Oberschule
RONZELENSTRASSE
Die Sportbetonte Schule

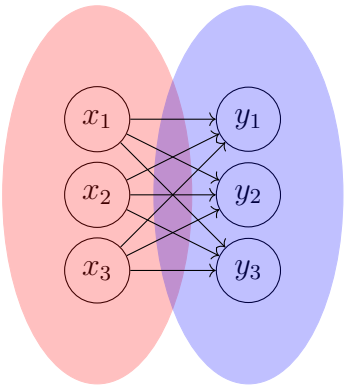
Oberschule an der Ronzelenstraße
Mathematik und *Informatik*

Projektarbeit im Rahmen der Qualifikationsphase

Zeitliche Optimierung der Klausurenplanung an Schulen mithilfe von Graphentheorie — eine Web-App-Entwicklung

2024/2025

Julius Backes | Tom Kurzke



Betreuende & Prüfende Lehrer:

Hr. V. Wolff (Mathematik LK) & Hr. O. Huras (Informatik GK)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Erstellung eines ausbalancierten Klausurenplans stellt eine große Herausforderung dar, da verschiedene Anforderungen berücksichtigt werden müssen. In diesem Kapitel gehen wir auf die Problemstellung, die Motivation für die Arbeit und die Ziele des Projektes ein.

1.1 Problemstellung

Die Planung der Klausuren in der Oberstufe ist aufgrund der Vielzahl an Fächern und Kursen äußerst komplex und zeitaufwendig. Dies führt häufig zu einer unausgewogenen Verteilung der Klausuren. Der Klausurenplan muss dabei bestimmten Regeln folgen: So darf ein Schüler nicht mehr als eine Klausur pro Tag und maximal drei Klausuren pro Woche schreiben. Idealerweise sollte ein Schüler sogar weniger als drei Klausuren pro Woche schreiben.

1.2 Motivation

In den letzten Jahren haben wir selbst während unserer Zeit in der Oberstufe der Oberschule an der Ronzelenstraße erfahren, wie schwierig es ist, einen ausgewogenen Klausurenplan zu erstellen. Die Erstellung ist für die zuständigen Lehrkräfte mit einem erheblichem Zeitaufwand verbunden. Häufig wurde der Klausurenplan erst eine Woche vor Beginn der Klausurenphase veröffentlicht. Für uns Schüler war dies sehr frustrierend, da dies bedeutete, dass man erst spät mit Vorbereitung auf die Klausuren beginnen konnte.

1.3 Ziel der Arbeit

Um in Zukunft die o. g. Probleme zu vermeiden und den Prozess der Klausurplanung zu optimieren, entwickeln wir im Rahmen dieser Projektarbeit eine Web-App, die folgende Anforderungen erfüllt: Aus einer Excel-Datei, die die Kurse und Schüler beinhaltet und vom Nutzer hochgeladen wird, soll ein Klausurenplan für die eingegebenen Kurse erstellt werden. Zudem sollen die folgenden Anforderungen an den Klausurenplan sichergestellt werden:

1. Kurse, in denen zwei Klausuren pro Halbjahr vorgesehen sind, sollen entsprechend umgesetzt werden.

2. Ein Schüler darf maximal eine Klausur pro Tag schreiben und keine Klausuren zur gleichen Zeit haben.

3. Ein Schüler darf maximal drei Klausuren pro Woche schreiben.

2 Grundlagen der Graphentheorie

Im vorliegenden Kapitel werden grundlegende Konzepte der Graphentheorie eingeführt. Diese sind essenziell, um ein tiefes Verständnis von der Funktionsweise der finalen Anwendung zu entwickeln.

Die Graphentheorie stellt einen Teilbereich der Mathematik dar, der sich mit der Untersuchung von Graphen befasst. Die Graphentheorie stellt eine wesentliche Grundlage zur Erstellung und Analyse mathematischer Modelle dar und findet darüber hinaus Anwendung bei der Lösung von Optimierungsproblemen.

2.1 Grundbegriffe

Ein Graph aus der Graphentheorie unterscheidet sich signifikant von einem "typischen"Graphen, wie man aus der Schulmathematik und aus der Analysis kennt.

Ein graphentheoretischer Graph G besteht aus einer Menge von Knoten (engl. vertices), die durch Kanten (engl. edges) miteinander verbunden sein können. Diese Knoten können gar nicht oder mehrfach mit anderen Knoten verbunden sein. Wenn ein Knoten mit sich selbst verbunden ist, spricht man von einer Schleife.

Ein Graph G wird formal als ein Paar $G = (V(G), E(G))$ definiert, wobei $V(G)$ die Menge der Knoten darstellt, beispielsweise $\{1, 8, 7\}$ oder $\{A, B, C\}$, und E_G die Menge der Kanten ist, also Verbindungen zwischen jeweils zwei Knoten. Für die Kantenmenge $E(G)$ gilt:

$$E(G) = \{\{v_x, v_y\} : \ v_x, v_y \in V(G) \land v_x \neq v_y\}$$

Die Einschränkung $v_x \neq v_y$ ist optional. Dadurch wird festgelegt das es keine Schleifen in dem Graphen geben darf (Diestel, 2017, S. 2). In dieser Arbeit werden Schleifen nicht genutzt. Zwei Knoten a und b nennt man benachbart bzw. adjazent (engl. adjacent) wenn $\{a, b\} \in E(G)$ gilt. Um die Darstellung zu vereinfachen, definieren wir $E(G) = \{\{A, B\}, \{A, C\}\}$ als $E_G = \{AB, AC\}$ (Diestel, 2017, S. 3).

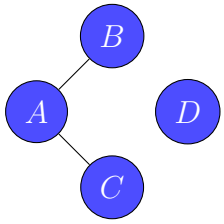


Abbildung 1: Ein einfacher ungerichteter Graph G
mit $V(G) = \{A, B, C, D\}$ und $E(G) = \{AB, AC\}$

Die Anzahl der Kanten an einem Knoten v wird durch den Grad des Knotens beschrieben. Ein Knoten, der mit n-vielen Knoten verbunden ist, hat den Grad n. Es gilt

$$\deg(v) = |E(v)|$$

Die Knoten werden in schwach verzweigte und stark verzweigte Knoten unterteilt. Ein Knoten mit z.B. acht verbundenen Knoten ist stärker verzweigt als ein Knoten mit zwei

verbundenen Knoten (Diestel, 2017, S. 5).

Graphen lassen sich in zwei Arten unterscheiden: gerichtete Graphen und ungerichtete Graphen. Ein ungerichteter Graph zeichnet sich dadurch aus, dass die Kanten zwischen den Knoten keine Richtung aufweisen (vgl. Abb. 1). Im Unterschied dazu besteht die Kantemenge $E(G)$ eines gerichteten Graphen aus einer Menge von geordneten Paaren anstelle einer Menge von Mengen mit Knoten. Sie wird mit

$$E(G) = \{(v_x, v_y) \colon v_x, v_y \in V(G) \wedge v_x \neq v_y\}$$

definiert. Die Kanten eines gerichteten Graphen werden i. d. R. mit einem Pfeil dargestellt (Diestel, 2017, S. 30).

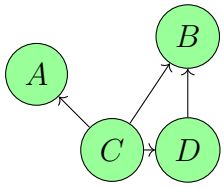


Abbildung 2: Ein einfacher gerichteter Graph
mit $V(G) = \{A, B, C, D\}$ und $E(G) = \{CA, CB, CD, DB\}$

Sei $N_G(v)$ die Menge aller adjazenten Knoten eines Knoten v in einem Graphen G, auch Nachbarn (eng. neighbours) von v genannt. (Diestel, 2017, S. 5)

$$N_G(v) \subseteq V(G)$$

$$N_G(v) = \{w \in V(G) \colon \{v, w\} \subseteq E(G)\}$$

2.2 Graphenfärbung

Die Knotenfärbung, auch als Graph Coloring bezeichnet, stellt eine Methode zur Färbung von Knoten in einem Graphen G dar. Es wird demnach gefordert, dass keine zwei adjazenten Knoten die gleiche Farbe aufweisen. Die Farben werden i. d. R. als Buchstaben oder Zahlen dargestellt, wobei sie Gruppen oder Zuständen zugeordnet werden. Das Ziel der Färbung besteht in der Bestimmung der kleinstmöglichen Anzahl an Farben. Diese Anzahl wird als chromatische Zahl des Graphen bezeichnet.

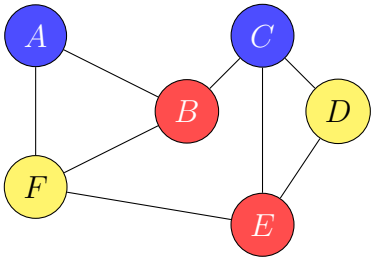
Des Weiteren findet die Färbung Anwendung in der Stundenplanerstellung sowie der Färbung von Karten, beispielsweise dem sogenannten Vier-Farben-Satz. Ein weiteres Anwendungsgebiet stellt die Klausurenplanerstellung dar, wie sie auch in dieser Arbeit erfolgt.

Mathematisch wird das Graph Coloring als Abbildung c von der Menge $V(G)$ als Knoten auf eine Menge $C(G)$ als Farben für einen Graphen G definiert (Diestel, 2017, S. 121).

$$c(v) : V(G) \to C(G)$$

$$\forall \{v_x, v_y\} \in E(G) \colon \; c(v_x) \overset{!}{\neq} c(v_y) \tag{1}$$

Mit (1) wird gewährleistet, das zwei adjazente Knoten nicht mit derselben Farbe gefärbt werden.



$$V(G) = \{A, B, C, D, E, F\}$$
$$E(G) = \{AB, BC, CD, CE, DE, EF, FA, FB\}$$
$$C = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$$

Abbildung 3: Gefärbter Graph G

Ein wichtiges Konzept in der Graphenfärbung ist der **Sättigungsgrad** (eng. degree of saturation). Für einen gegebenen Knoten v beschreibt der Sättigungsgrad $\text{sat}(v)$ die Anzahl der verschiedenen Farben, die in der Menge der Nachbarn vorkommen. Formal gilt: (Lewis, 2021, S. 39)

$$\text{sat}(v) = |\{C_G(w) \colon w \in N_G(v) \;\wedge\; w \notin U(G)\}|$$

wobei $C_G(w)$ die Farbe des Knotens w angibt und $U(G)$ die Menge der ungefärbten Knoten. Für $U(G)$ gilt:

$$U(G) \coloneqq \{v \in V(G) \colon \; C_G(v) = \varnothing\}$$

Die Funktionen zur Bestimmung des maximalen Sättigungsgrads und des maximalen Knotengrads können wie folgt definiert werden:

$$\max \text{sat}(v) = \max(\{\text{sat}(v) \colon \; v \in V(G) \setminus U(G)\})$$
$$\max \deg(v) = \max(\{\deg(v) \colon \; v \in V(G)\})$$

3 Klausurenplanung als Optimierungsproblem

3.1 Modellierung

3.2 Zielsetzungen

4 Entwicklung der Web-Applikation

4.1 Anforderungen und Spezifikationen

4.1.1 Funktionale Anforderungen

4.1.2 Nicht-funktionale Anforderungen

4.2 Systemarchitektur

4.2.1 Frontend-Design

4.2.2 Backend-Design

4.2.3 Technologie-Stack

4.3 Implementierung

4.3.1 Algorithmische Umsetzung

4.3.2 Benutzeroberfläche

5 Mathematische Analyse der Optimierung

5.1 Bewertung der Lösungsqualität

5.2 Effizienz und Komplexität

6 Evaluation und Tests

7 Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

7.2 Ausblick

8 Literaturverzeichnis

Literatur

Diestel, R. (2017, Februar). *Graphentheorie*. Springer-Verlag, Heidelberg.
Lewis, R. (2021). *Guide to graph colouring*. Springer.