \cdot x.$$

Theorem 5.12 (Satz über die offene Abbildung⁶⁸).

Es seien Z und V Banachräume. Außerdem sei $T : Z \rightarrow V$ ein linearer, stetiger und surjektiver Operator und $S \subseteq Z$ eine offene Teilmenge von Z . Dann ist das Bild $T(S)$ eine offene Teilmenge von V .

Definition 5.13 (Richtungs-, Gâteaux-, Fréchet- Ableitung⁶⁹).

Es seien zwei Banachräume X und Y und eine Abbildung $T : X \rightarrow Y$ gegeben.

- a) T besitzt eine Richtungsableitung an der Stelle $x \in X$ in Richtung $d \in X$, wenn der Grenzwert

$$T'(x; d) := \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} (T(x + \alpha \cdot d) - T(x))$$

existiert. In diesem Falle bezeichnen wir $T'(x, d)$ als die Richtungsableitung von T an der Stelle x in Richtung d .

- b) Wir bezeichnen die Abbildung T als Gâteaux- Differenzierbar in $x \in X$, wenn ein stetiger und linearer Operator $\delta T(x)(\cdot) : X \rightarrow Y$ existiert, mit

$$0_Y = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} (T(x + \alpha \cdot d) - T(x) - \alpha \cdot \delta T(x)(d)).$$

In diesem Falle bezeichnen wir $\delta T(x)$ als Gâteaux- Differential von T an der Stelle x in Richtung d .

- c) Wir bezeichnen die Abbildung T als Fréchet- Differenzierbar an der Stelle $x \in X$, wenn ein stetiger und linearer Operator $T'(x)(\cdot) : X \rightarrow Y$ existiert, mit

$$0_Y = \lim_{\|d\|_X \rightarrow 0} \frac{1}{\|d\|_X} (T(x + d) - T(x) - T'(x)(d)).$$

In diesem Falle bezeichnen wir $\delta T(x)$ als Fréchet- Differential von T an der Stelle x in Richtung d .

⁶⁸Vgl. [8], Theorem 2.3.23.

⁶⁹Vgl. [8], Definition 2.1.11.

- d) Es sei $X = X_1 \times X_2$. Dann wird $T : X_1 \rightarrow Y$ an der Stelle $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in X$ partiell (Fréchet-) differenzierbar bezüglich x_1 an der Stelle (\hat{x}_1, \hat{x}_2) genannt, wenn

$$T(\cdot, \hat{x}_2) : X_1 \rightarrow Y$$

Fréchet- Differenzierbar an der Stelle \hat{x}_1 ist. Die Fréchet- Ableitung wird mit

$$T'_{x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)(\cdot)$$

bezeichnet. Analog ist die partielle (Fréchet-) Differenzierbarkeit für die Komponente x_2 definiert.

Bemerkung 5.14 (Fréchet- Ableitungen höherer Ordnung⁷⁰).

Fréchet- Ableitungen höherer Ordnung sind rekursiv definiert. Für $k \geq 2$ ist unter Benutzung der Notation aus Definition 5.13 die Abbildung T k - Mal Fréchet- Differenzierbar, wenn die erste Fréchet- Ableitung T' $k - 1$ - Mal Fréchet- Differenzierbar ist.

Das Fréchet- Differential zweiter Ordnung $T''(x)(\cdot)(\cdot)$ ist dann – wie direkt aus der Anwendung der Definition folgt – bilinear. Im Allgemeinen schreiben wir die k -te Fréchet- Ableitung als k -lineare Abbildung als

$$T^{(k)}(x)(d_1, \dots, d_k).$$

Theorem 5.15 (Zusammenhang Fréchet-, Gâteaux- Differenzierbarkeit⁷¹).

Aus der Fréchet- Differenzierbarkeit einer Abbildung $T : X \rightarrow Y$ an der Stelle $x \in X$ folgt Stetigkeit von T und Gâteaux- Differenzierbarkeit, jeweils an der Stelle x .

Falls das Fréchet- Differential $T'(x)(\cdot)$ existiert, stimmt es mit dem Gâteaux- Differential $\partial T(x)(\cdot)$ überein.

Theorem 5.16 (Taylor- Entwicklung auf Funktionenräumen⁷²).

Es seien Z und V Banachräume über dem Körper der reellen Zahlen und $U \subseteq Z$. Außerdem sei $T : U \rightarrow V$ k Mal stetig Fréchet- Differenzierbar, t und h Elemente aus U mit $\lambda \cdot t + (1 - \lambda) \cdot h \in U$ für alle $\lambda \in [0, 1]$. Dann gilt

$$T(t + h) = \sum_{i=0}^k \frac{T^{(i)}(t)(h_1, \dots, h_i)}{i!} + O(\|h^{k-1}\|_Z) \cdot h$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $h_i = h$ für $i = 1, \dots, k$.

⁷⁰Vergleiche [8], Seite 58.

⁷¹Vgl. [8], Seite 58.

⁷²Vergleiche [9], Seite 82.

Theorem 5.17 (Regeln für Fréchet- Differentiale.).

Wie in [8] unter **2.1.11** und **2.1.12** und in [10] nachzulesen ist, gelten insbesondere folgende Regeln für die Fréchet- Differenzierbarkeit:

1. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann Fréchet- Differenzierbar, wenn sie total differenzierbar ist.
2. Das Fréchet- Differential einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stimmt mit der Jakobi- Matrix überein:

$$f'(x)(d) = Df(x) \cdot d^T.$$

3. Für das Fréchet- Differential gilt die Kettenregel.

$$(F(G(x)))'(\cdot) = F'(G(x)(\cdot)) \cdot G'(x)(\cdot)$$

4. Wenn $T : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ an der Stelle (\hat{x}_1, \hat{x}_2) Fréchet- Differenzierbar ist, dann ist T auch partiell Fréchet- Differenzierbar bezüglich x_1 und x_2 . Es gilt

$$T'(\hat{x}_1, \hat{x}_2)(x_1, x_2) = T'_{x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)(x_1) + T'_{x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)(x_2)$$

Definition 5.18 (Messbare Funktion⁷³).

Es sei (X, A) ein messbarer Raum und (Y, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $F : X \rightarrow Y$ heißt A -messbar, falls $f^{-1}(U) \in A$ für alle offenen Mengen $U \subseteq Y$.

Theorem 5.19 (Lebesgue- messbare Funktion⁷⁴).

1. Jede abzählbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge und insbesondere eine Lebesgue-messbare Menge.
2. Da die es sich bei der Lebesgue- Menge um eine σ -Algebra handelt, ist das Komplement A^C auf \mathbb{R}^n auch eine Lebesgue- Menge.

⁷³Siehe [1], Seite 27.

⁷⁴Siehe [1], Seite 22, Folgerung 1 und Definition 11.2.1.

Definition 5.20 (L_p - Räume⁷⁵).

Es sei $\delta : [t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $t_0 < t_f$. Definiere auf der Menge der Lebesgue- messbaren Funktionale $f : \delta \rightarrow \mathbb{R}$ die Norm

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_{t_0}^{t_f} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, & p < \infty \\ \inf_{N \subset \delta \text{ Nullmenge}} \sup_{t \in \delta \setminus N} |f(t)|, & p = \infty \end{cases}$$

und die Menge

$$L_p(\delta) := \{f : \delta \rightarrow \mathbb{R} \text{ messbare Funktion mit } \|f\|_p < \infty\}.$$

Das Tupel $(L_p(\delta), \|\cdot\|_p)$ ist ein Banachraum. Der Produktraum $L_p^n(\delta)$ ist definiert durch

$$L_p^n(\delta) := L_p(\delta) \times \cdots \times L_p(\delta).$$

Das in der Norm verwendete Integral ist das Lebesgue- Integral. Man bemerke, dass, da es sich bei den Funktionen f um Funktionale handelt, der Absolutbetrag auf dem Zielraum verwendet wird.

Definition 5.21 (W_p - Räume⁷⁶).

Es sei $\delta : [t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $t_0 < t_f$. Des Weiteren sei $1 \leq q, p \leq \infty$. Definiere auf der Menge der $q-1$ Mal absolut stetig⁷⁷ differenzierbaren Funktionale $f : \delta \rightarrow \mathbb{R}$ die Norm

$$\|f\|_{q,p} := \begin{cases} \left(\sum_{i=0}^q \|f^{(i)}\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, & p < \infty \\ \max_{0 \leq i \leq q} \|f^{(i)}\|_\infty, & p = \infty \end{cases}$$

und die Menge

$$W_{q,p} := \{f : \delta \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ } q-1\text{-Mal absolut stetig differenzierbar mit } \|f\|_{q,p} < \infty\}.$$

Das Tupel $(W_{q,p}(\delta), \|\cdot\|_{q,p})$ ist ein Banachraum. Der Produktraum $W_{q,p}^n(\delta)$ ist definiert durch

$$W_{q,p}^n(\delta) := W_{q,p}(\delta) \times \cdots \times W_{q,p}(\delta).$$

⁷⁵Vgl. Definition 2.1.17 aus [8].

