Mitschrift Stochastik - Kapitel 2, Statistische Standardmodelle

Sarah, Julius

25. November 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

2 Stochastische Standardmodelle

2.1 Gleichverteilung

Definition 2.1 (diskrete Gleichverteilung)**.** *Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, A, \mathbb{P})$ *wird als Laplace-Raum bezeichnet.*

$$n := |\Omega|,$$

$$\begin{aligned} \Omega &:= \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}, \\ \mathcal{A} &:= P(\Omega), \\ \mathbb{P}(A) &:= \frac{|A|}{|\Omega|} =: \mathcal{U}_\Omega \end{aligned}$$

Anwendung *wenn diskret und alle* $\omega \in \Omega$ *gleichberechtigt.*

Beispiel: Bose Einstein Verteilung System n unterschiedlicher Teilchen, die sich in N unterschiedlcihen Zellen befinden.
Suche die Anzahl der Teilchen in einer bestimmten Zelle.

Definition 2.2 (stetige Gleichverteilung, GLV in Kontinuum)**.** *Analog:*

$$\begin{aligned} \Omega &:\subseteq R^n, \\ \mathcal{A} &:= \mathcal{B}_\Omega, \\ \rho(x) &:= \frac{1}{\lambda^n(\Omega)}, \\ \mathcal{U}_\Omega(A) &:= \int\limits_A \rho(u) du = \frac{\lambda(A)}{\lambda^n(\Omega)} \end{aligned}$$

Anwendung *wenn* Ω *nicht endlich und alle* $\omega \in \Omega$ *gleichberechtigt.*

2.2 Urnenmodell mit Zurücklegen

2.2.1 geordnete Stichprobe

Definition 2.3 (geordentes Urnenmodell mit Zurücklegen)**.** *Es seien gegeben*

$$\begin{aligned} N &:= \textit{Anzahl Kugeln}, \\ E &:= \textit{Menge der Farben, hier soll } 2 \leq |E| < \infty, \\ a &:= \textit{Farbe } a \in E, \\ F_a &:= \textit{Menge der Nummern der Kugeln mit Farbe } a \in E, \\ N_a &:= |F_a|, \textit{Anzahl der Kugeln der Farbe } a \in E, \\ n &:= \textit{Anzahl der Stichproben (Züge aus der Urne)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega &:= E^n, \\ \mathcal{F} &:= P(\Omega), \\ \mathbb{P} &:= \textit{ gesuchtes Wahrscheinlichkeitsmaß.} \end{aligned}$$

Zur Konstruktion des Maßes nummeriere die Kugeln mit Zahlen aus $\{1, \ldots N\}$ *durch und vergrößere künstlich die Beobachtungstiefe, sodass die bereits definierte diskrete Gleichverteilung verwendet werden kann.*

$$\bar{\Omega} := \{1, \ldots, N\}^n, \quad \bar{\mathcal{F}} := \mathbb{P}(\bar{\Omega}), \quad \bar{\mathbb{P}} := \mathcal{U}_{\bar{\Omega}}.$$

Erhalte somit durch Konstruktion einer Zufallsvariable $X : \bar{\Omega} \to \Omega$ *durch Komponentenweise Betrachtung:*

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) := \bar{\mathbb{P}} \circ X^{-1}(\{\omega\}) = \prod_{i=1}^{n} \rho(\omega_i)$$

mit

$$\rho(\omega_i) := \frac{|N_{\omega_i}|}{N},$$

in Worten Die Wahrscheinlichkeit, dass unter Berücksichtigung der Reihenfolge die Kugeln $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *gezogen werden, ist gegeben durch*

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\textit{Anzahl der Kugeln Mit Farbe } \omega_i}{\textit{Anzahl der Kugeln insgesamt}}.$$

Definition 2.4. *Es sei* ρ *Zähldichte auf* E*. Die* $n-$**fache Produktdichte** *von* ρ *ist definiert als*

$$\rho^{\times n}(\omega) := \prod_{i=1}^{n} \rho(\omega_i).$$

Das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß heißt $n-$**faches Produktmaß** *zu* ρ*.*

2.2.2 ungeordnete Stichprobe

Es ist wieder eine künstliche Vergrößerung der Beobachtungstiefe erforderlich. Definiere für k_a Anzahl der Kugeln mit Farbe a folgenden Wahrscheinlichkeitsraum:

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega} &:= \{\vec{k} = (k_a)_{a\in E} : k_a \in \mathbb{N}_0, \sum_{a\in E} k_a = n\} \\
\hat{\mathcal{F}} &:= P(\Omega) \\
\hat{\mathbb{P}}(\{\omega\}) &:= \binom{n}{\vec{k}} \cdot \prod_{a\in E} \rho(a)^{k_a}
\end{aligned}$$

Definition 2.5 (Multinoumialkoeffizient)**.** *Für* $\vec{k} = (k_a)_{a\in E}$ *definiere*

$$\binom{n}{\vec{k}} \cdot \prod_{a\in E} := \begin{cases} \frac{n!}{\prod\limits_{a\in E} k_a!} & \textit{falls} \sum\limits_{a\in E} k_a = n, \\ 0 & \textit{sonst}. \end{cases}$$

2.2.3 Zusammenfassung

$$\begin{array}{cc}
Gleichverteilung & (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}} = \mathcal{U}_{\bar{\Omega}}) \\
 & \big\downarrow \text{reduktion Beobachtungstiefe } X \\
geordneteSticprobe & (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\
 & \big\downarrow \text{reduktion Beobachtungstiefe } S \\
unegordneteStichprobe & (\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}})
\end{array}$$

Zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaße:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\omega\}) &:= \prod_{i=1}^{n} \rho(\omega_i) \\
\hat{\mathbb{P}}(\{\omega\}) &:= \binom{n}{\vec{k}} \cdot \prod_{a\in E} \rho(a)^{k_a}
\end{aligned}$$

2.3 Urnenmodell ohne Zurücklegen

2.3.1 nummerierte Kugeln

2.3.2 gefärbte Kugeln

2.4 Poisson-Verteilung

2.5 Wartezeitverteilung

2.5.1 negative Binominialverteilung

2.5.2 Gamma-Verteilung

2.5.3 Die Beta-Verteilung

2.6 Normalverteilung

3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit

3.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten