Merkzettel Stochastik - WS15/16

Julius Hülsmann

18. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Math. Beschreibung von Zufallssituationen

Notizen zur WDH Kapitel 1

- Erzeugendensystem der Sigma-Algebra auf $\bar{\mathbb{R}}$
- Quantiltransformation
- Übersichtsdiagramm

§ 1.1.1 Ergebnisraum #1

Ω Ergebnisraum, $\omega \in \Omega$ Ergebnis.

Abbildung 1: Zusammenfassung 1.1.1

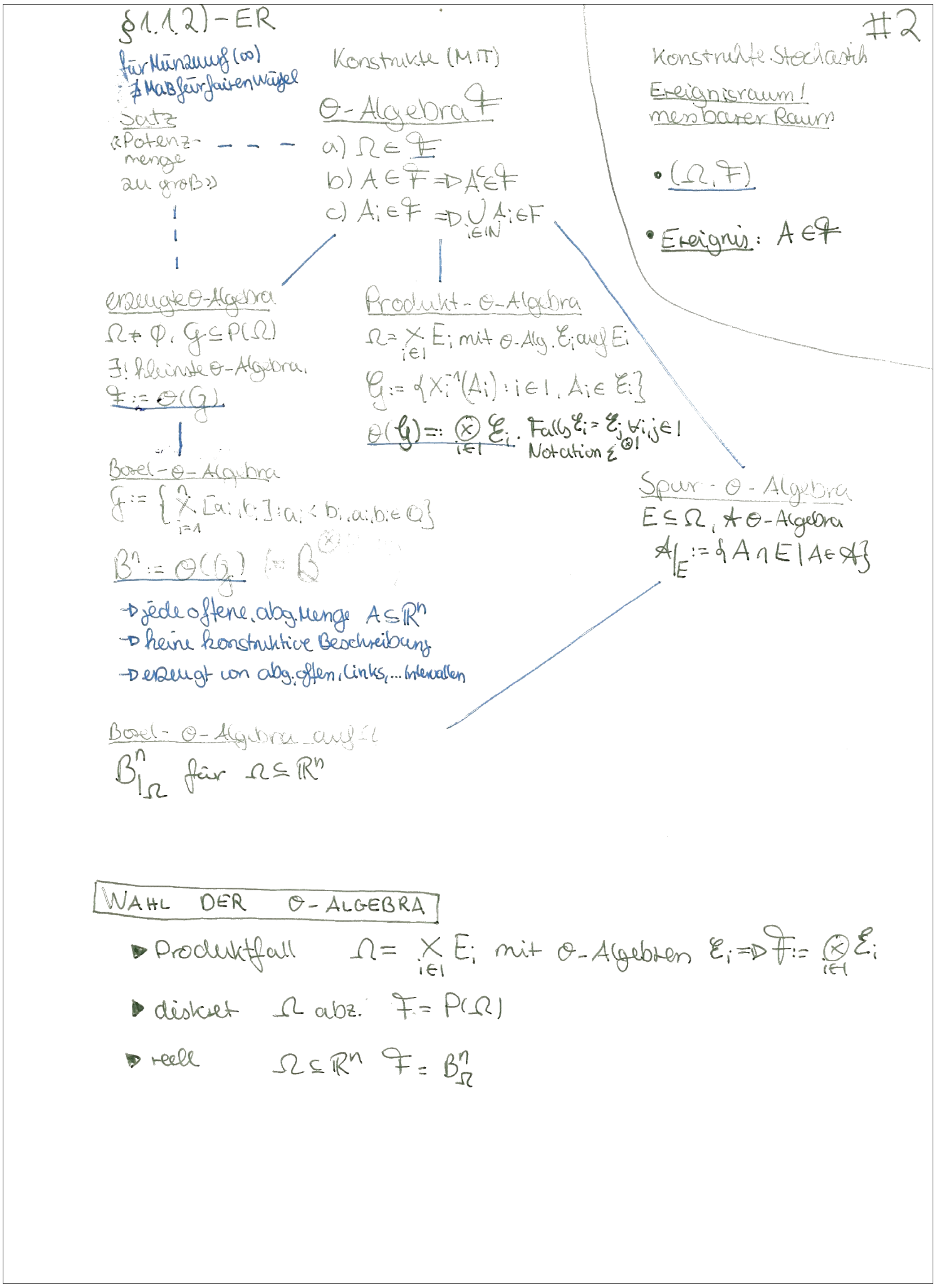

Abbildung 2: Zusammenfassung 1.1.2

§1.1.3 Wahrscheinlichkeitsmaß

#3

W-Maß/Verteilung

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$

(N) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(A) $\mathbb{P}(\bigsqcup_{\substack{i\in I\\ \text{abz.}}} A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$

W-Raum

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

§1.2 Eigenschaft + Konstrukt W-Maß

Interessante Eig:

- σ-Subadditivität $\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) \leq \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$ (nicht disj. I abz.b)
- σ-stetigkeit $A_n \uparrow A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{P}(A)$

  oder $A_n \downarrow A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_n$

Eindeutigkeitssatz

$\mathbb{P}$ eind. best durch $\mathbb{P}|_{\mathcal{G}}$

auf $\cap$-stabil Erzeuger $\mathcal{G}$

Dynkin-System

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit

(a) $\Omega \in \mathcal{D}$

(b) $A \subseteq B$, $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}$