⁷⁶Vgl. [8], Definition 2.1.21

⁷⁷Die Definition absoluter Stetigkeit findet sich unter Definition 2.1.19 in [8].

Definition 5.22 (\mathcal{C}^{78}).

Es sei $\delta := [t_0, t_f] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $t_0 < t_f$. Der Raum der k -Mal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf δ wird bezeichnet mit $\mathcal{C}_k^n(\delta)$ für $k, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\mathcal{C}^n(\delta) = \mathcal{C}_0^n(\delta)$ bezeichnet den Raum der stetigen Funktionen $f : \delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf δ . Definiere auf $\mathcal{C}_k^n(\delta)$ die Norm

$$\|f\|_\infty := \max_{t \in \delta} \|f(t)\|^*,$$

wobei $\|f(t)\|^*$ eine beliebige Vektornorm auf dem \mathbb{R}^n ist. Dann ist das Tupel $(\mathcal{C}_k^n(\delta), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Theorem 5.23 (Eigenschaften der Räume⁷⁹).

$(L_p, \|\cdot\|_p)$, $(\mathcal{C}_k^n, \|\cdot\|_\infty)$ und $(W_{q,p}, \|\cdot\|_{q,p})$ sind für alle $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ Banachräume. Es gilt $\mathcal{C}_1^n(\delta) \subset W_{1,\infty}(\delta) \subset \mathcal{C}^n(\delta)$

⁷⁸Vgl. [8], Definition 2.1.22.

⁷⁹Vgl. [8], Seite 63.

5.3 Separationstheoreme

Definition 5.24 (Hyperebene⁸⁰).

Es sei X eine Menge und $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional, dass nicht konstant auf 0 abbildet. Außerdem sei $\gamma \in \mathbb{R}$. Die Menge

$$M := \{x \in X \mid h(x) = \gamma\}$$

wird Hyperebene genannt. Sie setzt sich zusammen aus der positiven (M_+) und negativen (M_-) Halbebene der Hyperebene M , definiert durch

$$M_+ := \{x \in X \mid h(x) \geq \gamma\}, \quad M_- := \{x \in X \mid h(x) \leq \gamma\}.$$

Bemerkung 5.25 (Eigenschaften der Hyperebene⁸¹).

Wenn h stetig ist, ist die Hyperebene abgeschlossen.

Definition 5.26 (Separation anhand der Hyperebene⁸⁰).

Betrachte eine Menge X und ein Element $\gamma \in \mathbb{R}$. Auf X sei ein lineares Funktional $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Es sei M die Hyperebene

$$M := \{x \in X \mid h(x) = \gamma\}.$$

Außerdem seien A und B zwei Teilmengen von X .

1. Gilt

$$h(x) \leq \gamma, \quad \text{für alle } x \in A,$$

$$h(x) \geq \gamma, \quad \text{für alle } x \in B,$$

separiert die Hyperebene M die Mengen A und B .

Triviale Separation: Insbesondere für

$$h(x) = \gamma \quad \text{für alle } x \in A \cup B$$

separiert die Hyperebene M die Mengen A und B . Wir sprechen dann von trivialer Separation.

2. Gelten die echten Ungleichungen

$$h(x) < \gamma, \quad \text{für alle } x \in A,$$

$$h(x) > \gamma, \quad \text{für alle } x \in B,$$

separiert die Hyperebene M die Mengen A und B strikt.

⁸⁰Vgl. [8], Definition 2.3.17.

⁸¹Vgl. [8], Seite 85.

Theorem 5.27 (Ljusternik⁸²).

Es seien Z und V Banachräume, auf denen die Abbildung $H : Z \rightarrow V$ definiert ist. Weiter sei $H(\hat{z}) = 0_V$. Die Abbildung H sei stetig in einer Nachbarschaft von \hat{z} und stetig Gâteaux-Differenzierbar an der Stelle \hat{z} . Die Gâteaux-Ableitung $\partial H(\hat{z})(\cdot)$ sei surjektiv. Dann existiert für ein gegebene $\hat{d} \in Z$ mit $\partial H(\hat{z})(\hat{d}) = 0_V$ ein $t_0 > 0$ und eine Abbildung

$$r : (0, t_0] \rightarrow Z, \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{r(t)}{t} = 0_Z$$

sodass

$$H(\hat{z} + t \cdot \hat{d} + r(t)) = 0_V \quad \text{für alle } t \in (0, t_0].$$

Theorem 5.28 (Separation⁸³).

Es sei M ein abgeschlossener Untertraum des Banachraums X , $\hat{x} \in X \setminus M$. Dann existiert ein $h \in X^*$, sodass $h(x) = 0$ für alle $x \in M$ und $h(\hat{x}) \neq 0$.

Theorem 5.29 (Separationssatz⁸⁴).

Es seien A und B konvexe Teilmengen eines Banachraums X .

- a) Es sei $\text{int}(A) \neq \emptyset$. Dann existiert ein Funktional $h \in X^*$, das nicht konstant auf 0 abbildet und A und B genau dann trennt, wenn der Schnitt von $\text{int}(A) \cap B$ die leere Menge ist.
- b) Es seien A und B abgeschlossen. A sei zusätzlich kompakt und der Schnitt $A \cap B = \emptyset$. Dann existiert ein Funktional $h \in X^*$, das nicht konstant auf 0 abbildet und A und B strikt voneinander trennt.

⁸²Vgl. [8], Theorem 2.3.11.

⁸³Vgl. [8], Theorem 2.3.18.

⁸⁴Vgl. [8], Theorem 2.3.21.

5.4 Kegel

Definition 5.30 (Kegel⁸⁵).

Es sei gegeben ein Vektorraum V .

(a) *Eine Teilmenge $K \subseteq V$ bezeichnen wir als Kegel mit Spitze in 0_V , falls*

$$\lambda \cdot x \in K$$

für alle $x \in K$ und alle nichtnegativen Skalare $\lambda \geq 0$ gilt.

(b) *Eine Teilmenge $K \subseteq V$ mit $x_0 \in K$ bezeichnen wir als Kegel mit Spitze in x_0 , falls die Menge $Y := \{x - x_0 : x \in K\}$ ein Kegel mit Spitze in 0_V ist.*

Definition 5.31 (positiver Dualkegel). *Es sei gegeben ein Banachraum V eine Teilmenge $K \subseteq V$. Dann ist der positive Dualkegel von K definiert als die Menge aller Abbildungen aus dem Dualraum von X , die alle Elemente aus K auf eine nichtnegative reelle Zahl abbilden:*

$$K^+ := \{x^* \in X^* \mid x^*(k) \geq 0 \text{ für alle } k \in K\}.$$

⁸⁵Vgl. [8], Definition 2.2.4.

Literatur

- [1] H. Baum. Einführung in die Maß- und Integrationstheorie. <http://www2.mathematik.hu-berlin.de/~baum/Skript/MIT-SS08.pdf>, Mar. 2008. [Online; accessed 10-September-2015].
- [2] O. Deiser. *Einführung in die Mengenlehre: die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo*. Springer-Verlag, 2009.
- [3] O. Forster. *Analysis 2: Differentialrechnung im \mathbb{R}^n -Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, 2013.
- [4] S. für Bildung und Forschung München. Lehrplan. <http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26192>, Apr. 2012. [Online; accessed 10-September-2015].
- [5] C. Geiger and C. Kanzow. *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer-Verlag, 2013.
- [6] M. Gerds. Optimal control of ordinary differential equations and differential-algebraic equations. *Habilitation, University of Bayreuth*, 2006.
- [7] M. GERDTS. Optimale steuerung. *Vorlesungsskript, Universität Würzburg, WS, 2010, 2009*.
- [8] M. Gerds. *Optimal control of ODEs and DAEs*. Walter de Gruyter, 2012.
- [9] R. S. Hamilton. The inverse function theorem of nash and moser. *American Mathematical Society*, 7(1), 1982.
- [10] J. R. Munkres. *Analysis on manifolds*. Westview Press, 1997.
- [11] C. Netzer. Banachraum-theorie. <http://www.user.tu-berlin.de/chenetzer/pdfs/BRT.pdf>, 2014. [Online; accessed 10-September-2015].
- [12] M. Richter. Skript zur Vorlesung Mathematik II für Informationswirtschaft. <http://www.math.kit.edu/ianm3/lehre/math2infowirt2011s/media/kapitel3.pdf>, 2011. [Online; accessed 10-September-2015].

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt zu haben. Die aus den Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche gekennzeichnet.

Bielefeld den 28.09.2015,

Julius Hülsmann