Mitschrift Stochastik - Kapitel 2, Statistische Standardmodelle

Julius Hülsmann

4. Januar 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Math. Beschreibung von Zufallssituationen

Notizen zur WDH Kapitel 1

- Erzeugendensystem der Sigma-Algebra auf $\bar{\mathbb{R}}$
- Quantiltransformation
- Übersichtsdiagramm

§ 1.1.1 Ergebnisraum #1

Ω Ergebnisraum, $\omega \in \Omega$ Ergebnis.

Abbildung 1: Zusammenfassung 1.1.1

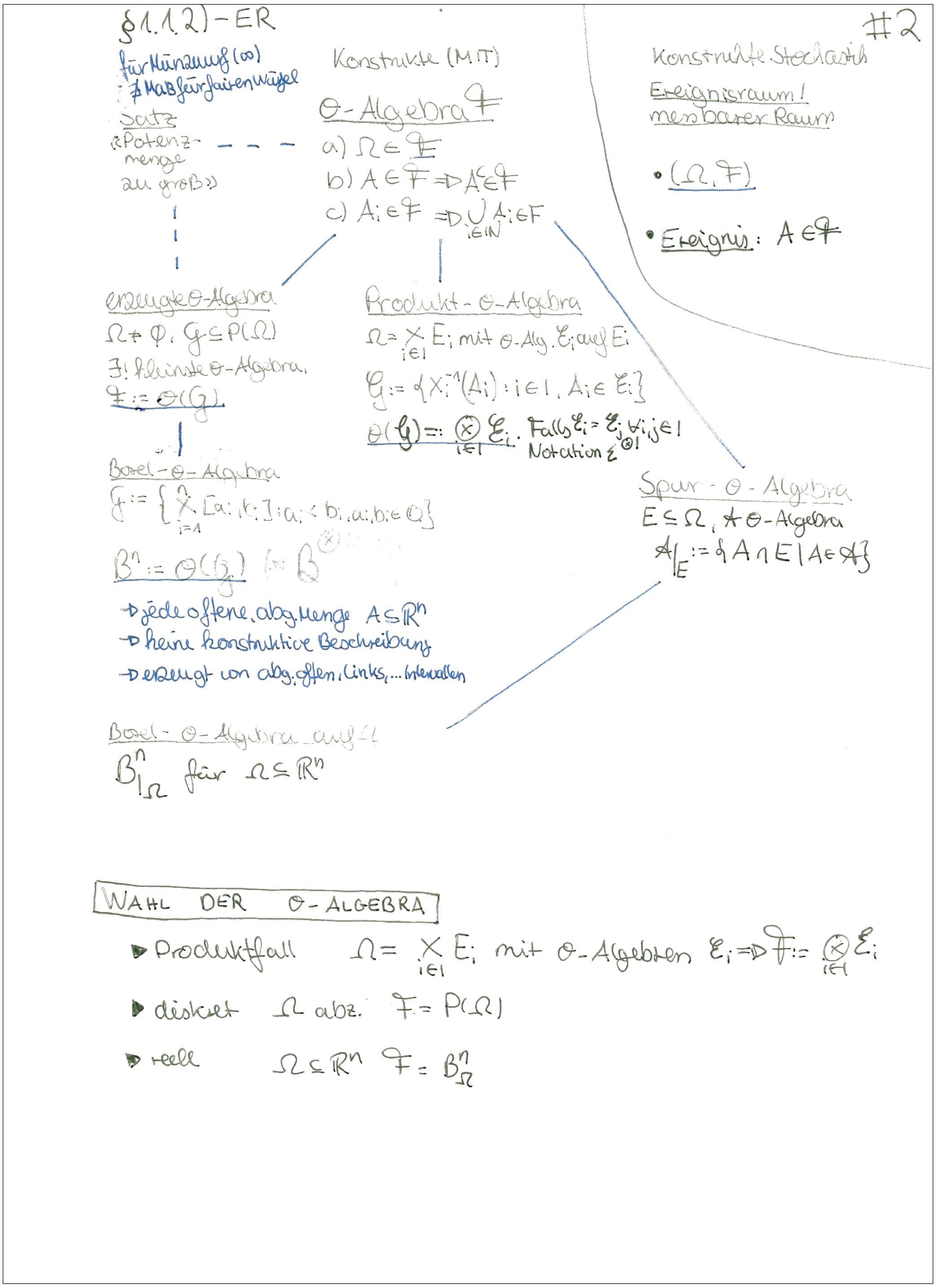

Abbildung 2: Zusammenfassung 1.1.2

§1.1.3 Wahrscheinlichkeitsmaß

#3

W-Maß/Verteilung

$\mathbb{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$

(N) $\mathbb{P}(\Omega) \overset{!}{=} 1$

(A) $\mathbb{P}(\dot{\bigcup}_{i \in I \text{ abz.}} A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$

W-Raum

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

§1.2 Eigenschaft + Konstrukt W-Maß

interessante Eig:

- σ-Subadditivität $\mathbb{P}(\bigcup_{i \in I} A_i) \leq \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$ (nicht dlg I abz.b)
- σ-stetigkeit $A_n \uparrow A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_n \Rightarrow \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n \to \infty} \mathbb{P}(A)$

  oder $A_n \downarrow A = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_n$

Eindeutigkeitssatz

$\mathbb{P}$ eind. best durch $\mathbb{P}|_{\mathcal{G}}$ auf $\cap$-stabil Erzeuger $\mathcal{G}$

Dynkin-System

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit

(a) $\Omega \in \mathcal{D}$

(b) $A \subseteq B$, $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}$

(c) $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ disj paarw., $\in \mathcal{D} \Rightarrow \dot{\bigcup}_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$

Schnittstabiles Dynkin-Sys $\mathcal{G}$

$\Rightarrow d(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{G})$

Abbildung 3: Zusammenfassung 1.1.3, 1.2

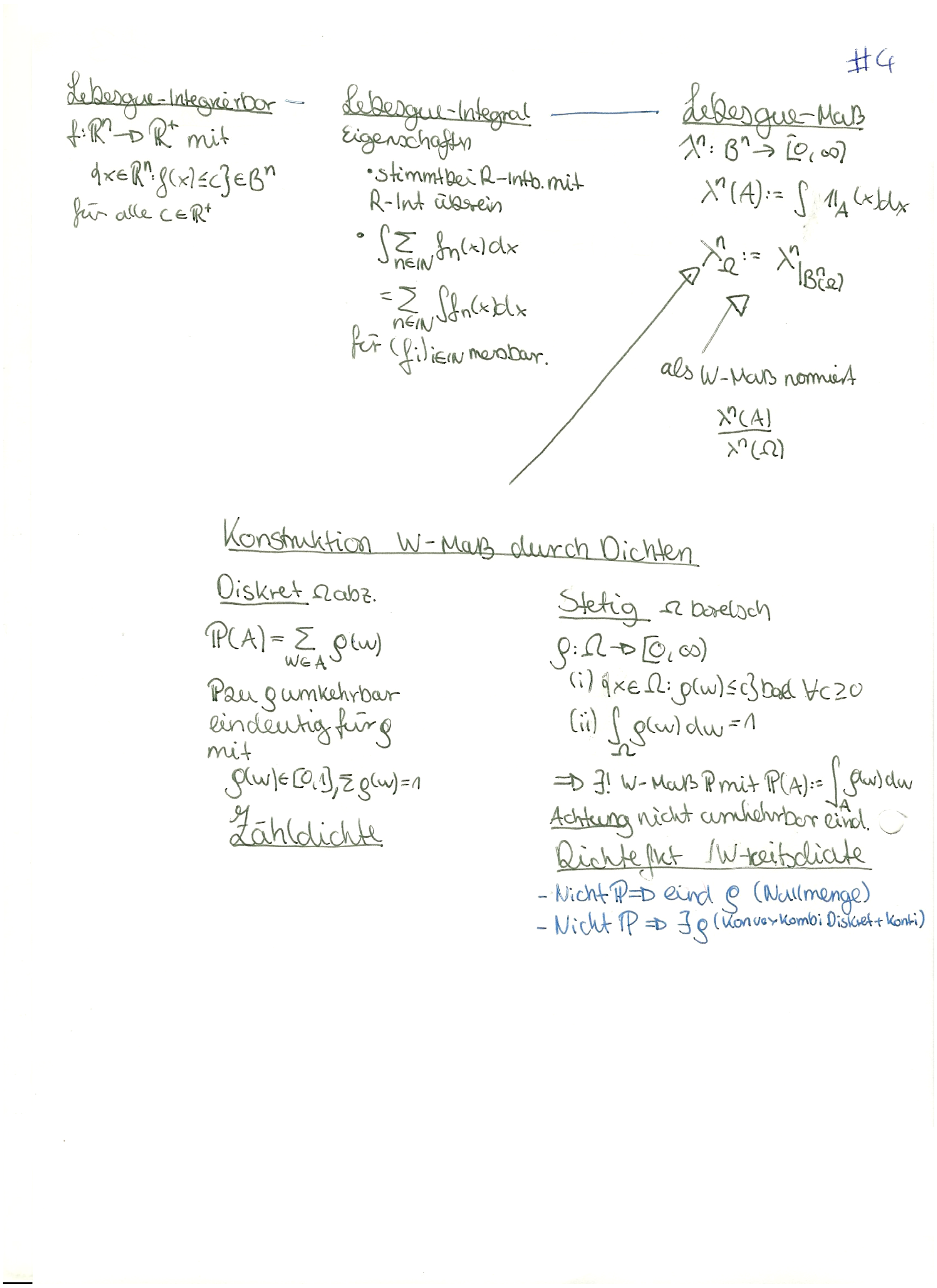

Abbildung 4: Zusammenfassung 1.2 Teil 2

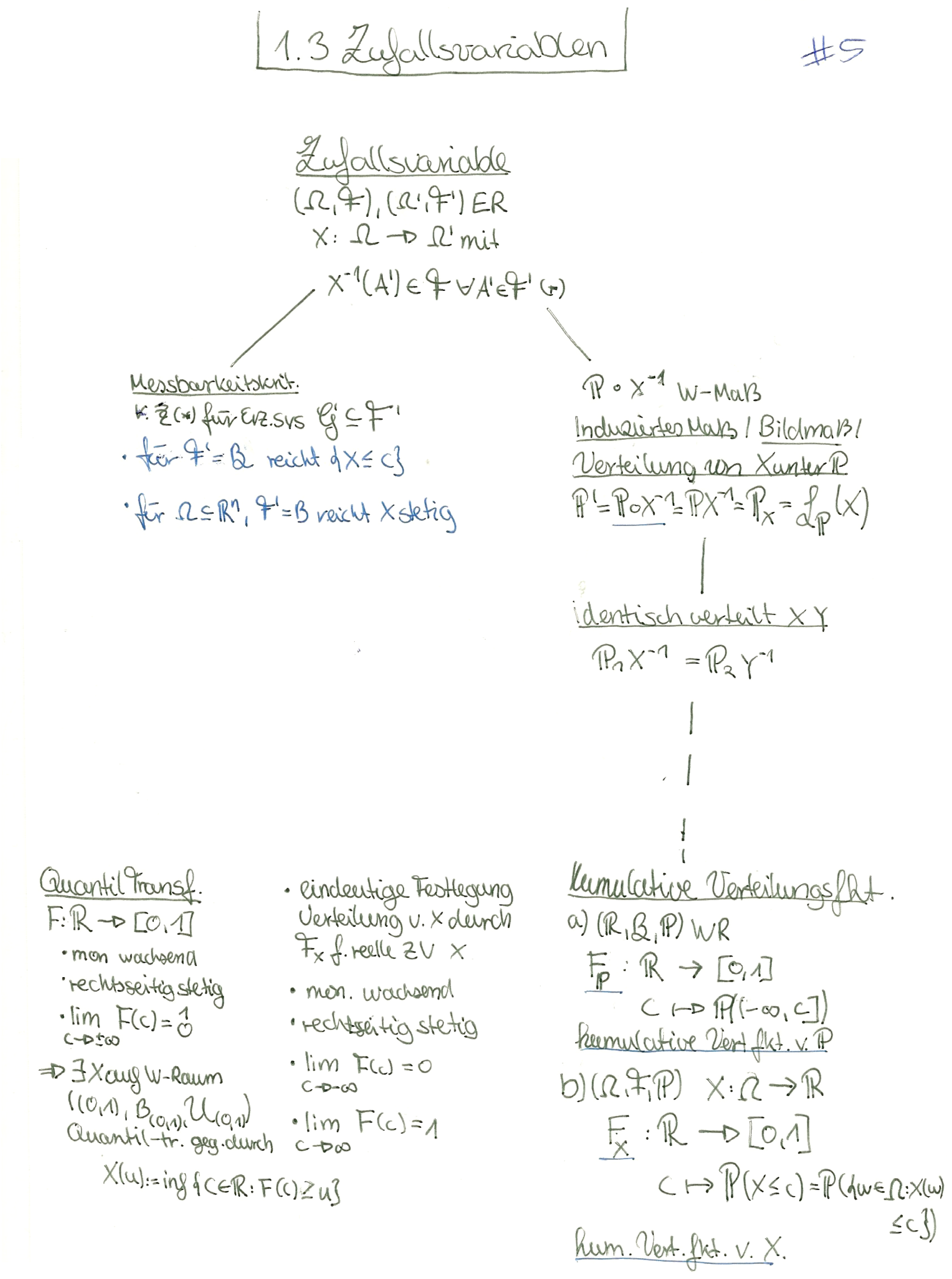

Abbildung 5: Zusammenfassung 1.3

#6

(kumulative)
Verteilungsfkt. $F_{\mathbb{P}}(c) = \mathbb{P}((-\infty, c])$

Für Abb von bel. W-Raum in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ $\rightarrow$ $F_X(c) = \mathbb{P}(X \leq c)$

$F_{\mathbb{P}\circ X^{-1}} = \mathbb{P}\circ X^{-1}((-\infty, c]) = \mathbb{P}(X \leq c) = F_X$

Verteilungsdichte $\leftarrow$ **Dichtefkt**

spezielle Dichtefkt. der Verteilung $\mathbb{P}\circ X^{-1}$

$$F_X(c) = \int_{-\infty}^{c} \rho(x)\,dx \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{c} F_X \\ \shortparallel \\ F_{\mathbb{P}\circ X^{-1}} \end{array}$$

Dichtefkt:

$\mathbb{P}(A) := \int_A \rho(w)\,dw$ bzw.

$\mathbb{P}(A) = \sum_{w \in A} \rho(w)$

Verteilung
W-Maß $\mathbb{P}$

Abbildung 6: Zusammenfassung 1.3 Teil 2

2 Stochastische Standardmodelle

2.1 Gleichverteilung

Definition 2.1 (diskrete Gleichverteilung)**.** *Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, A, \mathbb{P})$ *wird als Laplace-Raum bezeichnet.*

$$n := |\Omega|, \qquad \rho(x) = \frac{1}{|\Omega|}$$
$$\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}, \quad \mathcal{A} := P(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} =: \mathcal{U}_\Omega(A)$$

Anwendung *wenn diskret und alle* $\omega \in \Omega$ *gleichberechtigt.*

Stichwörter

- Beispiel: Bose Einstein Verteilung System n unterschiedlicher Teilchen, die sich in N unterschiedlcihen Zellen befinden. Suche die Anzahl der Teilchen in einer bestimmten Zelle.

Definition 2.2 (stetige Gleichverteilung, GLV in Kontinuum)**.** *Analog:*

$$\rho(x) := \frac{1}{\lambda^n(\Omega)},$$
$$\Omega :\subseteq R^n, \quad \mathcal{A} := \mathcal{B}^n_\Omega, \quad \mathcal{U}_\Omega(A) := \int\limits_A \rho(u)du = \frac{\lambda^n(A)}{\lambda^n(\Omega)}$$

für $\lambda^n(\Omega) < \infty$*.*
Anwendung *wenn* Ω *nicht endlich und alle* $\omega \in \Omega$ *gleichberechtigt.*

Stichwörter

- Beispiel: Roulette (hier wird die Richtung betrachtet, nicht die einzelnen Felder.)

- Anmerkung: Bertrand'sches Paradoxon

2.2 Urnenmodell mit Zurücklegen

Für die folgenden Abschnitte:

$$\begin{aligned}
N &:= \text{Anzahl Kugeln},\\
E &:= \text{Menge der Farben, hier soll } 2 \leq |E| < \infty,\\
a &:= \text{Farbe } a \in E,\\
F_a &:= \text{Menge der Nummern der Kugeln mit Farbe } a \in E,\\
N_a &:= |F_a|, \text{Anzahl der Kugeln der Farbe } a \in E,\\
n &:= \text{Anzahl der Stichproben (Züge aus der Urne).}
\end{aligned}$$

2.2.1 geordnete Stichprobe

Definition 2.3 (geordentes Urnenmodell mit Zurücklegen)**.** *Es seien gegeben*

$$\begin{aligned}
\Omega &:= E^n,\\
\mathcal{F} &:= P(\Omega),\\
\mathbb{P} &:= \textit{ gesuchtes Wahrscheinlichkeitsmaß.}
\end{aligned}$$

Zur Konstruktion des Maßes nummeriere die Kugeln mit Zahlen aus $\{1, \dots N\}$ *durch und vergrößere künstlich die Beobachtungstiefe, sodass die bereits definierte diskrete Gleichverteilung verwendet werden kann.*

$$\bar{\Omega} := \{1, \dots, N\}^n, \quad \bar{\mathcal{F}} := \mathbb{P}(\bar{\Omega}), \quad \bar{\mathbb{P}} := \mathcal{U}_{\bar{\Omega}}.$$

Erhalte somit durch Konstruktion einer Zufallsvariable $X : \bar{\Omega} \to \Omega$ *durch Komponentenweise Betrachtung:*

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) := \bar{\mathbb{P}} \circ X^{-1}(\{\omega\}) = \prod_{i=1}^{n} \rho(\omega_i)$$

mit

$$\rho(\omega_i) := \frac{|N_{\omega_i}|}{N},$$

in Worten Die Wahrscheinlichkeit, dass unter Berücksichtigung der Reihenfolge die Kugeln $\omega_1, \dots, \omega_n$ *gezogen werden, ist gegeben durch*

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\textit{Anzahl der Kugeln Mit Farbe } \omega_i}{\textit{Anzahl der Kugeln insgesamt}}.$$

Definition 2.4. *Es sei ρ Zähldichte auf E. Die $n-$***fache Produktdichte** *von ρ ist definiert als*

$$\rho^{\bigotimes n}(\omega) := \prod_{i=1}^{n} \rho(\omega_i).$$

*Das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß heißt $n-$***faches Produktmaß** *zu ρ.*

2.2.2 ungeordnete Stichprobe

Es ist wieder eine künstliche Vergrößerung der Beobachtungstiefe erforderlich. Definiere für k_a Anzahl der Kugeln mit Farbe a folgenden Wahrscheinlichkeitsraum:

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega} &:= \{\vec{k} = (k_a)_{a\in E} : k_a \in \mathbb{N}_0, \sum_{a\in E} k_a = n\} \\
\hat{\mathcal{F}} &:= P(\Omega) \\
\hat{\mathbb{P}}(\{\omega\}) &:= \binom{n}{\vec{k}} \cdot \prod_{a\in E} \rho(a)^{k_a}
\end{aligned}$$

Binomialkoeffizient, Multinomialkoeffizient, Binomialverteilung, Multinomialverteilung

Definition 2.5 (Multinomialkoeffizient)**.** *Für $\vec{k} = (k_a)_{a\in E}$ definiere*

$$\binom{n}{\vec{k}} := \begin{cases} \frac{n!}{\prod_{a\in E} k_a!} & \text{falls } \sum_{a\in E} k_a = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definition 2.6 (Multinomialverteilung)**.**

$$\mathcal{M}_{n,\rho}(\{\vec{k}\}) := \hat{\mathbb{P}}(\vec{k})$$

2.3 Urnenmodell ohne Zurücklegen

2.3.1 nummerierte Kugeln

identisch mit der uniformen Verteilung

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega} &:= \{\omega \subseteq \{1,\ldots,N\} \ : \ |\omega| = n\} \\
\tilde{\mathcal{F}} &:= P(\tilde{\Omega}) \\
\tilde{\mathbb{P}} &:= \mathcal{U}_{\tilde{\Omega}}
\end{aligned}$$

2.3.2 gefärbte Kugeln

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega} &:= \{\vec{k} = (k_a)_{a\in E} \in N_0^{|E|} : \sum_{a\in E} k_a = n\} \\
\hat{\mathcal{F}} &:= P(\hat{\Omega}) \\
\hat{\mathbb{P}}(\vec{k}) &:= \mathcal{H}_{n,\vec{N}}(\vec{k}) = \frac{\prod_{a\in E}\binom{N_a}{k_a}}{\binom{N}{n}}
\end{aligned}$$

2.4 Poisson-Verteilung

2.5 Wartezeitverteilung

2.5.1 negative Binominialverteilung

2.5.2 Gamma-Verteilung

2.5.3 Die Beta-Verteilung

2.6 Normalverteilung

2.7 Zusammenfassung - Kapitel 2

	mit Zurücklegen	ohne -, Nr.	ohne -, Farbe
Gleichverteilung	$(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}} = \mathcal{U}_{\bar{\Omega}})$	$\mathcal{U}_{\neq}$	
	$\downarrow$ red. Beob.tiefe X	$\downarrow Y$	
geordn. Stichprobe	$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P} = \rho^{\bigotimes n})$	$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}} = \mathcal{U}_{\tilde{\Omega}})$	
	$\downarrow$ red.S	$\Vert$ ident, da je nur 1 NR	
ungeordn. Stich-	$(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}} = \mathcal{M}_{n,\rho})$	$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}} = \mathcal{U}_{\tilde{\Omega}}) \xrightarrow{T}$	$(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbb{P}} = \mathcal{H}_{n,\vec{N}})$

Zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaße:

$$\mathcal{U}_{\bar{\Omega}}(A) := \frac{|A|}{|\bar{\Omega}|} \quad \text{falls diskret}$$

$$\mathcal{U}_{\bar{\Omega}}(A) := \frac{\lambda^n(A)}{\lambda^n(\bar{\Omega})} \quad \text{falls kontinuierlich}$$

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \rho^{\bigotimes n}(\{\omega\}) := \prod_{i=1}^{n} \rho(\omega_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{N_{\omega_i}}{N}$$

$$\hat{\mathbb{P}}(\{\vec{k}\}) = \mathcal{M}_{n,\rho}(\{\vec{k}\}) := \binom{n}{\vec{k}} \cdot \prod_{a \in E} \rho(a)^{k_a}$$

$$\hat{\mathbb{P}}(\{\vec{k}\}) = \mathcal{H}_{n,\vec{N}}(\{\vec{k}\}) := \frac{\prod_{a \in E} \binom{N_a}{k_a}}{\binom{N}{n}}$$

n-faches Produktmaß, Multinomialverteilung, hypergeometrische Verteilung

Stichwörter

Gleichverteilung

- Laplace-Raum
- Bose-Einstein-Verteilung
- Bertrand-sches Paradoxon

Urne mit Zurücklegen

- TODO

Urne ohne Zurücklegen

- TODO

Poissonverteilung

- TODO

Wartezeitverteilung

- TODO

Normalverteilung

3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit

3.1 Bedingte Wahrscheinlichkeiten