(c) $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ disj paarw., $\in \mathcal{D} \Rightarrow \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$

Schnittstabiles Dynkin-Sys $\mathcal{G}$

$\Rightarrow d(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$

Abbildung 3: Zusammenfassung 1.1.3, 1.2

#4

Lebesgue-Integrierbar

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ mit

$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \le c\} \in \mathcal{B}^n$

für alle $c \in \mathbb{R}^+$

Lebesgue-Integral

Eigenschaften

- stimmt bei R-Intb. mit R-Int überein
- $\int \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)\,dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f_n(x)\,dx$ für $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ messbar.

Lebesgue-Maß

$\lambda^n : \mathcal{B}^n \to [0, \infty)$

$\lambda^n(A) := \int \mathbb{1}_A(x)\,dx$

$\lambda^n_\Omega := \lambda^n|_{\mathcal{B}^n(\Omega)}$

als W-Maß normiert

$\dfrac{\lambda^n(A)}{\lambda^n(\Omega)}$

Konstruktion W-Maß durch Dichten

Diskret Ω abz.

$\mathbb{P}(A) = \sum_{w \in A} \rho(w)$

$\mathbb{P}$ zu ρ umkehrbar eindeutig für ρ mit

$\rho(w) \in [0,1], \sum \rho(w) = 1$

ρ Zähldichte

Stetig Ω borelsch

$\rho : \Omega \to [0, \infty)$

(i) $\{x \in \Omega : \rho(w) \le c\}$ bad $\forall c \ge 0$

(ii) $\int_\Omega \rho(w)\,dw = 1$

$\Rightarrow \exists!$ W-Maß $\mathbb{P}$ mit $\mathbb{P}(A) := \int_A \rho(w)\,dw$

Achtung nicht umkehrbar eind.

Dichtefkt / W-keitsdichte

- Nicht $\mathbb{P} \Rightarrow$ eind ρ (Nullmenge)
- Nicht $\mathbb{P} \Rightarrow \exists \rho$ (Konvex-Kombi Diskret + Konti)

Abbildung 4: Zusammenfassung 1.2 Teil 2

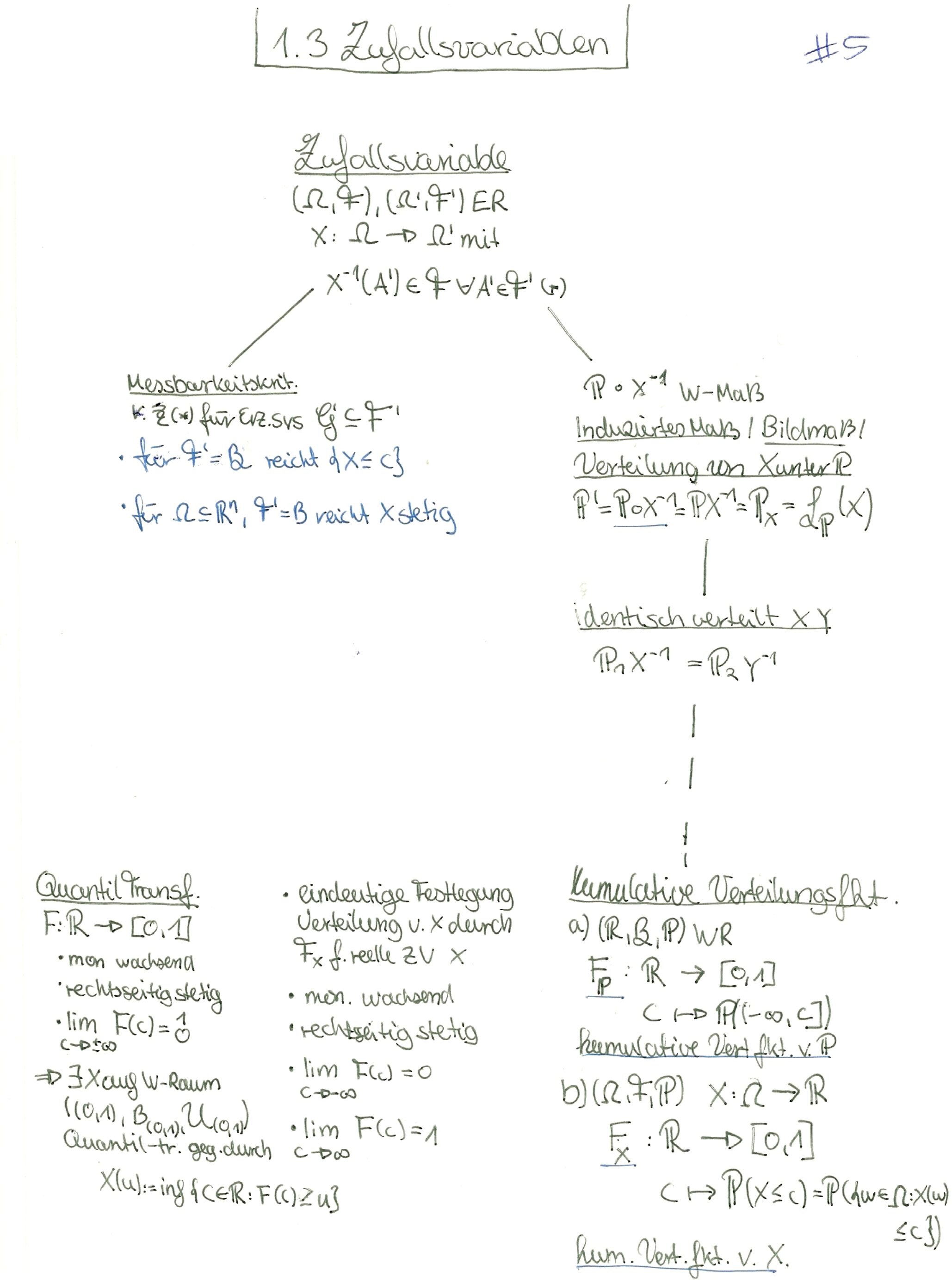

Abbildung 5: Zusammenfassung 1.3

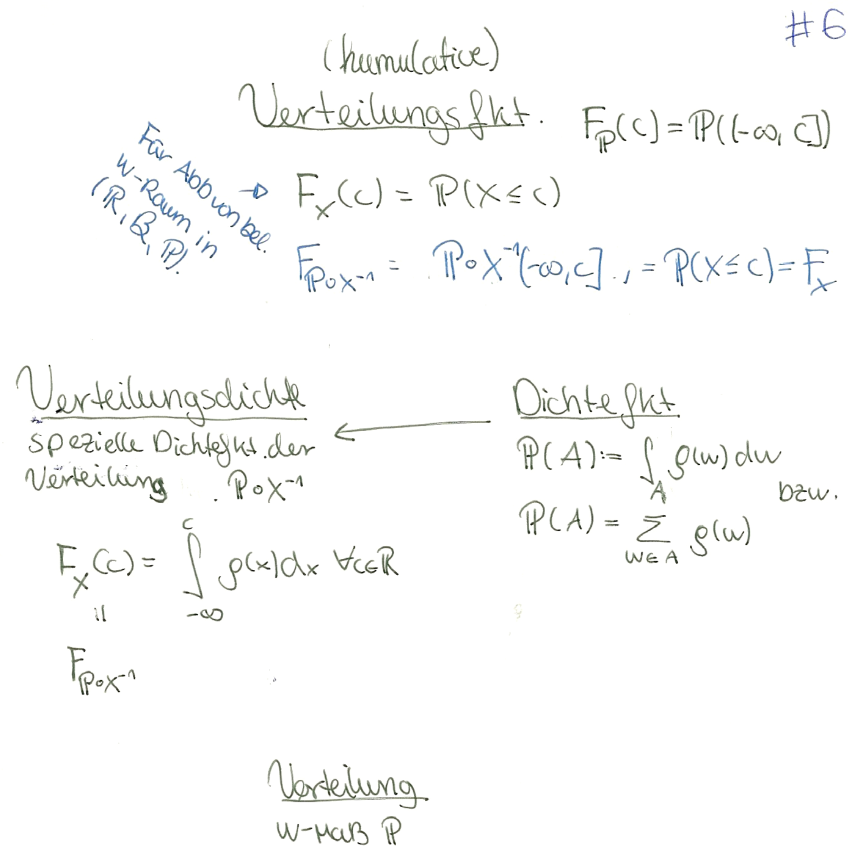

Abbildung 6: Zusammenfassung 1.3 Teil 2

2 Stochastische Standardmodelle

2.1 Gleichverteilung

Definition 2.1 (diskrete Gleichverteilung)**.** *Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, A, \mathbb{P})$ *wird als Laplace-Raum bezeichnet.*

$$n := |\Omega|, \qquad \rho(x) = \frac{1}{|\Omega|}$$
$$\Omega := \{\omega_1, \dots, \omega_n\}, \quad \mathcal{A} := P(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} =: \mathcal{U}_\Omega(A)$$

Anwendung *wenn diskret und alle* $\omega \in \Omega$ *gleichberechtigt.*

Stichwörter

- Beispiel: Bose Einstein Verteilung System n unterschiedlicher Teilchen, die sich in N unterschiedlcihen Zellen befinden. Suche die Anzahl der Teilchen in einer bestimmten Zelle.

Definition 2.2 (stetige Gleichverteilung, GLV in Kontinuum)**.** *Analog:*

$$\rho(x) := \frac{1}{\lambda^n(\Omega)},$$
$$\Omega :\subseteq R^n, \quad \mathcal{A} := \mathcal{B}^n_\Omega, \quad \mathcal{U}_\Omega(A) := \int\limits_A \rho(u)du = \frac{\lambda^n(A)}{\lambda^n(\Omega)}$$

für $\lambda^n(\Omega) < \infty$.
Anwendung *wenn* Ω *nicht endlich und alle* $\omega \in \Omega$ *gleichberechtigt.*

Stichwörter

- Beispiel: Roulette (hier wird die Richtung betrachtet, nicht die einzelnen Felder.)
- Anmerkung: Bertrand'sches Paradoxon

2.2 Urnenmodell mit Zurücklegen

Für die folgenden Abschnitte:

$$\begin{aligned}
N &:= \text{Anzahl Kugeln},\\
E &:= \text{Menge der Farben, hier soll } 2 \leq |E| < \infty,\\
a &:= \text{Farbe } a \in E,\\
F_a &:= \text{Menge der Nummern der Kugeln mit Farbe } a \in E,\\
N_a &:= |F_a|, \text{Anzahl der Kugeln der Farbe } a \in E,\\
n &:= \text{Anzahl der Stichproben (Züge aus der Urne).}
\end{aligned}$$

2.2.1 geordnete Stichprobe

Definition 2.3 (geordentes Urnenmodell mit Zurücklegen)**.** *Es seien gegeben*

$$\begin{aligned}
\Omega &:= E^n,\\
\mathcal{F} &:= P(\Omega),\\
\mathbb{P} &:= \textit{ gesuchtes Wahrscheinlichkeitsmaß.}
\end{aligned}$$

Zur Konstruktion des Maßes nummeriere die Kugeln mit Zahlen aus $\{1, \dots N\}$ *durch und vergrößere künstlich die Beobachtungstiefe, sodass die bereits definierte diskrete Gleichverteilung verwendet werden kann.*

$$\bar{\Omega} := \{1, \dots, N\}^n, \quad \bar{\mathcal{F}} := \mathbb{P}(\bar{\Omega}), \quad \bar{\mathbb{P}} := \mathcal{U}_{\bar{\Omega}}.$$

Erhalte somit durch Konstruktion einer Zufallsvariable $X : \bar{\Omega} \to \Omega$ *durch Komponentenweise Betrachtung:*

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) := \bar{\mathbb{P}} \circ X^{-1}(\{\omega\}) = \prod_{i=1}^{n} \rho(\omega_i)$$

mit

$$\rho(\omega_i) := \frac{|N_{\omega_i}|}{N},$$

in Worten Die Wahrscheinlichkeit, dass unter Berücksichtigung der Reihenfolge die Kugeln $\omega_1, \dots, \omega_n$ *gezogen werden, ist gegeben durch*

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\textit{Anzahl der Kugeln Mit Farbe } \omega_i}{\textit{Anzahl der Kugeln insgesamt}}.$$

Definition 2.4. *Es sei ρ Zähldichte auf E. Die $n-$***fache Produktdichte** *von ρ ist definiert als*

$$\rho^{\bigotimes n}(\omega) := \prod_{i=1}^{n} \rho(\omega_i).$$

*Das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß heißt $n-$***faches Produktmaß** *zu ρ.*

2.2.2 ungeordnete Stichprobe

Es ist wieder eine künstliche Vergrößerung der Beobachtungstiefe erforderlich. Definiere für k_a Anzahl der Kugeln mit Farbe a folgenden Wahrscheinlichkeitsraum:

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega} &:= \{\vec{k} = (k_a)_{a\in E} : k_a \in \mathbb{N}_0, \sum_{a\in E} k_a = n\} \\
\hat{\mathcal{F}} &:= P(\Omega) \\
\hat{\mathbb{P}}(\{\omega\}) &:= \binom{n}{\vec{k}} \cdot \prod_{a\in E} \rho(a)^{k_a}
\end{aligned}$$

Binomialkoeffizient, Multinomialkoeffizient, Binomialverteilung, Multinomialverteilung

Definition 2.5 (Multinomialkoeffizient)**.** *Für $\vec{k} = (k_a)_{a\in E}$ definiere*

$$\binom{n}{\vec{k}} := \begin{cases} \frac{n!}{\prod_{a\in E} k_a!} & \text{falls } \sum_{a\in E} k_a = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 2.6 (Multinomialverteilung)**.**

$$\mathcal{M}_{n,\rho}(\{\vec{k}\}) := \hat{\mathbb{P}}(\vec{k})$$

Stichpunkte

- Maxwell-Boltzmann-Verteilung

2.3 Urnenmodell ohne Zurücklegen

2.3.1 nummerierte Kugeln

2.3.1.1 geordnete Stichprobe

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}_{\neq} &:= \{\bar{\omega} \in \{1,\ldots,N\}^n : \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}\\ \bar{\mathcal{F}}_{\neq} &:= P(\bar{\Omega}_{\neq})\\ \bar{\mathbb{P}}_{\neq} &:= \mathcal{U}_{\bar{\Omega}_{\neq}}\end{aligned}$$

2.3.1.2 ungeordnete Stichprobe identisch mit der uniformen Verteilung

$$\tilde{\Omega} := \{\omega \subseteq \{1,\ldots,N\} \ : \ |\omega| = n\}, \quad \tilde{\mathcal{F}} := P(\tilde{\Omega}), \quad \tilde{\mathbb{P}} := \mathcal{U}_{\tilde{\Omega}}.$$

2.3.2 gefärbte Kugeln; ungeordnete Stichprobe

$$\begin{aligned}\hat{\Omega} &:= \{\vec{k} = (k_a)_{a\in E} \in N_0^{|E|} : \sum_{a\in E} k_a = n\}\\ \hat{\mathcal{F}} &:= P(\hat{\Omega})\\ \hat{\mathbb{P}}(\vec{k}) &:= \mathcal{H}_{n,\vec{N}}(\vec{k}) = \frac{\prod_{a\in E}\binom{N_a}{k_a}}{\binom{N}{n}}\end{aligned}$$

hypergeometrische Verteilung.

Theorem 2.7 (Multinomialapproximation der hypergeometrischen Verteilung)**.** *Falls*

- $\lim\limits_{n\to\infty} N_a = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{N_a}{N} = \rho(a)$

gilt punktweise Konvergenz für festes $n \in \mathbb{N}$ *und festes* $\vec{k} \in \hat{\Omega}$*:*

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{H}_{n,\vec{N}}(\{\vec{k}\}) = \mathcal{M}_{n,\rho}(\{\vec{k}\}).$$

Stichpunkte

- Lotto: 6 aus 49, Wahrscheinlichkeit für genau x richtige.
- Fermi-Dirac-Verteilung: Pauli-Verbot wird unbedeutend für genügend große Zahlen pro Niveau.

2.4 Poisson-Verteilung

gesucht: Wahrscheinlichkeit, dass zum Beispiel 5 Schadensfälle auftreten.

Definition 2.8 (Poisson-Verteilung zum Parameter λ)**.** *Die Voraussetzungen des Theorems 2.9 seien erfüllt.*

$$\Omega := \mathbb{N}_0, \quad \mathcal{F} := P(\Omega), \quad \mathbb{P}_\lambda(\{k\}) := \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Theorem 2.9 (Poisson-Approx. Binominialverteilung)**.**

- $n :=$ *Anzahl Unterteilungen*
- $\lambda \geq 0$
- $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folge in* $[0,1]$ *(vgl.* $p_n = \alpha\frac{t}{n}$*)).*
- $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda$ *(vgl.* $\lambda = t \cdot \alpha$*)*

Dann exisitert der o.g. Grenzwert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_{n,p_n}(\{k\}) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Beispiel 2.10 (Unfall bei Versicherung)**.**

$$\begin{aligned} \alpha &:= \textit{Gewichtungsfaktor} \\ t &:= \textit{Zeitpunkt Ende der Betrachtung} \\ n &:= \textit{Anzahl Unterteilungen} \end{aligned}$$

$$\Omega := \mathbb{N}_0, \quad \mathcal{F} := P(\Omega), \quad \mathbb{P}(\{k\}) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{B}_{n,\frac{\alpha\cdot t}{n}}(\{k\})$$

2.5 Wartezeitverteilung

2.5.1 negative Binominialverteilung

- Situation: Ziehen **mit Zurücklegen**, Unterschieden zwischen **Erfolg/Misserfolg**. Gesucht: Anzahl der Züge bis zum $r-$ten Erfolg
- W-Raum $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \bar{\mathcal{B}}_{r,p}(\{k\}))$ für Parameter $k \in \mathbb{N}$

Definition 2.11 (negative Binomialverteilung)**.** $\bar{\mathcal{B}}_{r,p}(\{k\})$ = *Wahrscheinlichkeit genau r-ter Erfolges bei* $k + r$ *Ziehungen*

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{B}}_{r,p}(\{k\}) &= \binom{r+k-1}{k} \cdot p^r \cdot (1-p)^k \\ &= \binom{-r}{k} \cdot p^r \cdot (p-1)^k\end{aligned}$$

Definition 2.12 (geometrische Verteilung)**.**

$$\mathcal{G}_p(\{k\}) := \bar{\mathcal{B}}_{1,p}(\{k\}) = p(1-p)^k.$$

negativer Binominialkoeffizient:

$$\binom{-r}{k} := \frac{-r \cdot (-r-1) \cdot \dots \cdot (-r-k+1)}{k!}.$$

2.5.2 Gamma-Verteilung

Frage: $\mathbb{P}(t)$ Wahrscheinlichkeit, dass im Kontinuierlichen der $r-$te Schadensfall bis zum Zeitpunkt t eingetroffen ist.

$$\Omega = (0, \infty], \quad \mathring{A} = \mathcal{B}_\Omega.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_r(\{(0,k)\}) &= 1 - \mathbb{P}_{\alpha,t}(\{0, \dots, r-1\}) \\ &= 1 - e^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\alpha t)^k}{k!} \\ &= \int_0^t \frac{\alpha^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\alpha x}\end{aligned}$$

Definition 2.13 (Verallgemeinerung Fakultät)**.**

$$\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}\Gamma(r) \qquad := \int_0^\infty y^{r-1} e^{-y} dy$$

Definition 2.14 (Gamma-Verteilung). *gegeben:*

- $\alpha > 0$ *Skalenparameter*
- $r > 0$ *Formparameter*

$\Gamma_{\alpha,r}$ *Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichtefunktion*

$$\gamma_{\alpha,r}(x) := \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\alpha x}$$

Beispiel 2.15 (Exponentialverteilung). $\epsilon_\alpha := \Gamma_{\alpha,1}$

2.5.3 Die Beta-Verteilung

Wieder Gesucht: W-Keit, dass die $k-$te Lieferung/Schadensfall vor Zeitpunkt c ankommt; allerdings zeitlich begrenzt auf Intervall $(0,1)$.

Definition 2.16 (Euler'sche Betafunktion). $a, b > 0$

$$B(a,b) = \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1} ds$$

Definition 2.17. *W-Raum* $((0,1), \mathcal{B}_{(0,1)})$.

$$\beta_{\mathbf{a},\mathbf{b}} := \mathbb{P}(T_{r:n} \leq c) := \int_0^c \beta_{a,b}(s) ds$$

$$\beta_{a,b}(s) := \frac{1}{B(a,b)} s^{a-1}(1-s)^{b-1}$$

Hier wird durch $B(a,b)$geteilt, (also Normierung, da um Dichtefunktion das Integral drum steht).

2.6 Normalverteilung

Motivation: Projektion der Gleichverteilung auf einer unendlichdimensionalen Kugel mit unendlichem Radius auf die 1. Komponente W-Raum

$$(\Omega_N = \overline{B_{\sqrt{(vN)}}(0)}, B^N_{\Omega_N}, \mathcal{U}_{\Omega_N}).$$

Theorem 2.18 (Normalverteilung als Projektion einer unendlichdim. GLV)**.** *Es gilt*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}_N(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{x^2}{2v}} dx$$

Definition 2.19 (Normalverteilung = Gaußverteilung)**.** *Das W-Maß* $\mathcal{N}_{m,v}$ *auf dem W-Raum* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *mit der Dichtefunktion*

$$\Phi_{m,v}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{\frac{x-m}{2v}}$$

heißt Normalverteilung oder Gaußverteilung mit Erwartungswert m *und Varianz* v.

- $\mathcal{N}_{0,1}$ *Standardnormalverteilung*
- $\Phi_{m,v}$ *heißt Gauß'sche Glockenkurve*

SKIZZENmerkblatt mit allen Verteilungen!

2.7 Zusammenfassung - Kapitel 2

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{mit Zurücklegen} & \text{ohne -, Nr.} & \text{ohne -, Farbe} \\
\text{Gleichverteilung} & (\bar\Omega, \bar{\mathcal F}, \bar{\mathbb P} = \mathcal U_{\bar\Omega}) \arrow[d, "\text{red. Beob.tiefe } X"] & \mathcal U_{\neq} \arrow[d, "Y"] & \\
\text{geordn. Stichprobe} & (\Omega, \mathcal F, \mathbb P = \rho^{\bigotimes n}) \arrow[d, "\text{red.} S"] & (\tilde\Omega, \tilde{\mathcal F}, \tilde{\mathbb P} = \mathcal U_{\tilde\Omega}) \arrow[d, equal, "\text{ident, da je nur 1 NR}"] & \\
\text{ungeordn. Stich-} & (\hat\Omega, \hat{\mathcal F}, \hat{\mathbb P} = \mathcal M_{n,\rho}) & (\tilde\Omega, \tilde{\mathcal F}, \tilde{\mathbb P} = \mathcal U_{\tilde\Omega}) \arrow[r, "T"] & (\hat\Omega, \hat{\mathcal F}, \hat{\mathbb P} = \mathcal H_{n,\vec N})
\end{tikzcd}
$$

Zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaße:

$$
\begin{aligned}
\mathcal U_{\bar\Omega}(A) &:= \frac{|A|}{|\bar\Omega|} \qquad \text{falls diskret} \\
\mathcal U_{\bar\Omega}(A) &:= \frac{\lambda^n(A)}{\lambda^n(\bar\Omega)} \quad \text{falls kontinuierlich} \\
\mathbb P(\{\omega\}) = \rho^{\bigotimes n}(\{\omega\}) &:= \prod_{i=1}^n \rho(\omega_i) = \prod_{i=1}^n \frac{N_{\omega_i}}{N} \\
\hat{\mathbb P}(\{\vec k\}) = \mathcal M_{n,\rho}(\{\vec k\}) &:= \binom{n}{\vec k} \cdot \prod_{a\in E} \rho(a)^{k_a} \\
\hat{\mathbb P}(\{\vec k\}) = \mathcal H_{n,\vec N}(\{\vec k\}) &:= \frac{\prod_{a\in E}\binom{N_a}{k_a}}{\binom{N}{n}}
\end{aligned}
$$

n-faches Produktmaß, Multinomialverteilung, hypergeometrische Verteilung

Stichwörter

Gleichverteilung

- Laplace-Raum
- Bose-Einstein-Verteilung
- Bertrand-sches Paradoxon

Urne mit Zurücklegen

- TODO

Urne ohne Zurücklegen

- TODO

Poissonverteilung

- TODO

Wartezeitverteilung

- TODO

Normalverteilung

3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit

3.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

3.2 mehrstufige Modelle

3.3 statistische Unabhängigkeit

3.4 Existenz unabhängiger ZV, Produktmaße

3.5 (3.7) asymptotische Ereignisse

4 Erwartungswert und Varianz

4.1 Erwartungswert für reellwertige Zufallszahlen

4.1.1 diskreter Fall

4.1.2 allgemeiner Fall